

Speciale Relativiteitstheorie

Prof S. Bentvelsen
NIKHEF / Onderzoeksinstituut HEF

gebaseerd op de syllabus van Prof. dr. J.J. Engelen

met medewerking van
drs. B. Mooij

versie 3.0, September 2005

Voorwoord

U heeft hier de syllabus over de Speciale Relativiteitstheorie in handen. De syllabus werd oorspronkelijk geschreven door Prof. dr. J.J. Engelen, met medewerking van drs B. Mooij.

Bij het college hoort een aparte bundel met opgaven, waarvan een aantal zullen worden behandeld tijdens de werkcolleges. De opgaven vormen naast deze syllabus eveneens een belangrijk onderdeel van de leerstof.

Ook heb ik een aantal interessante artikelen over de Speciale Relativiteitstheorie bij elkaar genomen in een aparte ‘reader’. Het bevat onder meer de oorspronkelijke artikelen van Einstein uit 1905 en van Minskowski uit 1908, een aantal hoofdstukken uit de befaamde *Feynman lectures on Physics*, etc.

Er bestaan een groot aantal leerboeken over SRT die geraadpleegd kunnen worden. Einstein zelf heeft in 1916 een zeer leesbaar semi-populaire verhandeling geschreven *Relativiteit, de speciale en algemene theorie* (vertaald in het Nederlands, Spectrum 1987, en verkrijgbaar op het web). Een uitgebreide versie van de stof van dit college staat bijvoorbeeld in het boek van A.P. French ‘*Special Relativity*’ en is verschenen als Nederlandse vertaling in the Prisma-Technica serie. Het boek van E. Taylor en J.A. Wheeler, *Space-time physics* (W.H. Freeman - New York) geeft mooie voorbeelden en bevat veel uitleg. En kijk ook een naar het boekje van George Gamow uit 1965 (Cambridge University Press), *Mr Tompkins in Wonderland*, een fantastische vertelling over de bijzondere wereld van de Speciale Relativiteitstheorie.

Over de gang van zaken, achtergrondinformatie en dergelijke, kunt u terecht op de SRT web pagina: www.nikhef.nl/pub/vakgroep/SRT/. Voor vragen en opmerkingen kunt u natuurlijk ook altijd bij mij terecht,

S. Bentvelsen
NIKHEF - Kruislaan 409 - 1098 SJ Amsterdam
tel: 020-5925140, email: s.bentvelsen@uva.nl

Inhoudsopgave

1	Inleiding	1
1.1	Tijd, ruimte en beweging	2
1.2	Wat is relativiteit?	3
1.2.1	Einstein's relativiteitsprincipe	5
2	De Galileitransformatie	7
2.1	Coördinaten stelsels	7
2.2	Voorkeurstelsel	11
2.2.1	Elektromagnetische golven	12
2.2.2	Het Michelson & Morley experiment	13
3	Tijd dilatatie en lengte contractie	17
3.1	Synchroniseren van de tijd	18
3.2	Relativiteit van gelijktijdigheid	19
3.3	Tijd dilatatie	19
3.3.1	Observatie van tijd dilatatie	22
3.4	Lengte contractie	23
3.5	Niet-relativistische limiet	24
3.6	Kosmische stralen	24
3.7	Tweelingparadox	25
4	Lorentztransformatie	26
4.1	Invariante interval	26
4.1.1	Nogmaals de lichtklok	28
4.2	De eigentijd en eigenlengte	28
4.3	De Lorentztransformatie, een eenvoudige afleiding	29
4.3.1	Notatie	33
4.4	Lorentztransformaties	34
4.5	Lorentzcontractie	35
4.6	Optellen van snelheden	36
4.7	INTERMEZZO: Alternatieve Lorentztransformatie	38

5	Vier dimensionele ruimte	42
5.1	Causaliteit en de lichtsnelheid	44
5.2	Minkowski-diagrammen	45
5.2.1	Relativiteit van gelijktijdigheid	48
5.2.2	De ‘ladder in de schuur’ paradox	49
5.3	Scalars en viervectoren	51
5.3.1	Scalars	51
5.3.2	Drie-vectoren	51
5.3.3	Vier-vectoren	52
5.3.4	Matrices	54
5.4	Het Doppler Effect	55
5.4.1	De golfvergelijking	55
5.4.2	Lorentz transformaties	56
5.4.3	De niet-relativistische limiet	57
6	Relativistische mechanica	59
6.1	Klassieke Mechanica	59
6.1.1	Behoud van impuls	60
6.1.2	Arbeid en vermogen	61
6.1.3	Potentiele energie	62
6.1.4	Behoud van energie	63
6.2	Botsingen	64
6.2.1	Elastische verstrooiing	64
6.2.2	Inelastische verstrooiing	67
6.3	Relativistische energie	68
6.3.1	De doos van Einstein	68
6.3.2	Energie van een bewegend voorwerp	69
6.4	Energie-impuls vector	71
6.4.1	Massaloze deeltjes	73
6.5	Samenvatting	73
6.6	Enige opmerkingen n.a.v. botsingen	74
7	Toepassingen	76
7.1	Kernfusie en Kernsplijting	76
7.2	Annihilatie	77
7.3	Paarcreatie	78
7.4	Het Compton-effect	78
7.5	Nogmaals het Doppler-effect	79
7.6	Roodverschuiving en het uitdijende heelal	80
7.7	Deeltjesproductie	80

Hoofdstuk 1

Inleiding

*‘Everything should be made as simple as possible,
but not simpler’*

A. Einstein

Het jaar 2005 is uitgeroepen tot het “World Year of Physics”. Het is dan precies 100 jaar geleden dat Einstein een aantal artikelen publiceerde die ingrijpende vernieuwingen in the natuurkunde teweegbrachten. Zo is hij met zijn publicatie over het deeltjeskarakter van licht de grondlegger van de kwantummechanica. Een ander grensverleggende artikel uit dat jaar is *Zur Elektrodynamik bewegter Körper - Over de elektrodynamica van bewegende lichamen* en bevat de Speciale Relativiteitstheorie, en vormt het onderwerp van dit college. Een derde artikel uit 1905 beschrijft de Brownse beweging waarmee het bestaan van atomen feitelijk werd aangetoond. In Duitsland wordt het jaar 2005 daarom ook simpelweg het “Einstein Jahr 2005” genoemd.

Rond 1900 bestond er een fysisch probleem waar natuurkundigen als Lorentz en Poincaré het hoofd over braken. Er was met nauwkeurige metingen aangetoond dat de voortplantingssnelheid van het licht onafhankelijk is van de bewegingssnelheid van de waarnemer, en dit is niet in overeenstemming met de Klassieke Mechanica zoals opgesteld door Gallilei en Newton. Een volledige oplossing van dit probleem werd gegeven door Einstein’s Special Relativiteitstheorie, waarmee hij fundamenteel nieuwe opvattingen gaf aan de begrippen ruimte en tijd, en het verband tussen die twee. Een aantal jaren later, in 1912, formuleerde hij de Algemene Relativiteitstheorie, waarin hij deze ideeën verder uitbreidde en daarmee een nieuwe beschrijving van de zwaartekracht ontwikkelde.

De toepassingen van de Speciale Relativiteitstheorie in het dagelijks leven zijn beperkt, omdat de gevolgen pas goed zichtbaar worden bij zeer hoge snelheden, in de buurt van de lichtsnelheid, of bij zeer nauwkeurige tijdsmetingen. De meeste mechanische verschijnselen om ons heen worden gewoon

prima beschreven door de Klassiek Mechanica, zoals opgesteld door Newton. We zouden op deze alledaagse verschijnselen ook de relativiteitstheorie los kunnen laten (want deze geldt voor *alle* verschijnselen voor zover we weten), maar dit levert geen voordeel op; het zou de beschrijving alleen node-loos ingewikkeld maken. Pas bij verschijnselen die bijvoorbeeld optreden in een deeltjesversneller, waarbij zeer hoge snelheden bereikt worden, of bij de beschrijving van het GPS navigatiesysteem waarbij heel nauwkeurige tijdmeting cruciaal is, zou de Newtonse mechanica verkeerde resultaten opleveren. De ‘nieuwe’ relativiteitstheorie heeft dus een groter toepassingsgebied, maar de oude theorie behoudt haar waarde voor een kleiner gebied van verschijnselen waar ze goed gebruikt kan worden als een zeer goede benadering van de algemenere theorie.

Behalve de fysisch waarneembare gevolgen heeft de relativiteitstheorie vanaf het begin grote aantrekkingskracht uitgeoefend door de fraaie en verrassende algemene inzichten. De Algemene Relativiteits theorie vereist wel de nodige wiskundige kennis, al zijn er aspecten die wel eenvoudig te begrijpen zijn. Voor een goed begrip van de Speciale Relativiteitstheorie is geen ingewikkelde wiskunde nodig. Door middel van een aantal ‘gedachte-experimenten’, die veelal van verbluffende eenvoud zijn, komen we tot de kern van deze theorie. Hiermee wordt een compleet nieuw inzicht over met name de begrippen ruimte en tijd verkregen.

Zich baserend op twee postulaten vond Einstein het correcte kader voor de hele mechanica, de elektrodynamica en, zo is onze vaste overtuiging, voor welke natuurkundige theorie dan ook, de meest moderne theorieën inbegrepen. Dit kader, de Speciale Relativiteitstheorie, is het onderwerp van dit college.

1.1 Tijd, ruimte en beweging

‘I do not define time, space, place and motion, since they are well known to all’

Newton, Principia (1686)

We kennen allemaal het begrip ‘beweging’, maar wat zou het antwoord zijn als gevraagd wordt dit begrip te *definieren*? Waarschijnlijk zult u een formulering geven waarin staat “verandering van positie in de tijd”, of iets dergelijks. Want het begrip beweging is onlosmakelijk verbonden met de concepten ‘ruimte’ en ‘tijd’. We zeggen dat een voorwerp beweegt als het verschillende posities inneemt op verschillende tijdstippen.

De begrippen ruimte en tijd in de Klassieke Mechanica komen goed overeen met de alledaagse intuïtie. Hieronder worden, in het licht van de Klassieke

Mechanica, deze begrippen nader beschreven. Let op! We zullen deze begrippen in dit college grondig herzien - deze beschrijving moet met kritische blik worden gelezen:

Ruimte in de ogen van Newton is absoluut, in de zin dat het permanent bestaat en onafhankelijk is van materie die erin beweegt. Newton zegt hierover in de Principia: “Absolute space, in its own nature, without relation to anything external, remains always similar and immovable”.

Ruimte is dus een soort drie-dimensionale matrix waarin men naar believen voorwerpen kunt plaatsen die kunnen bewegen, en er is geen interactie tussen de voorwerpen en de ruimte. Elk voorwerp in het universum bestaat op een bepaalde plaats in de ruimte en tijd. Een voorwerp in beweging ondergaat een continue verandering van plaats in de tijd. En hoewel niet praktisch, is het mogelijk alle posities in kaart te brengen met behulp van een groot netwerk van meetstokken, uitgelegd in de drie-dimensionale, kubische ruimte. Met andere woorden: de ruimte is er, and we kunnen in principe elk punt markeren. Alle natuurkundige experimenten stemmen overeen met de theorema's van Euclide's geometrie, en ruimte is daarmee Euclidisch.

Tijd, in Newtons beleving, is ook absoluut en tikt met ijzeren regelmaat. Weer in de Principia, stelt Newton: “Absolute, true, and mathematical time, of itself, and from its own nature, flows equably without relation to anything external, and by another another name is called duration”.

De taal is mooi, maar de verklaring van Newton is niet erg informatief. Zoals in de quote boven deze paragraaf te lezen is, probeerde Newton ook niet echt ruimte en tijd te definiëren. Tijd kan niet versneld of vertraagd worden, en de tijd tikt uniform in het hele universum. We kunnen ons het ‘nu’ voorstellen zoals het gelijktijdig plaatsvindt op elke planeet en ster in het heelal. Een uur tijdsverschil is identiek een uur tijdsverschil voor elk voorwerp in het universum. Ruimte en tijd, hoewel volkomen onafhankelijk, horen toch bij elkaar. We kunnen ons immers geen voorstelling maken van een voorwerp in de ruimte dat gedurende geen tijd-interval bestaat, en geen tijdinterval zonder dat dit plaatsvindt ergens in de ruimte.

1.2 Wat is relativiteit?

Gallilei Galileo was de eerste die een principe van relativiteit formuleerde, hoewel hij dat waarschijnlijk niet erg nauwkeurig deed. Hij merkte op dat de

bemanning van een eenparig bewegend schip niet kan uitmaken, met experimenten aan boord, wat de snelheid van het schip is. Zij kunnen de snelheid achterhalen door de relatieve snelheid van de wal te bepalen, door een voorwerp door het water te halen, door meting van de snelheid van de wind. Maar er is geen mogelijkheid de snelheid te bepalen zonder de wereld ‘buiten het schip’ in ogenschouw te nemen. Een schipper in een kajuit zonder ramen zal niet eens kunnen bepalen of het schip beweegt of stilstaat¹.

Dit is een principe van relativiteit; het zegt dat geen observeerbare consequenties zijn van absolute eenparige beweging. Men kan alleen de snelheid van een voorwerp bepalen *ten opzichte van* een ander voorwerp.

Natuurkundigen zijn empirici; we wijzen een concept af als het geen observeerbare consequenties heeft. We concluderen dus dat ‘absolute beweging’ niet bestaat. Objecten hebben alleen een snelheid relatief met een ander voorwerp. Elke uitspraak over de snelheid van een voorwerp moet gemaakt worden ten opzichte van iets anders.

Onze taal is vaak misleidend in het gebruik van ‘snelheid’, omdat we niet vermelden ten opzichte waarvan. Bijvoorbeeld, een agent kan u zeggen “Pardon, weet u wel dat u met een snelheid van 140 kilometer per uur reed”, zonder erbij te vermelden “ten opzichte van de aarde”. Er wordt impliciet aangenomen dat de snelheid gemeten wordt ten opzichte van de snelweg; u zult de bekeuring bij de rechter niet kunnen aanvechten op grond van het relativiteitsprincipe van Galilei.

Toen Kepler zijn heliocentrisch model van het zonnestelsel introduceerde werd hij tegengewerkt op grond van het ‘gezonde verstand’. Als de aarde rond de zon draait, waarom ‘voelen’ we deze beweging dan niet? Het antwoord volgt uit het principe van relativiteit: er zijn geen lokale observeerbare consequenties als gevolg van deze beweging². Nu dat de beweging van de aarde door de ruimte algemeen is geaccepteerd, is dit het beste bewijs geworden voor het relativiteitsprincipe. We zijn ons niet dagelijks bewust van het feit dat de aarde met een snelheid van ongeveer 30 km s^{-1} ($100000 \text{ km uur}^{-1}$) om de zon draait, dat de zon met een snelheid van 220 km s^{-1} rond het centrum van het melkwegstelsel draait en dat het melkwegstelsel zelf met een snelheid van ongeveer 600 km s^{-1} , samen met een cluster van sterrenstelsels, beweegt ten opzichte van de kosmische achtergrondstraling. We hebben deze

¹Het karakteristieke stampen over de golven daargelaten! Tegenwoordig gebruiken we vaak treinen of ruimteschepen voor dit soort gedachte-experimenten

²Er zijn wel degelijk observeerbare consequenties als gevolg van de rotatie van de aarde om zijn eigen as. Denk bijvoorbeeld aan de slinger van Foucault, het bestaan van wervelwinden en de voorkeursrichting waarin water in een putje wordt weggezogen. Het gaat hier om het feit dat er geen observeerbare consequenties zijn als gevolg van de *rechtlijnige* beweging van de aarde door de ruimte.

bewegingen alleen kunnen bepalen door observaties buiten respectievelijk de aarde, de zon en ons melkwegstelsel. Het leven van alledag is consistent met een stilstaande aarde.

1.2.1 Einstein's relativiteitsprincipe

Het relativiteitsprincipe van Einstein zegt, grofweg, dat elke wet in de natuurkunde en elke fundamentele natuurconstante hetzelfde is voor alle niet-versnellende waarnemers; dit geldt met name voor de voortplantingssnelheid van licht. Dit principe is gebaseerd op de theorie van het elektromagnetisme zoals uiteindelijk geformuleerd door Maxwell in 1870. Het relativiteitsprincipe van Einstein is niet anders dan dat van Galilei, behalve dat het expliciet stelt dat ook elektromagnetische experimenten, zoals de meting van de snelheid van het licht, de schipper van een boot (in de kajuit zonder raam) niet in staat stelt te vertellen of de boot beweegt of stilstaat. Terwijl Galilei nog dacht aan kommen met soep en kanonskogels die langs de mast naar beneden vallen, is het relativiteitsprincipe van Einstein een uitbreiding hierop.

De Maxwell vergelijkingen beschrijven alle elektromagnetische verschijnselen, zoals wisselwerkingen tussen magneten, het gedrag van elektrische ladingen en stromen, en ook het verschijnsel licht. Licht wordt gezien als een golvend elektromagnetisch veld. De vergelijkingen hangen af van de lichtsnelheid c in vacuüm³, en hiermee hangt ook het gedrag van elektromagnetische verschijnselen af van de lichtsnelheid c . Met andere woorden: als de snelheid van het licht voor twee waarnemers verschillend zou zijn, zouden de waarnemers dit kunnen achterhalen door een experiment uit te voeren met magneten, ladingen en stromen. Einstein veronderstelde een zeer sterk relativiteitsprincipe, namelijk dat de eigenschappen van magneten, ladingen en stromen hetzelfde zijn voor alle waarnemers, ongeacht hun onderlinge snelheid. Einsteins veronderstelling werd gesterkt door experimentele metingen uit die tijd⁴, en is ondertussen in vele experimenten bevestigd.

De consequenties van dit principe zijn enorm. Dit college is geheel toegewijd aan de soms merkwaardige voorspellingen en tegen-intuïtieve resultaten die hier een gevolg van zijn. Misschien wel het meest duidelijke maar moeilijk te accepten voorbeeld is dat de klassieke regel waarmee snelheden worden opgeteld niet meer juist blijkt:

Stel een schipper Alex (A) passeert met zijn schip een waarnemer Bart

³In de Maxwell vergelijkingen wordt de lichtsnelheid c gegeven door $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, waarbij ε_0 de permitiviteit van het vacuüm is en μ_0 de magnetische permeabiliteit.

⁴Het meest beroemde voorbeeld is het experiment door Michelson & Morley; we zullen dat verderop bespreken. Echter, het is onduidelijk of Einstein zelf van deze resultaten wist, hij heeft dat altijd ongewis gelaten.

(B) met snelheid u . Als A nu een appel gooit met snelheid v' (ten opzichte van zichzelf) in de richting waarin het schip beweegt, zal waarnemer B de appel zien bewegen met een snelheid $v = v' + u$. *Deze regel voor het optellen van snelheden is fout!* Of stel voor dat A de appel laat vallen in het water en de golven beschouwd die door de plons veroorzaakt worden. Als B stil staat ten opzichte van het water en de golven van het water voortbewegen met een snelheid w ten opzichte van het water, ziet B de golven natuurlijk voortbewegen met snelheid w . Waarnemer A echter, op het schip, ziet deze golven bewegen met een snelheid $w' = w - u$. *Ook deze regel voor het optellen van snelheden is fout!*

Want stel u voor dat er niet met een appel wordt gegooid, maar waarnemer A schijnt met licht uit een zaklamp. In dit geval, als we het relativiteitsprincipe van Galilei aannemen, zijn er twee mogelijke voorspellingen voor de snelheden waarmee A en B het licht zien voortplanten uit de zaklamp. Als het licht zich zo gedraagt dat het met snelheid c uit de zaklamp voortplant, dan ziet waarnemer B het licht met een snelheid $c + u$ ten opzichte van zichzelf. En in het andere geval, als het licht zich zo gedraagt dat het met een snelheid c beweegt ten opzichte van een of ander ‘medium’⁵ (analoog met water voor de watergolven), dan verwachten we dat A het licht observeert met een snelheid $c - u$ en B met snelheid c (waarbij we aannemen dat B stilstaat ten opzichte van dit medium). Het wordt gecompliceerder als beide waarnemers bewegen ten opzichte van dit medium, maar de conclusie blijft hetzelfde: beide waarnemers zullen een verschillende snelheid van het licht observeren als we de klassieke regel gebruiken voor het optellen van snelheden.

Einsteins relativiteitsprincipe verlangt dat zowel A als B dezelfde lichtsnelheid observeren; met als gevolg dat de optelformule voor snelheden moet worden aangepast. Uit talloze experimenten is gebleken dat de verzie van Einstein de juiste is. We zullen een nieuwe, correcte intuïtie moeten opbouwen, gebaseerd op het relativiteitsprincipe van Einstein.

⁵De 19 eeuwse natuurkunde had de naam ‘ether’ voor dit medium

Hoofdstuk 2

De Galileitransformatie

*‘Philosophy is written in this grand book
-I mean the Universe-
it is written in the language of mathematics.’*
G. Galilei

Gebeurtenissen spelen zich af op zekere plaatsen en tijdstippen. Een plaats beschrijven we t.o.v. een coördinatenstelsel en tijd meten we met een klok.

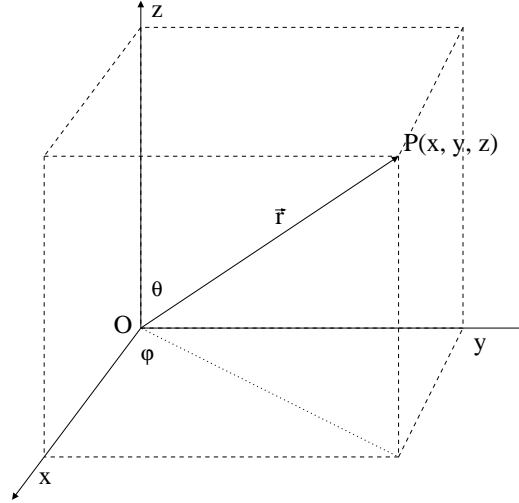
2.1 Coördinaten stelsels

Het is duidelijk dat de keuze van een specifiek coördinatenstelsel, ten opzichte waarvan beweging wordt beschreven, geheel vrij is. Het verdient natuurlijk de voorkeur een coördinatenstelsel te kiezen waarin de beschrijving van beweging het gemakkelijkst is. De bewegingen van de conducteur op een trein bijvoorbeeld, worden het makkelijkst beschreven in een stelsel waarin de trein zelf stilstaat. De eenparige beweging van de trein ten opzichte van een coördinatenstelsel verbonden met de aarde wordt (in het ideale geval) tenslotte niet eens opgemerkt.

In figuur 2.1 is een rechtshandig, orthogonaal, driedimensionaal coördinatenstelsel weergegeven. Een vector \vec{r} wijst vanuit de oorsprong \mathcal{O} naar een punt waarvan de positie door drie getallen, de coördinaten, x, y en z wordt aangegeven. (Cartesiaanse coördinaten). Orthogonaal wil zeggen dat de drie assen loodrecht op elkaar staan. Rechtshandig wil zeggen dat als we langs de positieve z -as kijken, we de positieve x -as naar de positieve y -as roteren met een rechtshandige draai¹.

Natuurlijk kunnen ook andere definities voor de coördinaten gekozen worden, bijvoorbeeld twee hoeken θ en ϕ ten opzichte van de assen en de lengte

¹Of bekijk het assenstelsel met uw handen: de positieve x -as uw duim, de y -as de wijsvinger en de z -as de middelvinger.



