

Deeltjes en velden

J.W. van Holten

NIKHEF
Amsterdam NL

1. Wet van Avogadro

De druk en temperatuur van ideale gassen hangen samen volgens de gaswet

$$\frac{pV}{T} = Rn, \quad (1)$$

met n het aantal mol deeltjes en R een *universele* constante. Hieruit volgt, dat bij gelijke druk en temperatuur een liter gas altijd hetzelfde aantal deeltjes bevat.

Het aantal deeltjes per mol is

$$N_A = 6.022 \times 10^{23}, \quad (2)$$

het getal van Avogadro; in n mol zitten dus $N = nN_A$ deeltjes. We kunnen de gaswet dan ook schrijven als

$$\frac{pV}{T} = kN, \quad (3)$$

met $k = R/N_A$ de constante van Boltzmann.

2. Atoommassa's

De atomaire massa eenheid (a.m.u.) is per definitie het 12e deel van de massa van een C^{12} atoom. Aangezien de massa van een mol C^{12} atomen $12 \text{ g} = 0.012 \text{ kg}$ bedraagt, is

$$1 \text{ a.m.u.} = \frac{0.001 \text{ kg}}{N_A} = 1.661 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad (4)$$

Binnen deze nauwkeurigheid is de massa van het waterstofatoom

$$m_H = 1.008 \text{ a.m.u.} = 1.674 \times 10^{-27} \text{ kg}. \quad (5)$$

Uit metingen van e/m_e van elektronen, en een onafhankelijke bepaling van e volgt, dat

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad m_e = 0.911 \times 10^{-30} \text{ kg}. \quad (6)$$

De massa van een waterstofkern (proton) is dan

$$m_p = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1836 m_e. \quad (7)$$

In relativistische eenheden

$$m_p c^2 = 0.938 \text{ GeV}, \quad m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}. \quad (8)$$

De traditionele manier om N_A te bepalen, is uit onafhankelijke metingen van de gasconstante R (gassen, osmotische oplossingen), en Boltzmann's constante k (uit de spectrale verdeling van de straling van een zwart lichaam (Planck), of uit diffusie-verschijnselen (Einstein)).

3. Het Bohr atoom

Een schatting voor de afmetingen van atomen kan worden verkregen uit de theorie van het waterstofatoom. Daarvoor is niet meer nodig dan het Bohr model, dat via het correspondentieprincipe de klassieke en quantummechanica met elkaar in verband brengt.

De spectraallijnen van het waterstofatoom vormen reeksen, waarvan de bekendste de Balmerreeks is; de frequenties en golflengte in vacuüm van deze lijnen worden gegeven door

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = cR_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right), \quad (9)$$

waarin $n \geq 1$ een geheel getal is, en R_H de Rydbergconstante:

$$R_H = 1.097 \times 10^{-2} \text{ nm}^{-1}. \quad (10)$$

Bohr contrueerde een verband tussen deze frequenties en de energie die een elektron afgeeft of opneemt wanneer het van baan verandert. In zijn model is de elektron-energie in de n^e baan

$$E_n = -\frac{hcR_H}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

en dus

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = h\nu_n, \quad (12)$$

met ν_n gegeven door vgl. (9).

Beschouw een elektron in een Coulombpotentialaal. Klassiek is het elektron in een Keplerbaan, maar we beschouwen hier alleen cirkelbanen met straal r_n . De potentiële energie in deze baan is

$$V_n = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{\alpha\hbar c}{r_n}, \quad (13)$$

waarin $\hbar = h/2\pi$, terwijl α een dimensieloze grootheid is, de *fijnstructuurconstante*, gedefiniëerd door

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}. \quad (14)$$

De radiële versnelling wordt gegeven door

$$\frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_n^2}{c^2} = \frac{\alpha\hbar}{m_e c} \frac{1}{r_n}. \quad (15)$$

We kunnen nu ook de kinetische energie berekenen:

$$T_n = \frac{1}{2} m_e v_n^2 = \frac{\alpha\hbar c}{2r_n}, \quad (16)$$

zodat de totale energie gegeven wordt door

$$E_n = T_n + V_n = -\frac{\alpha\hbar c}{2r_n}. \quad (17)$$

Uit vergelijking van deze uitdrukking met (11) krijgen we

$$r_n = a_0 n^2, \quad a_0 = \frac{\alpha}{4\pi R_H}. \quad (18)$$

Dit betekent een expliciete quantisatie van de elektronbanen. De minimale baan heeft de afmeting

$$r_1 = a_0 = \frac{\alpha}{4\pi R_H} = 0.053 \text{ nm}. \quad (19)$$

Het is zelfs mogelijk in dit model de Rydbergconstante evalueren door de frequentie ν_n in de limiet $n \rightarrow \infty$ gelijk te stellen aan de omloopfrequentie van de baan:

$$\nu_n \approx \frac{2cR_H}{n^3} = \frac{v_n}{2\pi r_n} = \frac{2c}{\alpha n^3} \sqrt{\frac{2h}{m_e c}} R_H^{3/2}, \quad (20)$$

waaruit volgt dat

$$R_H = \frac{\alpha^2 m_e c}{2h}. \quad (21)$$

4. Thomson verstrooiing

Als elektromagnetische straling (licht) valt op een geladen deeltje, zal het deeltje een oscillerende beweging gaan uitvoeren, waarmee het energie uit de straling opneemt. De bewegende lading zal vervolgens zelf weer straling uitzenden, en daarmee energie verliezen. Netto wordt een deel van de inkomende straling door de lading verstrooid; zie fig. 4.

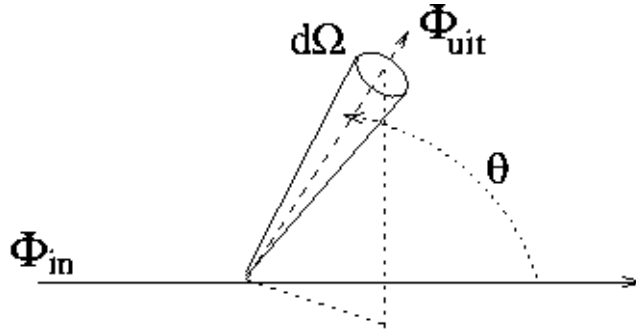


Figure 1: Thomson verstrooiing

Thomson berekende als eerste de hoeveelheid verstrooide straling als functie van lading en massa van het deeltje. Deze hoeveelheid wordt uitgedrukt in termen van een *werkzame doorsnede*; deze is als volgt gedefiniëerd. Zij de intensiteit (energie per tijd en per oppervlakte eenheid) van de invallende lichtbundel Φ_{in} . De intensiteit van de straling verstrooid in de richting (θ, φ) is $\Phi_{uit}(\theta, \varphi)$. De hoeveelheid straling die per tijdseenheid door een oppervlak dA in de richting (θ, φ) gaat is dan

$\Phi_{uit}(\theta, \varphi) dA$. Deze hoeveelheid is evenredig met de intensiteit van de inkomende straling; we kunnen daarom schrijven

$$\Phi_{uit}(\theta, \varphi) dA = \Phi_{in} d\sigma(\theta, \varphi). \quad (22)$$

De grootheid $d\sigma(\theta, \varphi)$ bepaalt hoeveel van de inkomende straling wordt verstrooid in de richting (θ, φ) ; het is een grootheid met de dimensie van oppervlak, en kan worden opgevat als het oppervlakteëlement waardoor evenveel straling binnenkomt als er door dA uitgaat.

Zij dA een stukje boloppervlak op afstand R van het deeltje; dan is

$$dA = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \equiv R^2 d\Omega, \quad (23)$$

met $d\Omega$ de ruimtehoek ingesloten door (θ, φ) en $(\theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$; we kunnen $d\Omega$ representeren door het oppervlak op de eenheidsbol binnen deze ruimtehoek; namelijk, als $R = 1$, dan is $dA = d\Omega$. Combinatie van (22) en (23) geeft

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2 \Phi_{uit}(\theta, \varphi)}{\Phi_{in}}. \quad (24)$$

De grootheid $d\sigma/d\Omega$ heet de *differentiële werkzame doorsnede*. Voor de differentiële werkzame doorsnede voor strooiing van straling aan een vrije lading vond Thomson

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \theta), \quad (25)$$

waarin r_e de klassieke elektronstraal is:

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2.817 \times 10^{-15} \text{ m}. \quad (26)$$

De *totale* hoeveelheid verstrooide straling per vrije lading en per eenheid inkomende flux is dan

$$\begin{aligned} \sigma_T &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{r_e^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta (1 + \cos^2 \theta) \\ &= \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 0.665 \times 10^{-28} \text{ m}^2. \end{aligned} \quad (27)$$

De karakteristieke waarde van deze werkzame doorsnede wordt in de subatomaire fysica vaak als referentie gebruikt; men meet doorsneden dan in de grootheid *barn*:

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2. \quad (28)$$

Uit vgl. (25) en (26) zien we, dat de werkzame doorsnede omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de massa van het geladen deeltje. De werkzame doorsnede van

elektronen is dus veel groter is dan van protonen. Bij de verstrooiing van straling aan een atoom komt veruit de grootste bijdrage daarom van de elektronen. Mits de energie van de fotonen veel groter is dan de bindingsenergie van de elektronen, kunnen we de Thomsonformule voor de werkzame doorsnede gebruiken.

Beschouw nu een gas met een dichtheid van N atomen per volumeëenheid, en n elektronen per atoom. Dan zijn er dus Nn elektronen per volumeëenheid. Laat een bundel straling met intensiteit Φ door het gas lopen. Per lengteëenheid dl wordt in totaal een stralingsflux $d\Phi$ uit de bundel verstrooid, gegeven door

$$d\Phi = -Nn \Phi \sigma_T dl. \quad (29)$$

Thomson vergeleek dit met metingen van de verstrooiing van Röntgenstraling in gassen, gedaan door Barkla, en concludeerde dat het aantal elektronen in een (neutraal) atoom van dezelfde orde van grootte is als het atoomnummer; i.h.b. vond hij dat een waterstofatoom 1 elektron bevat.

5. Werkzame doorsnede

Het begrip werkzame doorsnede wordt niet alleen gebruikt bij de verstrooiing van straling door een lading, maar ook bij de verstrooiing van deeltjes via onderlinge wisselwerkingen (b.v. via een potentiaalveld). Beschouw een bundel deeltjes die op een trefcentrum vallen, waar zij in verschillende richtingen worden verstrooid. Zij I_0 het aantal deeltjes dat per seconde en per vierkante centimeter door een oppervlak loodrecht op de bundel binnenkomt. Zij $I(\theta, \varphi)$ het aantal deeltjes dat per seconde en per vierkante centimeter in de richting (θ, φ) verstrooid wordt. Een detector met oppervlak dA op afstand R van het trefcentrum meet dan per seconde een aantal deeltjes

$$I(\theta, \varphi) dA = I(\theta, \varphi) R^2 d\Omega. \quad (30)$$

Dit aantal is evenredig met het aantal binnenvallende deeltjes per seconde:

$$I(\theta, \varphi) R^2 d\Omega = I_0 d\sigma(\theta, \varphi), \quad (31)$$

waarin $d\sigma(\theta, \varphi)$ de grootte van het oppervlak is waar evenveel binnenvallende deeltjes doorheen gaan als er door dA naar buiten komen. De grootte

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2 I(\theta, \varphi)}{I_0} \quad (32)$$

is de *differentiële werkzame doorsnede* voor de verstrooiing door het trefcentrum (deeltje, potentiaal) in de richting (θ, φ) . Evenzo is

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{I(\theta, \varphi)}{I_0} \quad (33)$$

de *totale werkzame doorsnede* voor dit type verstrooiing.

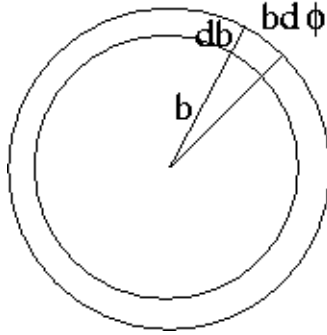


Figure 1: Botsingsparameter en differentiële doorsnede

Als de potentiaal of het krachtveld van een te treffen deeltje (strooicentrum) symmetrisch is om een as evenwijdig aan de bundel inkomende deeltjes, dan hangt de verstrooiingshoek van een bepaald invallend deeltje alleen af van de energie en van de afstand b van dat deeltje tot de as, de *botsingsparameter*; de strooihoek hangt dan *niet* af van de hoek van het vlak gevormd door de baan van het inkomende deeltje en het strooicentrum. Wiskundig: $d\sigma$ hangt wel af van θ , maar niet van¹ φ . Dit is in het bijzonder altijd het geval voor bolsymmetrische potentialen.

Fig. 1 geeft een schematisch aanzicht van het strooicentrum met de bundel mee. We nemen de symmetrie-as van het strooicentrum als de z -as; deze wijst in de bladzijde. Het x - y -vlak staat loodrecht op de bundel, en ligt dus in het vlak van de bladzijde. Alle deeltjes die in de ring tussen b en $b + db$ terecht komen worden nu over eenzelfde hoek tussen θ en $\theta + d\theta$ met de z -as verstrooid, onafhankelijk van de hoek φ in het x - y -vlak; θ is dus een functie van b , en omgekeerd hoort bij iedere strooihoek θ een botsingsparameter $b(\theta)$. Een klein elementje uit de ring met breedte $b d\varphi$ heeft oppervlak

$$d\sigma = |b db d\varphi| = \left| \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta} \right| \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (34)$$

en dus is

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (35)$$

Dit is de differentiële werkzame doorsnede, omdat in de klassieke mechanica *alle* deeltjes uit de bundel die door $d\sigma$ gaan over de hoek θ verstrooid worden.

Voorbeeld

Zoals aangegeven in fig. 2 geldt voor elastische verstrooiing van deeltjes aan een harde bol met straal a :

$$b = a \sin \alpha = a \sin \left(\frac{\pi - \theta}{2} \right) = a \cos \frac{\theta}{2}. \quad (36)$$

¹De hoek φ wordt gemeten in het vlak loodrecht op de invallende bundel.

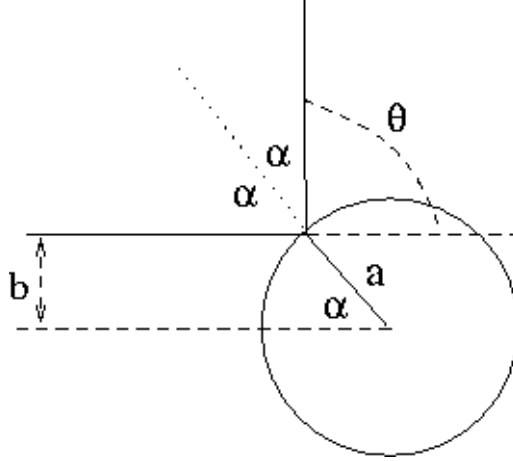


Figure 2: Verstrooiing aan een harde bol.

Dan is

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{a}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (37)$$

en

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{4}, \quad \sigma = \pi a^2. \quad (38)$$

De differentiële werkzame doorsnede is dus constant, en de totale werkzame doorsnede is gelijk aan de geometrische doorsnede (zoals je zou verwachten).

6. Coulombverstrooiing

De wisselwerking tussen twee ladingen $q_1 = Z_1 e$ en $q_2 = Z_2 e$ wordt beschreven door de Coulombpotentiaal

$$V(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \equiv \frac{\kappa}{r}. \quad (39)$$

Voor gegeven energie ϵ en strooihoek θ gemeten in het massamiddelpunt (CM) systeem, is de botsingsparameter

$$b(\theta) = \frac{\kappa}{2\epsilon} \cotan \frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{b(\theta)}{\sin \theta} = \frac{\kappa}{4\epsilon} \frac{1}{\sin^2 \theta/2}. \quad (40)$$

Hieruit volgt

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{\kappa}{4\epsilon} \frac{1}{\sin^2 \theta/2}. \quad (41)$$

Dan is de differentiële werkzame doorsnede

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} &= \left(\frac{\kappa}{4\epsilon} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \\ &= \frac{Z_1^2 Z_2^2}{16 \epsilon^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2}. \end{aligned} \quad (42)$$

Dit is de formule die Rutherford gebruikte om de verstrooiing van α -deeltjes ($Z_1 = 2$) aan zware atomen te beschrijven. De grootheid tussen haakjes is te schrijven als

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \alpha \hbar c, \quad (43)$$

met $\alpha \approx 1/137$ een dimensieloze constante, de *fijnstructuurconstante*.

De afleiding van verg. (40) voor de botsingsparameter gaat als volgt. De totale energie van twee geladen deeltjes in het CM-systeem² is

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 + V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \\ &= \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + V(r), \end{aligned} \quad (44)$$

where

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (45)$$

De beweging in het CM-systeem wordt dus effectief beschreven door de baan van een enkel deeltje met gereduceerde massa μ in een Coulombveld. De baan van een geladen deeltje in een Coulombveld is een hyperbool; zie fig. 3. We kiezen voor het vlak van deze hyperbool het x - y -vlak. De CM-energie is

$$\varepsilon = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r). \quad (46)$$

Het impulsmoment $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ is behouden, en staat loodrecht op het vlak van de baan, zodat

$$\mathbf{L} = (0, 0, l), \quad l = m r^2 \dot{\varphi}. \quad (47)$$

De energie in het CM-systeem is dan

$$\varepsilon = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) \quad \rightarrow \quad \dot{r}^2 = \frac{2(\varepsilon - V(r))}{\mu} - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}. \quad (48)$$

Combinatie van vergln. (47) en (48) geeft bij gebruik van de Coulombpotentiaal

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\dot{r}^2}{\dot{\varphi}^2} = \frac{2\mu\varepsilon r^4}{l^2} - \frac{2\mu\kappa r^3}{l^2} - r^2. \quad (49)$$

We transformeren nu naar een andere variabele

$$u = \frac{1}{r} + \frac{\mu\kappa}{l^2}. \quad (50)$$

²Gedefiniëerd door $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$.

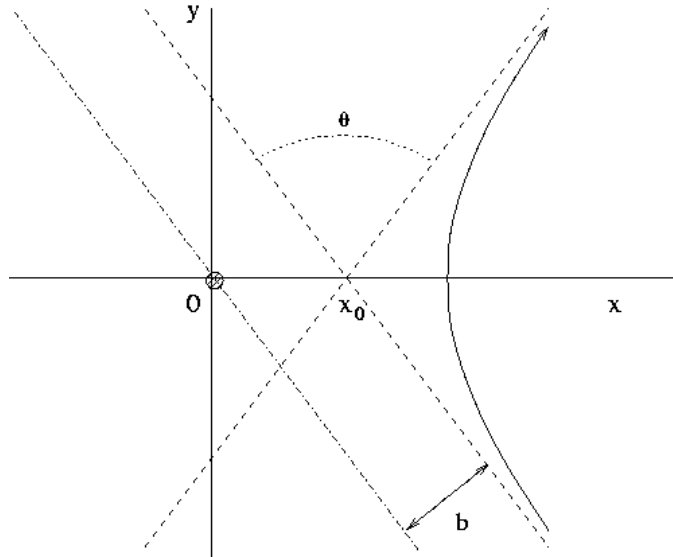


Figure 3: Coulombverstrooiing.