Figuur 2.1: *Driedimensionaal, orthogonaal coördinatenstelsel*

van de vector, r (bolcoördinaten). Meer specifiek: de poolhoek θ correspondeert met de hoek tussen de vector en de z -as, de azimuth hoek ϕ is de opening hoek met de x -as, na projectie van de vector in het $x - y$ vlak. Deze bolcoördinaten kunnen in Carthesiaanse coördinaten worden getransformeerd via

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (2.1)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (2.2)$$

$$z = r \cos \theta \quad (2.3)$$

Ongeacht de definitie van de coördinaten, zullen er altijd *drie* nodig zijn om een punt te bepalen in de ruimte. Dit is de essentie van een drie-dimensionale ruimte. We zullen in dit college verder alleen Carthesiaanse coördinatenstelsel beschouwen. Als notatie van een drie-dimensionale vector, \vec{x} , gebruiken we een pijltje boven de symboolnaam. De componenten van een vector \vec{x} geven we aan met de labels (x, y, z) .

Beschouw nu twee Cathesische coördinaatsystemen, met label S en S' , die verschoven en geroteerd zijn ten opzichte van elkaar. Bekijk het geval dat ze beide hetzelfde punt in de ruimte beschrijven. In het ene stelsel, S , heeft het punt \vec{p} de coördinaten (p_x, p_y, p_z) . Hetzelfde punt beschreven door het andere stelsel S' , heet nu \vec{p}' en heeft de coördinaten (p'_x, p'_y, p'_z) . Met andere woorden, de waarden van de coördinaten hangen af van de keuze van het coördinaatenstelsel. Dit geldt niet voor de *afstand* tussen twee punten in de ruimte. Deze afstand is onafhankelijk van de keuze van de oorsprong en rotatie van het coördinaatenstelsel, en wordt daarom een *invariante* grootte.

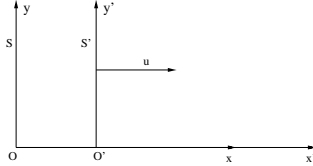
genoemd. De afstand Δr tussen twee punten \vec{x}_1 en \vec{x}_2 in Carthesiaanse coördinaten kan verkregen worden met

$$\Delta r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

oftewel

$$\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

De waarde van deze afstand Δr hangt natuurlijk wel van de keuze van de eenheden af.



Figuur 2.2: Tweedimensionaal, orthogonaal coördinatenstelsel S' beweegt met constante snelheid v t.o.v. coördinatenstelsel S

Indien we verschijnselen beschrijven die zich in een plat vlak afspelen is een tweedimensionaal coördinatenstelsel voldoende, en een punt in het platte vlak wordt met twee coördinaten beschreven. In figuur 2.2 is een tweedimensionaal coördinatenstelsel S getekend en een tweedimensionaal coördinatenstelsel S' dat met constante snelheid v beweegt t.o.v. S , in de x -richting. Denk bijvoorbeeld aan een trein bij het station, waarbij stelsel S met het perron correspondeert, en stelsel S' met de rijdende trein.

We vragen ons nu af hoe we coördinaten (van bijvoorbeeld de baan van een puntmassa) gemeten t.o.v. S kunnen uitdrukken in de coördinaten (van het zelfde verschijnsel) gemeten t.o.v. S' . Het antwoord kan gemakkelijk worden verkregen:

$$y' = y \tag{2.4}$$

$$x' = x - vt \tag{2.5}$$

waar t de tijd voorstelt (als beginvoorwaarde hebben we gekozen dat op tijd $t = 0$ de coördinatenstelsels S en S' samenvallen).

De *snelheid* in de x -richting is per definitie de afgeleide van de x -coördinaat naar de tijd:

$$V_x \equiv \frac{dx(t)}{dt}$$

Ten opzichte van S' geldt:

$$V'_x = \frac{dx'}{dt}$$

en dus volgt

$$V'_x = V_x - v \quad (2.6)$$

We hebben als vanzelfsprekend aangenomen dat

$$t' = t$$

d.w.z. we hebben aangenomen dat de tijd in S' en S op identieke wijze verloopt. Het zal in de loop van dit college blijken dat we deze ‘vanzelfsprekendheid’ moeten herzien!

Formules 2.4 en 2.5 zijn overigens ook volstrekt voor de hand liggend (en zoals we in de inleiding al zagen, moeten herzien): als een fietser zich met snelheid V_x over een weg beweegt (stelsel S) en een voetganger (stelsel S') zich met een snelheid v in dezelfde richting over die weg beweegt, dan beweegt de fietser t.o.v. de voetganger met snelheid $V'_x = V_x - v$. Gaan fietser en voetganger even hard, d.w.z. $V_x = v$, dan is hun relatieve snelheid $V'_x = 0$. Dít resultaat zullen we niet hoeven te herzien!

De *versnelling* is per definitie de afgeleide van de snelheid naar de tijd :

$$a_x \equiv \frac{dV_x}{dt}$$

Omdat v constant is is nu gemakkelijk na te gaan dat:

$$a'_x = a_x \quad (2.7)$$

Versnellingen, en dus krachten ($\vec{F} = m\vec{a}$), zijn dus gelijk in S en S' . Meer in het algemeen blijkt dat de wetten van de mechanica er hetzelfde uitzien in S en S' . Als we hier even over nadenken is dit een heel bevredigend en gewenst resultaat. Het zou een onaantrekkelijk idee zijn dat de natuurwetten zouden afhangen van de ‘toevallige’ bewegingstoestand van de natuurkundige die deze wetten opspoort.

Formules 2.4 en 2.5 staan bekend als de Galileitransformatie. Met behulp van deze formules kunnen we dus coördinaten gemeten in het ene coördinatenstelsel, *transformeren* naar coördinaten in het andere coördinatenstelsel. Wiskundig gezien is deze transformatie heel eenvoudig, maar natuurkundig gezien is de observatie dat de wetten van de mechanica hun vorm behouden (‘gelijk blijven’) van diepgaande betekenis. We zouden het als volgt kunnen formuleren: natuurkundig gezien zijn alle coördinatenstelsels²

²We beperken ons in dit college tot coördinatenstelsels die met constante snelheid (eenparig) ten opzichte van elkaar bewegen. Coördinatenstelsels die ook versnellingen tov elkaar ondergaan worden behandeld in Einsteins ‘Algemene Relativiteitstheorie’.

equivalent. Of nog anders: er is geen coördinatenstelsel dat onze voorkeur verdient.

In het voorbeeld van het perron en de rijdende trein betekent dit het volgende. Indien twee waarnemers ten opzichte van elkaar eenparig rechtlijnig bewegen (een waarnemer op perron, de ander in de trein), zullen ze precies dezelfde fysische verschijnselen meten. Voorwerpen kunnen worden gedraaid en verschoven; hun meetkundige eigenschappen zijn gelijk. En een voorwerp dat aan zichzelf wordt overgelaten, dwz waarop geen krachten werken, blijft in rust of beweegt zich eenparig rechtlijnig. Dit is de definitie van een *inertiasysteem*. De twee waarnemers bevinden zich dus in twee verschillende inertiaalsystemen. De vraag is nu: verdient een van deze inertiaalsystemen de voorkeur voor het beschrijven van fysische processen? Kunnen we de natuurwetten beter beschrijven tov de bewegende trein of ten opzichte van het perron? De situatie verandert natuurlijk drastisch zodra de trein remt of door de bocht gaat. Dan beginnen losliggende voorwerpen als ‘vanzelf’ te bewegen, en is het coördinatenstelsel van de trein geen inertiaalsysteem meer.

Een Carthesiaans ruimtelijk coördinatenstelsel waarin een aan zichzelf overgelaten voorwerp in rust blijft of eenparig rechtlijnig beweegt noemen we een *inertiasysteem*.

Met behulp van het begrip inertiaalsysteem kunnen we nu het al genoemde relativiteitsprincipe preciezer formuleren:

De natuurwetten hebben in elk inertiaalsysteem dezelfde vorm; ze zijn hetzelfde

Dit betekent dat alle inertiaalsystemen onderling equivalent zijn. Het betekent ook dat beweging relatief is in de zin dat er geen absoluut onderscheid gemaakt kan worden tussen rust en eenparig rechtlijnige beweging.

Laten we eens kijken of er niet toch inertiaalsystemen zijn die onze voorkeur hebben voor het beschrijven van de natuurwetten.

2.2 Voorkeurstelsel

Is er een inertiaalsysteem dat onze voorkeur verdient?

Golven, zoals geluidsgolven, bestaan dankzij een *medium*. Geluidsgolven zijn niets anders dan een periodieke opeenvolging van verdikkingen en verdunningen van het medium lucht. Voor golfverschijnselen blijken er wel degelijk een coördinatenstelsel te bestaan dat onze voorkeur verdient: het inertiaalsysteem ten opzichte waarvan het medium in rust is. Niet alleen is de

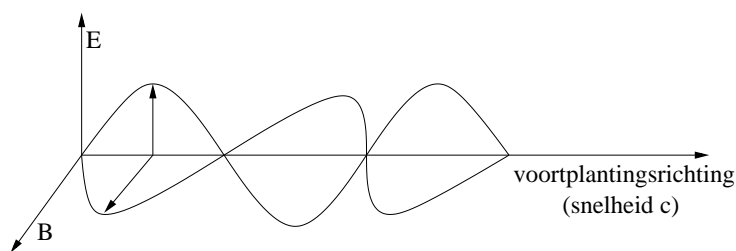
vergelijking die de plaats- en tijdsafhankelijkheid van de geluidsgolf (dus in feite van de luchtdruk) beschrijft (de wiskundige formulering slaan we over) het eenvoudigst in dit ‘voorkeurs-coördinatenstelsel’, de vergelijking ziet er na een Galilei-transformatie wezenlijk anders uit.

Strikt genomen is er in dit specifieke voorbeeld nog steeds niets aan de hand, want de mechanische wetten die op microscopische schaal geluidsgolven beschrijven voldoen nog steeds aan de eerder genoemde Galilei-invariantie, en er is in strikte zin geen voorkeurs inertiaalstelsel voor geluidsgolven. Een ander golfverschijnsel liet zich niet zo gemakkelijk verklaren.

2.2.1 Elektromagnetische golven

De theorie van elektromagnetische verschijnselen, waar in de inleiding van deze syllabus reeds naar verwezen werd, zal in de verdere opleiding nog uitgebreid aan de orde komen. De theorie is gebaseerd op de zogenaamde *Maxwellvergelijkingen* die aan het eind van de 19e eeuw reeds bekend waren. We gaan hier niet op de details in, maar vermelden dat de Maxwellvergelijkingen de kern vormen van het elektromagnetisme, van waaruit alle elektromagnetische verschijnselen beschreven kunnen worden. In het vacuüm, zonder uitwendige materie, hebben de Maxwell vergelijkingen als oplossingen: elektromagnetische golven die zich voortplanten met een bepaalde snelheid c (die we alleen maar te weten kunnen komen door te meten).

De eenvoudigste oplossing is een vlakke golf: wat zich als een golf voortbeweegt is een elektrisch veld E en, loodrecht daarop, een magnetisch veld B :



Figuur 2.3: *Elektromagnetische golf.*

Radiogolven, lichtgolven, Röntgenstralen zijn allemaal voorbeelden van elektromagnetische golven, allemaal gekarakteriseerd door dezelfde voortplantingssnelheid c (waarin verschillen ze?). De snelheid van het licht in vacuüm, c , is experimenteel bepaald :

$$c = 299792458 \text{ m/s}$$

(ongeveer $300000 \text{ km/s} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

De vraag die de natuurkunde zich stelde in de periode vóór Einstein was: wat is het medium waarin elektromagnetische golven, zoals lichtgolven, zich bewegen? Wat golft er nu eigenlijk? Het ‘natuurlijke’ coördinatenstelsel om elektromagnetische verschijnselen te beschrijven is dan het coördinatenstelsel ten opzichte waarvan dit medium in rust is. Het medium werd als reeel beschouwd, en werd ‘ether’ genoemd. Zoals Einstein zou laten zien was dit de verkeerde vraag, de ether bestaat eenvoudigweg niet!

2.2.2 Het Michelson & Morley experiment

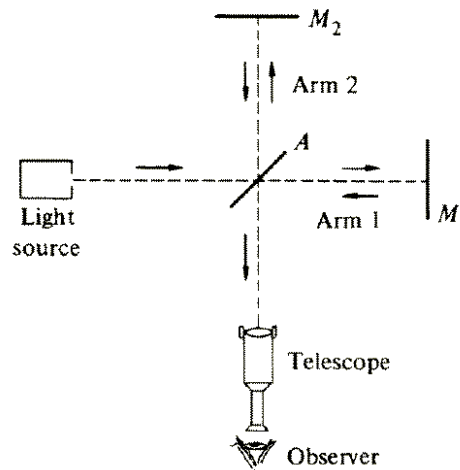
Het was Ole Roemer die in 1676 voor het eerst aantoonde dat licht een eindige snelheid heeft. Hij deduceerde dit door zorgvuldig het tijdstip bij te houden, waarop de maan Io binnentreedt in de schaduw van de planeet Jupiter, waar Io in 1,77 dagen omheen loopt. Door de situatie tijdens oppositie (waar de aarde tussen zon en Jupiter in staat) en conjunctie (waar de zon tussen aarde en Jupiter staat - en we dus Jupiter maar moeizaam kunnen waarnemen) met elkaar te vergelijken ontdekte Roemer dat er een discrepantie was die verklaard kon worden door aan te nemen dat het licht er ca. 22 minuten voor nodig had om de aardbaan te doorkruisen, oftewel een afstand af te leggen van 2 A.E. (Astronomische Eenheden). Met 1 A.E. de gemiddelde afstand van de aarde tot de zon, bepaald op ca. 150 miljoen km, kwam Christiaan Huygens twee jaar later uit op een snelheid van 200.000 km/s. In feite is de snelheid van het licht ca. 300.000 km/s, zodat Roemer een systematische fout had (in werkelijkheid heeft het licht 16 à 17 minuten nodig om de aardbaan te doorkruisen).

De eerste serieuze laboratorium-metingen om de snelheid van het licht te achterhalen stammen uit 1849 en werden uitgevoerd door Fizeau, en stelde de lichtsnelheid vast op 313.000 m/s. Ook toonde hij aan dat de lichtsnelheid in een snelstromende vloeistof, zeg met snelheid v in de voortplantingsrichting van het licht, *niet* toeneemt tot $c+v$ zoals op basis van de Galileitransformatie verwacht zou worden.

In een beroemde serie van experimenten in de 19e eeuw probeerden Michelson en Morley het bestaan van de ether experimenteel aan te tonen, door meting van de lichtsnelheid ten opzichte van de ether. De aarde draait op de zon, dus kan de aarde niet in rust zijn ten opzichte van dit medium, althans niet gedurende elke dag van het jaar en waarschijnlijk op geen enkele dag. De beweging van de aarde door de ether kan gemeten worden door de lichtsnelheid in twee loodrecht op elkaar staande richtingen te vergelijken.

Stelt u zich namelijk voor dat de hypothese van de ether juist is, dwz

er is een medium ten opzichte waarvan de lichtsnelheid de waarde c heeft, en het relativiteitsprincipe van Einstein *niet* juist is. Stel verder voor dat er een experiment wordt uitgevoerd om de snelheid van het licht c_{\oplus} op aarde te meten, die met snelheid \vec{v}_{\oplus} (een vector met lengte v_{\oplus}) beweegt ten opzichte van het medium. Als we de snelheid van het licht meten, parallel met de snelheid van de aarde \vec{v}_{\oplus} , vinden we $c_{\oplus} = c - v_{\oplus}$ omdat de aarde het licht ‘achtervolgt’. Als we de snelheid de andere kant op meten, tegenovergesteld aan de beweging van de aarde, vinden we daarentegen $c_{\oplus} = c + v_{\oplus}$. Als we nu de snelheid meten loodrecht op de beweging, vinden we $c_{\oplus} = \sqrt{c^2 - v_{\oplus}^2}$ omdat de lichtsnelheid de hypotenusa is van een rechthoekige driehoek met zijden van lengte c_{\oplus} en v_{\oplus} . Als de hypothese van het bestaan van de ether correct is, laten deze argumenten zien dat de beweging van de aarde ten opzichte van de ether gemeten kunnen worden.



Figuur 2.4: *Het Michelson & Morley experiment. Licht uit de ‘light source’ valt op de halfdoorlaatbare spiegel A. Een gedeelte van het licht legt het pad via spiegel M_1 af, een ander gedeelte een pad via spiegel M_2 . In de ‘telescope’ komen de bundels samen en is het interferentiepatroon zichtbaar.*

Het experiment van Michelson & Morley was ontworpen om deze meting te verrichten door de lichtsnelheid in twee richtingen loodrecht op elkaar te vergelijken. Omdat het moeilijk is de absolute snelheid te bepalen, was het experiment ontworpen om de relatieve snelheid van de twee richten te bepalen, met behulp van interferentie van lichtstralen. In figuur 2.4 is het experiment schematisch weergegeven. Het hele experiment werd gemonteerd op een draaibaar platform waardoor het gemakkelijk gerooteerd kon worden.

Als de totale lengte van elke bundel l is, en een bundel in de richting parallel met \vec{v}_{\oplus} loopt en de ander daar loodrecht op, wordt de tijd die het duurt voor het licht om het pad af te leggen gegeven door:

$$t_{\parallel} = \frac{l}{2(c + v_{\oplus})} + \frac{l}{2(c - v_{\oplus})} = \frac{lc}{c^2 - v_{\oplus}^2} \quad (2.8)$$

omdat de reis van het licht bestaat uit een gedeelte met en tegen de stroom in. De tijdsduur voor de richting hier loodrecht op wordt gegeven door

$$t_{\perp} = \frac{l}{\sqrt{c^2 - v_{\oplus}^2}} \quad (2.9)$$

omdat deze gehele reis gemaakt wordt loodrecht op de bewegingsrichting. Definieer nu $\beta = v_{\oplus}/c$ en bereken het tijdsverschil tussen de twee paden. We vinden

$$\Delta t = \frac{l}{c} \left[\frac{1}{1 - \beta^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right] \quad (2.10)$$

Voor kleine waarden van x geldt $(1 + x)^n \sim 1 + nx$ en hiermee wordt

$$\Delta t \sim \frac{l}{2c} \beta^2 \quad (2.11)$$

Bij een rotatie van het hele apparaat zal het ene moment de ene arm parallel met de bewegingsrichting van de aarde staan, op het andere moment de andere arm. Bij een draaiing onder een hoek van 90° wordt het tijdsverschil tussen de twee armen dus tweemaal Δt , en dit verschil moet observeerbaar zijn in het veranderende interferentiepatroon van de twee lichtbundels. In de opstelling van Michelson & Morley zou dit een verschuiving van 0.4 perioden van de golflengte van het licht moeten opleveren. Echter, er werd geen enkele verschuiving waargenomen. Ook niet een aantal maanden later, nadat het experiment is herhaald.

Dit beroemde ‘nulresultaat’ betekende een groot probleem voor de ether theorie, en leidde tot een aantal speculaties. Bijvoorbeeld, kon het gebeuren dat de aarde de ether in de baan om de zon ‘meesleurde’? In een artikel uit 1904 van Lorentz werd de mogelijkheid geopperd dat alle bewegende lichamen krimpen in de richting van de beweging, met een grootte die precies voldoende was om het experimentele nul-resultaat te verklaren. Al deze ideeën waren teveel een ad-hoc oplossing.

De verklaring van Einstein - die zegt dat er helemaal geen ether is en dat de lichtsnelheid gelijk is voor alle waarnemers - is de verklaring die stand heeft gehouden. Het Michelson & Morley experiment was een poging van de

‘schipper’ om de snelheid van zijn boot te bepalen zonder uit het raam te kijken of te vergelijken met een ander voorwerp. Volgens het relativiteitsprincipe waren ze gedoemd te mislukken.

Hoofdstuk 3

Tijd dilatatie en lengte contractie

*'Its not that I am smart,
it's just that I stay with the problem longer'*
A. Einstein

We hebben gezien dat Einstein in 1905 een rigoureuze stap zette door te postuleren dat er een relativiteitsprincipe moest bestaan dat zowel gold voor mechanica als voor elektromagnetisme. De twee postulaten waarop de speciale relativiteitstheorie berusten zijn, zoals we eerder zagen

1. Het relativiteitsprincipe

De natuurwetten en de resultaten van alle experimenten uitgevoerd in een zeker referentiestelsel zijn onafhankelijk van de translatiebeweging van het systeem¹. In de woorden van Einstein: als coördinatenstelsel S' met constante snelheid rechtlijnig beweegt t.o.v. coördinatenstelsel S dan verlopen natuurkundige verschijnselen t.o.v. S' volgens precies dezelfde natuurwetten als t.o.v. S .

2. Constantheid van de lichtsnelheid

De lichtsnelheid is eindig en *onafhankelijk* van de bewegingstoestand van de lichtbron. Het is de limietsnelheid voor natuurkundige objecten (in dit tweede postulaat wordt impliciet aangenomen dat de lichtsnelheid als fundamentele natuurconstante een universele rol speelt en niet alleen van belang is voor verschijnselen waar licht bij betrokken is). Met andere woorden: de lichtsnelheid heeft in ieder inertiaalstelsel dezelfde waarde.

¹We gebruiken de woorden referentiestelsel en coördinatenstelsel door elkaar. De hier bedoelde equivalente coördinatenstelsels worden ook wel inertiaalstelsels genoemd: dat zijn dus referentiestelsels waarin dezelfde krachten werken, c.q. 'waarop' geen krachten werken, cf 2.7

3.1 Synchroniseren van de tijd

We hebben gezien dat alle beweging in de Newtonse natuurkunde gebaseerd was op de grondgedachte: het bestaan van een universele tijd. Maar we zagen dat dit niet langer houdbaar is, en Einstein voegt toe “de rechtvaardiging van een natuurkundig concept is alleen mogelijke in duidelijke relatie met observaties”.

Hoe meten we tijd? We kunnen de tijd meten aan de hand van een wekker, een stopwatch, de rotatie van de aarde, the hartslag, etc. We noemen dit in algemene zin een ‘klok’. En als we tijd meten, doen we dit altijd aan hand van gelijktijdige gebeurtenissen. Bijvoorbeeld, als we zeggen dat een trein om 7 uur op het station arriveert, bedoelen we: “het moment dat de kleine wijzer van mijn horloge op de 7 staat, en het arriveren van de trein, zijn twee gelijktijdige gebeurtenissen”.

Dit klinkt triviaal, maar Einstein voorzag het volgende probleem. Met een klok kunnen we de snelheid van een voorwerp meten. Daartoe bepalen we de plaats \vec{r}_1 van het voorwerp op tijdstip t_1 en de plaats \vec{r}_2 op tijdstip t_2 . Hiermee wordt de snelheid

$$v = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}.$$

Maar dit betekent, gezien het bovenstaande, dat we gebruik moeten maken van het aflezen van de tijd t_1 van een klok, op het moment dat het lichaam op plaats \vec{r}_1 passeert, en gebruik maken van een *andere* klok op plaats \vec{r}_2 om tijdstip t_2 te lezen wanneer het lichaam in \vec{r}_2 arriveert. En welke klok we ook gebruiken, onze meting van snelheid is zonder betekenis als we niet zeggen wat we bedoelen met *dezelfde* tijd op twee verschillende locaties. Als we informatie met oneindige snelheid konden versturen, zou dit geen probleem opleveren. Maar dit is niet het geval; we kunnen klokken niet beter synchroniseren dan met behulp van de snelheid van het licht.

Hoe kan dit synchroniseren in zijn werk gaan? We kunnen twee klokken plaatsen, een op plaats r_1 en de ander op plaats r_2 . We hebben hiermee een ‘tijd op plaats r_1 ’, en een ‘tijd op plaats r_2 ’ gedefinieerd. Om een *gemeenschappelijke* tijd voor r_1 en r_2 tweeweg te brengen, kunnen we stellen dat de tijd voor een lichtsignaal om van r_1 naar r_2 te komen, gelijk is aan die om van r_2 terug naar r_1 te komen; zie het tweede postulaat. Nu kunnen we eenvoudig een spiegel in r_2 zetten, en een lichtsignaal vanuit r_1 sturen naar r_2 , welke gereflecteerd wordt en weer terug komt in r_1 . Noem deze tijdsduur t_0 , en we kunnen *definiëren* dat het signaal in r_2 aankwam op tijdstip $t_0/2$. Hiermee is de klok op plaats r_2 gesynchroniseerd met de klok op plaats r_1 . Dit kunnen we voor een heel aantal klokken op elke plaats r_i doen, en zo klokken op elke willekeurige plaats synchroniseren.

3.2 Relativiteit van gelijktijdigheid

De consequentie van Einsteins manier om klokken te synchroniseren op verschillende plaatsen is dat *gelijktijdigheid* een relatief begrip wordt, en niet langer absoluut geldig is. Dit kun je zien aan hand van het volgende voorbeeld.

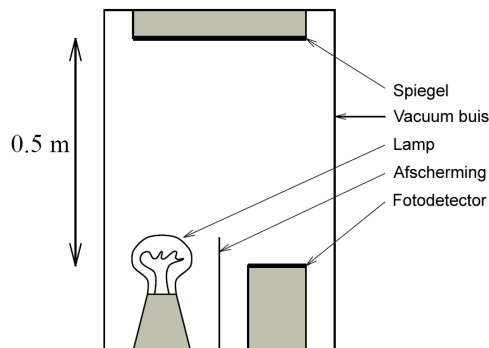
Stel je hiervoor een lange trein voor, met lengte L . Helemaal aan de kop van de trein, en helemaal aan het einde van de trein, staan twee klokken die de tijd meten. Een waarnemer die precies in midden in de trein staat, stuurt een lichtflits uit die zowel naar de kop als naar het einde van de trein gaat. Omdat de lichtsnelheid naar beide kanten gelijk is, zal deze waarnemer op de trein zeggen dat de klok op de kop van de trein *tegelijkertijd* met de klok aan het einde van de trein het licht signaal ontvangt. De waarnemer op de trein zal dus concluderen dat de ontvangst van de lichtflits aan beide zijden van de trein een *gelijktijdige* gebeurtenis is.

Maar hoe vergaat het de waarnemer op het perron die de trein voorbij ziet komen? Laten we aannemen dat het midden van de trein net langskomt als de lichtflits verstuurd wordt. Omdat de trein rijdt zal de flits naar de voorkant van de trein een iets langere weg moeten afleggen. Dit omdat de trein een stukje verder rijdt gedurende de tijd dat het licht nodig heeft om naar de klok aan de kop van de trein te komen. Omgekeerd hoeft het licht een iets kortere weg af te leggen om het einde van de trein te bereiken, omdat het einde van de trein iets naar de waarnemer op het perron is toegekomen gedurende de tijd die het licht nodig heeft om te reizen. Ook voor deze waarnemer is de snelheid van het licht constant (tweede postulaat!), en hij komt tot een andere conclusie. Voor hem bereikt de lichtflits het einde van de trein *eerder* dan het licht de kop van de trein bereikt! Voor hem zijn dit dus geen gelijktijdige gebeurtenissen. Met andere woorden, dit ‘gedachte-experiment’ laat zien dat gelijktijdigheid afhangt van de keuze van het inertiaalsysteem. Overigens, om een echt meetbaar verschil te geven met de waarnemer *op* de trein, moet de trein natuurlijk wel met erg hoge snelheid langs het perron razen!

3.3 Tijd dilatatie

Stel twee waarnemers voor, Dirk (D) en Erika (E), die ten opzichte van elkaar bewegen in twee ruimteschepen. D meet de snelheid v van E ten opzichte van zijn ruststelsel. Als gevolg van de symmetrie van deze situatie zal ook E een snelheid v meten van de snelheid van D, ten opzichte van haar ruststelsel. Als dit niet direct duidelijk is, bedenk dan dat in dit voorbeeld D en E

volledig inwisselbaar zijn. Als D en E niet dezelfde snelheid zouden meten, zou een van beide in een ‘speciaal’ coördinatenstelsel zitten, en dit is precies in tegenspraak met de postulaten van de relativiteitstheorie.



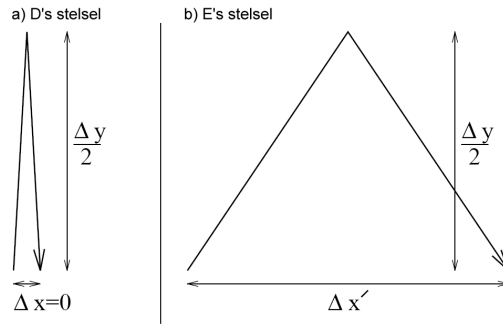
Figuur 3.1: Schematische tekening van een lichtklok. De lengte die het licht aflegt tussen lamp en detector is 1 m.

Stel nu voor dat D en E beide een zeer bijzondere klok bij zich hebben. Deze ‘licht-klokken’ bestaan eenvoudigweg uit een lampje, een spiegel, een fotodetector en wat elektronica. De fotodetector zit vlak naast het lampje en de spiegel is 0.5 m hoog, zie figuur 3.1. Als de klok gestart wordt gaat het lampje eventjes aan, een lichtflits kaatst via de spiegel in de fotodetector. Wanneer de fotodetector het licht registreert, geeft het een signaal aan het lampje om onmiddellijk een nieuwe lichtflits uit te zenden. Zo tikken de lichtflitsen met een regelmaat van $1/c \sim 3.3 \times 10^{-9}$ s, oftewel elke 3.3 ns een tik. De lichtsnelheid is hetzelfde voor alle waarnemers, dus c is hier een conversiefactor tussen tijd en afstand. Deze lichtklok tikt de tijd in meters².

Stel nu dat D de klok rechtop houdt, zodanig dat het licht loodrecht op zijn bewegingsrichting ten opzichte van E kaatst. We hebben gezien dat D zijn klok tikt met intervallen van 3.3 ns., maar wat ziet E? Merk op dat D beweegt met een snelheid v ten opzichte van E, dus in het ruststelsel van E maakt het licht geen echte rondgang. Gedurende de reis van het licht omhoog naar de spiegel en terug legt D een afstand af in de loodrechte richting; het pad van het licht wordt een zig-zag, en is langer dan het rechte op-neer pad bij een stilstaande klok, zie figuur 3.2.

Toch meten waarnemers dezelfde lichtsnelheid c (het relativiteitsprincipe!), en moeten we concluderen dat E een groter tijdsinterval $\Delta t'$ tussen

²Het ISO (International Standard Organization) gedefinieerd zo de meter in termen van seconden. De lichtsnelheid wordt daarbij *gedefinieerd* met een waarde $c = 2.99792458 \times 10^8$ m s⁻¹.



Figuur 3.2: Het traject van het licht in de klok van waarnemer D zoals geobserveerd door D (a) en E (b). Merk op dat het traject langer is in het stelsel van E , en dus meet E een langer tijdsinterval t' .

twee tikken meet dan waarnemer D ³. Wat is het verschil tussen Δt en $\Delta t'$?

In het stelsel van E , in een tijd $\Delta t'$, beweegt D het stuk $\Delta x' = v\Delta t'$ naar voren, en legt het licht een afstand $\Delta l' = c\Delta t'$ af. Volgens Pythagoras is $(\Delta l')^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2$ waarbij $\Delta y'$ de lengte van het traject in de y richting is. We zullen later aantonen dat $\Delta y' = \Delta y$, en is dus 1 m. Omdat in het stelsel van D geldt $\Delta y = \Delta l = c\Delta t$ vinden we

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.1)$$

De tijdsintervallen tussen de tikken van de klok van D zijn groter zoals gemeten door E dan zoals gemeten door D . Dit effect heet *tijd dilatatatie*. Bewegende klokken lopen langzamer.

In de literatuur wordt vaak de volgende notatie gebruikt. De dimensieloze grootheid β staat voor de snelheid,

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad (3.2)$$

en omdat niets sneller kan gaan dan de lichtsnelheid c , geldt $-1 \leq \beta \leq 1$. De *Lorentzfactor* γ is gedefinieerd als

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.3)$$

Voor deze factor geldt $\gamma \geq 1$. Met deze nieuwe symbolen wordt formule 3.1 geschreven als $\Delta t' = \gamma\Delta t$.

³Alle grootheden die E meet worden met een accent weergegeven, de grootheden die D meet zonder accent.

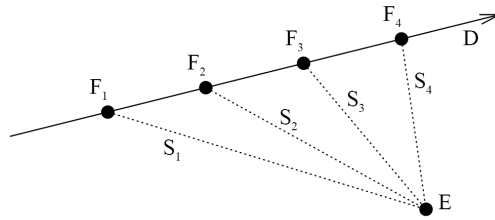
We hebben nu gevonden dat ‘bewegende klokken langzaam lopen’. Een punt van kritiek zou kunnen zijn dat dit alleen is aangetoond voor deze merkwaardige lichtklokken. Toch kunnen we laten zien dat *alle* klokken onderhevig zijn aan dit dilatatie effect. Stel namelijk voor dat, naast de lichtklok, waarnemer D ook nog een horloge of een ander mechanisme heeft om de tijd te meten dat elke 3.3 ns tikt. En stel voor (hetgeen onjuist is!) dat dit horloge geen tijd-dilatatie effect ondergaat; dat wil zeggen, stel voor dat E het horloge elke 3.3 ns ziet tikken ongeacht de snelheid van D. Wanneer D stilstaat ten opzichte van E tikken het horloge en de lichtklok met dezelfde snelheid, maar wanneer D met hoge snelheid beweegt beginnen ze ongelijk te tikken omdat (zoals we veronderstelden) de één tijd-dilatatie heeft en de ander niet. Maar dan kan D uit de relatieve tik-snelheden van het horloge en de lichtklok achterhalen wat zijn snelheid is, en zo schendt hij het relativiteitsprincipe. Het niet mogelijk de klokken gelijk te laten lopen voor waarnemer D, en ze ongelijk te laten lopen voor waarnemer E.

Men kan opmerken dat het relativiteitsprincipe al is geschonden. Immers, als D en E in deze symmetrische situatie zitten, hoe kan het dan dat E langere tijdsintervallen meet dan D? Welke intervallen meet D ten opzichte van E? Nu moeten we voorzichtig zijn: E meet langere intervallen voor de klok van D dan D zelf meet. Door het relativiteitsprincipe moet het daarom zijn dat D *ook* grotere tijdsduur intervallen meet voor een klok in het ruimtestation van E, dan E zelf meet. En dit is juist, uiteindelijk kunnen we D en E in de hele argumentatie verwisselen. Dit is het fundamentele tegen-intuïtieve karakter van de relativiteitstheorie. Hoe kan het dat beide waarnemers langzamere tijdsintervallen meten van elkaars klokken? Feit blijkt dat er helemaal geen tegenspraak in deze bewering zit zodra we het concept van ‘absolute tijd’ voor alle waarnemers, waar Newton zo aan hechtte, opgeven.

3.3.1 Observatie van tijd dilatatie

In de vorige paragraaf, zoals in de rest van dit college, is het belangrijk een verschil te maken tussen van een ideale waarnemer *observeert* en wat een ideale waarnemer *ziet*. ‘Observeren staat voor ‘het meten van een echte effecten met de juiste experimentele technieken’, terwijl ‘zien’ is gereserveerd voor schijnbare effecten, of fenomenen die gerelateerd zijn aan het feit dat we vanuit een specifiek zichtspunt kijken met een specifiek paar ogen.

Hoewel E *observeert* dat de klok van D langzaam loopt, *ziet* zij wellicht iets heel anders. De tijd intervallen tussen de tikken van de klok van D dat zij ziet, hangen af van het tijd dilatatie effect *en* de verandering van de afstand dat het licht moet afleggen om naar E te komen. Deze afstand verandert omdat D beweegt ten opzichte van E, zie figuur 3.3.



Figuur 3.3: Observeren van tijd dilatatie. Omdat D beweegt ten opzichte van E , de lichtflitsen (F_1 tot F_4) van zijn klok leggen verschillende afstanden (S_1 tot S_4) af om waarnemer E te bereiken. Dus de tijd om E te bereiken is verschillend voor de lichtflitsen. E moet hiervoor corrigeren voordat zij een uitspraak kan doen over tijd dilatatie. Pas nadat deze correcties zijn gemaakt observeert E de voorspelde tijd dilatatie.

U zult ontdekken dat het tijd interval tussen twee tikken veel langer is dan wat tijd dilatatie voorspeld, omdat opeenvolgende flitsen van verder en verder weg moeten komen. Dit effect heet *Doppler verschuiving* en zal verder in het college behandeld worden.

3.4 Lengte contractie

Stel nu dat er twee planeten zijn, A en B , beide in rust te opzichte van waarnemer E . Waarnemer D maakt een reis van A naar B terwijl waarnemer E stil staat bij een planeet. Gedurende de reis van D ziet waarnemer E dat er 100 tikken verstrijken op de klok van D .

Dan moet D ook zelf 100 tikken zien verstrijken gedurende deze reis. Immers, het is mogelijk de klok bijvoorbeeld een gaatje te laten prikken in een kaart elke keer dat het tikt. D kan het prikken laten beginnen bij planeet A en laten eindigen bij planeet B , en er moeten dan een bepaald aantal prikken in de kaart zitten. D en E moeten met elkaar overeenstemmen hoeveel gaatjes er in de kaart zitten; zij kunnen immers altijd na de reis bij elkaar komen en de gaatjes tellen.

Behalve het aantal gaatjes, zijn ze het ook eens over hun onderlinge snelheid (ze moeten wel: hun situatie is volledig inwisselbaar - dit argument is eerder gemaakt). Echter, waar ze het niet met elkaar over eens zijn is de snelheid waarmee elkaars klokken tikken. E bepaalt de afstand tussen de planeten A en B als $l' = 100v\Delta t'$. Echter, D bepaalt de afstand als $100v\Delta t = l'/\gamma$. Omdat $\gamma > 1$ meet D een *kortere* afstand dan E . D beweegt ten opzichte van de planeten A en B , terwijl E stil staat ten opzichte van deze planeten. In

feite kunnen de planeten A en B gezien worden als de eind-punten van een heel lange meetlat dat waarnemer E vasthoudt; een meetlat die beweegt ten opzichte van D. We concluderen dat een bewegende meetlat korter wordt; dit effect heet lengte contractie oftewel *Lorentz contractie*.

Het is eenvoudig aan te tonen dat deze Lorentz contractie alleen optreedt in de richting parallel aan de bewegingsrichting. Immers, stel dat E en D beide een holle pijp van heel dun materiaal hebben, beide met exact dezelfde diameter, zodat de pijpen niet in elkaar geschoven kunnen worden. Stel nu dat de orientatie van de pijpen parallel aan hun onderlinge bewegingsrichting is. Als we nu aannemen (wat niet juist is!) dat de diameter van E's pijp anders wordt in het coördinatenstelsel van D, zou de pijp van D om die van E heen passen. Maar in de omgekeerde situatie zou dan de pijp van D kleiner moeten worden in het coördinatenstelsel van E! Hier is een contradictie, en we concluderen dat de diameter van de pijp niet verandert bij beweging loodrecht op deze diameter.

Merk op dat we eerder bij de lichtklok hadden aangenomen dat de lengte y loodrecht op de beweging niet veranderd van referentiesysteem naar referentiesysteem. Dit hebben we nu aangetoond.

3.5 Niet-relativistische limiet

We zien dat wanneer $v \ll c$ de Lorentz-factor $\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}$ vrijwel gelijk is aan 1 en relativistische effecten geen rol van betekenis spelen. Een voertuig met een lengte van 4 m dat met 100 km/uur beweegt is $2 \cdot 10^{-18}$ m korter dan wanneer het in rust is. Dat is 0.2% van de diameter van een proton...

3.6 Kosmische stralen

Onze atmosfeer wordt voortdurend gebombardeerd door kosmische straling. Kosmische stralen zijn deeltjes van vaak hoge energie die ons uit het heelal bereiken, o.a. (in feite voornamelijk) protonen ⁴. Deze protonen raken stikstof- of zuurstofkernen op grote hoogte, tientallen kilometers boven het aardoppervlak. We weten dat bij die botsingen o.a. muonen (symbool voor een muon: μ) geproduceerd worden. We weten ⁵ ook dat muonen in rust in ons laboratorium een (gemiddelde) levensduur hebben van $\tau = 2.2\mu\text{s} = 2.2 \cdot 10^{-6}\text{s}$. Volgens de niet-relativistische formule zou een μ ,

⁴Oorsprong, energiespectrum en samenstelling van kosmische stralen vormen interessante, nog lang niet opgehelderde onderwerpen van wetenschappelijk onderzoek.

⁵Vakgebied : hoge-energiefysica

zelfs als het met de lichtsnelheid c bewoog, slechts (gemiddeld) een afstand $c\tau = 659$ m afleggen. We nemen de muonen echter op het aardoppervlak waar, dus ze reizen pakweg 30 km. Dus hun levensduur, gezien door een waarnemer op aarde, is een factor $30000/659$ groter dan de levensduur in het ruststelsel van het muon. Dus: $\gamma = 30000/659 = 45.5$ waaruit volgt $v = 0.9995 c$. De muonen reizen dus vrijwel met de lichtsnelheid en leven dankzij de tijddilatatie lang genoeg om 30 km te overbruggen.

3.7 Tweelingparadox

De resultaten van de relativiteitstheorie kunnen aanleiding geven tot 'tegenstellingen' die de theorie ter discussie stellen. Het gaat hier dan om schijnbare tegenstellingen, paradoxen, die ons er alleen maar voor waarschuwen dat de theorie zorgvuldig en correct geïnterpreteerd dient te worden. Laten we als voorbeeld nemen: tijddilatatie, 'bewegende klokken lopen langzamer'.

Vanuit S zien we een met S' meebewegende klok langzamer lopen, vanuit S' zien we een in S in rust zijnde klok langzamer lopen.

Dat lijkt in tegenspraak, wie heeft er nu gelijk, de waarnemer in S of die in S' ? Natuurlijk hebben ze allebei gelijk en is er geen tegenspraak. Wanneer we twee klokken willen vergelijken moeten we dat in hetzelfde referentiestelsel op dezelfde plaats doen.

Indien we de klokken uit het voorbeeld vervangen door leden van een tweeling, waarvan er één op aarde blijft en de ander vertrekt in een ruimteschip dan doet zich dezelfde situatie voor: beiden nemen waar dat de ander minder snel oud wordt en dat is volkomen in orde. Het 'probleem' ontstaat wanneer de ruimtereiziger besluit om huiswaarts te keren om de andere helft van de tweeling te bezoeken. Dan blijkt de ruimtereiziger wel degelijk jonger te zijn. (Dit is geverifieerd met aan boord van vliegtuigen vervoerde nauwkeurige klokken.) Maar: het omkeren van de ruimtereiziger is niet te beschrijven als een eenvoudige Lorentztransformatie, anders gezegd: het ruststelsel van de ruimtereiziger, S' , is geen inertiaalsysteem. Systeem S is dat wel en daarom is het correct de situatie vanuit S te beschrijven en in S is de ruimtereiziger inderdaad langzamer verouderd dan de achterblijver.

Hoofdstuk 4

Lorentztransformatie

*‘Its not that I am smart,
it’s just that I stay with the problem longer’*

A. Einstein

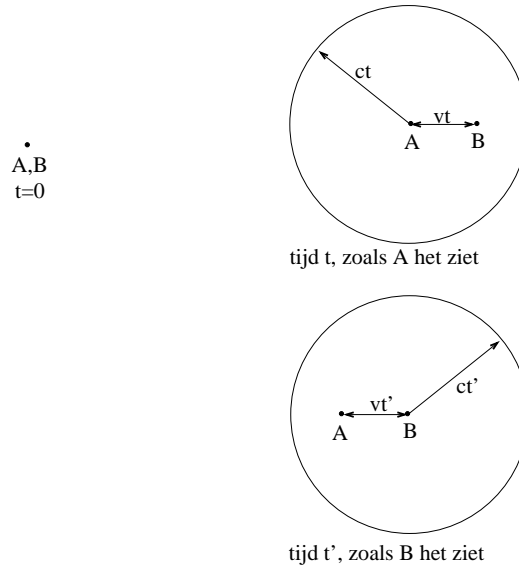
Het tweede postulaat zoals geformuleerd in het voorgaande hoofdstuk is duidelijk in tegenspraak met de Galileitransformatie en het is nu onze taak een transformatie te vinden (het eerste postulaat zegt in feite dat die er moet zijn) die in overeenstemming is met het tweede postulaat. Deze transformatie is in 1905 door Einstein gevonden en is bekend geworden onder de naam Lorentztransformatie. De afleiding ervan is wiskundig gezien zeer eenvoudig, maar vereist, zoals we zullen zien, nogal wat hersengymnastiek.

4.1 Invariante interval

We hebben gezien dat in de drie-dimensionale ruimte de coördinaten van twee punten \vec{p}_1 en \vec{p}_2 voor verschillende waarnemers, waarvoor de onderlinge referentiesystemen zijn getransleerd, anders zijn. Ze zijn het in deze drie-dimensionale ruimte wel eens over de afstand tussen deze twee punten; dit is de invariant Δr .

We willen nu een dergelijke grootte vinden voor een paar van ‘gebeurtenissen’, een lengte in de 3+1 dimensionale ruimte-tijd. Beschouw hiervoor persoon A die zich in de oorsprong van coördinaten-stelsel S bevindt en een persoon B in de oorsprong van S' . S' beweegt t.o.v. S in de positieve x -richting met snelheid v . Op $t = 0$ valt de oorsprong van S samen met die van S' , d.w.z. vallen A en B samen. Op $t = 0$ ontsteekt A heel eventjes een lampje waardoor zich een bolvormige lichtgolf gaat uitbreiden. A bevindt zich in het middelpunt van de bolvormige golf. Een bol met straal R en de oorsprong van het coördinatenstelsel als middelpunt wordt beschreven door de formule :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2(t)$$

Figuur 4.1: *Bolvormige lichtgolf*

Voor een lichtgolf die zich uitbreidt met snelheid c geldt na een tijd t : $R = ct$ en dus :

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

oftewel

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (4.1)$$

Precies dezelfde redenering kunnen we echter volgen voor persoon B . Ook B denkt zich in het midden van de bolvormige lichtgolf te bevinden, het tweede postulaat zegt immers dat ook voor B het licht zich met snelheid c uitbreidt. Voor B , dus t.o.v. S' , geldt nu geheel in analogie met hierboven :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

oftewel

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \quad (4.2)$$

In ons specifieke voorbeeld (beweging in de x -richting) geldt $x \neq x'$ ($y = y'$, $z = z'$) dus moeten we wel concluderen $t \neq t'$ (Aftrekken van 4.1 en 4.2 levert $x^2 - x'^2 = c^2(t^2 - t'^2)$ en dus $t^2 - t'^2 \neq 0$). We komen al snel tot de conclusie dat de tijd voor B anders verloopt dan voor A .

Bij elk referentiestelsel hoort niet alleen een eigen plaatsmeting maar ook een eigen tijdmeting. Hoe plaats en tijd van een bepaald natuurkundig verschijnsel zoals geldend in S worden uitgedrukt in plaats en tijd van hetzelfde verschijnsel t.o.v. S' wordt gegeven door de Lorentztransformatie.

In elk geval weten we al (zie boven) dat zal moeten gelden:

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (4.3)$$

We zeggen dat de grootheid $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ *invariant* is onder Lorentztransformaties.

Iets algemener kunnen we twee gebeurtenissen A en B in het stelsel S beschouwen, met onderling tijdsverschil Δt en ruimteverschillen $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$. We hebben laten zien dat de afstand tussen deze twee gebeurtenissen, gedefinieerd als

$$(\Delta s)^2 \equiv (c\Delta t)^2 - (\Delta r)^2 \quad (4.4)$$

$$\equiv (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \quad (4.5)$$

invariant is onder het relativiteitsprincipe van Einstein. Dit invariante interval staat centraal in de speciale relativiteitstheorie.