In termen van u is

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \lambda^2 - u^2, \quad (51)$$

met

$$\lambda^2 = \frac{\mu^2 \kappa^2}{l^4} \left(1 + \frac{2\varepsilon l^2}{\mu \kappa^2}\right). \quad (52)$$

De oplossing is

$$u(\varphi) = \lambda \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (53)$$

wat equivalent is met

$$r(\varphi) = \frac{l^2/\mu\kappa}{e \cos(\varphi - \varphi_0) - 1}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon l^2}{\mu \kappa^2}}. \quad (54)$$

Dit is de vergelijking van een hyperbool met excentriciteit e . Het minimum van $r(\varphi)$ wordt bereikt voor $\varphi = \varphi_0$, waarbij

$$r_{min} = \frac{l^2}{\mu\kappa(e - 1)}. \quad (55)$$

Anderzijds worden de asymptoten bereikt voor

$$\cos(\varphi_\infty - \varphi_0) = \frac{1}{e}. \quad (56)$$

Dus voor de hoek tussen de asymptoten volgt, dat

$$\Delta\varphi = 2(\varphi_\infty - \varphi_0) = 2 \arccos \frac{1}{e}, \quad (57)$$

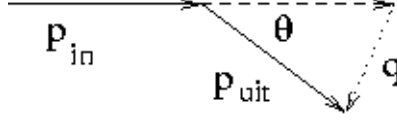


Figure 4: Impulsoverdracht bij verstrooiing

zodat

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \left(\frac{\pi - \Delta\varphi}{2} \right) = \cos \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{1}{e}. \quad (58)$$

Gebruiken we nu dat de asymptotische snelheid v_∞ voldoet aan

$$l = \mu b v_\infty, \quad v_\infty^2 = \frac{2\varepsilon}{\mu}, \quad (59)$$

dan is

$$l = b\sqrt{2\mu\varepsilon}, \quad \lambda^2 = \frac{1}{b^2} \left(1 + \frac{\kappa^2}{4\varepsilon^2 b^2} \right). \quad (60)$$

Tenslotte volgt hieruit

$$\cotan \frac{\theta}{2} = \sqrt{e^2 - 1} = \frac{2b\varepsilon}{\kappa}. \quad (61)$$

Hiermee is de afleiding van Rutherford's formule (42) compleet.

Merk op, dat in het CM-systeem uit energiebehoud volgt dat $|\mathbf{p}_{in}| = |\mathbf{p}_{uit}| = \sqrt{2\mu\varepsilon}$, zodat de impulsverandering wordt gegeven door

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_{in} - \mathbf{p}_{uit}, \quad \mathbf{q}^2 = 4\mu\varepsilon (1 - \cos \theta) = 8\mu\varepsilon \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (62)$$

zie fig. 4. Hieruit leiden we direct af, dat

$$\frac{1}{\sin^4 \theta/2} = \frac{64\mu^2\varepsilon^2}{|\mathbf{q}|^4}. \quad (63)$$

De werkzame doorsnede voor Coulombverstrooiing kan dan worden geschreven als

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = 4Z_1^2 Z_2^2 \alpha^2 \frac{\mu^2 \hbar^2 c^2}{|\mathbf{q}|^4}. \quad (64)$$

Hieruit zie je meteen, dat verstrooiingsprocessen waarbij veel impuls wordt overgedragen bij Coulombverstrooiing sterk onderdrukt zijn.

7. Quantumtheorie

In de quantummechanica beschrijven we de verstrooiing van een deeltje aan een potentiaal door een golfpakketje van oplossingen van de Schrödingervergelijking met een energie-eigenwaarde E in het continue deel van het spectrum:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + V(\mathbf{r}) \right) \Psi = E\Psi, \quad E > 0. \quad (65)$$

Om strooiing te kunnen krijgen, moet de potentiaal bij grote afstanden voldoende snel afvallen:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(\mathbf{r}) = 0. \quad (66)$$

In dat geval kan worden afgeleid, dat de golfpakketjes ver van het strooicentrum kunnen worden geschreven in de vorm

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int d^3k c(\mathbf{k}) \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f_{\mathbf{k}}(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \right) e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}, \quad (67)$$

met $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ de impuls van het inkomende deeltje, $k = |\mathbf{k}|$, en

$$E_{\mathbf{k}} = \hbar\omega_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2\mu} \quad (68)$$

de energie. Als de impulsen waarvoor $c(\mathbf{k}) \neq 0$ een nauwe band $(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \Delta\mathbf{k})$ vormen, hebben alle golven in het pakketje een energie in een bijbehorend klein gebied met breedte

$$\Delta E_{\mathbf{k}} = \hbar\Delta\omega_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar\mathbf{k}}{\mu} \cdot \hbar\Delta\mathbf{k}. \quad (69)$$

De eerste vlakke-golfterm in (67) beschrijft het inkomende deeltje, en de tweede term beschrijft de uitlopende bolgolf van het verstrooide deeltje. De impuls na verstrooiing is dus $k\hat{\mathbf{r}}$, met $\hat{\mathbf{r}}$ de eenheidsvector in de richting (θ, φ) :

$$\hat{\mathbf{r}}(\theta, \varphi) = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta), \quad (70)$$

zodat $k\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} = kr$. We zien, dat de grootte van de impuls (en dus de energie) niet verandert na verstrooiing, maar de richting wel.

De strooiamplitude $f_{\mathbf{k}}(\theta, \varphi)$ is de waarschijnlijkheidsamplitude dat een deeltje dat met impuls $\hbar\mathbf{k}$ binnenkomt in de richting (θ, φ) verstrooid wordt. Daarom wordt de differentiële werkzame doorsnede gegeven door

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\mathbf{k}}(\theta, \varphi)|^2. \quad (71)$$

Het technisch bewijs van dit resultaat is te vinden in handboeken quantummechanica. Daar wordt tevens afgeleid, dat in eerste-orde benadering de strooiamplitude wordt gegeven door de Bornamplitude

$$f_{\mathbf{k}}(\theta, \varphi) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{i(\mathbf{k}-k\hat{\mathbf{r}})\cdot\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}'). \quad (72)$$

We passen dit formalisme nu toe in het geval van de Yukawa-potentiaal:

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\lambda r}}{\lambda r}. \quad (73)$$

De strooiamplitude is dan

$$\begin{aligned}
 f_{\mathbf{k}}(\theta, \varphi) &= -\frac{\mu V_0}{2\pi\hbar^2\lambda} \int \frac{d^3r'}{r'} e^{-\lambda r' + i(\mathbf{k} - k\hat{\mathbf{r}})\cdot\mathbf{r}'} \\
 &= \frac{-2\mu V_0}{\hbar^2\lambda} \frac{1}{|\mathbf{k} - k\hat{\mathbf{r}}|^2 + \lambda^2}.
 \end{aligned} \tag{74}$$

Nu is

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{k} - k\hat{\mathbf{r}})^2 &= \mathbf{k}^2 - 2k\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}} + k^2 \\
 &= 2k^2(1 - \cos\theta) = 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2},
 \end{aligned} \tag{75}$$

met θ de strooihoek. Met dit resultaat wordt de differentiële werkzame doorsnede

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\mathbf{k}}(\theta, \varphi)|^2 = \frac{\mu^2 V_0^2}{4\lambda^2 \hbar^4 k^4} \frac{1}{\left(\sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\lambda^2}{4k^2}\right)^2}. \tag{76}$$

De Coulombpotentialiaal is de limiet $\lambda \rightarrow 0$ van dit resultaat, waarbij gelijktijdig

$$V_0 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \lambda. \tag{77}$$

In deze limiet is

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{16\epsilon^2} \frac{1}{\sin^4 \theta/2}. \tag{78}$$

Dit is precies de Rutherfordformule (42).

Intermezzo: de Born-benadering

De uitdrukking (72) voor de strooiamplitude is de asymptotische uitdrukking (de limiet $r \rightarrow \infty$) voor de 1e-orde benadering uit de integraal-expansie ontwikkeld door Born. De Born-procedure werkt als volgt:

De Schrödingervergelijking (65) kan worden hergeschreven als een lineaire integraal-vergelijking door gebruik te maken van de Greense functie:

$$G_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r}, \tag{79}$$

die een oplossing is van de inhomogene partiële differentiaalvergelijking

$$(\Delta + \mathbf{k}^2) G_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = -4\pi \delta^3(\mathbf{r}). \tag{80}$$

Voor het bewijs van de eigenschap (80) verwijzen we naar de opgaven. Met behulp van de Greense functie kunnen we de Schrödingervergelijking nu impliciet oplossen door de volgende uitdrukking

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(r') \Psi(\mathbf{r}'). \tag{81}$$

De vlakke golf in de eerste term is een oplossing van de homogene partiële differentiaalvergelijking

$$(\Delta + \mathbf{k}^2) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 0. \quad (82)$$

Dan zien we m.b.v. vergl. (80) dat

$$(\Delta + \mathbf{k}^2) \Psi(\mathbf{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \int d^3r' \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') V(r') \Psi(\mathbf{r}') = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) \Psi(\mathbf{r}), \quad (83)$$

een herschrijving van de Schrödingervergelijking (65).

De uitdrukking (81) kunnen we nu op zichzelf toepassen, door te schrijven

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(r') \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} - \dots \right). \quad (84)$$

Door de termen die dubbele of meervoudige integralen bevatten te verwaarlozen krijgen we de 1e-orde Bornbenadering:

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(r'). \quad (85)$$

Deze benadering is geoorloofd als de potentiaal een voldoende kleine verstoring van de vlakke golf oplevert, wat bij elastische verstrooiing aan een snel afvallende potentiaal het geval is.

De asymptotische vorm van de integraalterm in (85) krijgen we door gebruik te maken van de ontwikkeling

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} = r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' + \mathcal{O}(1/r), \quad (86)$$

met $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ de eenheidsvector in de richting \mathbf{r} . Dan krijgt de goffunctie $\Psi(\mathbf{r})$ voor grote waarden van r de vorm

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' e^{i(\mathbf{k}-k\hat{\mathbf{r}})\cdot\mathbf{r}'} V(r') + \mathcal{O}(1/r^2). \quad (87)$$

Dit levert de strooiamplitude (72) als 1e-orde benadering in de Bornontwikkeling.

8. Vormfactoren

De Rutherfordformule geldt voor Coulombverstrooiing van twee puntvormige ladingen. Deze aanname is correct als de kleinste afstand tussen de twee deeltjes groot is in vergelijking met de karakteristieke afmetingen van de deeltjes zelf. Sommige deeltjes, zoals elektronen, zijn bij alle experimenten tot nu toe puntvormig gebleken, zelfs bij massamiddelpuntenergieën van 100 - 200 GeV; voor elektronen is de enige waargenomen afwijking van het puntladingmodel het gevolg van hun spin, waardoor ze behalve een elektrische lading ook een magnetisch moment bezitten. Andere

deeltjes, zoals atoomkernen, hebben echter wel een ruimtelijke uitgebreidheid die experimenteel vastgesteld en onderzocht kan worden. Wanneer de relatieve impuls bij verstrooiing van zulke deeltjes zo groot is dat ze elkaar dicht kunnen benaderen, dan wordt deze ladingstructuur zichtbaar.

Stel dat we een ladingsverdeling hebben met een genormeerde dichtheid $\rho(\mathbf{r})$:

$$\int d^3r \rho(\mathbf{r}) = 1. \quad (88)$$

Voor een ladingverdeling met een Yukawa-potentiaal is het veld van deze verdeling op de positie \mathbf{r}

$$V(\mathbf{r}) = V_0 \int d^3r' \frac{e^{-\lambda|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}')}{\lambda|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (89)$$

Als we nu een testdeeltje aan deze potentiaal verstrooien, is de bijbehorende strooi-amplitude

$$f_{\mathbf{k}}(\theta, \varphi) = -\frac{\mu V_0}{2\pi\hbar^2\lambda} \int d^3r' e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}'} \int d^3r'' \frac{e^{-\lambda|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|} \rho(\mathbf{r}'')}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}, \quad (90)$$

waarin $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k} - k\hat{\mathbf{r}}$. De exponentiële afname van de Yukawa potentiaal maakt het mogelijk de volgorde van de integralen te verwisselen; dan krijgen we

$$f_{\mathbf{k}}(\theta, \varphi) = -\frac{\mu V_0}{2\pi\hbar^2\lambda} \int d^3r'' \rho(\mathbf{r}'') e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}''} \int d^3r' \frac{e^{-\lambda|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|+i\boldsymbol{\kappa}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}. \quad (91)$$

In de tweede integraal verschuiven we de integratievariabele nu $\mathbf{r}' - \mathbf{r}''$; dan wordt deze integraal feitelijk onafhankelijk van \mathbf{r}'' , en levert een factor die voor de eerste integraal geschreven kan worden. De overblijvende integraal is niets anders dan de Fouriergetransformeerde ladingsverdeling; deze wordt de *vormfactor* genoemd:

$$F(\boldsymbol{\kappa}) = \int d^3r e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}). \quad (92)$$

Het netto resultaat van de integraties in (91) is dan

$$f_{\mathbf{k}}(\theta, \varphi) = -\frac{2\mu V_0}{\hbar^2\lambda} \frac{F(\boldsymbol{\kappa})}{\boldsymbol{\kappa}^2 + \lambda^2}. \quad (93)$$

Voor een Coulomb ladingsverdeling maken we de substitutie (77) en nemen de limiet $\lambda \rightarrow 0$; met $\mathbf{q} = \hbar\boldsymbol{\kappa}$ vinden we dan

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} &= 4Z_1^2 Z_2^2 \alpha^2 \left(\frac{\mu c}{\hbar} \right)^2 \frac{F^2(\boldsymbol{\kappa})}{|\boldsymbol{\kappa}|^4} = 4Z_1^2 Z_2^2 \alpha^2 \frac{\mu^2 \hbar^2 c^2}{|\mathbf{q}|^4} F^2(q/\hbar) \\ &= \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Rutherford}} F^2(\boldsymbol{\kappa}). \end{aligned} \quad (94)$$

De differentiële werkzame doorsnede geeft ons dus informatie over de ladingsverdeling. De vormfactor kan uit experimentele gegevens worden bepaald door de gemeten werkzame doorsnede $d\sigma/d\Omega$ te vergelijken met Rutherford's uitdrukking en de verhouding

$$F^2(\kappa) = \frac{(d\sigma/d\Omega)_{exp}}{(d\sigma/d\Omega)_{Ruth}} \quad (95)$$

uit te zetten tegen de impulsoverdracht $q = \hbar\kappa$.

Als de ladingsverdeling bolsymmetrisch is, wordt de uitdrukking voor de vormfactor

$$\begin{aligned} F(\kappa) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \int_0^\infty dr r^2 \rho(r) e^{i\kappa r \cos\theta} \\ &= 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \rho(r) \frac{\sin \kappa r}{\kappa r}. \end{aligned} \quad (96)$$

Voor een puntlading is $\rho(r)$ een δ -functie:

$$\rho(r) = \delta^3(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad F(\kappa) = 1. \quad (97)$$

Dit geeft het Rutherford-resultaat (78) terug.

Voor een exponentiële verdeling krijgen we daarentegen

$$\rho(r) = \frac{a^3}{8\pi} e^{-ar} \quad \Rightarrow \quad F(\kappa) = \frac{1}{(1 + \kappa^2/a^2)^2}, \quad (98)$$

terwijl voor een homogene bolverdeling ($\Theta(x)$ is de stapfunctie):

$$\rho(r) = \frac{3}{4\pi R^3} \Theta(R - r) \quad \Rightarrow \quad F(\kappa) = \frac{3}{(\kappa R)^3} (\sin \kappa R - \kappa R \cos \kappa R). \quad (99)$$

Als $\rho(r)$ alleen ongelijk aan nul is in een domein $\kappa r \ll 1$, dan kunnen we vergl. (96) bij benadering schrijven als

$$F(\kappa) = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \rho(r) \left(1 - \frac{1}{3!} (\kappa r)^2 + \dots \right) = 1 - \frac{1}{6} \kappa^2 \overline{r^2} + \dots \quad (100)$$

waarin het kwadratisch gemiddelde van de straal gegeven is door

$$\overline{r^2} = \int d^3r r^2 \rho(r) = 4\pi \int_0^\infty dr r^4 \rho(r). \quad (101)$$

Uit vergl. (100) volgt, dat we deze grootte uit de metingen van de vormfactor kunnen halen:

$$\overline{r^2} = -6 \left. \frac{dF}{d\kappa^2} \right|_{\kappa^2=0}. \quad (102)$$

Voor het harde-bollen model levert dit b.v. op, dat

$$\overline{r^2} = \frac{3}{5} R^2 \quad \Rightarrow \quad R^2 = -10 \left. \frac{dF}{d\kappa^2} \right|_{\kappa^2=0}. \quad (103)$$

Vergelijking van deze modellen met experimentele data van de verstrooiing van elektronen aan kernen, geeft voor kernen een karakteristieke afmeting $R \sim 1\text{-}5$ fm.

Het is belangrijk te benadrukken, dat we in het bovenstaande de differentiële werkzame doorsnede hebben bepaald voor verstrooiing van niet-relativistische deeltjes via de Coulomb-wisselwerking. Dit betekent dat er een aantal beperkingen aan het resultaat verbonden zijn, waaronder

- er zijn modificaties van de kinematische behandeling als deeltjes relativistisch zijn;
- in een relativistische behandeling zijn er quantumeffecten van de orde α^2 en hoger in de fijnstructuurconstante, die het gevolg zijn van de mogelijkheid van (virtuele) deeltjescreatie en -annihilatieprocessen;
- er zijn afwijkingen van de Coulombpotentialiaal als er magnetische wisselwerkingen zijn, b.v. omdat de betrokken deeltjes een magnetisch dipoolmoment bezitten; dit geldt in het algemeen voor deeltjes met spin, zoals elektronen, protonen en neutronen;
- er zijn geheel nieuwe bijdragen aan de verstrooiing als er andere krachten dan elektromagnetische krachten in het spel zijn, zoals kernkrachten en zwakke wisselwerkingen.

Relativistische kinematica: impulsoverdracht

Bij verstrooiing zijn de totale energie en impuls van de deeltjes behouden, maar niet die van de individuele deeltjes. In het CM-systeem van twee deeltjes kan daarom de relatieve impuls $\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ wel veranderen, hoewel de totale impuls $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ niet verandert. Als \mathbf{p}_{in} en \mathbf{p}_{uit} de impuls van het inkomende en uitgaande deeltje 1 zijn, dan is de impulsverandering $\mathbf{q} = \mathbf{p}_{in} - \mathbf{p}_{uit}$ de impuls die overgedragen wordt aan deeltje 2. Uit de Rutherfordformule volgt, dat de werkzame doorsnede voor Coulomb-verstrooiing omgekeerd evenredig is met de 4e macht van deze impulsoverdracht:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{1}{|\mathbf{q}|^4} \sim \frac{1}{\sin^4 \theta/2}; \quad (104)$$

zie vergln. (62) - (64).