4.1.1 Nogmaals de lichtklok

In paragraaf 3.3 hebben we de lichtklok geïntroduceerd. In het referentiesysteem van D waarin de klok stil staat, tikte de klok met tikken van $(c\Delta t) = 1$ m (elke 3.3 ns), en de afgelegde afstand in de x -richting tussen twee tikken is $\Delta x = 0$. Het invariante interval tussen twee tikken wordt daarmee $(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = 1\text{m}^2$.

In het referentiefraam van E is $c\Delta t' = \gamma(1 \text{ m})$ en de afgelegde afstand $\Delta x'$ in x tussen twee tikken wordt gegeven door de snelheid v te vermenigvuldigen met de het tijdsverschil $\Delta t'$, $\Delta x' = \gamma v(1 \text{ m})/c$. Het interval in E's referentiesysteem wordt hiermee $(\Delta s')^2 = \gamma^2(1 - v^2/c^2)(1 \text{ m}^2)$. Omdat geldt dat $\gamma \equiv (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$, wordt het interval hiermee $(\Delta s')^2 = (\Delta s)^2 = 1 \text{ m}^2$. We hebben laten zien dat het interval dezelfde waarde heeft voor waarnemer D en waarnemer E. Voor elke andere waarnemer die in een referentiesysteem zit, geldt dat hij andere tijdsverschillen meet, en andere ruimte afstanden vind. Maar het interval $(\Delta s)^2$ blijft altijd 1 m^2 .

4.2 De eigentijd en eigenlengte

De *eigentijd* $\Delta\tau$ tussen twee gebeurtenissen is het tijdsinterval zoals waargenomen in een coördinatenstelsel waarin de twee gebeurtenissen op dezelfde positie plaatsvinden. Dit is niet in alle gevallen mogelijk. Zoals in bovenstaand voorbeeld duidelijk is gemaakt, is het invariante interval tussen twee gebeurtenissen c maal de eigentijd, of $c\Delta\tau = \sqrt{(\Delta s)^2}$. De eigentijd is het

tijdinterval in het coördinatenstelsel van D, het stelsel waarin de lichtklok stil staat. De eigentijd is de tijd zoals die verloopt voor de waarnemer zelf; het is zijn *eigen* tijd.

Als het interval positief is, is er altijd een coördinatenstelsel te vinden waarin de positie van de gebeurtenissen hetzelfde is. Dit omdat een positief interval betekent $|c\Delta t| > |\Delta r|$, dus een referentiesysteem dat beweegt met een snelheid $\vec{v} = (\Delta \vec{r})/(\Delta t)$ transformeert de gebeurtenissen naar hetzelfde punt. En de snelheid is kleiner dan die van het licht.

Als het interval tussen twee gebeurtenissen kleiner is dan nul, dwz $(\Delta s)^2 < 0$, is het nog steeds een invariant. Maar er kan in dit geval geen coördinatenstelsel gevonden worden waarin beide gebeurtenissen op dezelfde positie plaatsvinden. Dit coördinatenstelsel is er niet - het zou sneller met de lichtsnelheid moeten bewegen ten opzichte van het stelsel van de twee gebeurtenissen. Soms wordt hiervoor de *eigenlengte* geïntroduceerd, $\Delta \lambda$, als de ruimtelijke afstand tussen twee gebeurtenissen in een referentiesysteem waarin de gebeurtenissen gelijktijdig plaatsvinden. Dit kan alleen als het interval negatief is, en de eigenlengte wordt dan $\Delta \lambda = \sqrt{|(\Delta s)^2|}$.

Het interval $(\Delta s)^2$ kan natuurlijk ook precies gelijk zijn aan nul. Dit is het geval waarneer $(c\Delta t)^2 = (\Delta r)^2$, met andere woorden, wanneer de wereldlijn overeenkomt met die van het licht. Omdat de lichtsnelheid in elk coördinatenstelsel dezelfde is, is dit interval weer gelijk aan nul in elk coördinatenstelsel.

Intervallen $(\Delta s)^2 = 0$ noemen we *'lichtachtig'*. Intervallen $(\Delta s)^2 > 0$ noemen we *'tijdachtig'* en intervallen $(\Delta s)^2 < 0$ noemen we *'ruimteachtig'*. Deze intervallen hebben verschillende eigenschappen met betrekking tot causaliteit; we komen hier op terug.

4.3 De Lorentztransformatie, een eenvoudige afleiding

We definiëren coördinatenstelsels S en S' weer als voorheen: S' beweegt t.o.v. S met constante snelheid v in de positieve x -richting. Op $t = t' = 0$ valt de oorsprong van S samen met die van S' . Een lichtflits, uitgezonden in de positieve x -richting, bevindt zich op plaats $x = ct$, d.w.z. $x - ct = 0$. T.o.v. S' geldt $x' - ct' = 0$ (zelfde c , tweede postulaat!). Aan beide vergelijkingen wordt voldaan als geldt;

$$x' - ct' = \lambda(x - ct) \quad (4.6)$$

waar λ een constante is die we nog moeten bepalen. We kunnen uiteraard dezelfde redenering volgen voor een lichtflits die wordt uitgezonden in de

negatieve x -richting. Dan vinden we dat moet gelden:

$$x' + ct' = \mu(x + ct) \quad (4.7)$$

Ook μ is een nog nader te bepalen constante. Optellen resp. aftrekken van 4.3 en 4.7 levert:

$$ct' = \frac{\lambda + \mu}{2}ct - \frac{\lambda - \mu}{2}x$$

$$x' = \frac{\lambda + \mu}{2}x - \frac{\lambda - \mu}{2}ct$$

We definiëren twee nieuwe constanten, $a = \frac{\lambda + \mu}{2}$ en $b = \frac{\lambda - \mu}{2}$ en verkrijgen de overzichtelijke vergelijkingen:

$$ct' = act - bx \quad (4.8)$$

$$x' = ax - bct \quad (4.9)$$

waar we nog steeds als taak hebben om a en b te bepalen (d.w.z. uit te drukken in v , de parameter die de transformatie definiëert.)

Voor de oorsprong van S' geldt t.o.v. S :

$$x = vt$$

en t.o.v. S' uiteraard:

$$x' = 0$$

Invullen in 4.9 levert dan dat moet gelden:

$$v = \frac{b}{a}c \quad (4.10)$$

Nu gebruiken we het relativiteitsprincipe in de volgende redenering: een meetlat die langs de x' -as ligt, in rust t.o.v. S' , heeft, gezien vanuit S dezelfde lengte als diezelfde meetlat, gelegen langs de x -as, in rust t.o.v. S , gezien vanuit S' !

- Observatie 1

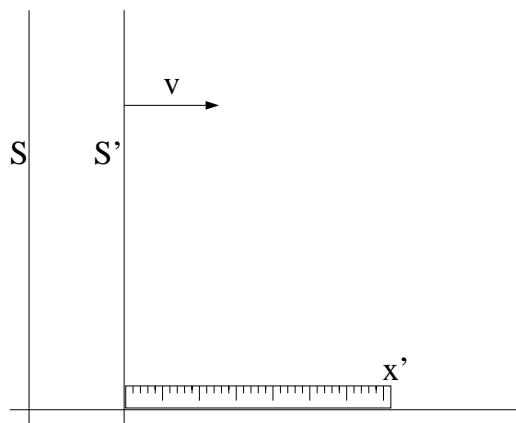
Op een zekere tijd t in S kunnen we dus de lengte van de meetlat t.o.v. S' bepalen, bijvoorbeeld op $\underline{t = 0}$. We vinden dan met behulp van 4.9:

$$x' = ax$$

- Observatie 2

Omgekeerd vinden we op $\underline{t' = 0}$, m.b.v. 4.9 en 4.8 en gebruikmakend van 4.10:

$$x' = a\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)x$$



Figuur 4.2: Meetlat

Wanneer we zeggen dat de lengte van de meetlat l_0 is, dan bedoelen we: de lengte is l_0 in het systeem waarin de meetlat in rust is. Observatie 1 (meetlat in rust in S' gefotografeerd vanuit S) leert dan:

$$l_0 = al$$

waar l dus de lengte t.o.v. S is, d.w.z. ten opzichte van het coördinatenstelsel waarin de lat beweegt. Observatie 2 (S gefotografeerd vanuit S') levert op:

$$l = a\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)l_0$$

Het combineren van deze resultaten levert dan het volgende resultaat op:

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Degenen die achterdochtig worden van deze nogal veel woorden kostende afleiding vinden de volgende beschouwing misschien eleganter.

We pikken de afleiding op na formule 4.10 en schrijven 4.9 en 4.8 als :

$$ct' = a\left(ct - \frac{v}{c}x\right) \quad (4.11)$$

$$x' = a(x - vt) \quad (4.12)$$

Bovenstaande transformatie geldt als S' beweegt in de positieve x -richting, dus met snelheid $+v$, t.o.v. S . Maar we kunnen ook S' als rustsysteem kiezen en S als het bewegende systeem zien dat t.o.v. S' naar links beweegt,

d.w.z. met snelheid $-v$. De *inverse* transformatie wordt dan onmiddellijk uit de bovenstaande verkregen door 'accenten te verwisselen' (de accenten slaan immers op het bewegende systeem en die rol wordt nu overgenomen door S) en door v te vervangen door $-v$. Dit levert:

$$ct = a(ct' + \frac{v}{c}x') \quad (4.13)$$

$$x = a(x' + vt') \quad (4.14)$$

(Merk op dat deze redenering alleen correct is als a ongevoelig is voor het teken van v . Gelukkig blijkt dat zo te zijn volgens het eerste postulaat.) Indien we 4.14 en 4.13 gebruiken om t' in t en x uit te drukken en het resultaat vervolgens vergelijken met 4.11 vinden we

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Aldus hebben we de Lorentztransformatie gevonden:

$$ct' = \frac{t - x\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

In ons specifieke geval, relatieve beweging langs de x -as, geldt verder

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Ga nu na dat formule 4.3 inderdaad klopt, dat wil zeggen, dat het inderdaad het 'invariante interval' $(\Delta s)^2$ invariant laat! Samenvattend:

Lorentz transformaties verbinden, net als Galilei transformaties, inertiaalsystemen op een manier die in overeenstemming is met het relativiteitsprincipe en het lichtpostulaat. In tegenstelling tot Galileitransformaties laten ze de lichtsnelheid invariant. Hiermee zijn ze in overeenstemming met de Maxwell theorie van het elektromagnetisme.

4.3.1 Notatie

We hadden al ingevoerd dat

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (4.15)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.16)$$

De Lorentztransformatie langs de x -as wordt hiermee geschreven als:

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \quad (4.17)$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \quad (4.18)$$

$$y' = y \quad (4.19)$$

$$z' = z \quad (4.20)$$

oftewel in matrix vorm¹.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

De inverse Lorentztransformatie wordt dan

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

De ruimte-tijd symmetrie, d.w.z. de verwevenheid van x en ct , de volstrekt gelijkwaardige rol van beide grootheden, is in deze notatie heel duidelijk.

¹Voor een overzicht van matrix algebra wordt u doorverwezen naar de cursus lineaire algebra. Kortweg geldt dat een kolom-vector vermenigvuldigd met een matrix een nieuwe kolom-vector oplevert volgens de regel

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}.$$

4.4 Lorentztransformaties

De Lorentz transformaties (LT) zijn belangrijk en verdienen een discussie. De LT transformeren de afstanden $(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ tussen de coördinaten van twee gebeurtenissen in een coördinatenstelsel naar de afstanden $(c\Delta t', \Delta x', \Delta y', \Delta z')$ in een ander coördinatenstelsel. Het betekent dat als de LT direct op de coördinaten van één gebeurtenis toegepast worden, impliciet de andere gebeurtenis op coördinaten $(0, 0, 0, 0)$ in beide stelsels wordt genomen. De transformaties waarbij de snelheid van een coördinatensysteem anders wordt, noemen we een *boost*. Deze boost transformaties vormen het hart van de speciale relativiteitstheorie.

We kunnen eenvoudig de consistentie van de LT laten zien door eerst een coördinatensysteem te transformeren met snelheid v , en vervolgens weer terug te transformeren met snelheid $-v$. We zullen uiteindelijk datgene weer terug moeten vinden met waarmee we begonnen waren. Met andere woorden: LT's met gelijke maar tegengestelde snelheden moeten elkaars *inverse* zijn. Als we van richting veranderen, dwz $v \rightarrow -v$, dan wordt $\beta \rightarrow -\beta$ en $\gamma \rightarrow \gamma$. De transformatie van de coördinaten (ct, x) naar (ct', x') en weer terug naar coördinaten (ct'', x'') wordt dan

$$\begin{aligned}
 ct'' &= \gamma ct' + \beta \gamma x' & (4.23) \\
 &= \gamma(\gamma ct - \beta \gamma x) + \beta \gamma(-\beta \gamma ct + \gamma x) \\
 &= \gamma^2(ct - \beta x - \beta^2 ct + \beta x) \\
 &= \gamma^2(1 - \beta^2)ct \\
 &= ct
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x'' &= \beta \gamma ct' + \gamma x' & (4.24) \\
 &= \beta \gamma(\gamma ct - \beta \gamma x) + \gamma(-\beta \gamma ct + \gamma x) \\
 &= \gamma^2(\beta ct - \beta^2 x - \beta ct + x) \\
 &= \gamma^2(1 - \beta^2)x \\
 &= x
 \end{aligned}$$

dus is inderdaad de transformatie langs snelheid $-v$ de inverse van de transformatie langs v .

De groep van alle LT's bevat alle lineaire transformaties die het interval $(\Delta s)^2$ invariant laat. Dit betekent dat ook rotaties in de ruimte, zonder 'boost', bij de LT's horen. De rotatie om de z -as met hoek θ is een voorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 1 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

De LT's bevatten ook de 'boost' translaties tussen twee coördinatensystemen S en S' langs willekeurige richting $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Zonder verdere afleiding geven we het resultaat

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_x^2}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_y & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_y^2}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_z & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_z^2}{\beta^2} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

waarbij

$$\begin{aligned} \beta_x &= v_x/c \\ \beta_y &= v_y/c \\ \beta_z &= v_z/c \\ \beta^2 &= \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 \\ \gamma &= (1 - \beta_x^2 - \beta_y^2 - \beta_z^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Samenstellingen van verschillende LT's zijn zelf ook weer LT's.

4.5 Lorentzcontractie

In paragraaf 3.4 hebben we laten zien dat bewegende stokken korter worden. We zullen dit nu nogmaals laten zien, maar nu maken we gebruik van de Lorentztransformatie voor de afleiding van het resultaat.

Daartoe bekijken we een bewegende stok. De stok heeft t.o.v. het coördinatensysteem waarin hij in rust is een lengte l_0 . Wat is dan de lengte t.o.v. het coördinatensysteem waarin hij beweegt? Wij nemen een stok die langs de x' -as ligt, met het linker uiteinde in de oorsprong van S' en die in rust is t.o.v. S' . Voor de x' -coördinaat van het rechter uiteinde geldt dus:

$$x'_R = l_0$$

en voor het linker uiteinde geldt:

$$x'_L = 0$$

De overeenkomstige x -coördinaten in S volgen uit 4.22:

$$x_R = \gamma(l_0 + \beta ct'_R)$$

$$x_L = \gamma\beta ct'_L$$

De lengte l t.o.v. S is:

$$l = x_R - x_L$$

$$l = \gamma\{l_0 + \beta c(t'_R - t'_L)\} \quad (4.28)$$

Het is heel belangrijk dat we ons realiseren dat de lengte l t.o.v. S gelijk is aan $x_R - x_L$, waar x_R en x_L op *dezelfde tijd t.o.v. S* bepaald worden, dus $t_R = t_L$. Met behulp van 4.17 volgt dan:

$$ct'_R = \gamma(ct_R - \beta x_R)$$

$$ct'_L = \gamma(ct_L - \beta x_L)$$

Aftrekken van de vergelijkingen levert:

$$c(t'_R - t'_L) = -\gamma\beta(x_R - x_L) = -\gamma\beta l$$

Dit resultaat vullen we in in 4.28 en we vinden:

$$l = \gamma(l_0 - \gamma\beta^2 l)$$

$$l(1 + \beta^2\gamma^2) = \gamma l_0$$

Aangezien $\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$ (definitie) volgt nu:

$$l = \frac{l_0}{\gamma} \quad (4.29)$$

l is dus kleiner dan l_0 : de bewegende stok is korter, precies zoals we al eerder gevonden hadden. Dit effect gaat onder de naam *Lorentzcontractie*.

4.6 Optellen van snelheden

We kunnen nu de juiste formule afleiden voor het optellen van snelheden, zoals we in de inleiding al bespraken. Als A met een snelheid $+u$ in de x richting beweegt ten opzichte van B, en A gooit een appel met snelheid $+v$ in de x richting ten opzichte van zichzelf, met welke snelheid ziet dan waarnemer B de appel voorbij vliegen? We hadden al gezien dat het klassieke antwoord $w = u + v$ onjuist is. Het juiste antwoord kan worden afgeleid met behulp van de Lorentz Transformaties. Noem hiervoor het moment waarop A de appel gooit T , en neem dit als de oorsprong van beide coördinatenstelsels, zodat $(ct_T, x_T) = (ct'_T, x'_T) = (0, 0)$, waarbij het stelsel van A aangegeven wordt met accenten. Stel nu verder voor dat een tijdje t' later in het coördinatenstelsel van A de appel explodeert. De coördinaten van de explosie worden hiermee

(ct', vt') in het stelsel van A. In het coördinatenstelsel in rust ten opzichte van B vindt gebeurtenis T ook plaats in de oorsprong, en de explosie van de appel vindt plaats met coördinaten verkregen uit de Lorentztransformatie:

$$\begin{aligned} ct &= \gamma ct' + \beta \gamma vt' \\ x &= \beta \gamma ct' + \gamma vt' \end{aligned} \quad (4.30)$$

De snelheid w zoals B die meet is eenvoudigweg x/t oftewel

$$\begin{aligned} w &= c \frac{\beta \gamma ct' + \gamma vt'}{\gamma ct' + \beta \gamma vt'} \\ &= \frac{u + v}{1 + uv/c^2} \end{aligned} \quad (4.31)$$

en is dus kleiner dan $u + v$.

We gaan nu hetzelfde resultaat opnieuw afleiden, maar dan iets formeler. We zullen daarbij vinden dat bij een translatie langs de x -as niet alleen de formule voor het optellen van snelheid in de x -richting, maar ook in de y - en z -richting moet worden aangepast.

Per definitie geldt voor de snelheid:

$$V'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

Vul nu in (formule 4.18):

$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$

dan vinden we:

$$V'_x = \gamma \frac{dx}{dt'} - \beta \gamma c \frac{dt}{dt'}$$

Verder geldt ('kettingregel'):

$$\frac{dx}{dt'} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dt'}$$

en dus vinden we:

$$V'_x = \left(\gamma \frac{dx}{dt} - \beta \gamma c \right) \frac{dt}{dt'}$$

en aangezien

$$V_x = \frac{dx}{dt}$$

wordt dit

$$V'_x = (\gamma V_x - \beta \gamma c) \frac{dt}{dt'} \quad (4.32)$$

Nu gebruiken we (formule 4.22):

$$ct = \gamma(ct' + \beta x')$$

waaruit volgt:

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma + \frac{\beta\gamma}{c}V'_x$$

invullen hiervan in formule 4.32 levert dan:

$$V'_x = \frac{V_x - \beta c}{1 - \frac{\beta}{c}V_x}$$

Merk op, dat als $V_x = c$ we vinden dat ook $V'_x = c$. We kunnen een lichtstraal dus niet inhalen, geheel en al in overeenstemming met het eerste postulaat. Ook V'_y en V'_z blijken (anders dan y' en z') onder een Lorentztransformatie in de x -richting te veranderen:

$$\begin{aligned} V'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt'} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dt'} \\ &= V_y \left(\gamma + \frac{\beta\gamma}{c}V'_x \right) \end{aligned}$$

Hieruit vinden we m.b.v. de transformatieformule voor V'_x hierboven:

$$V'_y = \frac{V_y}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c}V_x \right)} \quad (4.33)$$

en net zo:

$$V'_z = \frac{V_z}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c}V_x \right)} \quad (4.34)$$

4.7 INTERMEZZO:

Alternatieve Lorentztransformatie

In deze paragraaf willen we nogmaals laten zien dat een willekeurig voorwerp nooit sneller dan c kan bewegen. Hiertoe gaan we eerst de Lorentztransformaties op een andere manier parametrizeren. Deze paragraaf kan overgeslagen worden en dient hier slechts 'ter lering ende vermaak'.

Bekijk verschillende Lorentztransformaties langs de x -richting. Beschouw drie inertiaalsystemen S , S' en S'' , met standaard Lorentz transformaties $S \rightarrow S'$ en $S' \rightarrow S''$ met onderlinge snelheden β_1 en β_2 respectievelijk. We

noteren de snelheid tussen stelsel $S \rightarrow S''$ met β , dus zonder index. We hebben eerder gevonden dat de optelformule voor snelheden geeft:

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} \quad (4.35)$$

De snelheden β_1 en β_2 tellen dus niet zomaar op tot β . Het is daarom handig om een andere parameters voor de snelheid in te voeren, die wel opgeteld kan worden. We definiëren nu een nieuwe grootte ϕ als volgt:

$$\phi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \quad (4.36)$$

We hebben dus voor de transformatie $S \rightarrow S'$ de parameter ϕ_1 als

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta_1}{1 - \beta_1} \right)$$

en voor $S' \rightarrow S''$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta_2}{1 - \beta_2} \right)$$

Nu vullen we in vergelijking 4.36 de uitdrukking 4.35 in:

$$\phi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{\beta_1 c + \beta_2 c}{1 + \beta_1 \beta_2}}{1 - \frac{\beta_1 c + \beta_2 c}{1 + \beta_1 \beta_2}} \right) \quad (4.37)$$

en vereenvoudigen dit tot

$$\phi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta_1 \beta_2 + (\beta_1 + \beta_2)}{1 + \beta_1 \beta_2 - (\beta_1 + \beta_2)} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\left(\frac{1 + \beta_1}{1 - \beta_1} \right) \left(\frac{1 + \beta_2}{1 - \beta_2} \right) \right) = \phi_1 + \phi_2 \quad (4.38)$$

We hebben dus gevonden dat de parameter ϕ bij opeenvolgende Lorentz transformaties in dezelfde richting optellen. We noemen dit *additief*; de parameter ϕ is additief.

We kunnen hiermee de Lorentztransformaties in termen van ϕ schrijven. Uit de definitie van ϕ volgt:

$$e^\phi = \sqrt{\left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)} = \sqrt{\frac{(1 + \beta)^2}{1 - \beta^2}} = \sqrt{\gamma^2 (1 + \beta)^2} = \gamma(1 + \beta) \quad (4.39)$$

en evenzo

$$e^{-\phi} = \sqrt{\left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)} = \gamma(1 - \beta) \quad (4.40)$$

De hyperbolische trigonometrische functies zijn gedefinieerd als

$$\sinh \alpha = \frac{1}{2} (e^\alpha - e^{-\alpha}) \quad (4.41)$$

$$\cosh \alpha = \frac{1}{2} (e^\alpha + e^{-\alpha}) \quad (4.42)$$

$$\tanh \alpha = \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha} = (e^\alpha - e^{-\alpha}) / (e^\alpha + e^{-\alpha}) \quad (4.43)$$

en hiermee hebben we de relaties gevonden

$$\sinh \phi = \gamma \beta \quad (4.44)$$

$$\cosh \phi = \gamma \quad (4.45)$$

$$\tanh \phi = \beta \quad (4.46)$$

waarmee de Lorentztransformaties in de x -richting geschreven kunnen worden als

$$\begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Nu zijn we klaar om te laten zien dat een voorwerp nooit sneller dan het licht kan gaan. Bekijk hiervoor een serie inertiaalsystemen $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$. Veronderstel dat iedere S_k zich met snelheid β beweegt ten opzichte van stelsel S_{k-1} . We willen weten wat de snelheid β_n van S_n is ten opzichte van het eerste stelsel S_0 . Voor Galilei transformaties zou dat gewoon n maal β zijn, en naarmate n naar oneindig gaat, wordt de snelheid oneindig hoog.

Voor de Lorentztransformaties ligt dat ingewikkelder, omdat de snelheden niet zomaar optellen. Echter, de parameter ϕ telt wel gewoon op, en voor stelsel S_n is de parameter ϕ_n daarmee gewoon gelijk aan n maal ϕ , dus: $\phi_n = n\phi$.

Maar hiermee kan de snelheid β achterhaald worden, via formule 4.46:

$$\beta_n = \tanh \phi_n = \tanh n\phi = (e^{n\phi} - e^{-n\phi}) / (e^{n\phi} + e^{-n\phi}). \quad (4.48)$$

Dit kunnen we schrijven als

$$\beta_n = \frac{(1 + \beta)^n - (1 - \beta)^n}{(1 + \beta)^n + (1 - \beta)^n} \quad (4.49)$$

We schrijven dit een beetje anders als

$$\beta_n = \frac{1 - \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n}{1 + \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n} \quad (4.50)$$

Merk op dat ongeacht de waarde van β de snelheid β_n steeds groter wordt voor grotere n . Maar het gaat niet naar oneindig zoals bij de Galilei transformaties. In plaats daarvan nadert β_n van beneden naar 1, dwz de lichtsnelheid is de limietwaarde. Dit zegt dus dat volgens de relativiteitstheorie deeltjes zich niet sneller bewegen dan het licht. De lichtsnelheid is een bovengrens.

Hoofdstuk 5

Vier dimensionele ruimte

*‘From henceforth, space by itself, and time by itself,
have vanished into the merest shadows
and only a kind of blend of the two exists in its own right’*

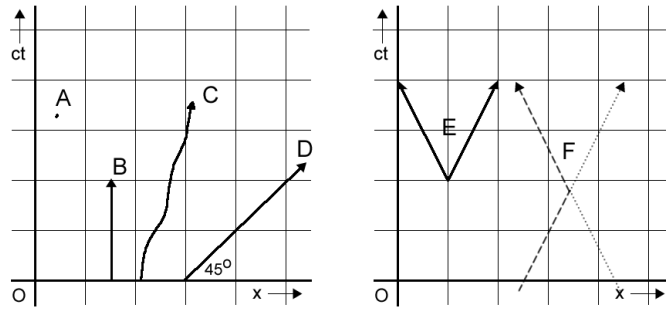
H. Minkowski

Een ‘gebeurtenis’ vind plaats op een bepaalde locatie, beschreven door coördinaten (x, y, z) , en op een bepaald tijdstip, beschreven door coördinaat t . Voor de beschrijving van een gebeurtenis zijn dus in totaal vier coördinaten nodig. We zullen de coördinaten van een gebeurtenis noteren als (ct, x, y, z) , waarbij de tijd t is vermenigvuldigd met de lichtsnelheid c (konstant in elk inertiaalsysteem) om de dimensie van elk van de vier coördinaten hetzelfde te laten zijn, nl die van een afstand.

Voorbeelden van gebeurtenissen zijn de flits van een lampje, of de botsing tussen twee auto’s. Om deze gebeurtenissen te tekenen in een stelsel maken we gebruik van het (ct, x) diagram, waarbij we de twee resterende ruimtelijke coördinaten y en z voor het gemak weglaten. Een gebeurtenis is in het (ct, x) diagram een punt. Een continue, aaneengeschakelde stroom van gebeurtenissen van een voorwerp vormt de wereldlijn van dit voorwerp. Dit is in het algemeen een kromme lijn in het (ct, x) vlak. In figuur 5.1 is het (ct, x) vlak getekend met een gebeurtenis en een aantal wereldlijnen.

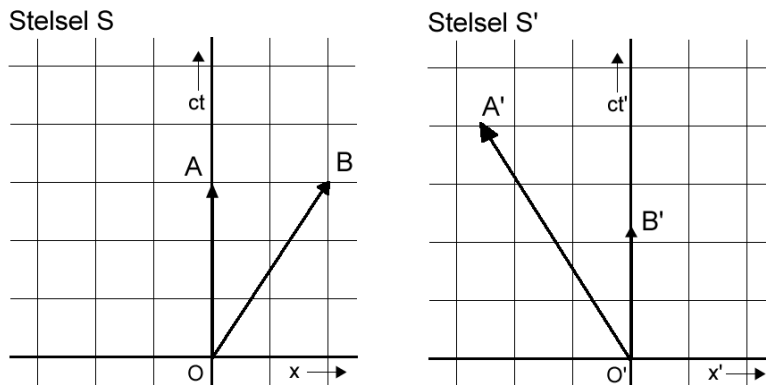
Het is duidelijk dat hoe kleiner de hoek van de wereldlijn met de x -as is, hoe groter de snelheid is. Een horizontale lijn kan niet; het zou een oneidige snelheid betekenen. De minimale hoek van een wereldlijn met de x -as is 45° , wanneer de snelheid c is.

We kunnen dit soort diagrammen voor stelsel S en S' maken. De transformatie tussen de coördinaten van beide stelsels wordt natuurlijk gegeven door de Lorentztransformaties. We nemen als voorbeeld een waarnemer A op aarde en een waarnemer B in een raket die met snelheid $\beta = 2/3$ wegvliegt van A . Na drie jaar heeft de raket dus een afstand van 2 lichtjaar afgelegd, in aardse coördinaten (stelsel S). De posities van A en B , in stelsel S , zijn



Figuur 5.1: Het (ct, x) vlak met een gebeurtenis A , een stilstaand voorwerp B , een bewegend en versnellend voorwerp C en een lichtstraal D . In het rechterfiguur worden bij E twee deeltjes gecreeerd, bijvoorbeeld een positron en een elektron en vliegen met tegengestelde snelheid weg. In F botsen twee deeltjes, waarbij hun snelheden omkeren.

weergegeven in het linker figuur 5.2. De punten A en B zijn gelijktijdig in dit stelsel.



Figuur 5.2: Wereldlijnen van waarnemer A en B uitgedrukt in stelsel S en in stelsel S' .

We kunnen nu de Lorentztransformaties gebruiken om de posities van A en B in het ruststelsel van de raket te bepalen (stelsel S'). De Lorentztransformaties geven:

$$A : \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ l.j.}$$

$$A' : \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\gamma \\ -2\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.02 \\ -2.68 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ lj}$$

en voor B geeft dit (we laten nu de coördinaten y en z weg

$$B : \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ lj}$$

$$B' : \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 5/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.23 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ lj}$$

De posities A' en B' zijn weergegeven in het rechterfiguur 5.2. Merk op dat in dit stelsel A' en B' niet meer gelijktijdig zijn.

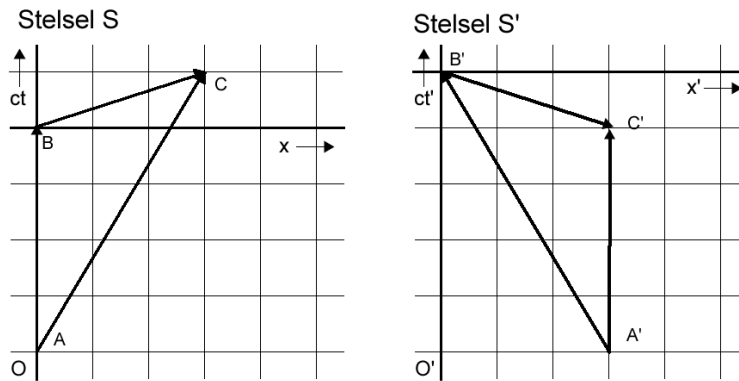
5.1 Causaliteit en de lichtsnelheid

In het volgende verhaal willen we duidelijk maken dat de snelheid van het licht de hoogste snelheid is waarmee informatie kan worden overgedragen. We zullen dit laten zien aan hand van een tegenspraak: als informatie sneller dan het licht zou kunnen worden overgedragen, leidt dit tot verwarring van ‘oorzaak en gevolg’ (causaliteit). Causaliteit is een zeer fundamenteel principe in de natuurkunde. De ‘oorzaak’ van een gebeurtenis vindt altijd plaats voor het ‘gevolg’. Schending van causaliteit wordt nooit geaccepteerd omdat dit leidt tot logische tegenspraak. Het zou in principe immers betekenen dat u uw voorouders kunt ombrengen voordat u geboren wordt.

Stel Anne en Frank zijn zijn vrienden. Frank gaat op ruimte reis met een schip dat een snelheid van $\beta = 0.6$ heeft (gebeurtenis A). Na 4 jaar wachten besluit Anne een brief aan Frank te sturen, met een nieuw type raket dat met $\beta = 3$ kan reizen. Het moment van vertrek van deze raket noemen we $t = 0$ en is gebeurtenis B . Na 1 jaar in deze super-luminus raket is de brief bij Frank aangekomen (gebeurtenis C).

In het coördinatenstelsel van Anne heeft Frank dus in 5 jaar een totale afstand van 3 lj afgelegd, en ontvangt Frank de brief een jaar nadat hij is verstuurd. Deze situatie is in weergegeven in het linkerfiguur 5.3. Maar in het stelsel in rust ten opzichte van Frank, S' , is de situatie anders. Via de Lorentztransformaties volgt:

$$A : \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow A' : \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Figuur 5.3: Wereldlijnen van Anne ($A - B$), van Frank ($A - C$) en van de brief ($B - C$). Aan de linkerkant in het coördinatenstelsel in rust tov Anne, rechts in rust tov Frank. Frank ziet de brief ‘uit de toekomst’ komen.

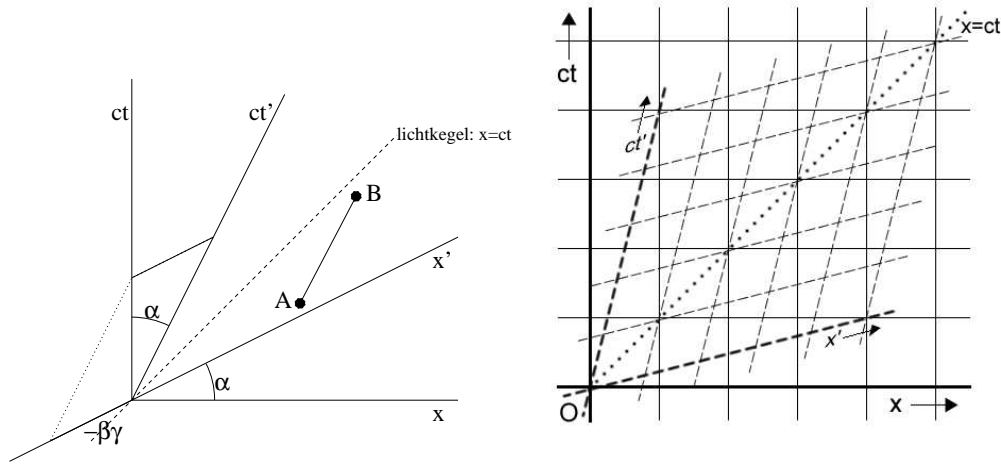
en evenzo voor $B' = (0, 0)$ en $C' = (-1, 3)$. In het coördinatenstelsel S' bereikt Frank punt C' eerder dan de brief die is verstuurd. Met andere woorden, in zijn inertiaalsysteem komt de brief eerder aan dan hij is verstuurd. Dit is in tegenspraak met causaliteit en daarmee onmogelijk. Het is het gevolg van de aanname dat de brief met $\beta = 3$ werd verstuurd, en er kan geconcludeerd worden dat geen informatie kan worden overgebracht met een snelheid groter dan c .

Merk op dat er overigens fenomenen in de natuur te vinden zijn die wel sneller gaan dan de snelheid van het licht. Denk bijvoorbeeld aan een lichtvlek die de lichtbundel van een vuurtoren maakt op een ver weg gelegen eiland. Omdat de lichtbundel ronddraait zal de snelheid waarmee de lichtvlek zich beweegt groter worden naarmate de afstand tot de vuurtoren toeneemt. Er is geen limiet voor de snelheid van de lichtvlek. Maar er wordt hierbij geen informatie overgedragen die sneller gaat dan c !

5.2 Minkowski-diagrammen

In plaats van het tekenen van twee diagrammen voor de stelsels S en S' , kunnen beide stelsels ook in één diagram getekend worden. Dit wordt het Minkowski diagram genoemd. Met deze ruimte-tijd diagrammen kunnen de meeste vraagstukken van de speciale relativiteitstheorie worden weergegeven, en deze geometrische benadering is de meest elegante manier om de vraagstukken op te lossen. Het is robust omdat het inlevingsvermogen vraagt om de relatie tussen gebeurtenissen en wereldlijnen te visualiseren.

Indien we het $x - ct$ vlak voorstellen m.b.v. twee loodrecht op elkaar staande assen zoals in fig. 5.4 dan wordt in deze figuur de x' -as beschreven door een lijn die volgt uit de eis $ct' = 0$, dus (zie formule 4.17.) $ct = \beta x$, m.a.w. door een lijn met richtingscoëfficiënt β . Op analoge wijze vinden we de lijn die de ct' as beschrijft uit de eis $x' = 0$, dus (zie formule 4.18.) $x = \beta ct$, of $ct = \frac{x}{\beta}$. Dit is een lijn met richtingscoëfficiënt $\frac{1}{\beta}$. D.w.z. de x' -as maakt met de x -as een hoek α zó, dat $\text{tg } \alpha = \beta$ en de ct' -as maakt met de ct -as dezelfde hoek α zoals in figuur 5.4 (Ga na.).



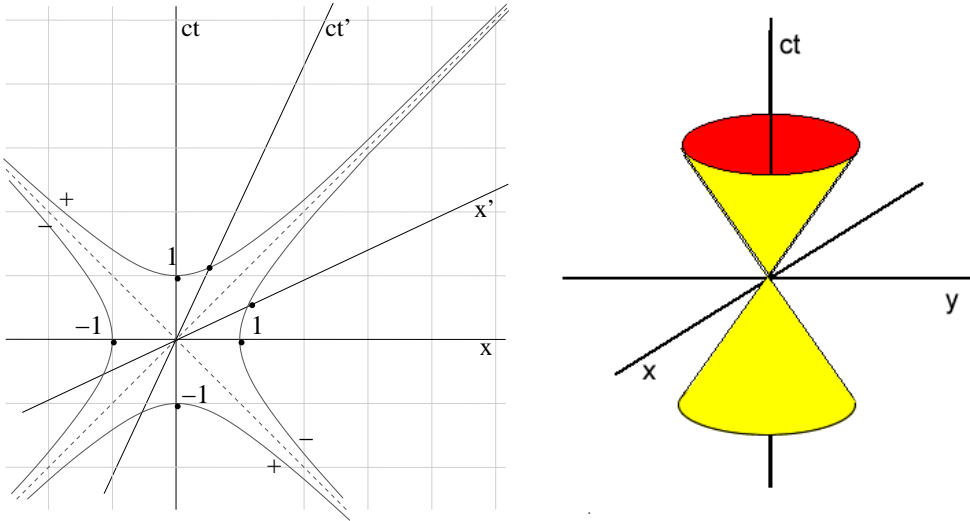
Figuur 5.4: *Minkowski diagram*

In figuur 5.4 is ook aangegeven de lijn $x = ct$: de relatie tussen plaats en tijd voor een lichtstraal. Deze lijn wordt ook wel als de lichtkegel aangeduid. Twee 'gebeurtenissen' A en B worden verbonden door een zogenaamde wereldlijn. De lijn AB in figuur 5.4 zou een eenparig bewegend deeltje kunnen voorstellen. Verder is in de figuur aangegeven hoe het punt $(ct, x) = (1, 0)$ transformeert naar $(ct', x') = (\gamma, -\beta\gamma)$. (Ga na m.b.v. de Lorentztransformatie.)

Het is gemakkelijk in te zien dat de eenheid van tijd (uitgedrukt in ct) weergegeven t.o.v. systeem S voor alle andere systemen S' die t.o.v. S eenparig langs de x -as bewegen op een hyperbool liggen. Immers: de grootte $s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ is een invariant en deze vergelijking beschrijft een hyperbool in het $(ct - x)$ vlak. We kunnen bijvoorbeeld nemen $(ct)^2 - x^2 = 1$ en verkrijgen zo de twee parabolen aangegeven in figuur 5.5 (links) met een '+'. Alle punten op deze parabool hebben dus dezelfde waarde voor s^2 . Een Lorentz transformatie van stelsel S naar S' is een verschuiving langs deze parabolische baan.

Voor negatieve s^2 hebben we als karakteristieke hyperbool de vergelijking $(ct)^2 - x^2 = -1$, aangegeven in het figuur met een ‘-’ teken.

De lijnen voor $s^2 = 0$ zijn de wereldlijnen van die van het licht, en komen overeen met de diagonale lijn van het figuur. Zij vormen de ‘lichtkegel’. De lichtkegel is duidelijker als kegel te visualiseren in de (ct, x, y) ruimte, dwz, wanneer er twee ruimtelijke dimensies getekend worden, zoals in figuur 5.5 (rechts).



Figuur 5.5: Links: hyperbolen in systeem S waarop de coördinaten $ct' = 1$ (hyperbolen aangegeven met ‘-’) resp. $x' = 1$ (hyperbolen aangegeven met een ‘+’) van alle mogelijke systemen S' liggen. Rechts: de lichtkegel voor coördinaten (ct, x, y) .

Voor punten die ‘in’ de lichtkegel liggen, dus in het gebied tussen de asymptoten van de met ‘+’ gelabelde hyperbolen, geldt dat er altijd een Lorentztransformatie gevonden kan worden zó dat het punt in het systeem S' op de ct' -as ligt. Viervectoren overeenkomend met dergelijke punten noemen we tijdachtig (‘timelike’). Gebeurtenissen in elkaars lichtkegel volgen elkaar op, en er kan geen verwarring ontstaan over welke gebeurtenis eerder of later plaatsvond. Wel kan het onderlinge tijdverschil veranderen indien het bekeken wordt vanuit een ander stelsel, maar er is geen transformatie die de *volgorde* in de tijd van de punten verandert. De gebeurtenissen zijn ‘causaal verbonden’, dwz de gebeurtenis die eerder plaatsvond kan (mogelijk-erwijs) invloed hebben op een gebeurtenis die later plaatsvond: de informatie-overdracht van de eerste naar de tweede gebeurtenis kan langzamer dan c verlopen.

Viervectoren met coördinaten ‘buiten’ de lichtkegel noemen we, uiteraard, ruimteachtig (‘spacelike’). Twee gebeurtenissen die een ondelinge ‘ruimteachtige’ afstand tot elkaar hebben kunnen elkaar op geen enkele manier beïnvloeden en zijn hiermee dus niet causaal verbonden. De volgorde in de tijd tussen deze gebeurtenissen hangt af van het stelsel waarin ze beschreven worden.

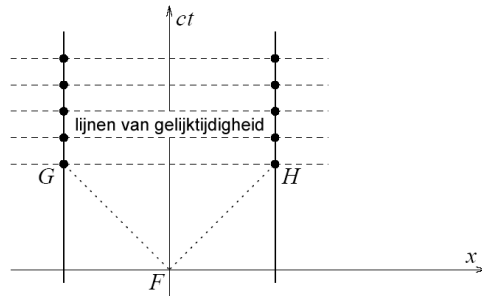
Minkowski-diagrammen illustreren op heldere wijze allerlei kwalitatieve eigenschappen van de Lorentztransformatie, zoals de betrekkelijkheid van het begrip gelijktijdigheid (ga na) e.d. In zeker zin zijn deze diagrammen echter ook verraderlijk, omdat de meetkunde van ruimte-tijd niet dezelfde is als de meetkunde van de ruimte alleen. In het bijzonder is de grootte van een plaatsvector $\vec{r} = (x, y, z)$ gelijk aan $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. De grootte van de ruimte-tijd vector $\vec{r} = (x, y, z, ct)$ is echter $\sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2}$. Deze grootte wordt dus berekend volgens een andere *metriek*. Om dit te ondervangen zette Minkowski zelf niet ct maar ict op de tijdas uit ($(ict)^2 = -c^2t^2$). Dan is de standaard metriek te gebruiken. Deze truc is echter niet altijd vol te houden. We zullen de discussie hier niet verder voeren.

5.2.1 Relativiteit van gelijktijdigheid

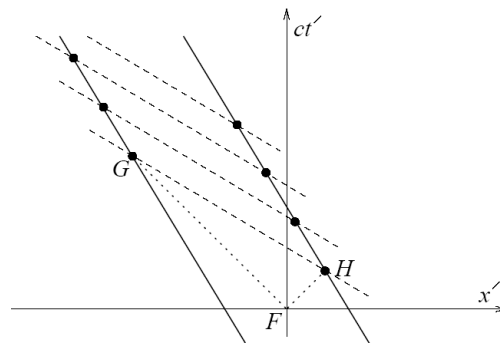
We hadden eerder gezien dat gelijktijdigheid een relatief begrip is, dwz, het hangt van het referentiestelsel van de waarnemer af of twee gebeurtenissen relatief zijn of niet. We laten dat hier nogmaals expliciet zien met gebruik making van ruimte-tijd diagrammen.

Hoe synchroniseren we twee klokken die op een afstand l van elkaar staan? Het meest eenvoudige is om een lamp in het midden te plaatsen, het een lichtflits te laten uitzenden, en op het moment dat de lichtflits aankomt beginnen de klokken te tikken. Het ruimte-tijd diagram van deze situatie in het ruststelsel S is getekend in figuur 5.6, met de lamp in het midden en de twee klokken op positie $\pm l/2$. De flits is gemarkeerd met F en het ontvangen van de flits als G en H. Hierna beginnen de klokken te tikken zoals aangegeven met stippen op de wereldlijn op de klok. Gelijktijdige tikken liggen op de horizontale lijn die de tikken verbindt, omdat zij dezelfde tijd coördinaat ct hebben.

Stel nu een ander referentiestelsel S' voor, dat beweegt met een snelheid $v = \beta c$ in de x -richting tov S . In dit nieuwe stelsel lopen de wereldlijnen van de klokken niet meer vertikaal, immers, zij verplaatsen met een snelheid v als de tijd tikt. Volgens het relativiteitsprincipe zullen de lichtsignalen nog steeds op lijnen van 45° lopen. Het ruimte-tijd diagram in S' ziet er dus uit zoals in figuur 5.7. Merk op dat de lijnen van gelijktijdigheid scheef lopen in S' . Dit betekent dat twee gebeurtenissen die simultaan zijn in S , in het algemeen niet meer simultaan zijn in S' .



Figuur 5.6: Het synchroniseren van twee klokken in stelsel S dmv het uitzenden van een lichtsignaal in het midden (F). Elke klok begint te tikken zodra de lichtflits is ontvangen (G en H). Lijnen van gelijktijdigheid verbinden overeenkomstige tikken en zijn horizontaal.

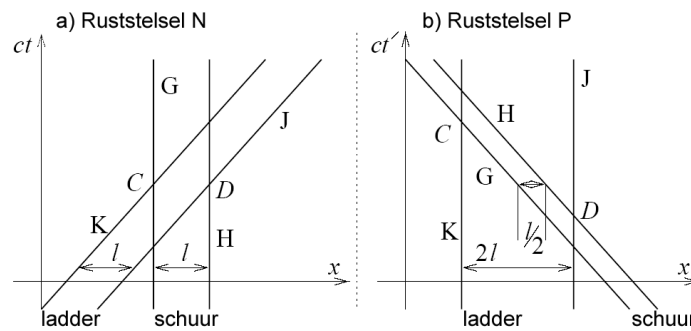


Figuur 5.7: De klokken zoals geobserveerd in S' , samen met gebeurtenissen F , G , H . Hoewel de klokken zijn gesynchroniseerd in S , zijn ze dat niet in S' . Merk op dat de lijnen van gelijktijdigheid scheef lopen in S' .