Het resultaat (104) verandert bij een relativistische behandeling. In het bijzonder wordt de niet-relativistische impulsoverdracht in vgl. (104) vervangen door de relativistisch invariante vierimpuls-overdracht:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{1}{q^4} \quad (105)$$

waarin

$$q^2 = (p_{in} - p_{uit})^2 = \frac{1}{c^2} (E_{in} - E_{uit})^2 - (\mathbf{p}_{in} - \mathbf{p}_{uit})^2. \quad (106)$$

Deze uitdrukking heeft de juiste niet-relativistische limiet:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2} (E_{in} - E_{uit})^2 &= \left(\sqrt{\mathbf{p}_{in}^2 + m^2 c^2} - \sqrt{\mathbf{p}_{uit}^2 + m^2 c^2} \right)^2 \\
&= 2m^2 c^2 + \mathbf{p}_{in}^2 + \mathbf{p}_{uit}^2 - 2m^2 c^2 \sqrt{\left(1 + \frac{\mathbf{p}_{in}^2}{m^2 c^2}\right) \left(1 + \frac{\mathbf{p}_{uit}^2}{m^2 c^2}\right)} \\
&= \frac{(\mathbf{p}_{in}^2 - \mathbf{p}_{uit}^2)^2}{4m^2 c^2} + \dots
\end{aligned} \tag{107}$$

Hieruit volgt, dat

$$q^2 = -\mathbf{q}^2 \left(1 - \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2 c^2} + \dots \right). \tag{108}$$

Het is duidelijk, dat bij volledig elastische verstrooiing $E_{in} = E_{uit}$, en dus

$$q^2 = -\mathbf{q}^2. \tag{109}$$

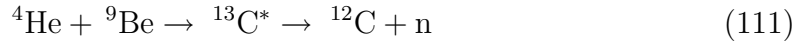
Maar ook bij niet-elastische verstrooiing is de term $(E_{in} - E_{uit})^2/c^2$ verwaarloosbaar zolang $\mathbf{q}^2 \ll 4m^2 c^2$. In deze niet-relativistische limiet gaat de uitdrukking (105) dus inderdaad over in (104).

In de relativistische limiet, waarin $|\mathbf{q}^2| \gg m^2 c^2$, vinden we daarentegen dat

$$\begin{aligned}
q^2 &= \frac{1}{c^2} (E_{in}^2 + E_{uit}^2 - 2E_{in}E_{uit}) - \mathbf{p}_{in}^2 - \mathbf{p}_{uit}^2 - 2\mathbf{p}_{in} \cdot \mathbf{p}_{uit} \\
&= 2m^2 c^2 - \frac{2E_{in}E_{uit}}{c^2} (1 - \cos \theta) \approx -\frac{4E_{in}E_{uit}}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}.
\end{aligned} \tag{110}$$

9. Nucleonen

Chadwick ontdekte in 1932 dat bij de botsing van een α -deeltje met een ${}^9\text{Be}$ kern een ${}^{12}\text{C}$ kern en een neutraal deeltje met een massa vrijwel gelijk aan die van het proton:



De ${}^{13}\text{C}$ kern is een instabiele tussentoestand die na korte tijd vervalt in de stabiele vorm van koolstof ${}^{12}\text{C}$ en een neutron. Het vrije neutron heeft een massa

$$m_n = 1.675 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1839 m_e. \tag{112}$$

In relativistische eenheden:

$$m_n c^2 = 0.940 \text{ GeV}. \tag{113}$$

Het verschil tussen de proton- en neutronmassa is klein:

$$\frac{m_n - m_p}{m_p} = 1.4 \times 10^{-3}, \tag{114}$$

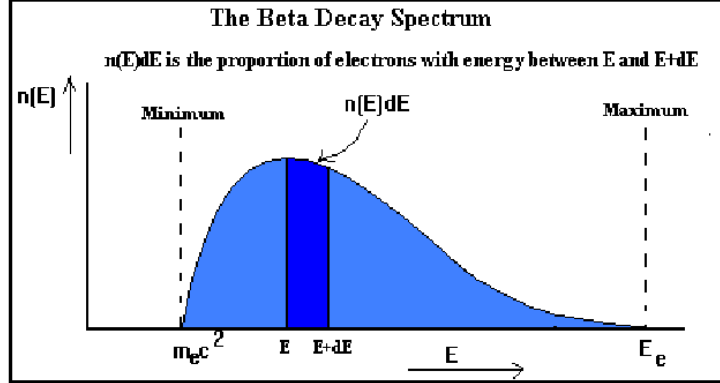


Figure 5: Elektronspectrum bij neutronverval

maar groter dan de elektronmassa:

$$m_n - m_p \approx 2.5 m_e. \quad (115)$$

Het neutron blijkt dan ook in vrije toestand niet stabiel; na gemiddeld 887 seconden valt het uiteen, waarbij onder andere een proton en een elektron vrijkomen. Dit is het β -verval van het neutron. Wanneer dit de enige vervalproducten van het neutron zouden zijn, dan lagen de impuls en kinetische energie van het proton en neutron vast; in het rustsysteem van het neutron:

$$m_n c^2 = E_p + E_e = \sqrt{m_p^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2} + \sqrt{m_e^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}. \quad (116)$$

De oplossing van deze vergelijking geeft

$$\frac{\mathbf{p}^2}{m_e^2 c^2} = \frac{1}{4m_n^2} ((x^2 - 2)(m_n^2 + m_p^2) + 2xm_n m_p + m_e^2), \quad x = \frac{m_n - m_p}{m_e} \approx 2.5. \quad (117)$$

We verwachten dus een mono-energetisch elektronspectrum. Het werkelijke spectrum is echter als geschetst in fig. 5, waarbij de elektronenergie een continuum vormt tussen de rustenergie $m_e c^2$ en (vrijwel) het maximum $(m_n - m_p)c^2$. Zo'n continuum kan alleen ontstaan als er meer dan 2 deeltjes bij het neutronverval vrijkomen, zodat een variabel deel van de energie en impuls door een derde deeltje kan worden meegenomen. Wegens het behoud van lading moet dat dan een neutraal deeltje zijn, en de massa moet kleiner zijn dan $m_n - (m_p + m_e) \approx 1.5 m_e$.

Dit bracht Pauli er toe, de neutrinohypothese te introduceren: bij het verval van het neutron worden een proton, een elektron en een zeer licht neutraal deeltje geproduceerd, met een massa veel kleiner dan het elektron (en dus nog heel veel kleiner dan het neutron en proton zelf):

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e. \quad (118)$$

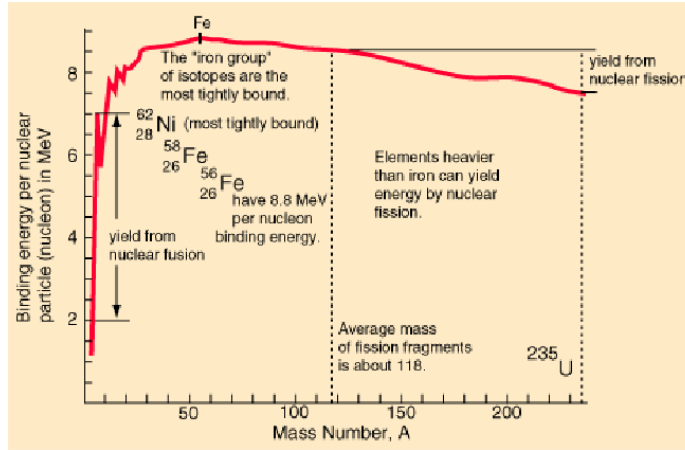


Figure 6: Bindingsenergie per nucleon in kernen

De notatie geeft aan, dat het deeltje dat bij het β -verval van het neutron vrijkomt in moderne terminologie met het elektron-antineutrino geïdentificeerd wordt. We komen hier later op terug.

Pauli's hypothese heeft nog een ander voordeel: het proton, neutron en elektron zijn alle drie fermionen met spin $s = 1/2$. Door aan te nemen dat het neutrino ook een fermion met spin $s = 1/2$ is, wordt aan Fermi-Dirac statistiek en aan behoud van impulsmoment voldaan. Voor fermionen geldt immers, dat ze een (oneven) halftallige spin hebben: $s_z = \pm(2m + 1)\hbar/2$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Aangezien het baanimpulsmoment altijd heeltallig is gequantiseerd, moet een fermion altijd in een oneven aantal fermionen vervallen om impulsmoment te kunnen behouden.

Neutronen zijn een onderdeel van alle atoomkernen behalve gewone waterstof. Dit verklaart waarom de kernlading en kernmassa niet precies evenredig zijn. Proton en neutron hebben bijna dezelfde massa en een vergelijkbare bindingsenergie in een atoomkern. Daarom worden ze samen aangeduid als *nucleonen* in gevallen waarin het ladingsverschil geen rol speelt. De massa van een kern met A nucleonen en lading Z wordt gegeven door

$$M(A, Z)c^2 = Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2 - A\Delta E, \quad (119)$$

waarin ΔE de gemiddelde bindingsenergie per nucleon is. Voor stabiele kernen is deze bindingsenergie weergegeven in fig. 6. De stabiele kernen worden gevormd door een beperkt aantal combinaties van protonen en nucleonen met $1 \leq Z \leq 92$, die in de buurt liggen van de lijn $Z = A/2$. De bindingsenergie per nucleon varieert van ca. 1 MeV voor deuterium ^2H , tot bijna 9 MeV voor ijzer ^{56}Fe en ^{62}Ni .

De stabiele kernen liggen tussen waterstof ($Z = 1$) en uranium ($Z = 92$). In die kernen zijn de neutronen dus ook stabiel; de verklaring daarvan is, dat de energie die vrijkomt bij het neutronverval niet voldoende is om een proton en een vrij elektron

en neutrino te produceren. Dit betekent dat het neutron in de kern een voldoende grote bindingsenergie ΔE_n heeft, zodat

$$m_n c^2 - \Delta E_n < m_p c^2 - \Delta E_p + (m_e + m_\nu) c^2, \quad (120)$$

met ΔE_p de bindingsenergie van het proton (positief of negatief). Het verval waarin een kern met lading Z overgaat in een kern met lading $Z + 1$ kan wel plaats vinden als het proton in de kern blijft met een bindingsenergie zodat

$$\Delta E_n - \Delta E_p < m_n c^2 - (m_p + m_e + m_\nu) c^2. \quad (121)$$

In de praktijk is $\Delta E_n - \Delta E_p > 0$, omdat de kernkrachten die het proton in de kern binden hetzelfde zijn als voor het neutron, maar de lading van het proton door de Coulombafstoting van de andere protonen zorgt voor een vermindering van de bindingsenergie. Zodra deze Coulombafstoting te groot wordt, is aan de ongelijkheid (121) niet meer te voldoen en is β -verval van het neutron in de kern onmogelijk.

Omgekeerd is het ook mogelijk dat een proton in een kern energie kan winnen door in een neutron te veranderen via het inverse β -verval

$$p \rightarrow n + \bar{e} + \nu_e. \quad (122)$$

waarbij een anti-elektron (positron) en een neutrino vrijkomen. Een kern met lading Z gaat dan over in een kern met lading $Z - 1$.

10. Nucleonstructuur

Het proton is de kern van een waterstofatoom; waterstof is het meest voorkomende element in de natuur: 75 % van alle atomaire materie in het heelal is waterstof, vrijwel de hele rest is helium. Alle zwaardere elementen samen vormen slecht een fractie van een procent van de atomaire materie. Protonen komen in het bijzonder voor in alle chemische verbindingen die waterstof bevatten.

De structuur van het proton kan worden onderzocht op dezelfde manier als die van andere kernen: door elektron-protonbotsingen (e - p -verstrooiing) uit te voeren, en de werkzame doorsnede te bepalen. De werkzame doorsnede voor elastische e - p -verstrooiing bestaat uit 2 factoren:

1. de werkzame doorsnede voor elastische elektronverstrooiing aan een puntlading met de massa van het proton, maar zonder spin en magnetisch dipoolmoment; dit is een relativistische generalisatie van de Rutherfordformule die ook elektronspin in rekening brengt, afgeleid door Mott;
2. een vormfactor die het effect van de ladingstructuur en het magnetisch moment beschrijft:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{ep} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \left(\frac{4m_p^2 c^2 G_E^2(Q^2) + Q^2 G_M(Q^2)}{Q^2 + 4m_p^2 c^2} + \frac{Q^2}{2m_p^2 c^2} G_M(Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (123)$$

Hierin is $Q^2 = -q^2$, minus het invariante kwadraat van de vier-impuls-overdracht; door het minteken is in de relativistische limiet:

$$Q^2 \approx \frac{4E_{in}E_{uit}}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (124)$$

zie verg. (110). De totale vormfactor van het proton bij elektronverstrooiing bevat twee onafhankelijke parameters, eigenlijk functies van Q^2 , de elektrische of ladingsvormfactor $G_E(Q^2)$, en de magnetische vormfactor $G_M(Q^2)$. Voor een spin-1/2 puntlading is $G_E(Q^2) = G_M(Q^2) = 1$. Voorts is in de limiet $Q^2 \rightarrow 0$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{ep}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} G_E(0). \quad (125)$$

Uit experimenten van Hofstadter in 1956 bleek, dat in goede benadering voor het proton

$$G_E(Q^2) = \frac{G_M(Q^2)}{2.79} = \frac{1}{(1 + Q^2 c^2 / (0.84 \text{ GeV})^2)^2}. \quad (126)$$

Het proton is dus geen puntlading, maar heeft een min of meer exponentiële ladingsverdeling met een karakteristieke schaal van 0.23 fm. Uit dit resultaat volgt voorts, dat

$$G_E(0) = 1, \quad G_M(0) = 2.79. \quad (127)$$

De eerste vergelijking betekent, dat een proton een even grote lading heeft als het elektron (alleen van tegengesteld teken); de tweede lading betekent dat het magnetisch dipoolmoment van het proton afwijkt van dat van een puntlading met spin $s = 1/2$, zoals het elektron.

Voor het neutron kan de vormfactor worden bepaald uit verstrooiing van elektronen aan deuterium (^2H); de kern bestaat uit een proton en een neutron. Aangezien de werkzame doorsnede van elektronverstrooiing aan een proton bekend is, kan hieruit de werkzame doorsnede en de vormfactor van het neutron worden afgeleid. Het resultaat is, dat

$$G_M^n(Q^2) = -1.91 G_E^p(Q^2), \quad (128)$$

terwijl $G_E^n(Q^2)$ weliswaar klein is, maar niet exact nul. Natuurlijk is er geen netto lading: $G_E^n(0) = 0$, maar het neutron heeft wel een magnetisch dipoolmoment. Dit alles wijst op een inwendige ladingstructuur van het neutron.

Inelastische elektron-nucleon verstrooiing

Om meer te kunnen zeggen over de inwendige structuur van de nucleonen, moeten we de *inelastische* verstrooiing van elektronen aan nucleonen onderzoeken. Bij inelastische verstrooiing is de kinetische energie van de deeltjes in de begin- en eindtoestand niet gelijk: een deel van de energie wordt gebruikt om de inwendige energie van de nucleonen te veranderen, waardoor b.v. nieuwe deeltjes uit de reactie kunnen ontstaan.

Bij inelastische verstrooiing is er daarom geen direct verband tussen de impulsverdracht en de energieoverdracht. De twee variabelen kunnen op een Lorentz-invariante manier worden gedefiniëerd door uit te gaan van de overgedragen vier-impuls q en de vier-impuls P van het proton voor verstrooiing; dan is het invariante kwadraat van de vier-impuls van de gezamenlijke deeltjes (zonder het elektron) na verstrooiing

$$W^2 = (P + q)^2 = M^2 c^2 + 2q \cdot P + q^2. \quad (129)$$

Als tevoren definiëren we $Q^2 = -q^2$, en een nieuwe variabele met de dimensie van energie:

$$\nu = \frac{q \cdot P}{M}. \quad (130)$$

In het co-ordinatensysteem waarin het proton oorspronkelijk in rust is: $P = (Mc, \mathbf{0})$, is

$$\nu = \frac{1}{M} Mc \left(\frac{E_{in}}{c} - \frac{E_{uit}}{c} \right) = E_{in} - E_{uit}. \quad (131)$$

Dan is dus

$$W^2 = M^2 c^2 + 2M\nu - Q^2. \quad (132)$$

Als de energie- en impulsverdracht onafhankelijk zijn, zijn ν en Q^2 als onafhankelijke variabelen bij de botsing te beschouwen. Bij inelastische verstrooiing is de werkzame doorsnede inderdaad een functie van beide variabelen afzonderlijk, zodat meer metingen nodig zijn om de nucleonstructuur door verstrooiing van elektronen te kunnen bepalen. De uitdrukking voor de werkzame doorsnede van inelastische e - p -verstrooiing kan dan in navolging van (123) algemeen geparametriseerd worden als

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{ep} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \left(W_2(Q^2, \nu) + 2W_1(Q^2, \nu) \tan^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (133)$$

De twee structuurfuncties $W_{1,2}(Q^2, \nu)$ hangen nu van beide variabelen afzonderlijk af, terwijl voor elastische verstrooiing

$$(P + q)^2 = M^2 c^2 \quad \Rightarrow \quad 2M\nu = Q^2. \quad (134)$$

De verhouding

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu} \quad (135)$$

heeft dus voor elastische verstrooiing de vaste waarde $x = 1$. We kunnen de afwijking van elastische verstrooiing nu expliciet maken door de structuurfuncties als functies van Q^2 en x te beschouwen. In de praktijk gebruikt men de dimensieloze structuurfuncties

$$F_1(x, Q^2) = Mc^2 W_1(Q^2, \nu), \quad F_2(x, Q^2) = \nu W_2(Q^2, \nu), \quad (136)$$

zodat

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{ep} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \left(\frac{F_2(x, Q^2)}{\nu} + \frac{2F_1(x, Q^2)}{Mc^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (137)$$

Bij $x = 1$ moet dit overeenkomen met de uitdrukking (123) voor elastische verstrooiing. Nu blijkt echter uit metingen, dat F_1 en F_2 voor $Q^2 c^2 > 2 \text{ GeV}^2$ in de praktijk vrijwel onafhankelijk van Q^2 zijn, en alleen van x afhangen. Dit wijst erop, dat nucleonen uit puntladingen zijn opgebouwd. Als deze puntladingen net als elektronen spin-1/2 deeltjes zijn, dan is de magnetische structuur direct uit de ladingstructuur te halen; er moet dan gelden dat

$$2xF_1(x) = F_2(x). \quad (138)$$

Dit verband staat bekend als de *Callan-Gross* relatie. Deze blijkt experimenteel bij inelastische $e-p$ -verstrooiing inderdaad tot op goede benadering te gelden. De conclusie is, dat het proton en het neutron uit puntachtige geladen deeltjes met spin $s = 1/2$ zijn opgebouwd.

De algemene benaming voor de deeltjes die in het nucleon voorkomen is *partonen*. De fermionische partonen met spin $s = 1/2$ die de elektromagnetische structuur bepalen zijn de *quarks*. Deze komen voor in twee soorten: u -quarks, met lading $2/3 e$, en d -quarks met lading $-1/3 e$. Een proton heeft dan de quarkstructuur uud , met lading $+e$, terwijl een neutron is gebouwd op de combinatie udd . Dit verklaart waarom het neutron geen netto lading heeft, maar wel een magnetisch moment en een elektromagnetische structuur gekenmerkt door een elektrische en een magnetische vormfactor.

11. Isospin

De nucleonen (proton en neutron) hebben niet alleen bijna dezelfde massa, hun bindingsenergie in atoomkernen is vaak ook bijna gelijk. Het grootste deel van het verschil kan worden verklaard uit het massaverschil $\Delta m = m_n - m_p$, en uit de Coulombafstoting tussen de positief geladen protonen, waar de neutronen geen last van hebben. De energieniveaux van kernen met gelijke aantallen nucleonen zijn dus na uitvoering van correcties voor massaverschillen en Coulombwisselwerkingen vaak vrijwel ontaard. Dit vormt een aanwijzing voor de veronderstelling dat de kernkrachten die protonen en neutronen bij elkaar houden geen onderscheid maken tussen nucleonen van verschillende lading.