5.2.2 De ‘ladder in de schuur’ paradox

De boeren Niels (N) en Petra (P) hebben een schuur op het erf van lengte l en een ladder met lengte $2l$. Zij willen de ladder in de schuur opbergen, maar deze is natuurlijk te lang. N stelt voor dat P aankomt met de ladder met een snelheid $u = 0.866c$. Bij deze snelheid is $\gamma = 2$, en de ladder is met de Lorentzcontractie precies genoeg korter geworden om in de schuur te passen. P heeft bezwaar. P beargumenteert dat als hij met de ladder aan het rennen is, in *zijn* coördinatensysteem, de ladder nog steeds een lengte $2l$ heeft, terwijl de schuur een Lorentzcontractie ondergaat en een lengte heeft van $l/2$. Het plan om te gaan rennen met hoge snelheid heeft het probleem alleen erger gemaakt.

Kunnen zij beide gelijk hebben? Stel voor dat P met de ladder door de deur aan de voorkant van de schuur rent, en er via een andere deur aan de achterkant weer uit komt. Stel verder voor dat de schuur een mechaniek heeft waardoor de voordeur ommiddeljik sluit zodra de achterkant van de ladder binnen is (noem dit gebeurtenis C), en een mechaniek waarmee de achterdeur opent, precies op het moment wanneer de voorkant van de ladder daar aangekomen is (gebeurtenis D). Er zijn nu twee mogelijkheden: er is een tijd-interval waarin beide deuren gesloten zijn of dit tijdinterval is er niet. Als dit tijdinterval bestaat concluderen we dat de ladder past, als het niet bestaat past de ladder niet. Wie heeft er gelijk?



Figuur 5.8: Wereldlijnen van de voor en achterkant van de schuur (G en H), en de voor en achterkant van de ladder (J en K) en gebeurtenissen C en D in het ruststelsel van N (figuur a) en in het ruststelsel van P (figuur b). Terwijl C en D gelijktijdig zijn in het stelsel van N , zijn ze dit niet in het stelsel van P .

We kunnen ruimte-tijd plaatjes maken van de ladder en de schuur in beide coördinatenstelsels in rust voor N en P . In figuur 5.8, hebben de voor en achterkant van de schuur het label G en H , en de voor en achterkant van de ladder label J en K . In het coördinatenstelsel van N zijn inderdaad de gebeurtenissen C en D gelijktijdig, dus is er een moment in de tijd van N dat de ladder in de schuur past. In het stelsel van P echter, zijn deze gebeurtenissen niet meer gelijktijdig! Gebeurtenis D vindt plaats vòordat event C plaatsvindt, dus is er geen tijd in het stelsel van P waarin de ladder in zijn geheel in de schuur zit. Hiermee hebben beide waarnemers gelijk: de vraag of de ladder in de schuur past is afhankelijk van het coördinatenstelsel; het hangt af of twee gebeurtenissen gelijktijdig zijn, en we hebben gezien dat gelijktijdigheid een relatief begrip is.

5.3 Scalars en viervectoren

We zullen nu iets formeler de verschillende eigenschappen van scalars en viervectoren bekijken.

5.3.1 Scalars

Een scalar is een grootte die hetzelfde is in alle inertiaal systemen, voor alle waarnemers. Het heeft geen richting, en wordt gegeven door een invariant getal met een eenheid. De grootte Δs^2 is een voorbeeld van een scalar omdat het dezelfde waarde heeft in elk coördinaten stelsel. Zo is ook de eigentijd $\Delta\tau$ tussen twee gebeurtenissen op een wereldlijn een scalar.

Merk op dat het tijdsinterval Δt tussen twee gebeurtenissen, of de afstand Δl tussen twee gebeurtenissen, of de lengte l tussen twee wereldlijnen *geen* scalars zijn. Deze grootheden zijn niet invariant onder een Lorentz transformatie.

5.3.2 Drie-vectoren

In de drie-dimensionale ruimte kennen we het begrip vector. Een vector is iets wat niet alleen een grootte heeft maar ook een richting. Een vector \vec{a} wordt beschreven door 3 getallen, de componenten (a_x, a_y, a_z) .

Als we overgaan van een stelsel C naar een stelsel C' dat geroteerd is over een hoek θ om de z -as, worden de coördinaten getransformeerd als

$$a'_x = \cos\theta a_x + \sin\theta a_y \quad (5.1)$$

$$a'_y = \cos\theta a_y - \sin\theta a_x \quad (5.2)$$

$$a'_z = a_z \quad (5.3)$$

De vector heeft een lengte $|a|$ die gedefinieerd wordt als

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (5.4)$$

en deze lengte is hetzelfde (invariant) in elk Cartesisch coördinatenstelsel. Voor twee vectoren \vec{a} en \vec{b} kunnen we een inproduct definiëren als volgt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (5.5)$$

In de klassieke mechanica komen veel vector grootheden voor; het gebruik maakt een compacte notatie mogelijk. Zo zijn de positie van deeltjes, de snelheid, versnelling, impuls en kracht allemaal drie-vectoren.

We kunnen de formulering met vectoren nog compacter maken door een iets andere notatie te introduceren. Hierbij noemen we de componenten niet langer (x, y, z) maar (x_1, x_2, x_3) . De vector \vec{a} heeft zo de componenten (a_1, a_2, a_3) . We kunnen nu sommatie tekens gebruiken om de lengte en inproduct te schrijven als

$$|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 a_i^2}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i \quad (5.6)$$

5.3.3 Vier-vectoren

Zoals we al zagen worden gebeurtenissen weergegeven met 4 coördinaten. Twee gebeurtenissen A en B in de ruimtetijd hebben onderlinge ruimtelijke afstand Δx , Δy en Δz en een tijdsverschil van $c\Delta t$. Deze vier getallen kunnen worden beschreven als een vector x met 4 componenten, een viervector:

$$x = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z) \equiv (c\Delta t, \Delta \vec{x}) \quad (5.7)$$

Een symbool met een pijltje, zoals in \vec{x} , is gereserveerd voor de ruimtelijke componenten in onze notatie. We kunnen weer overgaan op de compacte notatie, waarbij we de tijd component ct noteren als x_0 :

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (5.8)$$

Let hierbij op de volgorde voor de komponenten die we gekozen hebben.

De viervector is in principe onafhankelijk van het coördinatenstelsel, maar pas op: de componenten zijn wel afhankelijk van het coördinatenstelsel en transformeren met de Lorentz transformaties. Een gebeurtenis A, beschreven door een viervector, is op zichzelf onafhankelijk van het coördinatenstelsel. Het vindt plaats, ongeacht in welk coördinatenstelsel het beschreven wordt, zoals elke gebeurtenis. Het verschil tussen de twee gebeurtenissen, een 3+1 dimensionele pijl in de ruimtetijd, is ook op deze manier onafhankelijk van het coördinatenstelsel.

De lengte van de vier-vector is een scalar en correspondeert met het bekende interval

$$|x|^2 \equiv s^2 = \sqrt{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} \quad (5.9)$$

Net zoals met drie-vectoren in de Euclidische ruimte definiëren we het *in-product* tussen twee vectoren als

$$x \cdot x \equiv |x|^2 \quad (5.10)$$

En we noemen dit de *lengte* van de viervector. Het grote verschil met een inproduct in de drie-dimensionale Euclidische ruimte zijn de min-tekens voor de ruimtelijke coördinaten.

Iets algemener kunnen we het inproduct tussen twee vectoren $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ en $b = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ schrijven als

$$a \cdot b = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 = a_0 b_0 - \sum_{i=1}^3 a_i b_i \quad (5.11)$$

en we kunnen laten zien dat het inproduct $a \cdot b$ ook invariant is onder de Lorentz transformaties. Bekijk maar eens de inproducten van de vectoren $(a + b) \cdot (a + b)$ en $(a - b) \cdot (a - b)$. Deze zijn beide invariant onder de Lorentz transformaties, want het is te schrijven als in vergelijking 5.9. Maar we kunnen dit schrijven als

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot (a + b) &= a \cdot a + b \cdot b + 2a \cdot b \\ (a - b) \cdot (a - b) &= a \cdot a + b \cdot b - 2a \cdot b \end{aligned}$$

van elkaar aftrekken levert:

$$a \cdot b = \frac{1}{4} ((a + b) \cdot (a + b) - (a - b) \cdot (a - b)) \quad (5.12)$$

Alles aan rechterzijde van bovenstaande vergelijking is invariant, dus wat links staat ook. Daarmee is aangetoond dat het inproduct $a \cdot b$ invariant is onder de Lorentz transformaties.

Het inproduct tussen twee viervectoren x en y wordt ook geschreven als

$$x \cdot y = \sum_{\mu=0}^3 x_{\mu} y^{\mu} = \sum_{\mu=0}^3 x^{\mu} y_{\mu} \quad (5.13)$$

waarbij de Griekse letter μ staat voor een index 0, 1, 2 of 3. We hebben de bovenindex hebben ingevoerd

$$(y^0, y^1, y^2, y^3) = (y_0, -y_1, -y_2, -y_3) \quad , \quad (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3) \quad (5.14)$$

Bij het vormen van een inwendig product sommeert men dus over de componenten van de twee 4-vectoren, waarbij de ene 4-vector de index boven en de andere de index beneden heeft. Zo'n sommatie komt zo vaak voor dat Einstein wel gekscherend dit zijn belangrijkste ontdekking heeft genoemd, namelijk de sommatieconventie:

Over twee gelijke indices, waarvan er een boven en een onder staat, wordt automatisch gesommeerd, het som teken is niet nodig.

Dit voorkomt veel schrijfwerk!

5.3.4 Matrices

De rotatie in de drie dimensionele ruimte, gegeven in 5.1, kan geschreven worden als

$$a'_i = \sum_{j=1}^3 D_{ij} x_j \quad (5.15)$$

waarbij de matrix D_{ij} twee indices heeft die corresponderen met de rij en kolom in de 3×3 matrix

$$D = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

We hadden de Lorentz transformaties al eerder geschreven als een 4×4 matrix. Deze matrices worden vaak aangeduidt met Λ_μ^ν zodat de Lorentztransformaties geschreven worden als

$$x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu \quad (5.17)$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van de sommatieconventie. Als laatste noemen we de transformatiematrix van beneden- naar bovenindices. Deze 4x4 matrix heet de *metriek*, genoteerd als $\eta^{\mu\nu}$ er is gelijk aan:

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu \quad ; \quad \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

Deze metriek geeft dus aan dat de ruimtelijke coördinaten een ‘min’-teken krijgen ten opzichte van de tijd-coördinaat. Dit ‘min’-teken had overigens ook precies andersom bij de tijd-coördinaat gezet kunnen worden en niet bij de ruimtelijke coördinaat; het is een kwestie van afspraak. De metriek speelt een heel centrale, dynamische rol in de Algemene Relativiteitstheorie.

5.4 Het Doppler Effect

Het Doppler effect kent iedereen uit het dagelijkse leven. Wanneer een politieauto met sirene aan langs ons rijdt, dan klinkt de toon van de sirene hoger als de auto naar ons toe rijdt en lager wanneer de auto zich van ons af beweegt. Het Doppler effect is een elementair verschijnsel dat optreedt bij alle trillingen die zich voortplanten.

5.4.1 De golfvergelijking

-Een willekeurige golf die zich voortplant in de 1-dimensionale ruimte wordt beschreven door de algemene formule

$$\varphi(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + B \cos(kx - \omega t). \quad (5.19)$$

Dit geldt voor alle soorten golven: water-, geluids- of lichtgolven, zolang ze opgebouwd zijn uit één enkele frequentie.

De variabelen k is het zogenaamde golfgetal, ω is de cirkelfrequentie. De constanten A en B bepalen de amplitude en beginconditie van de golf. Als we simpelweg aannemen dat op $t = 0$ en $x = 0$ geldt $\varphi(0, 0) = 0$, dan is $B = 0$. We hebben dan

$$\varphi(x, t) = A \sin(kx - \omega t). \quad (5.20)$$

Om deze formule verder te bekijken nemen we eerst een vast tijdstip $t = T$. De maxima van φ worden gegeven door

$$kx - \omega T = (2n + \frac{1}{2})\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.21)$$

De afstand tussen twee op elkaar volgende maxima is per definitie de golflengte en geven we aan met λ . Vergelijk in formule (5.21) de gevallen $n = 0$ en $n = 1$ en we zien dat de golflengte $\lambda = 2\pi/|k|$.

Als we vervolgens formule (5.20) voor een vaste x bekijken zien we dat de tijd tussen twee op elkaar volgende maxima gelijk is aan $2\pi/\omega$. Dit betekent dat de frequentie ν gelijk is aan het omgekeerde, $\nu = \omega/2\pi$. Combinatie van golflengte en frequentie levert ons nu op dat de snelheid v_g waarmee een maximum beweegt, de voortplantingssnelheid, gelijk is aan ω/k . Voor de absolute waarde van v_g geldt dan $|v_g| = \nu\lambda$.

Een 1-dimensionale golf wordt dus in het algemeen bepaald door de constanten A en B , en door drie parameters λ , ν en v_g , waarvan er twee onafhankelijk zijn:

$$\lambda = 2\pi/|k|, \quad \nu = \omega/(2\pi), \quad v_g = \omega/k = \pm\nu\lambda. \quad (5.22)$$

5.4.2 Lorentz transformaties

We veronderstellen nu dat de waarde die de amplitude φ op een zeker moment op een bepaalde plaats aanneemt onafhankelijk is van het inertiaalsysteem waarin we ons bevinden.¹ We kunnen dan met behulp van een Lorentz transformatie overgaan van het gegeven systeem S , met coördinaten x en t , naar een nieuw systeem S' , met x' en t' . In de nieuwe coördinaten wordt de golf beschreven door een nieuwe golf functie

$$\varphi'(x', t') = \varphi(x, t). \quad (5.23)$$

Met de formule (4.22) voor de inverse Lorentz transformatie schrijven we

$$kx - \omega t = k[\gamma(x' + \beta ct')] - \omega[\gamma(t' + \frac{\beta}{c}x')]. \quad (5.24)$$

In systeem S' heeft de golfbeweging nog steeds dezelfde vorm, maar nu met golfgetal k' en cirkelfrequentie ω' . Daarmee wordt de uitdrukking voor φ' gelijk aan

$$\varphi'(x', t') = A \sin(k'x' - \omega't') \quad (5.25)$$

Combineren we dit nu met formule (5.23) en (5.24) dan zien we dat

$$k' = \gamma(k - \omega\frac{\beta}{c}), \quad \omega' = \gamma(\omega - \beta ck). \quad (5.26)$$

We veronderstellen nu dat we te maken hebben met een electromagnetische golf, dus een lichtgolf of een radiogolf, die zich in het vacuüm voortplant. We nemen $k > 0$. Uit $|\beta| < c$ volgt $k' > 0$. Voor electromagnetische golven geldt $\omega = c|k|$, dus hier $\omega = ck$. Voor k' hebben we dan

$$k' = \gamma(k - \omega\frac{\beta}{c}) = \gamma k(1 - \beta) = k\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (5.27)$$

en voor ω'

$$\omega' = \gamma(\omega - \beta ck) = \gamma\omega(1 - \beta) = \omega\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}. \quad (5.28)$$

Voor de gewone frequentie ν vinden we op deze wijze

$$\nu' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{\omega}{2\pi}\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = \nu\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}. \quad (5.29)$$

¹Dit is niet altijd correct: electromagnetische golven transformeren niet triviaal onder een Lorentz transformatie. Voor nu kunnen we dit echter verwaarlozen.

Voor $\beta > 0$ ziet een waarnemer in S' het systeem S van zich af bewegen. Voor $\beta < 0$ ziet hij S juist naar zich toe bewegen. Volgens de relativiteitstheorie wordt dus licht met frequentie ν , dat wordt uitgezonden door een lichtbron die zich van ons af beweegt, door ons waargenomen als licht met de verlaagde frequentie

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}. \quad (5.30)$$

Beweegt de lichtbron naar ons toe, dan zien we de verhoogde frequentie

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 + |\beta|}{1 - |\beta|}}. \quad (5.31)$$

5.4.3 De niet-relativistische limiet

In de alledaagse, niet-relativistische fysica treedt het Doppler effect ook regelmatig op. De verandering in waargenomen frequentie is dan nog steeds te berekenen met behulp van formule (5.30), maar we kunnen ook kijken wat het resultaat is als we de Galileï transformaties gebruiken in plaats van de Lorentz transformaties.

We gaan opnieuw uit van een enkele golf gegeven door de formule (5.20). Bekijken we deze vanuit de twee inertiaalsystemen S en S' dan wordt het verband tussen deze systemen nu gegeven door de Galileï transformatie (2.5). Met behulp van de inverse van deze transformatie vinden we in plaats van formule (5.24)

$$kx - \omega t = k(x' + vt') - \omega t' = kx' - (\omega - kv)t'. \quad (5.32)$$

Het golfgetal k verandert niet en we vinden voor de nieuwe cirkelfrequentie

$$\omega' = \omega - kv. \quad (5.33)$$

Voor een electromagnetische golf met $k > 0$ wordt dit

$$\omega' = \omega(1 - \beta). \quad (5.34)$$

Het niet-relativistische analogon van formule (5.30) is dus

$$\nu' = \nu(1 - \beta). \quad (5.35)$$

We kunnen nu de relativistische en niet-relativistische formules voor het Doppler effect vergelijken. Als v klein is ten opzichte van c kunnen we de

relativistische formule (5.30) ontwikkelen naar machten van β .²

We krijgen dan

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \nu \sqrt{1 - \frac{2\beta}{1+\beta}} = \nu(1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots). \quad (5.36)$$

Bij normale snelheden met $\beta \ll 1$ kunnen we de laatste term in deze vergelijking verwaarlozen en we zien dat we precies de niet-relativistische limiet bereiken van formule (5.35): het Doppler effect voor licht bij normale snelheden is zeer klein, dit in tegenstelling tot wat we bij geluidsgolven waarnemen.

² Dit is een zogenaamde Taylor expansie: idere functie $f(x)$ kan rond het punt $x = a$ worden geschreven als

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

Voor een wortel functie met $0 \ll \alpha \ll 1$ geldt er dan

$$\sqrt{1-\alpha} = (1-\alpha)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\alpha^2 + \dots$$

Hoofdstuk 6

Relativistische mechanica

*‘If I have seen further than others,
it is by standing upon the shoulders of giants’*

I. Newton

Voordat we de effecten van de relativiteitstheorie op de mechanica bespreken geven we een korte samenvatting van de Klassieke Mechanica.

6.1 Klassieke Mechanica

De ontdekking van de wetten van de dynamica was een dramatisch moment in de geschiedenis van de wetenschap. Voordat Newton zijn Principia publiceerde waren de bewegingen van planeten een mysterie. Galilei maakte daarvoor al een grote stap met zijn principe van relativiteit; de grote bijdrage van Newton was dat hij beschreef hoe voorwerpen *veranderen* van snelheid. Hij formuleerde daartoe drie hoofdwetten van de Mechanica. De Eerste Wet was een herhaling van het relativiteitsprincipe van Galilei. De Tweede Wet gaf specifiek aan hoe de snelheid van een voorwerp verandert als een uitwendige *kracht* hierop inwerkt, via $\vec{F} = m\vec{a}$. Newton geeft hierbij niet aan hoe de kracht in het algemeen verkregen wordt; maar hij maakt ons bewust van het feit dat er krachten zijn¹, waarmee we de dynamica

¹In één geval geeft hij wel een uitdrukking voor de kracht, namelijk voor de zwaartekracht. Newton geeft aan dat de gravitationele aantrekkingskracht tussen twee lichamen met massa's m en M langs de verbinding van de zwaartepunten van de twee lichamen loopt en gelijk is aan

$$F_z = G \frac{mM}{r^2}$$

waarbij r de onderlinge afstand tussen de lichamen is en G de Newtonse konstante, $G = 6.673 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$. Voor de aantrekking op aarde benaderen we dit als $F_z = mg$ waarbij de valversnelling is, $g = GM/R^2$, met R de diameter van de aarde. De valversnelling op aarde is gelijk aan $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$.

van voorwerpen kunnen beschrijven. Hoewel een aantal verschijnselen hiermee beschreven kunnen worden, zoals de draaiing van de maan om de aarde, zijn veel problemen hiermee niet exact op te lossen. Bijvoorbeeld de onderlinge gravitationele aantrekking van drie hemellichamen. Ook kende Newton lang niet alle krachten, zoals hij bijvoorbeeld zeker niet bewust was van de inter-moleculaire krachten.

Maar hoewel hij niet alle krachten kende, had hij wel een algemeen principe waar alle krachten aan moeten voldoen. Dit principe is vastgelegd in zijn Derde Wet: *actie is reactie*. Het wil ongeveer zeggen: stel dat we twee voorwerpen hebben waarbij de eerste een kracht uitoefent op het tweede, en het daarbij een kant op duwt. Dan zegt de Derde Wet dat er een kracht is dat deeltje 2 uitoefent op deeltje 1, die het de tegenovergestelde kant uitduwt. En dit principe geldt voor alle krachten en voor een willekeurige hoeveelheid deeltjes.

6.1.1 Behoud van impuls

De consequentie van de Derde Wet van Newton is het volgende. Stel dat we twee deeltjes beschouwen, A en B , die botsen volgens de Newton, waarbij deeltje A een kracht uitoefent op B gelijk aan:

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d}{dt}m\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{p}$$

met $\vec{p} = m\vec{v}$ de impuls. De Derde Wet zegt nu dat er een tegengestelde kracht van deeltje B op A wordt uitgeoefend, die tegengesteld is:

$$\frac{dp_A}{dt} = -\frac{dp_B}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}(p_A + p_B) = 0 \quad (6.1)$$

waarbij we de impulsen p_A en p_B hebben opgeteld. Maar nu concluderen we dat de verandering van de *totale* impuls nul is, met andere woorden: de totale impuls $p_A + p_B$ is behouden bij de interactie: het is een getal dat konstant is als functie van de tijd.

We kunnen over het algemeen de wet van behoud van impuls voor een gesloten systeem, waarbij er geen interactie met de buitenwereld is, schrijven als

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 + \dots = \textit{konstant} \quad (6.2)$$

Indien er wel een uitwendige kracht op het systeem werkt, \vec{F}_{ext} , geldt dus

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 + \dots) = \vec{F}_{ext} \quad (6.3)$$

6.1.2 Arbeid en vermogen

Als we de kracht als functie van de tijd t kennen, kunnen we de fundamentele vergelijking $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ voor de vergelijking van de dynamica van het deeltje oplossen door te integreren:

$$\int_A^B d\vec{p} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} dt \quad \text{oftewel:} \quad \vec{p}_A - \vec{p}_B = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} dt = \vec{S} \quad (6.4)$$

waarbij \vec{p}_A de impuls op moment t_A is en \vec{p}_B de impuls op moment t_B . De grootte \vec{S} wordt de *krachtstoot* genoemd. Dit wil zeggen dat de impulsverandering van het deeltje gelijk is aan de krachtstoot.

Bij de meeste problemen in de mechanica is echter de kracht niet gegeven als functie van de tijd t , maar als functie van de plaats, $\vec{F}(x, y, z)$. We kunnen dan de integraal pas doen als we x , y en z als functies van de tijd kennen, dwz als we het probleem opgelost hebben dat we proberen op te lossen! Om uit deze vicieuze cirkel te ontkomen voeren we de begrippen *arbeid* en *energie* in.

Daartoe beschouwen we een bewegend deeltje dat een kracht ondervindt. De hoeveelheid *arbeid* die door de kracht gedurende de verplaatsing over een afstandje $d\vec{r}$ wordt verricht, is gelijk aan

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (6.5)$$

Rechts staat het inproduct, dus arbeid is gelijk aan het produkt van de verplaatsing met de component van de kracht in de richting van de verplaatsing. De arbeid is nul als de kracht loodrecht op de verplaatsing staat. De totale arbeid wordt verkregen door de infinitesimale gedeelten bij elkaar op te tellen; dit levert de integraal:

$$A = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (6.6)$$

In veel praktische gevallen is de kracht konstant, zowel in grootte als in de richting. We zullen ons nu daartoe beperken. In dit geval kunnen we de kracht \vec{F} 'buiten het integraalteken' halen (het is immers een konstante) en de arbeid schrijven als

$$A = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \quad (6.7)$$

Hieruit volgt dat de arbeid in dit geval onafhankelijk is van het pad of de route tussen de punten A en B . We kunnen willekeurig welke route kiezen om van A naar B te gaan, bij een konstante kracht is de verrichtte arbeid onafhankelijk van de gekozen weg. Deze krachten worden *conservatieve krachten* genoemd.

Bij praktische toepassingen is het van belang te weten in welk tempo arbeid verricht wordt. Het *vermogen* op een bepaald moment wordt gedefinieerd door

$$P = \frac{dA}{dt} \quad (6.8)$$

en dit kunnen we ook schrijven als

$$P = F \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (6.9)$$

We kunnen nu het verband bepalen tussen de arbeid en de energie. We vullen hiervoor de uitdrukking $\vec{F} = m\vec{a} = md^2\vec{r}/dt^2$ in voor de arbeid:

$$\begin{aligned} A &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_A}^{t_B} m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \frac{d\vec{r}}{dt} dt \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] dt = \frac{1}{2} m \vec{v}_B^2 - \frac{1}{2} m \vec{v}_A^2 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Deze uitkomst betekent dat de arbeid A altijd gelijk is aan het verschil van de grootte $\frac{1}{2}mv^2$ aan het einde en het begin van de baan. Dit wordt de kinetische energie genoemd, en aangeduid door T :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{of} \quad T = \frac{p^2}{2m} \quad (6.11)$$

De arbeid, verricht op een deeltje, is gelijk aan de verandering van van kinetische energie van dit deeltje.

6.1.3 Potentiele energie

We zagen dat een kracht conservatief heet als de arbeid die verricht wordt onafhankelijk is van de afgelegde route. In dat geval kan de arbeid worden uitgedrukt als het verschil tussen een grootte $U(x, y, z)$, berekend in het begin- en eindpunt. Deze grootte $U(x, y, z)$ wordt de potentiele energie genoemd en is een functie van de coördinaten van een deeltje. Als \vec{F} een conservatieve kracht is geldt dus

$$A = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = U_A - U_B \quad (6.12)$$

oftewel: de potentiele energie is een functie zodanig dat de verandering tussen begin- en eindpunt gelijk is aan de arbeid die op het deeltje verricht moet

worden om het van het begin- naar het eindpunt te laten bewegen. We hebben voor kleine afstanden $d\vec{r}$ dus voor de potentiële energie

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU \quad (6.13)$$

omdat we zo de definitie van de potentiële energie weer terug vinden bij integratie:

$$A = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B dU = -(U_B - U_A) = U_A - U_B \quad (6.14)$$

We kunnen deze vergelijking schrijven als

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \quad (6.15)$$

waarbij de *gradiënt* $\vec{\nabla}$ de richtingsafgeleide is. De gradient is zodanig is gedefinieerd voor de x , y en z componenten van de kracht geldt dat:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (6.16)$$

6.1.4 Behoud van energie

Als de kracht op een deeltje conservatief is, kunnen we vergelijking 6.12 combineren met 6.10 en vinden dan dat $T_B - T_A = U_A - U_B$ oftewel:

$$(T + U)_A = (T + U)_B \quad (6.17)$$

De grootheid $(T + U)$ wordt de *totale energie* van het deeltje genoemd en aangeduid met W , dus

$$W = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) \quad (6.18)$$

en er volgt dat als de krachten op een deeltje conservatief zijn, de totale energie van dat deeltje behouden blijft, oftewel konstant in de tijd is. De totale energie wordt dus behouden. Voor een vrij vallend deeltje in een zwaartekrachtsveld bijvoorbeeld geldt dat $U = mgh$ waarbij h de hoogte van het deeltje is. Uit het behoud van energie volgt

$$W = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \textit{konstant} \quad (6.19)$$

Tot zover de zeer beknopte samenvatting van de Klassieke Mechanica.

6.2 Botsingen

We gaan nu terug naar de Speciale Relativiteitstheorie. We zullen allereerst een tweetal botsingen analyseren, waarbij we gebruik maken van de Lorentztransformaties. We zullen zien dat, indien we de behoudswetten willen handhaven samen met de Lorentztransformaties, we de definities van impuls moeten aanpassen.

6.2.1 Elastische verstrooiing

We nemen allereerst aan dat de botsing 'perfect' is, dat wil zeggen dat geen energie verloren gaat in verwarming van de deeltjes en wrijving kan worden verwaarloosd. Denk hierbij aan twee biljartballen op een perfect gladde biljarttafel. We noemen dit 'elastische botsingen'. We nemen twee deeltjes die met snelheid \vec{u}_1 en \vec{u}_2 op elkaar afkomen en na de botsing een de snelheid \vec{v}_1 en \vec{v}_2 hebben. We schrijven het behoud van impuls op als:

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 = \alpha_3 \vec{v}_1 + \alpha_4 \vec{v}_2 \quad (6.20)$$

waarbij in de Klassieke Mechanica we natuurlijk identificeren:

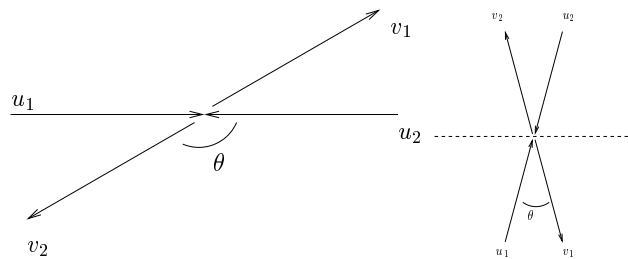
$$\alpha_1 = \alpha_3 \quad \text{massa van deeltje 1} \quad (6.21)$$

$$\alpha_2 = \alpha_4 \quad \text{massa van deeltje 2} \quad (6.22)$$

oftwel

$$m_A \vec{u}_1 + m_B \vec{u}_2 = m_A \vec{v}_1 + m_B \vec{v}_2$$

De massa m noemen we de 'trage massa' van de deeltjes. In Figuur 6.1 is deze botsing weergegeven. In de relativiteitstheorie zullen we een extra



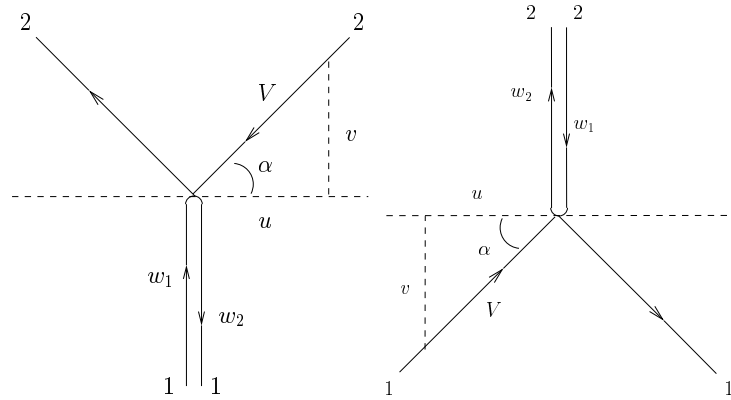
Figuur 6.1: *Elastische botsing tussen twee identieke deeltjes die met gelijke snelheid op elkaar worden afgeschoten. In het rechterfiguur is de botsing 'gedraaid' zodat deeltje 1 van onderaf komt en deeltje 2 van bovenaf.*

snelheidsafhankelijke term toevoegen in de definitie van impuls.

De elastische botsingen tussen twee identieke deeltjes die met dezelfde grootte van snelheid $|\vec{u}|$ op elkaar af worden geschoten heeft $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = |\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$. Bij deze botsing wordt wel de richting van de deeltjes veranderd, en de inkomende en uitgaande deeltjes maken een hoek θ

We gaan nu deze botsing beschouwen vanuit een coördinatenstelsel dat meebeweegt met deeltje 1. In dit stelsel heeft deeltje 1 geen snelheid in de x -richting, maar alleen een snelheid in de y -richting. We noemen dit snelheid w . Deeltje 2 maakt een hoek α met de x -as. Deze situatie is getekend in Figuur 6.2. We hebben nu de situatie dat:

- Deeltje 1 gaat nu 'recht omhoog' met snelheid w_1 en terug met snelheid w_2 . Deze snelheden zijn aan elkaar gelijk maar tegengesteld.
- Deeltje 2 heeft in dit stelsel een grotere snelheid \vec{V} . De x -component van de snelheid is u en de y -component noemen we als v .



Figuur 6.2: Links: Botsing tussen twee identieke deeltjes in het stelsel dat meebeweegt met deeltje 1. Rechts: Botsing tussen twee identieke deeltjes in het stelsel dat meebeweegt met deeltje 2.

We vragen ons nu af of we een relatie tussen de y -componenten van de impuls van deeltje 1 en 2 kunnen vinden, dus een relatie tussen w en v . Kijk hiervoor naar een ander stelsel S' dat met deeltje 2 meebeweegt. In S' heeft deeltje 2 dus geen x -component van de snelheid, maar deeltje 1 wel. Uit symmetrie-overwegingen volgt dat de situatie nu precies gelijk is aan die in stelsel S , met deeltjes 1 en 2 omgewisseld. Maar voor de transformatie van de snelheden in de y -richting hadden we uitdrukking 4.33, oftewel

$$V_y = \frac{V'_y}{\gamma} \frac{1}{1 - \frac{\beta}{c} V'_x} \quad (6.23)$$

Verder volgt

$$V'_y = w \quad (6.24)$$

$$V'_x = 0 \quad (6.25)$$

met andere woorden: we hebben gevonden dat $v = w/\gamma$ (let op, w is de y -component van de snelheid van deeltje 1 in S , en van deeltje 2 in S' ; v is de y -component van deeltje 2 in S en deeltje 1 in S'). Merk nu op dat:

1. De totale snelheid van bewegend deeltje 1 in S en van bewegend deeltje 2 in S' is hetzelfde, namelijk: $V = \sqrt{v^2 + u^2}$.
2. Impulsbehoud in de y -richting geeft nu

$$\alpha(w)w - \alpha(V)v = -\alpha(w)w + \alpha(V)v \quad (6.26)$$

en let hierbij goed op het verschil tussen V en v en de tekens! We hebben nu

$$\frac{\alpha(V)}{\alpha(w)} = \frac{w}{v} = \frac{w}{w/\gamma} = \gamma \quad (6.27)$$

Neem nu de snelheid w heel klein. In deze limiet is $\lim_{w \rightarrow 0} v = 0$ en $\lim_{w \rightarrow 0} V = u$. In dat geval kunnen we de relativistische effecten verwaarlozen en moeten we de Klassieke uitdrukking voor impuls terugvinden. Dit houdt in dat

$$\lim_{w \rightarrow 0} \alpha(w) = m \quad (6.28)$$

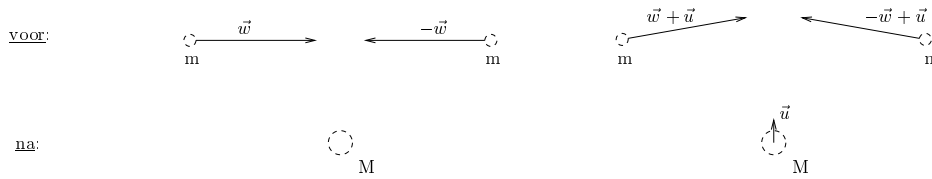
en hiermee (invullen in 6.27) vinden we

$$\lim_{w \rightarrow 0} \alpha(V) = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (6.29)$$

We moeten dus de definitie van impuls aanpassen om te zorgen dat deze behouden blijft. Deze relativistische uitbreiding van impuls is

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad (6.30)$$

Met deze definitie kunnen we de elastische botsingen relativistisch beschrijven. De factor γ is toegevoegd als gevolg van de transformatie van de snelheid in de y richting.



Figuur 6.3: *Links: Inelastische botsing tussen twee identieke deeltjes. Links in het stelsel waarin deeltje M in rust is, rechts in het stelsel waarin M een kleine snelheid \vec{u} heeft. Rechts: Botsing tussen twee identieke deeltjes in het stelsel dat meebeweegt met deeltje 2.*

6.2.2 Inelastische verstrooiing

We zullen nu een heel ander type botsingen beschouwen, namelijk de inelastische botsing. Hierbij botsen twee deeltjes op elkaar zonder dat ze terugstoten. Denk nu aan twee klompen klei die op elkaar worden geschoten en na de botsing een grote klomp vormen.

Neem twee identieke deeltjes met massa m die een inelastische botsing maken. Beide komen met snelheid w naar elkaar toe. Na de botsing is er één stilstaand deeltje over met massa M . Klassiek verwachten we dat geldt $M = 2m$.

We beschouwen nu dezelfde botsing vanuit een stelsel dat met een kleine snelheid u in de y -richting beweegt. De impuls voor en na de botsing in de y richting levert:

$$\text{voor } p = 2\gamma mu \quad (6.31)$$

$$\text{na } p = Mu \quad (6.32)$$

waarbij we de relativistische definitie van de impuls hebben gebruikt, zie vergelijking 6.30. We nemen weer de limiet $u \rightarrow 0$ en factor γ staat dan voor $\gamma = 1/\sqrt{1 - w^2/c^2}$. We hebben nu dus gevonden dat geldt:

$$M = 2\gamma m = \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \quad (6.33)$$

en dus is de massa M na de botsing *groter* dan de som van de twee (rust-) massa's voor de botsing! Dit is ook het gevolg van de wet van behoud van impuls. We zullen zien dat de toename van massa na de botsing afkomstig is van de kinetische energie vòòr de botsing.

6.3 Relativistische energie

We geven eerst het gedachte experiment van Einstein waarin de gelijkheid van energie en massa werd gepostuleerd. Dit gedachte-experiment is ook gepubliceerd in 1905, en is te vinden in de reader bij dit college. Vervolgens zullen we de energie van een bewegend voorwerp beschouwen.

6.3.1 De doos van Einstein

Als er één natuurkundige wet is die iedereen kent, is dat wel de beroemde wet van equivalentie tussen massa en energie

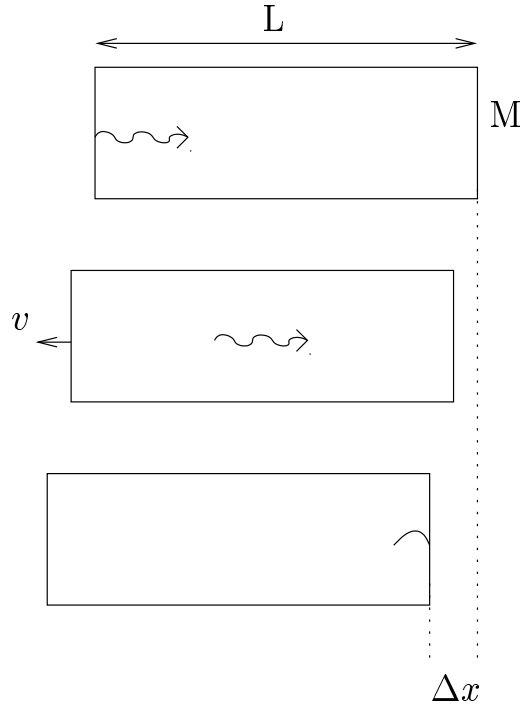
$$E = mc^2 \quad (6.34)$$

Einstein toonde deze wet eerst aan met een eenvoudig gedachteexperiment. In 1905 had hij eerst een verklaring voor het foto-elektrisch effect gegeven. Dit beschrijft het fenomeen waarbij licht op een plaatje valt en elektronen los maakt. De energie van de elektronen bleek af te hangen van de ‘kleur’ van het licht, en niet van de intensiteit van de lichtbron. De verklaring werd door Einstein gegeven door licht voor te stellen als deeltjes, fotonen, elk met een energie $E_\gamma = h\nu$. De konstante h is de konstante van Planck en heeft de waarde $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$, en ν staat voor de frequentie van het licht. De impuls van een foton is omgekeerd evenredig met de golflengte λ en wordt gegeven door $p_\gamma = h/\lambda$. Met de uitdrukking $\lambda\nu = c$ is hiermee gegeven dat

$$E_\gamma = cp_\gamma$$

Het gedachte-experiment van Einstein (‘Einsteins doos’) gaat nu als volgt. Stel je een doos voor, volledig afgesloten van de buitenwereld. De doos heeft een massa M . Aan de linkerkant van de doos wordt nu een foton uitgestraald door de wand, en vertrekt naar de rechterkant van de doos. Op het moment van vertrek krijgt de doos een terugstoot van het vertrekkend foton. De impuls van het foton wordt gegeven door $p_\gamma = E/c$ en de impuls van de terugstoot door $p = Mv$. Met andere woorden, de snelheid van de doos, v , door de terugstoot is gelijk aan $v = -p/M = -E/cM$. We hebben hier de klassieke benadering voor de impuls genomen.

Op het moment dat het foton aan de andere kant aankomt wordt de terugstoot tenietgedaan en staat de doos weer stil. De doos is dan verplaatst over een afstand Δx . Deze afstand is gelijk aan $\Delta x = v\Delta t$, waarbij Δt de tijd voorstelt die het foton er over doet om door de doos te vliegen, $\Delta t = L/c$ met L de grootte van de doos. Hiermee is dus de afgelegde afstand $\Delta x = -vL/c = -EL/c^2M$.



Figuur 6.4: De ‘doos van Einstein’. Voor de uitleg zie tekst.

Het foton heeft pure energie getransporteerd; geen massa! Maar het zwaartepunt van de doos, dat geen contact met de buitenwereld heeft, kan door deze actie van het foton niet verplaatst zijn. Als er een massa m verplaatst zou zijn geweest, over de lengte L van de doos, zegt het behoud van het zwaartepunt:

$$mL + M\Delta x = 0$$

Nu kunnen we invullen voor Δx en krijgen:

$$mL - M \frac{EL}{c^2 M} = 0 \quad \text{oftewel:} \quad L \left(m - \frac{E}{c^2} \right) = 0$$

en hiermee $E = mc^2$!

Met andere woorden: de pure energie E van het foton is equivalent aan een massa m waarvoor geldt $m = E/c^2$. Het is aan Einstein te danken dat hij deze relatie algemeen heeft opgevat: energie is gelijk aan massa.

6.3.2 Energie van een bewegend voorwerp

Met het gedachteexperiment heeft Einstein aangetoond dat energie en massa aan elkaar gelijk zijn via de relatie $E = mc^2$. Voor een voorwerp met met

een snelheid beweegt hebben we aangetoond dat de impuls wordt aangepast, en de relativistische beschrijving wordt gegeven door

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad (6.35)$$

Zo kunnen we ook postuleren dat de energie van het voorwerp gelijk is aan

$$E = \gamma m c^2 \quad (6.36)$$

en we zullen aantonen dat we met deze uitdrukking de juiste Klassieke Limiet verkregen wordt. Immers, we kunnen voor lage snelheden benaderen dat

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \sim \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{3v^4}{8c^4}\right)$$

en vinden dus dat

$$E = \gamma m c^2 = m c^2 + \frac{1}{2} m v^2 - \frac{3}{8} m v^4 / c^2$$

In de limiet voor lage snelheden is dit is precies de kinematische energie $\frac{1}{2} m v^2$ plus een konstante, $m c^2$. Energiebehoud wordt door dergelijke constanten uiteraard netjes in tact gelaten.

We zullen nu ook laten zien dat deze definitie voor de energie, vergelijking 6.36, overeenstemt met de klassieke relatie tussen energie en kracht, zoals gegeven in vergelijkingen 6.8 en 6.9. We hebben gezien dat verandering van energie dE/dt teweeg wordt gebracht door het vermogen $\vec{F} \cdot \vec{v}$. Invullen levert:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\gamma m c^2}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\gamma m \vec{v}}{dt} \quad (6.37)$$

We zullen nu laten zien dat deze vergelijking inderdaad consistent is. Daartoe vermenigvuldigen we met $2\gamma m$ om tot totale afgeleiden te komen:

$$2\gamma m c^2 \frac{d\gamma m}{dt} = 2\gamma m \vec{v} \cdot \frac{d\gamma m \vec{v}}{dt} \quad (6.38)$$

$$c^2 \frac{d}{dt} (\gamma m)^2 = \frac{d}{dt} (\gamma m v)^2 \quad (6.39)$$

Hieruit volgt dat moet gelden:

$$c^2 \gamma^2 m^2 = \gamma^2 m^2 v^2 + C$$

waarbij C een integratiekonstante is, en het inproduct $\vec{v} \cdot \vec{v}$ geschreven wordt als v^2 . Om de integratiekonstante te bepalen vullen we snelheid $v = 0$ in. Dan is $\gamma = 1$ en volgt:

$$c^2 m^2 = C$$

zodat we kunnen schrijven

$$c^2\gamma^2m^2 - \gamma^2m^2v^2 = c^2m^2$$

waaruit we kunnen afleiden dan moet gelden dat

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

hetgeen precies is wat we verwachten voor γ . Met andere woorden: de relativistische uitdrukking voor de energie stemt overeen met de relaties tussen energie en kracht zoals gegeven door de Klassieke Mechanica.

6.4 Energie-impuls vector

We kunnen de relativistische uitdrukkingen voor energie en impuls ook op een ander manier benaderen. Daartoe keren we terug naar de vier-vectoren $x = (ct, x, y, z)$, en vragen ons af of er nog andere vier-vectoren te definiëren zijn.