In de quantummechanica is zo'n ontaarding van energieniveaux verbonden met een symmetrie. Dit kunnen we als volgt aanschouwelijk maken. Iedere nucleontoestand met gegeven energie en spin is tweevoudig ontaard: het nucleon kan een proton of een neutron zijn. We beschrijven zo'n nucleontoestand met energie E en spin s door een golffunctie die 2 componenten heeft:

$$\Psi_{nucl}(E, s) = \begin{bmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{bmatrix}_{(E,s)}. \quad (139)$$

In de onderruimte van deze toestanden is de hamiltoniaan diagonaal:

$$\mathbf{H}\Psi(E, s) = E\Psi(E, s) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}. \quad (140)$$

We kunnen nu drie operatoren invoeren die de nucleontoestanden bij dit energieniveau in zichzelf of in elkaar transformeren:

$$\mathbf{T}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (141)$$

Deze operatoren hebben de volgende eigenschappen:

$$\mathbf{T}_+^2 = \mathbf{T}_-^2 = 0, \quad \mathbf{T}_+\mathbf{T}_- - \mathbf{T}_-\mathbf{T}_+ = 2\mathbf{T}_3, \quad (142)$$

en

$$[\mathbf{T}_3, \mathbf{T}_\pm] = \pm \mathbf{T}_\pm. \quad (143)$$

We kunnen de bijbehorende operaties als volgt fysisch interpreteren:

a. de operator T_3 vertelt ons of een nucleontoestand een proton of een neutron is; voor een proton is

$$\Psi^{(p)} = \begin{bmatrix} \psi_p \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_3\Psi^{(p)} = +\frac{1}{2}\Psi^{(p)}, \quad (144)$$

terwijl voor een neutron

$$\Psi^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_3\Psi^{(n)} = -\frac{1}{2}\Psi^{(n)}. \quad (145)$$

De proton- en neutrontoestanden kunnen dus gekarakteriseerd worden door de eigenwaarde $\tau_3 = (+1/2, -1/2)$ onder de operatie \mathbf{T}_3 . Aangezien het proton elektrische lading $Q = 1$ heeft, en het neutron $Q = 0$, zien we dat we een verband tussen Q en τ_3 kunnen leggen:

$$Q = y + \tau_3, \quad y = \frac{1}{2}. \quad (146)$$

Het quantumgetal y is de *gemiddelde* lading van het nucleon; dit quantumgetal heet de *hyperlading*. Het quantumgetal τ_3 vertelt hoeveel de werkelijke lading van de nucleontoestanden verschilt van de hyperlading.

Voorts zien we, dat de operatoren \mathbf{T}_\pm een neutrontoestand in een protontoestand, respectievelijk een protontoestand in een neutrontoestand veranderen:

$$\mathbf{T}_+\Psi^{(n)} = \Psi^{(p)}, \quad \mathbf{T}_-\Psi^{(p)} = \Psi^{(n)}. \quad (147)$$

Dit is consistent met de definitie van proton en neutron als eigentoestanden van \mathbf{T}_3 :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_3\mathbf{T}_+\Psi^{(n)} &= ([\mathbf{T}_3, \mathbf{T}_+] + \mathbf{T}_+\mathbf{T}_3)\Psi^{(n)} = \mathbf{T}_+(1 + \mathbf{T}_3)\Psi^{(n)} \\ &= \mathbf{T}_+\left(1 - \frac{1}{2}\right)\Psi^{(n)} = \frac{1}{2}\mathbf{T}_+\Psi^{(n)}. \end{aligned} \quad (148)$$

Dus $\mathbf{T}_+\Psi^{(n)}$ heeft inderdaad de eigenwaarde $\tau_3 = +1/2$ onder \mathbf{T}_3 , zoals verwacht voor een protontoestand. Op dezelfde manier bewijzen we

$$\mathbf{T}_3\mathbf{T}_-\Psi^{(p)} = -\frac{1}{2}\mathbf{T}_-\Psi^{(p)}. \quad (149)$$

Merk op, dat

$$\mathbf{T}_+ \Psi^{(p)} = \mathbf{T}_- \Psi^{(n)} = 0. \quad (150)$$

Dit betekent slechts, dat het niet mogelijk is de eigenwaarde van \mathbf{T}_3 groter dan $+1/2$ of kleiner dan $-1/2$ te maken; er zijn immers geen nucleontoestanden die met deze eigenwaarden corresponderen.

Als nu in een fysisch systeem (b.v. een atoomkern) de toestanden $\Psi^{(p)}$ en $\Psi^{(n)}$ dezelfde energieniveaux hebben, dan betekent dit, dat de hamiltoniaan met alle drie de operatoren \mathbf{T}_i commuteert:

$$[\mathbf{H}, \mathbf{T}_i] = 0, \quad i = (+, -, 3). \quad (151)$$

Immers, in de ruimte van toestanden met energie E is \mathbf{H} evenredig met de eenheidsoperator, zie vgl. (140). Dan commuteert \mathbf{H} met alle operatoren die alleen toestanden in dezelfde onderruimte mengen, i.h.b. met $(\mathbf{T}_+, \mathbf{T}_-, \mathbf{T}_3)$.

Tenslotte kunnen we nog een vierde operator definiëren die eveneens met \mathbf{H} commuteert, door de volgende kwadratische vorm:

$$\mathbf{T}^2 \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{T}_+ \mathbf{T}_- + \mathbf{T}_- \mathbf{T}_+) + \mathbf{T}_3^2 = \frac{3}{4} \mathbf{1}. \quad (152)$$

Deze operator heeft voor zowel de proton- als de neutrontoestand de eigenwaarde $\tau(\tau + 1) = 3/4$, met $\tau = 1/2$. De notatie als een kwadraat wordt begrijpelijk als we \mathbf{T}_\pm ontbinden als

$$\mathbf{T}_\pm = \mathbf{T}_1 \pm i\mathbf{T}_2. \quad (153)$$

In de toestandsruimte geassocieerd met het energieniveau E zijn de operatoren $\mathbf{T}_{1,2}$ te schrijven als

$$\mathbf{T}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (154)$$

In termen van deze operatoren $\mathbf{T}_{1,2}$ is

$$\mathbf{T}^2 = \mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_2^2 + \mathbf{T}_3^2. \quad (155)$$

De operatoren \mathbf{T}_i staan bekend als de *isospin*-operatoren. Ze kunnen worden opgevat als een soort spin in een ‘interne’ configuratieruimte. De eigenwaarden van \mathbf{T}_3 is dan de 3e component van de isospin in deze interne ruimte, en τ is de totale isospin. Omdat deze operatoren commuteren met de Hamilton-operator, zijn de isospin-quantumgetallen (τ, τ_3) behouden grootheden.

De nucleon-toestanden zijn ontaard; daarom kunnen we lineaire combinaties van toestanden maken, die nog steeds dezelfde spin en energie-eigenwaarde hebben. De simpelste lineaire combinatie die de norm van de golffunctie invariant laat is de rotatie

$$\Psi(E, s; \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \psi_p - \sin \alpha \psi_n \\ \sin \alpha \psi_p + \cos \alpha \psi_n \end{bmatrix}. \quad (156)$$

Omdat de golffuncties $\psi_{p,n}$ complex zijn, kunnen we meer lineaire superposities maken door complexe combinaties te vormen. De meest algemene transformatie die we met de isospinoperatoren kunnen maken en die de norm van de toestandsvector onverandert laat, een functie van drie onafhankelijke parameters $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ en kan worden geschreven in de vorm

$$\Psi[\alpha_i] = e^{i(\alpha_1 \mathbf{T}_1 + \alpha_2 \mathbf{T}_2 + \alpha_3 \mathbf{T}_3)} \Psi = \mathbf{U}[\alpha_i] \Psi. \quad (157)$$

De exponent kan in dit geval eenvoudig uitgeschreven worden:

$$\mathbf{U}[\alpha_i] = \mathbf{1} \cos \frac{\|\boldsymbol{\alpha}\|}{2} + \frac{i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|} \sin \frac{\|\boldsymbol{\alpha}\|}{2}, \quad (158)$$

waarin $\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$, terwijl σ_i staat voor de drie Pauli matrices. In de 2-dimensionale toestandsruimte is dit de meest algemene unitaire operator $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger$ met eenheidsdeterminant:

$$\det \mathbf{U} = 1. \quad (159)$$

De transformatie (157) van de golffunctie verandert de energie-eigenwaarde niet, en commuteert dus met de Hamilton-operator:

$$[\mathbf{H}, \mathbf{U}] = 0. \quad (160)$$

De isospintransformaties (157) kunnen dus worden geïnterpreteerd als een symmetrie: transformaties van de golffunctie die de hamiltoniaan (en dus de energieniveaux) invariant laten.

12. Fotonen

De eerste aanwijzingen voor het bestaan van het foton als elementair deeltje werden gevonden door Planck. Hij vond empirisch de exacte uitdrukking voor de spectrale energieverdeling van de thermische straling van een zwart lichaam. Daaruit leidde hij af, dat bij temperatuur T de gemiddelde energie van een oscillator met frequentie ν in evenwicht met deze thermische straling gegeven wordt door de uitdrukking

$$E(\nu, T) = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (161)$$

De natuurconstante h werd door Planck speciaal voor de beschrijving van dit verschijnsel ingevoerd. Via de thermodynamische relatie

$$dU = TdS \quad (162)$$

kon hij hieruit afleiden dat de entropie van N oscillatoren in evenwicht met de thermische straling gegeven wordt door

$$S(\nu, T) = Nk \left[\left(1 + \frac{U}{Nh\nu}\right) \ln \left(1 + \frac{U}{Nh\nu}\right) - \frac{U}{Nh\nu} \ln \frac{U}{Nh\nu} \right], \quad (163)$$

met $U = NE$ de totale energie van de oscillatoren. Als je nu de Boltzmannrelatie

$$S = k \ln W \quad (164)$$

gebruikt om de entropie te interpreteren in termen van het aantal microtoestanden W , dan blijkt dat W overeenkomt met het aantal manieren waarop je M onderscheidbare energie-quanten met energie $\epsilon = h\nu$ (dus met totale energie $U = M\epsilon$), kunt verdelen over N onderscheidbare oscillatoren³, ieder met frequentie ν .

Planck's oorspronkelijke interpretatie was, dat energie uit het stralingsveld alleen in zulke quanta kon worden opgenomen of uitgezonden. Einstein ging een stap verder, door aan te nemen dat de energie van de straling zelf gequantiseerd is: straling bestaat uit discrete quanta met energie $h\nu$. Op grond van deze veronderstelling kon hij het foto-elektrisch effect verklaren: wanneer licht op een metaal valt, hebben alle vrijkomende elektronen een kinetische energie van maximaal

$$E_{kin} = h\nu - P, \quad (165)$$

met P de bindingsenergie (werkfunctie) van een elektron in het metaal. Bovendien neemt bij hogere intensiteit van het invallend licht wel het aantal vrijgemaakte elektronen toe, maar de energie per elektron blijft gelijk. Later voegde Einstein hier nog aan toe, dat de quanta ook een impuls \mathbf{q} hebben ter grootte

$$|\mathbf{q}| = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}, \quad (166)$$

in de richting van de voortplanting van het licht. Daarmee werd het foton een deeltje met rustmassa nul:

$$E^2 = \mathbf{q}^2 c^2, \quad (167)$$

terwijl voor een massief deeltjes als een elektron met impuls \mathbf{p} geldt, dat

$$E^2 = m_e^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2. \quad (168)$$

13. Comptonverstrooiing

Uit deze voorstelling van zaken volgt, dat de verstrooiing van een foton aan een geladen deeltje –zoals een elektron– met de wetten van de mechanica beschreven moeten kunnen worden. Compton en Debije gebruikten onafhankelijk van elkaar de wet van behoud van impuls en energie om de verandering in golflengte van een foton bij verstrooiing aan een elektron uit te rekenen. Als het elektron oorspronkelijk in rust is, en als \mathbf{q} de impuls van het foton voor de botsing is, terwijl \mathbf{q}' en \mathbf{p}' de impulsen van foton en elektron na de botsing zijn, dan volg uit vgl. (167), (168) en de behoudswetten, dat

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}' + \mathbf{p}', \quad |\mathbf{q}|c + m_e c^2 = |\mathbf{q}'|c + \sqrt{m_e^2 c^4 + \mathbf{p}'^2 c^2}. \quad (169)$$

³Dit alles in de thermodynamische limiet $(N, M) \rightarrow \infty$.

Na eliminatie van \mathbf{p}' vind je dan

$$\lambda' - \lambda = \frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta). \quad (170)$$

Hierin is θ de strooihoek van het foton. Experimenten uitgevoerd door Compton bevestigden dit resultaat.

De grootte

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e c}, \quad (171)$$

is de Comptongolflengte van een elektron in rust. De Broglie postuleerde in 1924, dat in de quantumtheorie met ieder deeltje een frequentie en golflengte moeten worden geassocieerd volgens de regels

$$E = h\nu, \quad \mathbf{p} = h\mathbf{k}, \quad \text{met} \quad |\mathbf{k}| = \frac{h}{\lambda}. \quad (172)$$

Vergl. (168) legt dan de relatie tussen frequentie en golflengte vast:

$$\nu^2 = \frac{m_e^2 c^4}{h^2} + \mathbf{k}^2 = \frac{c^2}{\lambda_e^2} + \frac{c^2}{\lambda^2}. \quad (173)$$

Het golfkarakter van het elektron werd experimenteel vastgesteld via verstrooiing aan een kristalrooster door Davisson en Germer (1927).

14. Quantumvelden

Het foton is een massaloos deeltje dat altijd met de lichtsnelheid beweegt. De elektrodynamica, samengevat in de Maxwellvergelijkingen, is dan ook een relativistische (Lorentz-invariante) theorie⁴. Om dit te zien, beginnen we met de Maxwellvergelijkingen voor vrije velden:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (174)$$

De oplossingen van deze vergelijkingen kunnen worden uitgedrukt in de scalarpotentiaal ϕ en de vectorpotentiaal \mathbf{A}

$$\mathbf{E} = \nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (175)$$

⁴Voor een korte samenvatting van de 4-dimensionale meetkundige formulering van de speciale relativiteitstheorie, zie de appendix.

Om een manifest relativistische formulering te krijgen, nemen we de potentialen (175) bij elkaar in een vier-vector

$$A_\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \mathbf{A} \right). \quad (176)$$

De veldsterkten (\mathbf{E}, \mathbf{B}) zijn hieruit terug te krijgen door afgeleiden te nemen. Gebruiken we de notatie

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad (177)$$

dan kunnen we een anti-symmetrische veldsterktetensor construeren van de vorm

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (178)$$

De Maxwellvergelijkingen (174) zijn nu op Lorentz-covariante wijze te schrijven als

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0. \quad (179)$$

De laatste vergelijking is feitelijk een identiteit wanneer $F_{\mu\nu}$ uitgedrukt wordt als antisymmetrische afgeleide van een viervector A_μ als in (178). Merk op, dat de veldsterktetensor $F_{\mu\nu}$ dan invariant is onder herdefinities van de potentialen van de vorm

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad (180)$$

waarin $\Lambda(x)$ een willekeurige scalaire functie is. Deze vrijheid om potentialen te transformeren staat bekend als de *ijk-invariantie* van de Maxwellvergelijkingen. Ze kan gebruikt worden om een extra voorwaarde aan de potentialen op te leggen; daarvoor wordt meestal de covariante Lorenz-conditie gebruikt:

$$\partial^\mu A_\mu = 0. \quad (181)$$

Met deze extra voorwaarde wordt de eerste Maxwellvergelijking (179) vereenvoudigd tot

$$\square A_\nu \equiv \partial^\mu \partial_\mu A_\nu = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta \right) A_\nu = 0. \quad (182)$$

Dit is de golfvergelijking met als standaardoplossing de vlakke golven

$$A_\mu(x; k) = \varepsilon_\mu(k) e^{-ik \cdot x}. \quad (183)$$

Om aan de golfvergelijking (182) en de Lorenz-conditie (181) te voldoen, moeten we aan de golfvector k^μ en de amplitude $\varepsilon_\mu(k)$ de voorwaarden opleggen, dat

$$k^2 = k^\mu k_\mu = 0, \quad k \cdot \varepsilon(k) = k^\mu \varepsilon_\mu(k) = 0. \quad (184)$$

De meest algemene oplossing is natuurlijk een lineaire superpositie van zulke vlakke golven.

In de quantumtheorie correspondeert een vlakke golf met een quantum (foton) met scherp bepaalde impuls en energie:

$$\mathbf{q} = \hbar\mathbf{k}, \quad E = \hbar ck_0, \quad E^2 = \mathbf{q}^2 c^2. \quad (185)$$

zodat

$$i\hbar\partial_\mu A_\nu(x; k) = \hbar k_\mu A_\nu(x; k) = q_\mu A_\nu(x; k). \quad (186)$$

Deze correspondentie maakt het mogelijk de klassieke Maxwelltheorie in een quantumtheorie van het elektromagnetische veld te veranderen.

Het elektron is het lichtste geladen deeltje, met een massa $m_e c^2 = 0.511$ MeV. Voor energieën van 1 MeV en hoger gedragen elektronen zich dus altijd volledig relativistisch. Volgens De Broglie hebben elektronen in een mono-energetische bundel voorts een welgedefiniëerde frequentie en golflengte (172). Net als fotonen kunnen elektronen daarom worden opgevat als de quanta van een veld, het Diracveld. Dit Diracveld heeft ook vier componenten:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{bmatrix}. \quad (187)$$

Deze hebben echter een andere betekenis dan in het geval van de vier-vector potentiaal van het Maxwellveld; zo kunnen ze niet worden opgesplitst in tijd- en ruimtecomponenten.

In het geval van vrije deeltjes voldoet het Diracveld aan de vergelijking

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar} \right) \Psi = 0. \quad (188)$$

Hierin is $\{\gamma^\mu\}_{\mu=0}^3$ een stel 4×4 matrices met de eigenschap dat

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} 1_4, \quad (189)$$

waarbij $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ de Minkowski-metriek is, en 1_4 de 4-dimensionale eenheidsmatrix. Het wiskundig object Ψ waarop de matrices γ^μ en 1_4 werken wordt een *spinor* genoemd. Zoals opgemerkt gedragen spinoren zich onder Lorentz-transformaties anders dan vier-vectoren; in het bijzonder gaat een spinor Ψ onder een rotatie van 360° gaat over in $-\Psi$, wat karakteristiek is voor een fermion.

De Diracvergelijking (188) heeft ook standaard vlakke-golf oplossingen:

$$\Psi(x; k) = u(k)e^{-ik \cdot x}, \quad (190)$$

waarin $u(k)$ een constante spinor is die voldoet aan de matrixvergelijking

$$k_\mu \gamma^\mu u(k) = \frac{mc}{\hbar} u(k). \quad (191)$$

Dus k_μ moet zo gekozen worden, dat de matrix $k_\mu \gamma^\mu$ de eigenwaarde mc/\hbar heeft; $u(k)$ is de bijbehorende eigenspinor. Wat dit voor k_μ betekent, zien we door de matrix te kwadrateren:

$$\begin{aligned} (k_\mu \gamma^\mu)^2 &= k_\mu k_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} k_\mu k_\nu (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = \eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \\ &= k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2. \end{aligned} \quad (192)$$

Volgens standaard conventies, hebben we de eenheidsmatrix niet meer expliciet geschreven; deze wordt impliciet verondersteld als we met een scalaire grootheid als k^2 vermenigvuldigen. De eigenwaardevergelijking (191) kan nu worden gekwadrateerd tot

$$k^2 = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \Leftrightarrow \hbar^2 k_0^2 = \hbar^2 \mathbf{k}^2 + m^2 c^2. \quad (193)$$

Gebruik makend van De Broglie's relaties (172) is dit de energie-impuls vergelijking voor een relativistisch deeltje van scherp bepaalde energie en impuls. De uitkomst van deze analyse is, dat de quanta van het Diracveld geïnterpreteerd kunnen worden als relativistische deeltjes van massa m en spin $s = 1/2$, op dezelfde wijze als waarop de quanta van het elektromagnetische veld geïdentificeerd kunnen worden met massaloze fotonen met spin $s = 1$.