Daartoe laten we ons inspireren door de definitie van impuls in de Klassieke Mechanica:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} m \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

waarbij Δx de verplaatsing in de x -richting is en Δt de tijdsduur. We vragen ons af of hier een equivalente vier-vector van te maken is in de vier-dimensionale ruimte-tijd. Dit is inderdaad mogelijk door $\Delta \vec{x}$ te vervangen door de viervector Δx . We kunnen echter niet Δt in de noemer laten staan, omdat deze niet invariant onder de Lorentz transformaties is. We kunnen wel Δt vervangen door het verloop van de eigentijd, $\Delta \tau$, omdat τ immers een scalar is. Als vier-vector kunnen we dus schrijven:

$$p = (p_0, p_1, p_2, p_3) = \left(m \frac{c\Delta t}{\Delta \tau}, m \frac{\Delta x}{\Delta \tau}, m \frac{\Delta y}{\Delta \tau}, m \frac{\Delta z}{\Delta \tau} \right) \quad (6.40)$$

en de vier-vector p van een voorwerp heeft nu de richting langs de wereldlijn van dit voorwerp in de ruimte-tijd. Voor de limiet $\Delta \tau \rightarrow 0$ kunnen we de componenten van de vier-vector identificeren als:

$$p_0 = \frac{E}{c} \quad (6.41)$$

$$p_1 = p_x \quad (6.42)$$

$$p_2 = p_y \quad (6.43)$$

$$p_3 = p_z \quad (6.44)$$

immers, voor de componenten geldt:

$$\frac{E}{c} = mc \frac{dt}{d\tau} = \gamma mc \quad (6.45)$$

$$p_x = m \frac{dx}{d\tau} = \gamma m v_x \quad (6.46)$$

$$p_y = m \frac{dy}{d\tau} = \gamma m v_y \quad (6.47)$$

$$p_z = m \frac{dz}{d\tau} = \gamma m v_z \quad (6.48)$$

Alle vier deze componenten zijn behouden bij een interactie (dwz botsing). De componenten zijn niet hetzelfde in elk stelsel S of S' . Wel is de lengte van de vier-vector invariant, met andere woorden, de uitdrukking

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - |\vec{p}|^2 \quad (6.49)$$

is hetzelfde in elk stelsel. Deze uitdrukking is gelijk aan:

$$\begin{aligned} |p|^2 &= \left(\frac{E}{c}\right)^2 - |\vec{p}|^2 \\ &= m^2 c^2 \frac{dt^2}{d\tau^2} - m^2 \frac{dx^2}{d\tau^2} - m^2 \frac{dy^2}{d\tau^2} - m^2 \frac{dz^2}{d\tau^2} \\ &= m^2 \frac{(dc^2 t^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)}{d\tau^2} \\ &= m^2 c^2 \frac{d\tau^2}{d\tau^2} \\ &= m^2 c^2 \end{aligned} \quad (6.50)$$

we kunnen dit schrijven als

$$E^2 - c^2 |\vec{p}|^2 = m^2 c^4 \quad (6.51)$$

en dit is de relativistische relatie tussen energie en impuls. Het is niets anders dan de lente van de vier-vector p . Het ‘min’-teken is deze uitdrukking is hetzelfde ‘min’-teken als we al eerder zagen in de Minkowski-ruimte: dit maakte de ruimte-tijd fundamenteel anders dan de Euclidische ruimte.

Merk verder op dat m een invariante grootte is, die hetzelfde is in alle stelsels. De uitdrukking is overigens *kwadratisch* voor de energie, dus heeft de energie zelf twee oplossingen, namelijk $E = \pm \sqrt{m^2 c^4 + c^2 |\vec{p}|^2}$. Dit zal uiteindelijk, wanneer het gecombineerd wordt met de quantummechanica, aanleiding geven tot het bestaan van anti-materie.

De Lorentz-transformatie voor de componenten van de vier-vector p kunnen verkregen worden door de componenten in te vullen. Het levert op voor een boost langs de x -as:

$$\frac{E'}{c} = \gamma \left(\frac{E}{c} - \beta p_x \right) \quad (6.52)$$

$$p'_x = \gamma \left(p_x - \beta \frac{E}{c} \right) \quad (6.53)$$

$$p'_y = p_y \quad (6.54)$$

$$p'_z = p_z \quad (6.55)$$

6.4.1 Massaloze deeltjes

We zien dat de relativiteitstheorie massaloze deeltjes toelaat:

$$E = pc$$

leidt tot

$$M = 0$$

Aangezien uit formules 6.35 en 6.36 volgt dat

$$p = \frac{E}{c} \beta$$

(ga na) geldt voor massaloze deeltjes dus:

$$p = \frac{pc}{c} \beta = p\beta$$

Hieruit volgt dat $\beta = 1$, dus $v = c$. M.a.w. massaloze deeltjes bewegen met de lichtsnelheid; zij kunnen niet stilstaan. Het foton is het bekendste voorbeeld.

6.5 Samenvatting

De relativistische relatie tussen energie, impuls en snelheid kan worden samengevat als:

$$E \leftrightarrow \vec{p} : E^2 - c^2 |\vec{p}|^2 = m^2 c^4 \quad (6.56)$$

$$E \leftrightarrow \vec{v} : E = \gamma m c^2$$

$$\vec{p} \leftrightarrow \vec{v} : \vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

De relatie tussen de energie, impuls en snelheid wordt gegeven door:

$$\frac{c\vec{p}}{E} = \frac{\gamma m \vec{v} c}{\gamma m c^2} = \frac{\vec{v}}{c} = \vec{\beta} \quad (6.57)$$

dus

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} = \frac{c\vec{p}}{E} \quad (6.58)$$

6.6 Enige opmerkingen n.a.v. botsingen

In de beschrijving van een botsing tussen een willekeurig aantal deeltjes kunnen we nog het volgende opmerken. Bij de botsing zijn de *ingaaende* deeltjes te onderscheiden van de *uitgaande* deeltjes. Voor een systeem van n ingaande deeltjes en m uitgaande deeltjes gelden de volgende behoudswetten:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{deeltjes}}^n p_x^{\text{in}} &= \sum_{\text{deeltjes}}^m p_x^{\text{uit}} \\ \sum_{\text{deeltjes}}^n p_y^{\text{in}} &= \sum_{\text{deeltjes}}^m p_y^{\text{uit}} \\ \sum_{\text{deeltjes}}^n p_z^{\text{in}} &= \sum_{\text{deeltjes}}^m p_z^{\text{uit}} \\ \sum_{\text{deeltjes}}^n E^{\text{in}} &= \sum_{\text{deeltjes}}^m E^{\text{uit}} \end{aligned} \quad (6.59)$$

Dit zijn de behoudswetten van de botsing: dat wil zeggen dat deze grootheden, impuls en energie, voor en na de botsing hetzelfde zijn. Deze grootheden hangen af van het stelsel S waarin we de botsing beschouwen. De invariant $E^2 - c^2|\vec{p}|^2$ is hetzelfde in elk coördinatenstelsel S . Deze grootte is ook behouden voor het hele systeem, maar niet voor elk deeltje afzonderlijk.

De ‘massa van een systeem’ leidt soms tot verwarring. Een lichaam met grote temperatuur heeft meer energie en dus een grotere massa. Bijvoorbeeld, water van 40° C heeft een grotere massa dan water van 15° C. De toename in massa is ongeveer een fractie 10^{-12} . Maar wat neemt er nu eigenlijk toe? Niet de massa van de individuele molekulen. Het is de (bewegings) energie van het systeem van molekulen dat toeneemt.

Neem als voorbeeld 2 voorwerpen met beide een massa van 8 kg. Dit is de massa als de voorwerpen in rust zijn. Schiet de voorwerpen nu uit elkaar,

in tegenovergestelde richting, elk met een impuls van $6c$ kg. De energie van elk voorwerp is nu

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = \sqrt{8^2c^4 + 6^2c^4} = 10c^2\text{kg}$$

Voor dit systeem is de totale impuls en energie gelijk aan

$$p_{tot} = 6c - 6c = 0 \quad ; \quad E_{tot} = 10c^2 + 10c^2 = 20c^2\text{kg}$$

De massa van het systeem wordt hiermee gelijk aan

$$M_{tot} = \sqrt{E^2/c^4 - p^2/c^2} = \sqrt{20^2 - 0^2} = 20\text{kg}$$

We zien dat de totale massa van het systeem, 20 kg, niet overeenkomt met de som van de massa's van de individuele voorwerpen, 2 maal 6 kg. De toename van de massa van het systeem komt overeen met de toename van de energie van het systeem.

Hoofdstuk 7

Toepassingen

*‘If the facts don’t match the theory,
change the facts’*

A. Einstein

7.1 Kernfusie en Kernsplijting

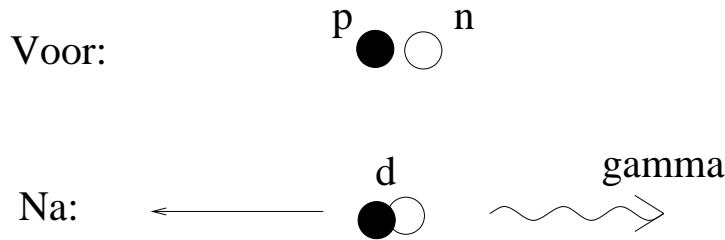
Wanneer een proton p en een neutron n bij elkaar gebracht worden kunnen ze een verbinding aangaan en een kern van deuterium (‘zwaar waterstof’) d vormen. De massa’s van p , n , en d zijn nauwkeurig gemeten:

$$\begin{aligned}m_p &= 938.27231 \text{ MeV}/c^2 \\m_n &= 939.56563 \text{ MeV}/c^2 \\m_d &= 1875.61339 \text{ MeV}/c^2\end{aligned}$$

De gebruikte eenheid, MeV/c^2 , verdient een nadere toelichting. Uit de relatie $E = mc^2$ volgt dat massa kan worden uitgedrukt in eenheden van energie gedeeld door c^2 , een constante. In ‘MKSA’ eenheden is de eenheid van energie de Joule, maar het is ook mogelijk - en in de hoge-energiefysica gebruikelijk - de electronvolt, eV, te kiezen. Een electronvolt is de hoeveelheid energie die een eenheidslading oppikt bij het doorlopen van een potentiaalverschil van 1 Volt. De eenheidslading (lading van het elektron) is gelijk aan $1.6 \cdot 10^{-19}$ Coulomb, dus $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$.

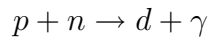
Omdat de massa van het deutron (= deuterium-kern) kleiner is dan de som van de massa’s van de samenstellende delen, proton en neutron, moet er bij de vorming van het deutron dus energie zijn vrijgekomen! Indien p en n bij elkaar gevoegd worden met verwaarloosbare snelheid, dan moet gelden dat de energie die vrijkomt gelijk is aan

$$\begin{aligned}E &= m_p c^2 + m_n c^2 - m_d c^2 \\&= 2.22455 \text{ MeV}\end{aligned}$$



Figuur 7.1:

Deze energie komt vrij in de vorm van een foton:

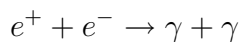


(Een foton is massaloos; het is een kwantum van het electro-magnetische veld, door Einstein geïntroduceerd ter verklaring van het foto-elektrische effect; we geven het aan met het symbool γ) Strikt genomen komt niet alle ‘ontbrekende massa’ ten goede aan de energie van het foton. Zelfs als vóór de reactie p en n t.o.v. elkaar in rust zijn, zal na de reactie het γ wegschieten (met de lichtsnelheid) en om impulsbehoud te garanderen moet d in tegengestelde richting bewegen, met dezelfde impuls (zie figuur 7.1). Door de grootte van de d massa is de met deze impuls samenhangende energie erg klein. (Immers, indien $pc \ll mc^2$, dan $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \simeq mc^2$).

De hierboven besproken reactie is een voorbeeld van kernfusie. Meer in het algemeen blijkt dat lichte kernen kunnen samensmelten tot zwaardere terwijl er, net als in het voorbeeld hierboven, energie vrijkomt. Alle kernen tot en met ijzer kunnen op deze manier via fusie met ‘energiewinst’ geproduceerd worden (cf. het ‘opbranden’ van sterren). Omgekeerd blijken zwaardere kernen (een bekend voorbeeld is Uranium) zwaarder te zijn dan de ‘som der delen’ en komt er bij splijting van deze kernen energie vrij.

7.2 Annihilatie

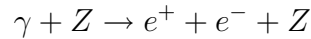
In 1932 werd door Anderson in kosmische stralen een nieuw deeltje ontdekt, met een massa gelijk aan die van het elektron (e^-), maar met tegengestelde en dus positieve, lading: het positron (e^+). Het positron is het anti-deeltje van het elektron. Een precieze omschrijving van het begrip anti-deeltje vereist een voltooide academische natuurkunde-opleiding en meer, hier volstaan we met de vaststelling dat e^+ en e^- elkaar kunnen ‘annihileren’ tot twee (massaloz!) fotonen:



(Vraag: Waarom kan de reactie $e^+ + e^- \rightarrow \gamma$, d.w.z. annihilatie naar één foton niet plaatsvinden?). Indien het 'annihilatie in rust' betreft zal gelden $E_{\gamma 1} = E_{\gamma 2} = m_e c^2$ ($= 511$ keV), waar $E_{\gamma 1,2}$ de energie van de fotonen is en m_e de electronmassa (= positronmassa).

7.3 Paarcreatie

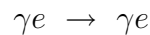
Omgekeerd is het ook mogelijk dat een foton een electron-positron paar creëert ('paarcreatie'):



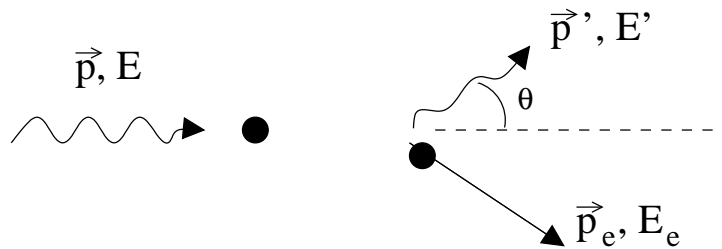
Z staat hier voor een atoomkern. Een foton kan niet spontaan in een e^+e^- -paar vervallen, maar heeft een ander object nodig om mee te wisselwerken. Dit object moet elektrisch geladen zijn, anders 'voelt' het foton het niet. De wisselwerking is nodig, omdat het proces $\gamma \rightarrow e^+e^-$ alleen, energie- en impulsbehoud schendt.

7.4 Het Compton-effect

Het betreft hier de verstrooiing van 'electromagnetische straling' aan 'materie'. In het bijzonder zullen we de verstrooiing van electromagnetische straling aan electronen bestuderen. Electromagnetische straling bestaat uit fotonen. Fotonen geven we aan met het symbool γ , electronen met e , reactie die we willen bestuderen is dus:



Uiteraard moeten we voor de beschrijving van dit proces relativistische kinematica gebruiken.



Figuur 7.2: Compton verstrooiing, links vóór, rechts na de botsing

Zoals in figuur 7.2 aangegeven, hebben we de volgende situatie: een foton met impuls \vec{p} en energie E valt in op een electron in rust, met massa m . Na

de botsing heeft het foton impuls \vec{p} en energie E' . Het electron heeft na de botsing impuls \vec{p}_e en energie E_e . De hoek waaronder het foton verstrooit, m.a.w. de hoek tussen \vec{p} en \vec{p}' noemen we θ . We gaan nu bepalen hoe groot E' is voor gegeven 'bundelenergie' E , bij verstrooiingshoek θ .

Impulsbehoud: $\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e$

Impulsoverdracht: $\vec{p} - \vec{p}' = \vec{p}_e$

Energiebehoud: $E + m_e c^2 = E' + E_e$

We rekenen nu de grootte van de impulsoverdracht (gewoon een drievector) uit:

$$p_e^2 = (\vec{p} - \vec{p}')^2 = \vec{p}^2 + \vec{p}'^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{p}' = (E^2 + E'^2 - 2EE' \cos \theta)/c^2 \quad (7.1)$$

Energiebehoud herschrijven we als: $E_e = (E - E') + m_e c^2$, waaruit volgt: $E_e^2 = (E - E')^2 + m_e^2 c^4 + 2(E - E')m_e c^2$, met behulp van $E_e^2 = p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4$ leidt dit tot

$$p_e^2 = \{E^2 + E'^2 + 2(E - E')m_e c^2 - 2EE'\}/c^2 \quad (7.2)$$

Invullen van 7.1 in 7.2 leidt tot

$$E - E' = \frac{EE'}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

ook te schrijven als

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

Met behulp van de relatie $E = hc/\lambda$ (de energie van een foton van licht met een golflengte λ) leidt dit tot

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

De golflengte van het verstrooiende licht verschuift, bij verstrooiing aan een electron, dus met een bedrag van orde van grootte $h/m_e c$. Deze grootheid noemen we de Compton golflengte van het electron en bedraagt $2.4 \cdot 10^{-12}$ m.

7.5 Nogmaals het Doppler-effect

We hadden gezien dat wanneer een geluidsbron zich naar ons toe beweegt, de toonhoogte zal toenemen in vergelijking met de situatie waarin de bron in

rust is. We zullen nu nogmaals het relativistische Doppler effect laten zien. We hebben gezien dat voor licht per definitie de relatie $E = pc$ moet gelden (Deze relatie geldt immers als $v = c$). De Lorentztransformatie voor een lichtstraal die zich in de x -richting beweegt ziet er dan als volgt uit (ga na):

$$E' = \gamma(1 - \beta)E$$

Dit kunnen we ook schrijven als:

$$E' = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} E$$

D.w.z. in coördinatenstelsel S' dat met snelheid βc in de richting van de lichtstraal meebeweegt is de energie van de lichtstraal kleiner (het licht is verschoven naar het rood) met een factor $\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$. Omgekeerd, bewegen we met snelheid βc naar een lichtbron toe, dan neemt de energie van het licht toe met een factor $\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$ (het licht is verschoven naar het violet). Met behulp van de relatie $E = h\nu$ (de energie van een lichtquantum, een foton, van licht met frequentie ν ; h is een natuurconstante, de constante van Planck) volgt:

$$\nu' = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \nu$$

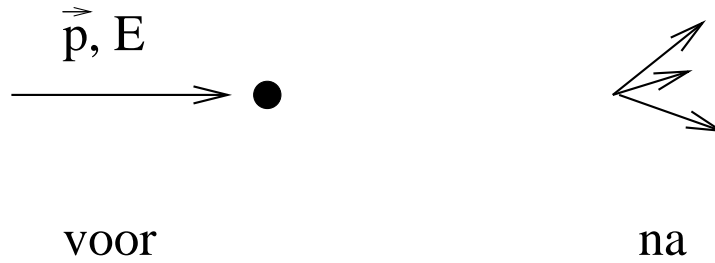
precies zoals we ook eerder zagen in vergelijking 5.31.

7.6 Roodverschuiving en het uitdijende heelal

Het licht uitgezonden door de vele duizenden melkwegstelsels in het heelal blijkt verschoven te zijn naar lagere golflengtes ('roodverschuiving') t.o.v. wat verwacht zou worden op basis van standaard spectra. M.a.w. deze melkwegstelsels verwijderen zich van onze eigen Melkweg, met een snelheid die te bepalen is m.b.v. bovenstaande formule voor relativistische Dopplerverschuiving. Het heelal dijt uit! Deze observatie was een belangrijke bron van inspiratie voor de 'Big Bang' theorie van het ontstaan van het heelal.

7.7 Deeltjesproductie

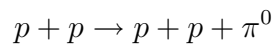
Een spectaculair voorbeeld van een typisch relativistisch effect is de productie van 'elementaire' deeltjes bij botsingen tussen dergelijke deeltjes. We geven



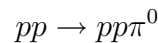
Lab-systeem

Figuur 7.3:

een voorbeeld:



of, in een meer gebruikelijke notatie

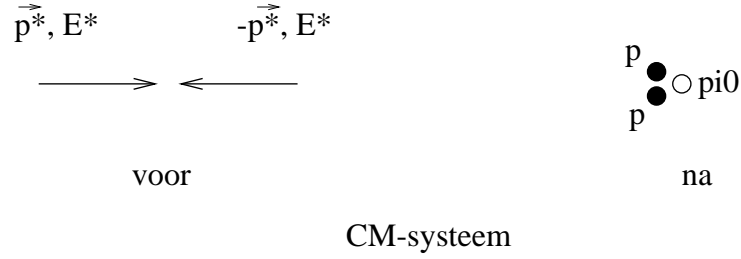


Betekenis: twee protonen botsen op elkaar en er komen uit de botsing weer twee protonen te voorschijn plus een ander deeltje ('Er wordt massa gecreëerd'). We stellen ons het experiment als volgt voor: een bundel protonen wordt versneld tot een zekere energie en valt in op een doelwit bestaande uit protonen¹. Gegeven is dat protonen een massa $M_p = 938 \text{ MeV}/c^2$ hebben en dat het π^0 deeltje een massa $M_\pi = 135 \text{ MeV}/c^2$ heeft. De vraag is nu: welke energie, resp. welke impuls moet de protonbundel minstens hebben, opdat bovenstaande reactie kan verlopen? In figuur 7.3 is de reactie schematisch weergegeven.

Het inkomende proton heeft impuls \vec{p} en energie E , die we willen bepalen. De overeenkomstige viervector is dus: $P_b = (E, \vec{p}c)$. Het doelwit heeft een vierimpuls: $P_d = (M_p c^2, \vec{0})$. Om P_b kwantitatief te bepalen realiseren we ons het volgende: vanuit het zwaartepuntssysteem bezien is de minimale impuls \vec{p}^* , resp. energie E^* waarbij de reactie kan verlopen die impuls waarbij - in het zwaartepuntssysteem - de deeltjes in de eindtoestand in rust zijn. Zie figuur 7.4.

We kiezen ons assenstelsel zó, dat $\vec{p}^* = (p^*, 0, 0)$ en (dus) $\vec{p} = (p, 0, 0)$. In het CM-systeem geldt dat de viervector van het bundel-proton gelijk is aan

¹In de praktijk: waterstof, bestaande uit protonen en elektronen. Elektronen zijn echter veel kleiner dan protonen, zodat het ingaande proton vrijwel altijd een proton in het waterstof raakt.



Figuur 7.4:

$P_b^* = (E^*, p^*, 0, 0)$ en die van het doelwit is $P_d^* = (E^*, -p^*, 0, 0)$. De totale vierimpuls vóór de botsing in het CM-systeem is dus:

$$P^* = P_b^* + P_d^* = (2E^*, 0, 0, 0)$$

De totale vierimpuls na de botsing in het CM-systeem is, in de 'minimale' situatie die wij beschouwen:

$$P'^* = (2M_p c^2 + M_\pi c^2, 0, 0, 0)$$

Uit energie- en impulsbehoud volgt

$$P^* = P'^*$$

en dus:

$$E^* = M_p c^2 + \frac{1}{2} M_\pi c^2$$

p^* volgt verder uit:

$$p^* = \frac{1}{c} \sqrt{E^{*2} - M_p^2 c^4}$$

Nu kunnen we de gevraagde energie en impuls, E en p , in het Lab-systeem bepalen via een Lorentztransformatie. Dat is de 'moeilijke' manier die we eerst zullen illustreren. Vervolgens doen we het op de gemakkelijke manier.

De Lorentztransformatie die we zoeken moet $-p^*$ transformeren naar 0 en moet de bijbehorende E^* transformeren naar $M_p c^2$:

$$\begin{pmatrix} M_p c^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^* \\ -p^* c \end{pmatrix}$$

$$M_p c^2 = -\beta\gamma p^* c + \gamma E^*$$

$$0 = -\gamma p^* c + \beta\gamma E^*$$

We hebben in feite slechts één van deze vergelijkingen nodig om te vinden:

$$\beta = \frac{p^* c}{E^*}$$

$$\gamma = \frac{E^*}{M_p c^2}$$

Nu vinden we p en E uit:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E \\ pc \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^* \\ p^*c \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{M_p c^2} \begin{pmatrix} E^* & p^*c \\ p^*c & E^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^* \\ p^*c \end{pmatrix} \\ E &= \frac{p^*c^2 + E^{*2}}{M_p c^2} \\ pc &= \frac{2E^*p^*c}{M_p c^2} \end{aligned}$$

M.b.v. de eerder gevonden uitdrukkingen voor E^* en p^* vinden we nu:

$$\begin{aligned} \frac{p}{c} &= \frac{(M_p + \frac{1}{2}M_\pi)\sqrt{M_\pi^2 + 4M_p M_\pi}}{M_p} \\ &= 777 \text{ MeV} \end{aligned}$$

(Bepaal nu de bijbehorende energie E ; bepaal de snelheid van de protonen.)

Nu de meer rechtstreekse, gemakkelijkere methode:

$$P_b + P_d = (E + M_p c^2, pc, 0, 0) \text{ is een viervector}$$

$$P_b^* + P_d^* = (2E^*, 0, 0, 0) \text{ is de getransformeerde van deze viervector}$$

De norm (de 'grootte') van een viervector is invariant onder Lorentztransformaties, dus:

$$\begin{aligned} (P_b + P_d)^2 &= (P_b^* + P_d^*)^2 \\ (E + M_p c^2)^2 - p^2 c^2 &= 4E^{*2} \end{aligned}$$

(Let op het $-$ teken!) Uitwerken hiervan levert hetzelfde resultaat als hierboven (ga na).