De quantum-elektrodynamica (QED) is de theorie van fotonen en elektronen in wisselwerking. Deze deeltjes corresponderen met de quantum-excitaties van de bijbehorende velden, het spinorveld Ψ voor elektronen, en het vectorveld A_μ voor fotonen; in het bijzonder worden deeltjes met scherp bepaalde energie en impuls gerepresenteerd door vlakke golven met welgedefinieerde frequentie en golfvector. Het enige extra element dat er in de QED nog bijkomt, is de specifieke vorm van de wisselwerking tussen fotonen en elektronen: elektronen kunnen fotonen één tegelijk uitzenden of opnemen, onder voorwaarde dat de energie, impuls en lading in iedere afzonderlijk wisselwerking behouden zijn.

De drie basisprocessen van de QED:

- voortplanting van een elektron;
- voortplanting van een foton;
- emissie/absorptie van een foton door een elektron,

kunnen eenvoudig diagrammatisch voorgesteld worden als in fig. 7..

Deze diagrammatische representatie is onafhankelijk van elkaar ingevoerd door Stückelberg en Feynman. Ingewikkelder processen kunnen worden voorgesteld door combinatie van deze drie basiselementen. Zo wordt de verstrooiing van twee elektronen via de uitwisseling van een foton beschreven door het diagram van fig. 8.

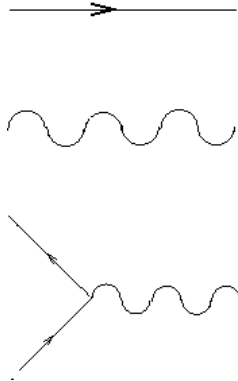


Figure 7: Diagrammatische voorstelling van processen in QED

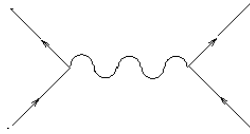


Figure 8: Elektron-elektron verstrooiing (tijd langs de verticale as).

Anti-materie

De energie-impuls relatie voor relativistische deeltjes

$$E^2 = p_0^2 c^2 = m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2,$$

heeft twee oplossingen:

$$p_0 = \pm \frac{E}{c} = \pm \sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (194)$$

N.B.: In onze notatie staat E altijd voor de positieve wortel.

Dit roept de vraag op, hoe de oplossingen met negatieve energie ($p_0 < 0$) geïnterpreteerd moeten worden. Dirac merkte op, dat het toevoegen van een elektron met lading $q = -e$ en energie $-E$ aan een fysisch systeem equivalent is met het wegnemen van een elektron met lading $q = e$ en energie E , en omgekeerd. Hij leidde hieruit af dat er anti-elektronen moeten bestaan met dezelfde massa en spin als het elektron, maar tegengestelde (positieve) lading. Deze *positronen* werden in 1932 door Carl Anderson ontdekt in de kosmische straling. Anti-protonen bestaan ook, maar werden pas in 1955 voor het eerst waargenomen bij experimenten met het Bevatron in Berkeley.

Merk op, dat in de vlakke-golfoplossingen van de quantum-elektrodynamica het omkeren van het teken van E equivalent is met het omkeren van de richting van de tijd: $t \rightarrow -t$. Anti-deeltjes worden daarom soms ook voorgesteld als deeltjes die achteruit lopen in de tijd.

Het bestaan van positronen voegt aan de QED een nieuw soort processen toe: een elektron en een positron kunnen opgaan in fotonen:

$$e^- + e^+ \rightarrow n\gamma. \quad (195)$$

Voor $n = 1$ wordt dit proces diagrammatisch beschreven door het laatste diagram in fig. 7, maar nu zo gelezen dat de tijd van links naar rechts loopt. Kinematisch is deze reactie echter niet mogelijk: bij dit proces kunnen energie en impuls niet beide behouden worden. In werkelijkheid worden bij elektron-positron annihilatie altijd twee of meer fotonen geproduceerd.

Het is zelfs mogelijk voor een elektron en positron om tijdelijk een gebonden toestand te vormen: positronium (e^+e^-). Zoals verwacht mag worden vervalft dit echter na korte tijd in twee fotonen.

Het omgekeerde proces, waarbij een elektron en positron gevormd worden, is ook mogelijk:

$$\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-, \quad (196)$$

mits de totale energie van de fotonen groter is dan de rustmassa van de geladen deeltjes ($E_{\gamma+\gamma} > 2m_e c^2$).

15. Deeltjes zonder spin

De reden dat het elektromagnetische veld en het spinorveld verscheidene componenten hebben is, dat deze velden een polarisatie kunnen hebben. Een elektrisch of magnetisch veld heeft een richting, en een elektromagnetische golf kan lineair gepolariseerd zijn; dan wijzen \mathbf{E} - en \mathbf{B} -veld in een vaste, onderlinge loodrechte richting. Omdat de \mathbf{E} en \mathbf{B} altijd loodrecht op de voortplantingsrichting van de golf staan, zijn er slechts twee onafhankelijke lineaire polarisatietoestanden; alle ander polarisaties worden hieruit verkregen door lineaire combinaties (superpositie).

Een elektromagnetische golf kan ook circulair gepolariseerd zijn; dan roteren de \mathbf{E} - en \mathbf{B} -vectoren met vaste frequentie om de as van voortplanting, hetzij met de klok mee of tegen de klok in. Deze twee circulaire polarisatietoestanden zijn niets anders dan tijdafhankelijke superposities van de lineaire polarisatietoestanden.

In de quantumtheorie komen de polarisatietoestanden overeen met de spintoestanden van het foton. Dit is het makkelijkst te zien in het geval van circulair gepolariseerde golven. Een golf die in de voortplantingsrichting gezien tegen de klok in draait heeft een intrinsiek impulsmoment in dezelfde richting als de bewegingsrichting. Als we de voortplantingsrichting langs de z -as nemen, wordt dit in de quantumtheorie een foton met spin $s_z = +1$ in eenheden \hbar . Een golf die met de klok meedraait correspondeert met een foton met $s_z = -1$.

Een spinorveld Ψ beschrijft ook deeltjes met spin, nu met quantum-eigenwaarden $s_z = \pm 1/2$. Daarom heeft ook een spinorveld meer componenten. In feite beschrijft het elektronveld 4 verschillende deeltjestoestanden: elektronen en positronen, elk met

twee mogelijke waarden van de spin. Daarom heeft ook een spinorveld 4 componenten (in de 4-dimensionale Minkowski-ruimte).

Deeltjes zonder spin bezitten geen polarisatie, en kunnen daarom worden beschreven met een Lorentzinvariant veld met een enkele component, een scalar $\varphi(x)$. Als zo'n veld voldoet aan de vergelijking

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \varphi(x) = 0, \quad (197)$$

dan zijn er golfoplossingen

$$\varphi(x; k) = a(k) e^{-ik \cdot x}, \quad (198)$$

met de eigenschap dat

$$\hbar^2 k^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2. \quad (199)$$

Gebruik makend van de regels van de Broglie (172) krijgen we dus weer de correcte energie-impuls relatie (168), nu voor spinloos deeltje met massa m . Vergelijking (197) voor een vrij scalarveld staat bekend als de Klein-Gordon vergelijking.

Een voorbeeld van deeltjes zonder spin zijn de pionen (π^-, π^0, π^+). Dit zijn sterk wisselwerkende deeltjes die in kernreacties of botsingen tussen nucleonen geproduceerd kunnen worden. Het π^+ en π^- zijn elkaars antideeltje, het π^0 is zijn eigen anti-deeltje. De massa van deze deeltjes is

$$m_{\pi^\pm} c^2 = 139.6 \text{ MeV}, \quad m_{\pi^0} c^2 = 135.0 \text{ MeV}. \quad (200)$$

Voor de sterke wisselwerkingen zijn deze deeltjes, afgezien van het kleine massaverschil, ononderscheidbaar. Dat betekent b.v., dat in de limiet waarin het massaverschil van neutron en proton, en dat van de pionen onderling verwaarloosd kan worden, de werkzame doorsneden voor processen als

$$p + \pi^0 \rightarrow p + \pi^0, \quad p + \pi^0 \rightarrow n + \pi^+, \quad n + \pi^0 \rightarrow p + \pi^-$$

gelijk zijn. Net als bij de nucleonen kunnen we daarom aan de pionen een isospin-quantumgetal toekennen:

$$\tau_3 = (-1, 0, +1). \quad (201)$$

De gemiddelde lading (de hyperlading) is $y = 0$, zodat ook hier de elektrische lading gegeven wordt door

$$q = y + \tau_3.$$

Bovendien blijken deze quantumgetallen onder de sterke wisselwerkingen behouden. Zo is b.v. de reactie

$$n + \pi^+ \rightarrow p^+ + \pi^0 \quad (202)$$

in overeenstemming met al deze behoudswetten, maar

$$p^+ + n \rightarrow \pi^+ + \pi^0 \quad (203)$$

heeft aan de linkerkant in totaal isospin $\tau_3 = 0$, terwijl aan de rechterkant $\tau_3 = +1$. Deze reactie is volgens isospinbehoud niet mogelijk, en komt in de natuur niet voor. De pionen zijn instabiel; het neutrale pion vervalt net als positronium (e^+e^-) na een zeer korte tijd van 0.8×10^{-16} s in twee fotonen:

$$\pi^0 \rightarrow 2\gamma. \quad (204)$$

De geladen pionen ondergaan een vorm van β -verval waarbij meestal (in 99,99 % van de gevallen) geen (anti-)elektron maar een (anti-)muon met bijbehorend neutrino wordt geproduceerd:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu. \quad (205)$$

Dit proces verloopt veel trager dan het π^0 -verval; de gemiddelde levensduur van een geladen pion is 2.6×10^{-8} s.

Het muon is vrijwel identiek aan het elektron, met dezelfde lading en spin; alleen de massa is ruim 200 maal groter:

$$m_\mu c^2 = 105.7 \text{ MeV}. \quad (206)$$

Het muon zelf ondergaat β -verval waarbij twee verschillende soorten neutrino's worden geproduceerd:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu. \quad (207)$$

Het muon leeft ruim honderdmaal langer dan het geladen pion, met een gemiddelde vervaltijd van 2.2×10^{-6} s.

De pionen zijn net als de nucleonen niet elementair, maar samengesteld uit een quark en een antiquark:

$$\pi^- = (\bar{u}d), \quad \pi^0 = (\bar{u}u - \bar{d}d), \quad \pi^+ = (\bar{d}u). \quad (208)$$

Daarom is de Klein-Gordon vergelijking op pionen slechts beperkt van toepassing: de vergelijking geldt alleen voor energieën en afstanden waarbij de inwendige structuur van de deeltjes verwaarloosd mag worden.

Het Standaardmodel van de quarks en leptonen maakt het noodzakelijk dat er ook elementaire scalardeeltjes (niet opgebouwd uit quarks en/of leptonen) in de natuur voorkomen; op zijn minst voorspelt het een ongeladen spinloos deeltje, het Higgs boson H^0 , met een vooralsnog onbekende massa. Omdat het deeltje niet in de experimenten bij de e^+e^- -botsingsmachine LEP van het CERN is waargenomen, is er een ondergrens aan de massa van

$$m_H c^2 \geq 115 \text{ GeV}, \quad (209)$$

d.w.z. meer dan 125 maal de massa van het proton (een zware atoomkern, minimaal een jodiumkern). Er wordt algemeen verwacht dat dit deeltje over een paar jaar bij de LHC op het CERN gevonden zal worden. Als dit niet zo is, zijn een revisie van het Standaardmodel en de onderliggende ideeën over quantumvelden bijna onvermijdelijk.

16. Vectordeeltjes

De Diracvergelijking (188) en de Klein-Gordon vergelijking (197) zijn veldvergelijkingen voor de quantumvelden van deeltjes met spin 1/2 en spin 0, en willekeurige massa m . De Maxwellvergelijking (179) beschrijft massaloze fotonen, deeltjes met spin 1. Massieve deeltjes met spin 1 worden quantum-mechanisch beschreven een eenvoudige uitbreiding van de Maxwellvergelijking, in termen van een vectorveld V_μ :

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} V_\nu = 0, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu \quad (210)$$

Deze vergelijking wordt soms de Proca-vergelijking genoemd. Uit de antisymmetrie van de tensor $F_{\mu\nu}$ volgt, dat

$$\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = -\partial^\nu \partial^\mu F_{\nu\mu} = 0. \quad (211)$$

Door de vier-divergentie van verg. (210) te nemen, krijgen we dan

$$\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \partial^\nu V_\nu = 0, \quad (212)$$

de Lorenz-conditie. Met een massaterm $m^2 \neq 0$ gaat de ijk-invariantie (180) in de Proca vergelijking verloren: $F_{\mu\nu}$ is wel ijk-invariant, maar het veld V_ν zelf niet. We kunnen dus geen gebruik maken van ijk-invariantie om de Lorenz-conditie op te leggen; de conditie volgt nu echter direct uit de veldvergelijking zelf. Uit deze conditie leiden we vervolgens af, dat

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \partial^\mu \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu \partial^\mu V_\mu = \square V_\nu. \quad (213)$$

Dan voldoet het vectorveld V_μ dus aan de Klein-Gordonvergelijking plus Lorenz-conditie

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) V_\mu = 0, \quad \partial^\mu V_\mu = 0. \quad (214)$$

De vlakke-golfoplossingen van de vergelijkingen (210), (214) corresponderen daarom in de quantumtheorie met deeltjes met 3 onafhankelijke polarisatietoestanden waarvoor de energie-impuls relatie (168), (199) geldt.

In de natuur komen zowel massaloze als massieve vectordeeltjes voor. Van de massaloze vectorbosonen is het foton het meest bekende voorbeeld. Het wordt uitgewisseld door geladen deeltjes, zoals elektronen, muonen en quarks. Daarnaast zijn er nog een achttal massaloze vector bosonen die de sterke kleurkracht overbrengen, de *gluonen*; de kleurkracht bindt quarks tot nucleonen, pionen en andere sterk wisselwerkende deeltjes. Dat er acht zijn heeft te maken met de aard van de ladingen die de koppeling van gluonen aan quarks bepalen. Terwijl een elektron altijd dezelfde elektrische lading draagt, en het positron de tegengestelde lading, kan een quark drie verschillende ladingen hebben voor de sterke wisselwerking. Deze drie ladingstoestanden worden

onderscheiden m.b.v. een kleur. Dus een golffunctie van een quark $q = (u, d, \dots)$ heeft een extra index $a = (r, g, b)$ die aangeeft welke kleurlading het quark heeft:

$$\Psi_q = \begin{bmatrix} q^r \\ q^g \\ q^b \end{bmatrix}, \quad (215)$$

waarbij de labels (r, g, b) staan voor rood, groen en blauw. De anti-quarks dragen dan anti-ladingen $(\bar{r}, \bar{g}, \bar{b})$, voor anti-rood, anti-groen en anti-blauw.

Een belangrijk verschil tussen fotonen en gluonen is nu, dat gluonen zelf kleurladingen dragen; preciezer: ze dragen een kleur- en een anti-kleurlading, waarvan er 9 combinaties zijn:

$$\begin{bmatrix} r\bar{r} & r\bar{g} & r\bar{b} \\ g\bar{r} & g\bar{g} & g\bar{b} \\ b\bar{r} & b\bar{g} & b\bar{b} \end{bmatrix}. \quad (216)$$

Van deze 9 combinaties is er één lineaire superpositie die overeenkomt met een volledig ‘kleurloze’, dus ongeladen, toestand, nl. $(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b})$. Met deze combinatie correspondeert geen gluon. Met de andere 8 combinaties wel, en dat verklaart het aantal massalozes gluonen in de natuur.

Omdat gluonen zelf kleurladingen dragen, oefenen ze onderling sterke krachten uit. Een gluon draagt alrijd een heel veld van sterk-wisselwerkende gluonen om zich heen. Een vrij gluon bestaat daarom eigenlijk niet in strikte zin. Een foton heeft daarentegen zelf geen elektrische lading, zodat een foton ook geen Coulombveld meedraagt en er geen directe wisselwerking tussen fotonen is. In de afwezigheid van externe elektrische ladingen kan het foton zich daarom als een vrij deeltje gedragen.

Naast de massalozes fotonen en gluonen zijn in de natuur ook drie elementaire *massieve* vectordeeltjes bekend. Deze spelen een essentiële rol bij de zwakke interacties, zoals β -verval. Het Z^0 deeltje is neutraal en gedraagt zich als een massief foton dat uitgewisseld wordt door zowel quarks als leptonen, inclusief neutrino’s. Daarbij speelt echter wel een subtiel effect mee, waardoor deze processen niet spiegelinvariant zijn. Dit verschijnsel heet de schending van *pariteit*. We komen hier nog op terug.

Het Z^0 -deeltje heeft spin $s = 1$ en een zeer grote massa, bijna honderd keer groter dan het proton:

$$m_Z c^2 = 91.2 \text{ GeV}. \quad (217)$$

Het kan uiteenvallen in bijna alle mogelijke paren van deeltje-plus-antideeltje, zoals elektron/positron, muon/antimuon, neutrino/antineutrino of quark/antiquark. Het omgekeerde proces wordt gebruikt om het Z^0 -boson in het laboratorium te maken: in de voormalige LEP-versneller van CERN troffen elektronen en positronen elkaar met een CM-energie $E_{CM} = m_Z c^2$, zodat een Z^0 -deeltje in rust gemaakt kon worden. Dit is de basis voor processen zoals $\mu\text{-}\bar{\mu}$ -creatie geschetst in fig. 9.

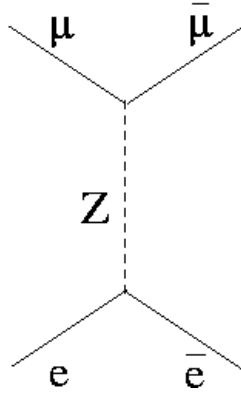


Figure 9: Muon-paarcreatie via Z -uitwisseling.

Het Z^0 -boson wordt begeleid door twee geladen massieve vectordeeltjes W^\pm , met dezelfde lading als het (anti-)elektron. De W^\pm -deeltjes zijn elkaars antideeltje, en hebben een massa van

$$m_W c^2 = 80.3 \text{ GeV}, \quad (218)$$

iets minder dan het Z^0 . Ze vallen uiteen in een geladen lepton en bijbehorend neutrino, b.v.

$$W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e, \quad \text{of} \quad W^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \quad (219)$$

of in een quark-antiquarkpaar met verschillende lading:

$$W^- \rightarrow d + \bar{u}. \quad (220)$$

In feite ziet het W -deeltje het verschil niet tussen quarks of leptonen, net zomin als een foton weet of een elektrische lading gedragen wordt door een elektron e^- of een muon μ^- (zolang het massaverschil geen rol speelt): in de limiet waarin de massa's van de deeltjes in de eindtoestand verwaarloosd worden, is de quantummechanische waarschijnlijkheidsamplitude voor al deze processen gelijk. In deze zin vertonen de zwakke interacties *universaliteit*.

De W -deeltjes treden op als tussentoestand bij β -verval processen zoals het muon verval:

$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu + (W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e). \quad (221)$$

Dit is geïllustreerd in fig. 10. Het neutronverval is op eenzelfde manier te interpreteren in termen van een transmutatie van quarks

$$d \rightarrow u + (W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e). \quad (222)$$

Bij het verval van het derde en meest massieve geladen lepton, het τ -lepton met massa $m_\tau = 1.78 \text{ GeV}/c^2$, zijn er meer eindtoestanden mogelijk:

$$\tau^- \rightarrow \nu_\tau + (W^- \rightarrow X), \quad (223)$$

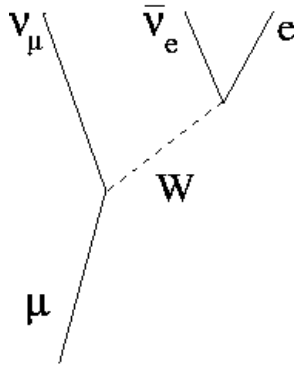


Figure 10: Muonverval.

met twee lepton-vervalswijzen: $X = e^- + \bar{\nu}_e$ en $X = \mu^- + \bar{\nu}_\mu$, en 3 hadronische (d.w.z. quark) vervalswijzen: $X = d^a + \bar{u}^a$, $a = (r, g, b)$. Vergelijking van de levensduur van het τ -lepton met die van het muon is inderdaad in overeenstemming met vijfmaal zoveel vervalmogelijkheden voor het τ -lepton. Dit bevestigt de universaliteit en het bestaan van de 3 verschillende kleurtoestanden van de quarks.

Universaliteit is ook een eigenschap van de koppeling van Z -deeltjes aan leptonen: de amplitude voor het proces $Z \rightarrow f\bar{f}$ is hetzelfde voor de geladen leptonen $f = (e, \mu, \tau)$, en ook hetzelfde voor de drie neutrino's $f = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$ (maar niet gelijk voor geladen leptonen en neutrino's). Nu hebben neutrino's twee karakteristieke eigenschappen: ze hebben zeer kleine massa's (waarschijnlijk minder dan 1 eV), en ze zijn niet direct waarneembaar in een versnellerexperiment. Als een Z -deeltje vervalt in neutrino's, merken we alleen dat in de eindtoestand de energiebalans niet klopt. We kunnen dus de verschillende neutrino's niet van elkaar onderscheiden. Wel kunnen we zeggen hoeveel soorten neutrino's een Z -deeltje kan maken: tel het aantal keren dat er neutrino's worden gemaakt en vergelijk dat met het aantal verwachte neutrino's van een enkel type. Hieruit blijkt, dat er precies 3 soorten neutrino's zijn die uit Z -verval kunnen voortkomen, en dus een massa hebben van minder dan $45 \text{ GeV}/c^2$.

17. De zwakke wisselwerkingen

De massieve vectordeeltjes Z^0 en W^\pm brengen β -verval en andere zwakke wisselwerkingen tot stand. Door de grote massa van deze deeltjes is het bereik van de zwakke kracht beperkt. Dit verklaart de kleine werkzame doorsnede van botsingsprocessen die via de zwakke wisselwerking verlopen. Zo kan b.v. een neutrino elastisch verstrooid worden door een quark (in een nucleon) of een geladen lepton (e, μ) via uitwisseling van Z -bosonen, zoals in fig. 11. Maar deze werkzame doorsnede is klein in vergelijking met die van de Rutherfordverstrooiing tussen elektrisch geladen deeltjes, die door uitwisseling van *massaloze* fotonen tot stand komt. Bij lage energieoverdracht ($Q^2 \ll m_W^2 c^2$) wordt de verhouding tussen deze processen bepaald door een

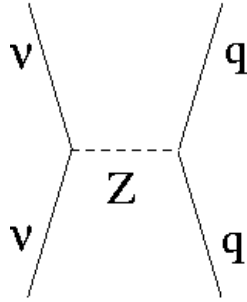


Figure 11: Neutrinoverstrooiing door een quark.

factor

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{weak} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} \sim \left(\frac{Q^2}{m_Z^2 c^2}\right)^2. \quad (224)$$

Bij uitwisseling van W -bosonen verandert altijd de lading van deeltjes. Zo kan het proces van fig. 11 bij uitwisseling van een W -deeltje (i.p.v. Z) leiden tot verstrooiing van een neutrino –dat overgaat in een elektron– aan een d -quark, dat overgaat in een u -quark. Bij dat laatste proces moet het inkomende quark (d) zijn lading met $+1$ vermeerderen, wat gaat ten koste van het inkomende lepton (ν) dat zijn lading met -1 verandert. Een anti-neutrino $\bar{\nu}$ kan omgekeerd bij verstrooiing aan een u -quark in een positron overgaan, waarbij een d -quark overblijft. Deze processen maken het mogelijk (anti)neutrino's te detecteren door een neutron in een proton over te laten gaan of omgekeerd. Daarbij verandert de lading van de kern, waar het nucleon deel van uitmaakt, van Z naar $Z \pm 1$.

Wanneer geladen deeltjes zoals elektronen, muonen en quarks aan verstrooiingsprocessen deelnemen, kunnen ze behalve fotonen ook Z -deeltjes uitwisselen. In principe wordt hun werkzame doorsnede daarom altijd bepaald door een combinatie van elektromagnetische en zwakke wisselwerkingen. In de praktijk is de bijdrage van de zwakke wisselwerkingen echter verwaarloosbaar, omdat de elektrische Coulombwisselwerking domineert. De uitwisseling van Z -deeltjes op zichzelf geeft geen Coulombpotentialiaal, maar een Yukawapotentialiaal (73), met

$$\lambda = \frac{m_Z c}{\hbar} \approx (4 \times 10^{-18} \text{ m})^{-1}, \quad (225)$$

de inverse Compton-golflengte van het Z -deeltje. Dit maakt duidelijk, dat de karakteristieke dracht van de zwakke wisselwerking slechts een fractie van de protondiameter is. Pas als de energieoverdracht in het verstrooiingsproces de waarde $M_Z c^2 \approx 90 \text{ GeV}$ benadert, kan de zwakke wisselwerking tussen geladen deeltjes zich manifesteren op voet van gelijkheid met de elektromagnetische interactie. Dit is ook wat vergl. (224) ons vertelt.

Hoewel de zwakke wisselwerkingen veel weg hebben van de uitwisseling van massieve fotonen, al dan niet met een eigen lading, is er een essentieel verschil tussen zwakke

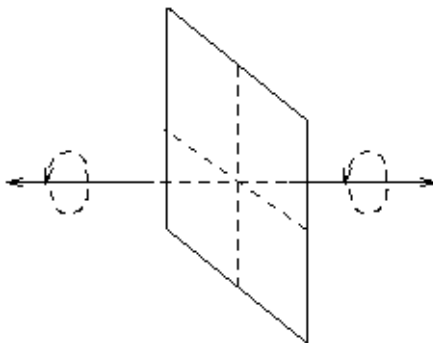


Figure 12: Spiegeling van beweging.

en elektromagnetische interacties: de zwakke interactie schendt pariteit. Daarmee bedoelen we, dat de zwakke wisselwerkingen van links- en rechtshandig gepolariseerde relativistische deeltjes verschillend zijn. Aangezien een linkshandig gepolariseerd deeltje onder spiegeling overgaat in een rechtshandig gepolariseerd deeltje, betekent dit dat de natuur –door het bestaan van de zwakke interacties– niet invariant is onder spiegeling. Dit is geïllustreerd in fig. 12, waar te zien is dat bij spiegeling de bewegingsrichting omkeert, maar de draairichting niet, zodat een links- en rechtshandig draaiend deeltje die loodrecht op het vlak van de spiegel bewegen elkaars spiegelbeeld zijn.

Preciezer betekent dit het volgende. Een spin-1/2 deeltje kan twee polarisatietoestanden hebben, gekenmerkt door de spin. Als het deeltje een impuls $\mathbf{p} \neq 0$ heeft, dan kan de spin in de richting van de impuls gericht zijn, of in de tegengestelde richting. De waarde van de spin in de richting van de impuls heet de *heliciteit*:

$$h = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}. \quad (226)$$

Voor een fermion is $h = \pm 1/2$. Voor een deeltje met massa is de helicititeit afhankelijk van de waarnemer: als voor een bepaalde waarnemer de helicititeit $+1/2$ is, dan is voor een andere waarnemer die met een grotere snelheid in dezelfde richting als het deeltje beweegt de helicititeit $-1/2$, omdat voor haar/hem het deeltje in de andere richting beweegt. Voor een waarnemer t.o.v. wie het deeltje stil staat, is de helicititeit zelfs niet gedefiniëerd. Dit ligt anders voor massaloze deeltjes; die bewegen altijd met de lichtsnelheid, kunnen niet worden stilgezet en door geen enkele waarnemer worden ingehaald. Voor massaloze deeltjes is de helicititeit daarom wel een absolute waarnemer-onafhankelijke grootte.

Intermezzo:

Technisch gaat de analyse voor fermionen als volgt. We kunnen een vijfde Dirac matrix invoeren:

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_5^\dagger, \quad (227)$$

met de eigenschappen

$$\gamma_5^2 = 1, \quad \gamma_5 \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_5 = 0. \quad (228)$$

Uit de eerste vergelijking volgt dat de eigenwaarden van γ_5 alleen ± 1 kunnen zijn. Nu is ook

$$\text{Sp } \gamma_5 = 0. \quad (229)$$

Dan moeten er evenveel positieve als negatieve eigenwaarden zijn, dus als we γ_5 diagonaliseren is

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (230)$$

In deze representatie is een spinor met 4 componenten op te splitsen in twee korte spinoren ψ_\pm met ieder 2 componenten:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{bmatrix}, \quad \gamma_5 \Psi = \begin{bmatrix} \psi_+ \\ -\psi_- \end{bmatrix}. \quad (231)$$

Neem nu de Dirac vergelijking in de impulsrepresentatie (190), (191):

$$k_\mu \gamma^\mu u(k) = \frac{mc}{\hbar} u(k).$$

Zulke eigenspinoren van de energie-impulsoperatoren kunnen alleen gelijktijdig eigenspinoren van γ_5 zijn, als $m = 0$, d.w.z. als de fermionen massaloos zijn. Dit is makkelijk te zien: als $\gamma_5 u_\pm = \pm u_\pm$, dan is

$$\begin{aligned} mc u_+(k) &= \hbar k_\mu \gamma^\mu u_+(k) = \hbar k_\mu \gamma^\mu \gamma_5 u_+(k) \\ &= -\gamma_5 \hbar k_\mu \gamma^\mu u_+(k) = -mc \gamma_5 u_+(k) = -mc u_+(k); \end{aligned} \quad (232)$$

dus $m = 0$. Voor $u_-(k)$ kan eenzelfde redenering opgezet worden. Voor massaloze fermionen is γ_5 echter evenredig met de spin in de bewegingsrichting. Dit is als volgt in te zien: voor een massaloos deeltje dat in de z -richting beweegt, is

$$k_\mu = (k, 0, 0, k), \quad k_\mu \gamma^\mu = k (\gamma^0 + \gamma^3). \quad (233)$$

Hieruit volgt, dat de Diracvergelijking in de impulsrepresentatie met $m = 0$ wordt:

$$k (\gamma^0 + \gamma^3) u(k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^0 u(k) = -\gamma^3 u(k). \quad (234)$$

Nu is $(\gamma^0)^2 = 1$, dus

$$-\gamma^0 \gamma^3 u(k) = u(k). \quad (235)$$

Ook is $(\gamma^3)^2 = -1$, en daarom

$$\gamma_5 \gamma^0 \gamma^3 = -i \gamma^1 \gamma^2. \quad (236)$$

Dus als $u(k)$ tegelijk een eigenspinor van γ_5 is, dan is

$$\gamma_5 u_{\pm} = \pm u_{\pm} = -\gamma_5 \gamma^0 \gamma^3 u_{\pm} = i\gamma^1 \gamma^2 u_{\pm}. \quad (237)$$

Maar in dezelfde representatie als waarin γ_5 diagonaal is, is

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (238)$$

met σ_i de Pauli matrices, zodat

$$i\gamma^1 \gamma^2 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \equiv \Sigma_3. \quad (239)$$

Dus de eigenspinoren $u_{\pm}(k)$ van γ_5 zijn tegelijk eigenspinoren van Σ_3 met eigenwaarde ± 1 . Nu is net als in de niet-relativistische quantummechanica aan te tonen, dat de operator $\Sigma_3/2$ de component van de spin in de z -richting meet. Dan zijn de eigentoestanden van γ_5 voor een massaloos deeltje dus ook de eigentoestanden van de heliceiteit. De eigenwaarde van γ_5 , die voor massaloze deeltjes de heliceiteit bepaalt, wordt ook de *chiraliteit* van het deeltje genoemd.

(Einde intermezzo)

De chiraliteit van massaloze fermionen speelt in de zwakke wisselwerkingen een grote rol. Het blijkt namelijk dat de geladen vectordeeltjes W^{\pm} alleen aan linkshandig gepolariseerde fermionen en rechtshandig gepolariseerde antifermionen koppelen. Dit is in het bijzonder duidelijk in β -verval. Het klassieke experiment op dit gebied werd gedaan door C.S. Wu in 1957. Zij polariseerde de kernspins van de radioactieve isotoop ^{60}Co in een uitwendig mageneetveld bij lage temperatuur (10 mK). Na het β -verval



bleef de kernspin gepolariseerd, en dus kwamen het elektron en neutrino er met tegengestelde impuls en heliceiteit uit. Nu bleken de elektronen allen in dezelfde richting eruit te komen, en met dezelfde linkshandige heliceiteit; De antineutrino's moesten er dan met een vaste rechtshandige heliceiteit uitkomen, in tegengestelde richting. Het W -boson kan dus alleen linkshandige leptonen maken. Voor quarks blijkt hetzelfde te gelden. Kortom, de zwakke interacties d.m.v. geladen W -bosonen produceren alleen linkshandige deeltjes en rechtshandige antideeltjes, nooit andersom. De gespiegelde reactie kan dus in de natuur niet voorkomen, en pariteit wordt door de zwakke wisselwerkingen geschonden. Dit is later in vele andere zwakke interactieprocessen bevestigd.

Ook de koppeling van Z -deeltjes aan quarks en leptonen schendt pariteit, maar iets subtieler. Voor neutrino's geldt opnieuw dat alleen links-handige neutrino's aan een Z -deeltje koppelen (dus Z -deeltjes kunnen maken, of door Z -deeltjes worden geproduceerd). Maar van de geladen deeltjes: elektronen, muonen, τ -leptonen of

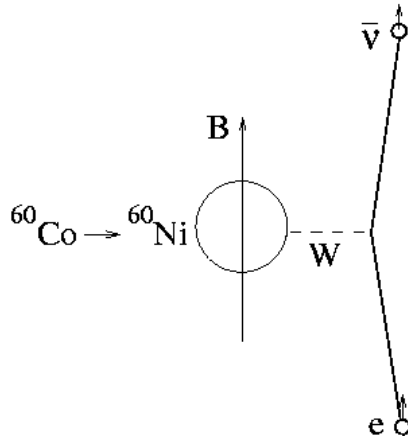


Figure 13: Pariteitschending in β -verval van ^{60}Co (Wu, 1957)

quarks, koppelen beide chiraliteiten aan de Z , zij het met verschillende sterkte. Er is in het algemeen een grotere waarschijnlijkheid voor het produceren van linkshandige fermionen dan voor rechtshandige, maar rechtshandige kunnen ook worden gemaakt.

De verklaring van dit afwijkende gedrag van de Z -deeltjes vergeleken met de W -deeltjes heeft te maken met de massa van de quarks en leptonen en van de zwakke vectorbosonen zelf. Zoals we al hebben opgemerkt is chiraliteit als Lorentz-invariante heliceiteit alleen goed gedefiniëerd voor massaloze fermionen. De pariteitschending door de zwakke interacties is dan ook strikter naarmate deeltjes sterker relativistisch zijn en hun massa vergeleken met hun totale energie kleiner wordt⁵.

Om de dynamica achter de zwakke wisselwerkingen te begrijpen is het daarom nuttig ons eerst een volledig relativistische wereld voor te stellen waarin alle deeltjes, fermionen en vectorbosonen, massaloos zijn. We hebben dan 3 families van massaloze quarks en leptonen; iedere familie omvat een neutrino en een geladen lepton, en zes quarks, waarvan een drietal met elektrische lading $+2/3$, en een drietal met lading $-1/3$. De quarks in ieder drietal onderscheiden zich alleen door kleurlading. Ieder van deze deeltjes kan voorkomen in twee chiraliteitstoestanden, met heliceiteit $+1/2$ en $-1/2$, en heeft een anti-deeltje met tegengestelde lading en chiraliteit. Daarnaast zijn er twaalf massaloze vectordeeltjes: acht gluonen voor de sterke kleurkrachten, die alleen tussen quarks en gluonen zelf werken, en vier vectordeeltjes voor de elektromagnetische en zwakke wisselwerkingen die zowel aan quarks als leptonen koppelen, en bovendien ook onderling⁶. In het bijzonder kunnen W -deeltjes zowel fotonen als ook Z -deeltjes produceren of absorberen, mits de energie-impulsbalans kloppend gemaakt kan worden.

De mogelijke interacties tussen W -bosonen, het Z -deeltje en het foton zijn dus als

⁵Voor neutrino's is dit vrijwel altijd het geval.

⁶De W -deeltjes dragen elektrische lading ± 1 en koppelen daardoor aan fotonen.

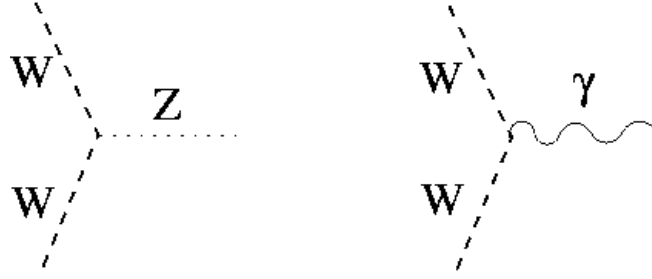


Figure 14: Koppeling van Z en foton (γ) aan W -deeltjes.

aangegeven in fig. 14. De interactietermen (ZW^+W^-) en (AW^+W^-) (waarbij A staat voor het elektromagnetisch veld) in de hamiltoniaan (of lagrangeaan) hebben precies dezelfde vorm, alleen een andere coëfficiënt (een andere koppelingsconstante). Daarom is het mogelijk een lineaire combinatie van de velden γ en Z te vinden die *niet* aan W -deeltjes koppelt, omdat in de combinatie de twee genoemde koppelingen elkaar opheffen. Preciezer: de betreffende interactietermen in de hamiltoniaan zijn van de vorm

$$\Delta H = g Z W^+ \partial W^- + e A W^+ \partial W^-. \quad (241)$$

(De manier waarop de indices worden gecontraheerd is hier niet direct van belang). We kunnen dit ook schrijven als:

$$\Delta H = \sqrt{e^2 + g^2} (\cos \theta Z + \sin \theta A) W^+ \partial W^-, \quad (242)$$

met

$$\cos \theta = \frac{g}{\sqrt{e^2 + g^2}}, \quad \sin \theta = \frac{e}{\sqrt{e^2 + g^2}}. \quad (243)$$

Het ligt dan voor de hand de volgende lineaire veldcombinaties te definiëren:

$$W^0 = \cos \theta Z + \sin \theta A, \quad B = -\sin \theta Z + \cos \theta A. \quad (244)$$

Deze zijn orthogonaal en zo gekozen, dat de interactietermen (242) de simpele vorm

$$\Delta H = g' W^0 W^+ \partial W^- \quad (245)$$

aannemen, waarbij

$$g' = \sqrt{e^2 + g^2}, \quad (246)$$

terwijl het veld B helemaal uit deze wisselwerking verdwijnt (ontkoppelt).

Met deze herdefinitie van de velden kunnen we nu ook de interactie met de fermionen bekijken, en dan ontvouwt zich een relatief eenvoudig patroon. De velden (W^+ , W^0 , W^-) koppelen alleen aan de linkshandige quarks en leptonen, met een sterkte die gegeven wordt door een behouden quantumgetal dat we *zwakke isospin* kunnen noemen. Het veld B koppelt daarentegen aan zowel links- als rechtshandige

fermionen, maar met verschillende sterkte gegeven door de bijbehorende *zwakke hyperlading*. Deze isospin en hyperlading zijn *niet* dezelfde die behouden zijn onder de sterke wisselwerking, maar de constructie verloopt analoog. Deze werkt als volgt. De W -deeltjes vormen onder zwakke isospin een triplet, met $T_3 = (+1, 0, -1)$. De gemiddelde lading is $Y = 0$; dit noemen we de zwakke hyperlading. Voor de zwakke isospin en hyperlading geldt ook weer de relatie

$$Q = Y + T_3, \quad (247)$$

met Q de elektrische lading. Voor het B -veld werkt dit ook, maar nog eenvoudiger: het is een isospin-singlet: $T_3 = 0$ en $Y = 0$. Vervolgens krijgen de fermionen de quantumgetallen gegeven in tabel 1 voor de eerste familie:

deeltje	kleur ontaarding	T	T_3	Y	Q
u_L	3	1/2	+1/2	+1/6	+2/3
d_L	3	1/2	-1/2	+1/6	-1/3
u_R	3	0	0	+2/3	+2/3
d_R	3	0	0	-1/3	-1/3
ν_L	0	1/2	+1/2	-1/2	0
e_L	0	1/2	-1/2	-1/2	-1
ν_R	0	0	0	0	0
e_R	0	0	0	-1	-1

Tabel 1: Elektro-zwakke quantumgetallen van quarks en leptonen; linkshandige deeltjes zijn gelabeld met L , rechtshandige met R .

De bijbehorende antideeltjes hebben de tegengestelde chiraliteit, en natuurlijk een tegengestelde T_3 en Y , dus tegengestelde Q . De quantumgetallen van de andere families van quarks en leptonen zijn exact dezelfde als van de eerste familie.

De volgende eigenschappen vallen op:

- de linkshandige fermionen zijn doubletten onder isospin ($T = 1/2$), de rechtshandige zijn singletten ($T = 0$). Daarom koppelen alleen de linkshandige aan de drie W -deeltjes, de rechtshandige hebben geen zwakke isospin-lading om aan de W -deeltjes te kunnen koppelen.
- De componenten van een doublet hebben beide dezelfde hyperlading, de singletten hebben een hyperlading gelijk aan de elektrische lading.
- Allen, behalve de rechtshandige neutrino's ν_R , koppelen aan het B -veld via de hyperlading Y .
- Het rechtshandige neutrino heeft geen enkele lading onder de wisselwerkingen met W - en B -deeltjes; het heeft ook geen kleurlading en is dus onzichtbaar in de massaloze wereld. Alleen via gravitatie of nog onbekende nieuwe wisselwerkingen kan het reageren met andere deeltjes.

In de wereld van massaloze deeltjes zijn al de quantumgetallen in tabel 1 behouden. Zodra we massa's gaan invoeren gaat het niet meer exact op. In de eerste plaats zijn de vectordeeltjes Z en γ (quanta van het A -veld) lineaire combinaties van velden met verschillende quantumgetallen ($T = 1$, resp. $T = 0$), zoals is af te lezen uit verg. (244). Het Z -deeltje heeft een goedbepaalde massa $m_Z \neq 0$, terwijl het foton γ een massaloze combinatie is. Deze deeltjes zijn dus experimenteel makkelijk te onderscheiden. Maar als mengtoestanden hebben ze geen scherp bepaalde isospin T en T_3 . Omgekeerd hebben de toestanden met scherp bepaalde isospin geen welgedefiniëerde massa (het zijn geen eigentoestanden van de hamiltoniaan, dus niet stationair).

Hetzelfde geldt voor de fermionen. Het elektron heeft massa $m_e \neq 0$, en zowel links- als rechtshandige helicitetoestanden (waarnemerafhankelijk). Het kan dus geen scherp bepaalde isospin en hyperlading hebben. Alleen de elektrische lading is goedgedefiniëerd en behouden, omdat de combinatie $Q = Y + T_3$ voor beide chiraliteiten hetzelfde is. Voor neutrino's en quarks werkt het identiek. Het resultaat is, dat het quantumgetal Q dat de koppeling bepaalt aan het enig overgebleven massaloze vectordeeltje (foton) ook het enige exacte behouden quantumgetal is in elektromagnetische en zwakke wisselwerkingen.

Een ander gevolg is, dat de echte W^\pm -deeltjes, die hetzelfde zijn als in de wereld van massaloze deeltjes, ook werkelijk alleen aan de linkshandige vorm van de fermionen koppelen. Foton en Z -deeltje koppelen daarentegen aan links- en rechtshandige fermionen, omdat het B -veld dat doet, en ze beide een mengvorm van B en W^0 zijn. De massa's van vectordeeltjes en fermionen zorgen er dus voor, dat de zwakke isospin en hyperlading niet met een exacte symmetrie van de wisselwerkingshamiltoniaan corresponderen (de ontaarding van de toestanden wordt opgeheven door massa's die de multipletstructuur van isospin en hyperlading niet respecteren). Men zegt daarom, dat de isospin- en hyperladingsymmetrie in de natuur *gebroken* zijn.

N.B.: Merk op dat dit iets anders is dan pariteitschending. Ook in de massaloze wereld met exacte isospin en hyperlading is pariteit geschonden. De symmetriebreking die met de zwakke vectorboson- en fermionmassa's verbonden is, leidt daarentegen tot het niet-behouden zijn van isospin en hyperlading.

Spontane massageneratie

De massa's van vectordeeltjes en fermionen zijn de oorzaak dat zwakke isospin en hyperlading gebroken zijn. In het standaardmodel worden deze massa's toegeschreven aan een dynamisch effect: een scalarveld φ dat aan alle deeltjes koppelt en in de grondtoestand (het vacuum) een constante waarde $v = \langle \varphi \rangle \neq 0$ heeft. Dit is mogelijk als de potentiële energie van het scalarveld daarmee een minimum bereikt. Stel dat een fermion zonder massa met zo'n scalarveld wisselwerkt via een term in de Diracvergelijking van de vorm

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + g \varphi) \Psi = 0. \quad (248)$$

Zolang $\varphi = 0$ is het fermion massaloos, maar zodra het scalarveld het minimum van

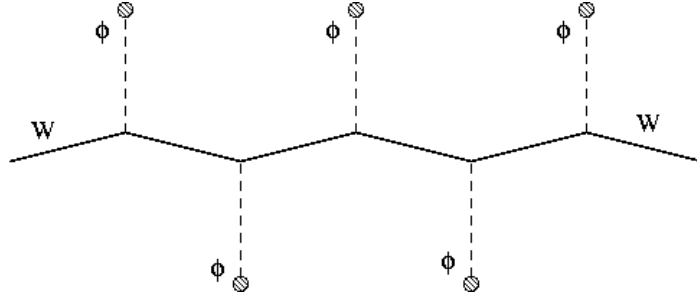


Figure 15: Spontane massgeneratie via koppeling aan een vacuum scalarveld.

de potentiële energie bereikt verandert dit en krijgen we

$$\left(\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right) \Psi = 0, \quad (249)$$

met de massa gegeven door

$$m = \frac{g\hbar v}{c}. \quad (250)$$

Dit mechanisme heet spontane massageneratie, en de symmetriebreking in de zwakke wisselwerkingen die er het gevolg van is heet daarom *spontane symmetriebreking*. Hetzelfde scalarveld dat een massa geeft aan de fermionen kan ook een massa geven aan de vectorbosonen W^\pm en Z , door het scalarveld isospin en hyperlading te laten dragen. Dan is er een directe interactie tussen de vectorbosonen en het scalarveld dat een vacuumverwachtingswaarde krijgt. Deze interactie maakt dat de deeltjes zich niet langer met de lichtsnelheid kunnen voortplanten, en dus een massa moeten krijgen.

18. Baryonen en leptonen

Quantumgetallen zoals elektrische lading, kleurlading, zwakke hyperlading en isospin hebben de speciale eigenschap dat ze niet alleen exact of bij benadering behouden zijn in wisselwerkingen tussen deeltjes, maar ook de sterkte bepalen van de koppeling van deeltjes aan de vectorbosonen

Er zijn andere behouden grootheden die niet verbonden zijn met een van de krachtvelden. De belangrijkste zijn *baryongetal* en *leptongetal*. Het baryongetal is het gedefinieerd als een derde van het aantal quarks min het aantal antiquarks:

$$N_B = \frac{1}{3} (n(q) - n(\bar{q})). \quad (251)$$

De factor $1/3$ is in de definitie opgenomen, omdat daarmee een baryon zoals het proton of neutron een baryongetal $N_B = 1$ heeft, en een antiproton of -neutron baryongetal $N_B = -1$. Een enkel quark heeft dus $n(q) = 1/3$. Sterk wisselwerkende deeltjes die uit een quark en een antiquark bestaan –de *mesonen* waartoe de pionen

behoren– hebben baryongetal $N_B = 0$. Behoud van baryonen betekent, dat een quark alleen met een antiquark kan annihileren, maar nooit in een elektron of ander lepton kan worden omgezet.

Evenzo is er een behouden leptongetal

$$N_L = n(l) - n(\bar{l}), \quad (252)$$

waarbij $n(l)$ de geladen leptonen en de bijbehorende neutrino's telt. Voor de leptonen geldt in de praktijk een sterkere behoudswet, nl. dat het leptongetal voor iedere familie apart behouden is. Dit wordt gepostuleerd omdat we b.v. nooit een muon of τ -lepton zien vervallen in een elektron plus foton, c.q. een muon plus foton:

$$\mu \not\rightarrow e + \gamma, \quad \tau \not\rightarrow (e + \gamma, \mu + \gamma). \quad (253)$$

Deze processen zouden leptongetal en elektrische lading behouden, en zijn energetisch mogelijk. Niettemin komen ze in de natuur blijkbaar niet voor. W -bosonen vervallen altijd in bij elkaar horende paren geladen leptonen en neutrino's van dezelfde familie: $(e, \bar{\nu}_e)$, $(\mu, \bar{\nu}_\mu)$ en $(\tau, \bar{\nu}_\tau)$. Een uitzondering op deze empirische regel is echter mogelijk via de neutrino-sector. De interacties met scalarvelden die zorgen voor de neutrino-massa's, blijken te koppelen aan lineaire combinaties van de verschillende neutrino-soorten, zodat de neutrino-families doorengemengd worden. Dit zou er toe moeten leiden dat de processen (253) toch moeten kunnen optreden, maar alleen via meer ingewikkelde tussentoestanden waarin de geladen leptonen eerst in een neutrino overgaan, wat daarna weer tot een (ander) geladen lepton terug transformeert. Het ontbreken van de rechtstreekse overgangen (253) wijst er in ieder geval op, dat de zwaardere leptonen niet gewoon aangeslagen toestanden zijn van elektronen.

Het mengen van quarkfamilies

We hebben gezien, dat de massa-eigentoestanden van de massieve vectordeeltjes (die als vrije deeltjes in het laboratorium waargenomen worden) niet de toestanden met welgedefinieerde zwakke ladingen (isospin, hyperlading) zijn. Ook de neutrinos en de (d, s, b) -quarks die als stationaire massa-eigentoestanden optreden blijken niet de zwakke ladingstoestanden te representeren zoals ze door W -bosonen gemaakt worden. Zo vormen de deeltjes $(\tilde{d}, \tilde{s}, \tilde{b})$, die bij het W -verval gemaakt worden als partner van (u, c, t) -quarks, lineaire combinaties van de massa-eigentoestanden (d, s, b) :

$$\begin{pmatrix} \tilde{d} \\ \tilde{s} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \quad (254)$$

De unitaire matrix V die de menging van de quarkfamilies beschrijft heet de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) matrix. De matrix bevat 4 vrije parameters, die zo gekozen worden dat de matrix de vorm krijgt

$$V = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 c_3 & -s_1 s_3 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix}, \quad (255)$$

met $c_i = \cos \theta_i$, $s_i = \sin \theta_i$, waarin $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ drie menghoeken zijn; daarnaast is er een complexe fasefactor $e^{i\delta}$. In het huidige Standaardmodel van de quarks en leptonen zijn dit vrije parameters, die experimenteel bepaald moeten worden. Uiteraard kunnen alleen deeltjestoestanden met dezelfde kleur en elektrische lading mengen, anders zouden deze quantumgetallen niet behouden zijn.

De menging van quark families, die door de CKM-matrix wordt beschreven, heeft tot gevolg dat het baryongetal niet per quarkfamilie behouden is. Immers, bij W -verval wordt een lineaire superpositie van massa-eigenstoestanden geproduceerd, die in de tijd verandert:

$$|\tilde{d}(t)\rangle = V_{ud}e^{-iE_d t/\hbar}|d\rangle + V_{us}e^{-iE_s t/\hbar}|s\rangle + V_{ub}e^{-iE_b t/\hbar}|b\rangle, \quad (256)$$

where the energies are different due to different masses:

$$E_f = \sqrt{m_f^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}. \quad (257)$$

Anderzijds zijn de massa-eigentoestanden een lineaire combinatie van quarks van verschillende familie, verkregen door het inverteren van vergl. (255). Hoewel het totale aantal quarks door de zwakke wisselwerkingen niet verandert, kan het aantal quarks van iedere familie wel veranderen.

Een soortgelijke menging kan ook optreden voor de neutrino's. Dat betekent dan, dat een neutrino $\tilde{\nu}_i$ dat wordt geproduceerd bij het verval van een W -deeltje –als partner van een elektron, muon of τ -lepton– een superpositie van verschillende massa-eigentoestanden ν_i is. Zo'n toestand is geen stationaire toestand; deze toestanden kunnen vervolgens oscilleren tussen de verschillende zwakke-wisselwerkingseigentoestanden $(\tilde{\nu}_e, \tilde{\nu}_\mu, \tilde{\nu}_\tau)$. Zulke oscillaties zijn waargenomen bij neutrino's die van de zon afkomstig zijn. Voor de neutrino's is de unitaire mengmatrix $V^{(\nu)}$:

$$\tilde{\nu}_i = \sum_j V_{ij}^{(\nu)} \nu_j, \quad (258)$$

echter ingewikkelder dan de CKM-matrix, en bezit meer vrije parameters. Door het optreden van deze menging wordt verwacht, dat ook voor de leptonen alleen het totale leptongetal strikt behouden is, maar niet het leptongetal per familie.

19. Appendix: Speciale Relativiteitstheorie

De speciale relativiteitstheorie gaat uit van het bestaan van een speciale klasse van coördinatensystemen: inertiaalsystemen. Deze hebben de bijzondere eigenschap dat in zo'n systeem *alle* vrije deeltjes (deeltjes waarop geen krachten werken) eenparig rechtlijnig bewegen.

Zulke systemen zijn met elkaar verbonden door lineaire coördinatentransformaties:

$$x'^{\mu} = x^{\nu} \Lambda_{\nu}^{\mu}. \quad (259)$$

We gebruiken hier de volgende notatie: er zijn 4 coördinaten

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z); \quad (260)$$

Λ_{ν}^{μ} is een 4×4 matrix waarin de bovenindex de kolommen aangeeft, en de onderindex de rijen. Verder geldt de sommatieconventie: als een index tweemaal voorkomt (eenmaal boven, eenmaal onder), dan moet er over deze index gesommeerd worden; dus het inproduct van een rij- en een kolomvector is

$$a^{\mu} b_{\mu} \equiv \sum_{\mu=0}^3 a^{\mu} b_{\mu} = a^0 b_0 + a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3. \quad (261)$$

Uit de transformatie (259) volgt direct, dat coördinatendifferentialen op dezelfde manier transformeren:

$$dx'^{\mu} = dx^{\nu} \Lambda_{\nu}^{\mu}. \quad (262)$$

Volgens de relativiteitstheorie is er een invariant coördinateninterval dat in ieder inertiaalsysteem dezelfde waarde heeft. Langs de wereldlijn van een deeltje is dit de eigentijd $d\tau$, gedefiniëerd door

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (263)$$

waarin η de Minkowskimetrik is: $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Dat dit interval invariant is, betekent dat

$$d\tau'^2 = d\tau^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda_{\mu}^{\kappa} \Lambda_{\nu}^{\lambda} \eta_{\kappa\lambda} = \eta_{\mu\nu}. \quad (264)$$

De transformaties Λ die hieraan voldoen (het Minkowski-interval invariant laten) definiëren de klasse van de *Lorenztransformaties*. Kort gezegd: Lorentztransformaties zijn lineaire transformaties (259) die het tijd-ruimteinterval (263) invariant laten.

De laatste vergelijking (264) kan ook geschreven worden als

$$\Lambda_{\nu}^{\lambda} \eta_{\kappa\lambda} = (\Lambda^{-1})_{\kappa}^{\mu} \eta_{\mu\nu}. \quad (265)$$

De inverse metrik η^{-1} heeft dezelfde componenten als η ; we gebruiken daarom hetzelfde symbool, maar met de indices boven:

$$\eta^{\mu\nu} \equiv (\eta^{-1})_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad \eta^{\mu\lambda} \eta_{\lambda\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}. \quad (266)$$

We voeren nu ook de conventie in, dat meer algemeen indices naar boven of beneden kunnen worden verhuisd door met de Minkowskimetrik of de inverse metrik te vermenigvuldigen:

$$a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu, \quad a^\mu = \eta^{\mu\nu} a_\nu. \quad (267)$$

Je kunt dit ook zo opvatten, dat vermenigvuldiging met de Minkowskimetrik een kolomvector verandert in een rijvector, en omgekeerd. Inderdaad kan het invariante inproduct (261) tussen een rij- en kolomvector ook worden beschouwd als een inproduct van twee rij- of twee kolomvectoren door er de metrik of de inverse metrik tussen te zetten:

$$a^\mu b_\mu = a^\mu \eta_{\mu\nu} b^\nu = a_\nu b^\nu = a_\nu \eta^{\nu\mu} b_\mu. \quad (268)$$

De conventie is zelf-consistent omdat

$$\eta_{\mu\kappa} \eta^{\kappa\lambda} \eta_{\lambda\nu} = \eta_{\mu\nu}. \quad (269)$$

(Ga dit na!) Met deze conventie kunnen we vergl. (265) ook schrijven als

$$(\Lambda^{-1})^\lambda_\kappa = \eta^{\lambda\nu} \Lambda_\nu^\mu \eta_{\mu\kappa} \equiv \Lambda^\lambda_\kappa \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda_\nu^\lambda \Lambda^\mu_\lambda = \Lambda_\nu^\lambda (\Lambda^{-1})^\mu_\lambda = \delta_\nu^\mu. \quad (270)$$

Dus de inverse Lorentztransformatie krijg je door verwisseling van rijen en kolommen (transpositie), en door indices tegelijk van onder naar boven en omgekeerd te brengen.

Nu kan vergl. (262) ook geschreven worden als

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \Lambda_\nu^\mu. \quad (271)$$

Dan volgt onmiddellijk, dat

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \quad (272)$$

Covariante en contravariante vectoren

Een grootheid met vier componenten a^μ is een contravariante viervector als de componenten gemeten in twee verschillende inertiaalsystemen in elkaar overgaan op dezelfde manier als de differentiaal dx^μ ; m.a.w.: het verband wordt gegeven door de Lorentztransformatie

$$a'^\mu = a^\nu \Lambda_\nu^\mu. \quad (273)$$

Een grootheid met vier componenten b_μ is een covariante viervector als de componenten in verschillende inertiaalstelsels verbonden zijn via de inverse Lorentztransformatie

$$b'_\mu = \Lambda^\nu_\mu b_\nu, \quad (274)$$

dezelfde transformatie als de viergradient $\partial/\partial x^\mu$. Hieruit volgt onmiddellijk, dat het inproduct (268) tussen een covariante en een contravariante viervector Lorentzinvariant is:

$$a'^\mu b'_\mu = a^\nu \Lambda_\nu^\mu \Lambda^\kappa_\mu b_\kappa = a^\nu \delta_\nu^\kappa b_\kappa = a^\nu b_\nu. \quad (275)$$

Covariante en contravariante tensoren kunnen op dezelfde manier worden gedefiniëerd; zo is een grootheid met 16 componenten $t_{\mu\nu}$ een covariante 2-tensor, als de componenten in verschillende inertiaal systemen verbonden zijn door de inverse Lorentz-transformatie

$$t'_{\mu\nu} = \Lambda^\kappa{}_\mu \Lambda^\lambda{}_\nu t_{\kappa\lambda}. \quad (276)$$

Het handige van dit formalisme is, dat vergelijkingen tussen vectoren en tensoren altijd manifest gelden in ieder inertiaalsysteem. Immers, als in een bepaald inertiaalsysteem I de componenten van twee tensoren gelijk zijn:

$$t_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} \quad (277)$$

dan geldt dit ook in een willekeurig ander inertiaalsysteem I' :

$$t'_{\mu\nu} = \Lambda^\kappa{}_\mu \Lambda^\lambda{}_\nu t_{\kappa\lambda} = \Lambda^\kappa{}_\mu \Lambda^\lambda{}_\nu f_{\kappa\lambda} = f'_{\mu\nu}. \quad (278)$$

Daarom zijn vergelijkingen tussen covariante/contravariante grootheden altijd geldig in ieder inertiaalsysteem.

Opgaven

1. *Massamiddelpunt (CM) systeem*

2-deeltjes verstrooiing:

$$E = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 + V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

Def.:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1}{M} \mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}_2, \quad M = m_1 + m_2,$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

a. Laat zien dat

$$E = \frac{M}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}), \quad \frac{dE}{dt} = 0.$$

b. Het CM-systeem is het systeem waarin $\mathbf{R} = 0$. Bewijs dat in dit systeem

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0 \quad \text{met} \quad \mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i,$$

en dat de energie in het CM-systeem wordt gegeven door

$$\varepsilon = \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}).$$

c. Het impulsmoment is $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Laat zien dat voor een bolsymmetrische potentiaal $V(r)$ het impulsmoment behouden is:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0.$$

Kies de z -as in de richting van \mathbf{L} ; dan is $\mathbf{L} = (0, 0, l)$, en de hele baan ligt in het vlak $\theta = \pi/2$. Leidt af, dat in bolcoördinaten

$$\varepsilon = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r), \quad l = \mu r^2 \dot{\varphi}.$$

d. Bewijs: uit de combinatie van deze vergelijkingen volgt dat

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2\mu r^4}{l^2} (\varepsilon - V(r)) - r^2.$$

e. Neem een Coulomb-type potentiaal $V(r) = \kappa/r$. Voer een transformatie van variabele uit

$$u = \frac{1}{r} + \frac{\mu\kappa}{l^2}.$$

Leidt af:

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \lambda^2 - u^2, \quad \lambda^2 = \frac{\mu^2 \kappa^2}{l^4} + \frac{2\mu\varepsilon}{l^2},$$

en vervolgens

$$r(\varphi) = \frac{l^2/\mu\kappa}{e \cos(\varphi - \varphi_0) - 1}, \quad e^2 = 1 + \frac{2\varepsilon l^2}{\mu\kappa^2}.$$

Dit is de vergelijking van een hyperbool met excentriciteit e .

2. *Relativistische kinematica*

Vier-impulsen:

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad p^\mu = \left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p} \right).$$

Voor een vrij deeltje van massa m geldt

$$p^2 = p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2.$$

De energie ligt dan vast bij gegeven 3-impuls \mathbf{p} ; we gebruiken dan de notatie

$$E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

a. Bij 2-deeltjes botsingen met ingaande impulsen (p_1, p_2) en uitgaande impulsen (q_1, q_2) geldt behoud van 4-impuls

$$p_1^\mu + p_2^\mu = q_1^\mu + q_2^\mu.$$

Leidt af, dat

$$p_1 \cdot p_2 = q_1 \cdot q_2 = q_1 \cdot p_1 + q_1 \cdot p_2 - m_1^2 c^2.$$

b. Zij deeltje 2 oorspronkelijk in rust: $p_2 = (m_2 c, 0, 0, 0)$. Laat zien, dat

$$m_2 c^2 E_{\mathbf{p}_1} = E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{q}_1} \left[1 - \cos \theta \sqrt{\left(1 - \frac{m_1^2 c^4}{E_{\mathbf{p}_1}^2} \right) \left(1 - \frac{m_1^2 c^4}{E_{\mathbf{q}_1}^2} \right)} \right] + E_{\mathbf{q}_1} m_2 c^2 - m_1^2 c^4,$$

met θ the hoek tussen \mathbf{p}_1 en \mathbf{q}_1 , d.w.z. de strooihoek van deeltje 1.

c. Beschouw nu het geval dat deeltje 1 extreem relativistisch is:

$$\frac{m_1 c^2}{E_{\mathbf{p}_1}} \ll 1, \quad \frac{m_1 c^2}{E_{\mathbf{q}_1}} \ll 1.$$

Laat zien, dat in deze limiet

$$E_{\mathbf{q}_1} = \frac{E_{\mathbf{p}_1}}{1 + \frac{E_{\mathbf{p}_1}}{m_2 c^2} (1 - \cos \theta)} = \frac{E_{\mathbf{p}_1}}{1 + \frac{E_{\mathbf{p}_1}}{m_2 c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

Leidt hieruit af, dat de fractie energie die in dit geval door deeltje 1 aan deeltje 2 wordt overgedragen gelijk is aan

$$y = \frac{E_{\mathbf{p}_1} - E_{\mathbf{q}_1}}{E_{\mathbf{p}_1}} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{E_{\mathbf{p}_1}}{m_2 c^2} (1 - \cos \theta)}.$$

3. Mandelstamvariabelen

Def.:

$$s = (p_1 + p_2)^2 c^2, \quad t = (p_1 - q_1)^2 c^2, \quad u = (p_1 - q_2)^2 c^2.$$

a. Laat zien:

$$\begin{aligned} s &= m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2p_1 \cdot p_2 c^2, \\ t &= 2m_1^2 c^4 - 2p_1 \cdot q_1 c^2, \\ u &= m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 - 2p_1 \cdot q_2 c^2. \end{aligned}$$

b. Leidt hieruit af, dat

$$s + t + u = 2(m_1^2 + m_2^2) c^4.$$

c. In het CM-systeem is per definitie $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = 0$. Leidt af, dat $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{q}_1|$ en daaruit dat

$$s = (E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{q}_1})^2, \quad t = -(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1)^2 c^2 = -4\mathbf{p}_1^2 c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Dus s is de totale energie in het massa-middelpuntsysteem, en $-t/c^2$ is het kwadraat van de door deeltje 1 aan deeltje 2 overgedragen impuls in dit systeem.

Opgaven 2

1. Een bundel α -deeltjes ($Z_1 = 2$) met een kinetische energie $E_\alpha = 5$ MeV valt op een trefplaatje van goudatomen ($Z_2 = 79$) (in rust). Als de bundel n α -deeltjes per cm^3 bevat, en er zijn N goudatomen per cm^2 in het trefplaatje, bereken hoeveel deeltjes per seconde worden verstrooid over hoeken van meer dan 90° .
2. Bij radioactief verval is het aantal kernen dat per tijdseenheid vervalt een vaste fractie van het aantal aanwezige kernen:

$$dN = -\lambda N dt.$$

- a. Verklaar het min-teken; bewijs

$$N(t) = N(0) e^{-\lambda t}.$$

- b. Laat zien, dat de gemiddelde levensduur van een kern wordt gegeven door

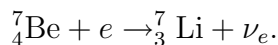
$$\bar{\tau} = \frac{1}{N(0)} \int_{N(0)}^0 t dN(t) = \frac{1}{\lambda}.$$

3. De massa van de kernen ${}^7_4\text{Be}$ en ${}^7_3\text{Li}$ is

$$m_{Be} = 7.016\,929 \text{ a.m.u.}, \quad m_{Li} = 7.016\,004 \text{ a.m.u.},$$

met $1 \text{ a.m.u.} = 1.660\,540 \text{ kg}$.

- a. Verklaar de reactie (elektronvangst)



- b. Bereken de energie en impuls van het neutrino ν_e in de limiet $m_\nu = 0$ als het Be-atoom oorspronkelijk in rust is.

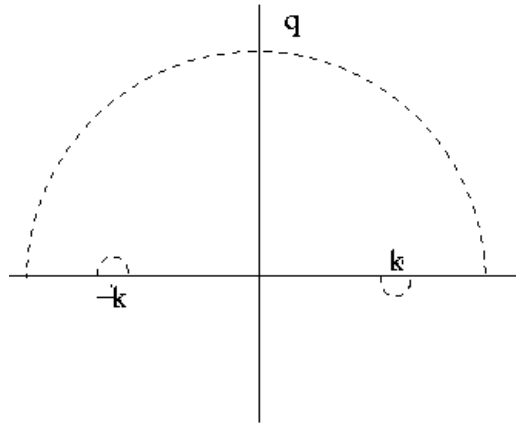


Figure 16: Contour voor G_k

4. Bewijs, dat de functie

$$G_k(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{r}$$

een oplossing is van de inhomogene partiële diff. vergl.

$$(\Delta + k^2) G_k(\mathbf{r}) = -4\pi \delta^3(\mathbf{r}),$$

waarin $\delta^3(\mathbf{r})$ de 3-dimensionale Dirac δ -functie is, met de Fourier-representatie

$$\delta^3(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}.$$

Hint:

Laat zien dat de Fouriergetransformeerde van $G_k(\mathbf{r})$ gegeven wordt door

$$\tilde{G}_k(\mathbf{q}) = \int d^3r e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} G_k(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{q^2 - k^2}.$$

Doe vervolgens de inverse Fouriertransformatie om $G_k(\mathbf{r})$ te berekenen. Gebruik in de integraal over $q = |\mathbf{q}|$ de contour uit fig. 16.

Opgaven 3

1. Bereken de differentiële werkzame doorsnede in de Bornbeadering voor een potentiaal

$$V(r) = Ce^{-ar}.$$

2. a. Bereken de vormfactor $F(\kappa)$ voor een ladingsverdeling

$$\rho(\mathbf{r}) = Ae^{-a^2r^2}.$$

- b. Bereken ook de gemiddelde kwadratische straal $\overline{r^2}$ van de ladingsverdeling.
3. In een nevelkamer botst een α -deeltje op een stilstaande kern met massa M . Het α -deeltje wordt verstrooid over een hoek van 55° , de kern vliegt weg onder een hoek van 35° met het spoor van het inkomende α -deeltje. Bepaal de massa M .

Opgaven 4

1. De Pauli-matrices zijn

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Bewijs de anti-commutatierelatie

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2 \delta_{ij} e,$$

waarin e de 2-dimensionale eenheidsmatrix is.

b. Bewijs de commutatierelatie

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k,$$

met ϵ_{ijk} de totaal anti-symmetrische tensor in 3 dimensies:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & (ijk) = \text{even permutatie van } (123); \\ -1, & (ijk) = \text{oneven permutatie van } (123); \\ 0, & \text{alle overige gevallen.} \end{cases}$$

c. Definiëer de 4×4 Dirac-matrices

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = -\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = (1, 2, 3).$$

Laat zien, dat

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 \eta^{\mu\nu} 1_4,$$

met de Minkowski-metriek $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$, en 1_4 de 4-dim. eenheidsmatrix.

d. Een extra Diracmatrix is gedefiniëerd door

$$\gamma_5 \equiv -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3.$$

Bewijs dat in bovenstaande representatie

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}.$$

Laat algemeen zien, dat

$$\gamma_5 \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_5 = 0.$$

Opgaven 5

1. De wereldlijn $x^\mu(\tau)$ van een deeltje kan worden geparаметriseerd m.b.v. de eigentijd, de tijd die gemeten door een meebewegende klok:

$$c^2 d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

- a. Laat zien, dat

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}$$

- b. De 4-snelheid is gedefiniëerd door

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

Leidt af, dat

$$u^2 \equiv \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = c^2.$$

- c. De 4-versnelling kan op soortgelijke manier gedefiniëerd worden:

$$a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}.$$

Bewijs, dat

$$u_\mu a^\mu = 0.$$

- d. De Minkowski-uitbreiding van Newtons 2e hoofdwet is

$$ma^\mu = f^\mu,$$

met f^μ de 4-kracht. In lab-coördinaten zijn de 3-dimensionale snelheid en versnelling

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Bewijs: de ruimtecomponenten van de 4-kracht zijn

$$\mathbf{f} = \frac{1}{(1 - \mathbf{v}^2/c^2)^2} \left(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \mathbf{a} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \mathbf{v} \right),$$

en de tijdcomponent wordt bepaald door

$$f^0 = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}}{c} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}/c}{(1 - \mathbf{v}^2/c^2)^2}.$$

- e. Laat zien dat de covariante 4-dimensionale uitdrukking voor de Lorentzkracht op een deeltje met massa m en lading q wordt gegeven door

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = -\frac{q}{m} F^{\mu\nu} u_\nu.$$

Verifieer dat $u_\mu a^\mu = 0$.

2. Het π^- -deeltje heeft een massa van 140 MeV; het vervalt gemiddeld na 2.6×10^{-8} s in een muon (μ^-) en een neutrino ($\bar{\nu}_\mu$).
- Aanemende dat het π^- in rust is, en dat de massa van het neutrino verwaarloosbaar is, hoeveel energie nemen het muon en neutrino ieder mee?
 - Het muon vervalt na 2.2×10^{-6} s in een elektron en twee neutrinos; wat is de maximale energie die het elektron meekrijgt?
 - Hoeveel energie moet een π^- hebben om gemiddeld 1 m af te leggen voor het uiteenvalt? Welke afstand kan een muon in dezelfde tijd afleggen?

Opgaven 6

1. Definitie:

$$P_{\pm} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}.$$

a. Bewijs dat P_{\pm} een volledig stel projectieoperatoren vormt:

$$P_+^2 = P_+, \quad P_-^2 = P_-, \quad P_+P_- = P_-P_+ = 0, \quad P_+ + P_- = 1.$$

b. Laat zien, dat m.b.v. deze projectieoperatoren de ruimte van spinoren kan worden opgesplitst in twee lineair onafhankelijke deelruimten van spinoren die onder γ_5 een eigenwaarde ± 1 hebben.

c. Bewijs dat

$$P_+\gamma^\mu = \gamma^\mu P_-.$$

Leidt hieruit af, dat oplossingen van de Diracvergelijking alleen eigentoestanden van γ_5 kunnen zijn voor massaloze fermionen ($m = 0$).

2. Zij Ψ_i , ($i = 1, 2$) een tweetal spinorvelden, met een veldvergelijking

$$\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_i = - \sum_{j=1}^2 M_{ij} \Psi_j,$$

waarin M_{ij} een hermitese matrix is.

a. Stel (μ_1, μ_2) zijn de eigenwaarden van M_{ij} . Leidt af, dat de eigenspinoren van deze matrix deeltjes representeren met massa

$$m_1 = \frac{\hbar\mu_1}{c}, \quad m_2 = \frac{\hbar\mu_2}{c}.$$

b. Stel M_{ij} is van de vorm

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & M \end{pmatrix}.$$

Bepaal de eigenwaarden $\mu_{1,2}$. Laat zien dat in de limiet $M \gg m$ de eigenwaarden bij benadering gegeven worden door

$$\mu_1 = M, \quad \mu_2 = \frac{m^2}{M}.$$

c. Bovenstaande situatie doet zich voor bij neutrinos; typische orden van grootte zijn in dat geval $m = 100 \text{ MeV}/\hbar c$ terwijl voor het lichtste neutrino $\mu_2 < 1 \text{ eV}/\hbar c$. Wat is de ondergrens voor de massaschaal die correspondeert met M ?

3. Als een muon vervalt is het neutrino dat wordt geproduceerd met impuls \mathbf{p} een superpositie van twee massa-eigentoestanden:

$$|\nu_\mu\rangle = \cos\theta |\nu_1\rangle + \sin\theta |\nu_2\rangle.$$

De energie van de twee massa-eigentoestanden wordt gegeven door

$$E_1^2 = m_1^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2, \quad E_2^2 = m_2^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2.$$

N.B.: De andere combinatie van massa-eigentoestanden, orthogonaal op $|\nu_\mu\rangle$, is

$$|\nu_f\rangle = \cos\theta |\nu_1\rangle - \sin\theta |\nu_2\rangle.$$

Een massa-eigentoestand is ook een energie-eigentoestand, en verandert dus in de tijd als

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i t/\hbar} |\nu_i(0)\rangle.$$

- a. Bepaal de tijdsafhankelijkheid van de toestand $|\psi(t)\rangle$ die als begintoestand een μ -neutrino is:

$$|\psi(0)\rangle = |\nu_\mu\rangle.$$

- b. Bepaal de waarschijnlijkheidsamplitude dat op tijd t deze toestand nog steeds een μ -neutrino beschrijft:

$$A_{\mu \rightarrow \mu}(t) = \langle \nu_\mu | \psi(t) \rangle.$$

- c. Laat zien dat de bijbehorende kans gegeven wordt door

$$|A_{\mu \rightarrow \mu}(t)|^2 = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta E t}{2\hbar},$$

met $\Delta E = E_1 - E_2$.

- d. Laat zien, dat voor extreem relativistische deeltjes $E_i^2 \gg m_i^2 c^4$ geldt:

$$\Delta E \approx \frac{\Delta m^2 c^3}{2|\mathbf{p}|}, \quad \Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2.$$

- e. Aangezien deze deeltjes met de lichtsnelheid c reizen, leidt af: de kans dat er een ander deeltje ν_f wordt geproduceerd is:

$$|A_{\mu \rightarrow f}(t)|^2 = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2 c^2 L}{4\hbar|\mathbf{p}|},$$

met $L = ct$ de afstand die het deeltje heeft afgelegd.