

Sterrenkunde Hoofdstuk 2: Gassen en straling

Marc van der Sluys

Universiteit Utrecht, Nikhef



**Universiteit
Utrecht**

<https://www.nikhef.nl/~sluys/>

sluys@nikhef.nl

Nikhef

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen

Promofilmpje

- volgende week: opnamen voor promofilmpje
- hoorcollege en werkcollege
- welk percentage wil **niet** worden gefilmd?
- hoorcollege: deel zaal komt niet in beeld
- werkcollege: voorstel Roos: **niet** filmen in BBG 017 en HFG 611
→ filmen in BBG (005, 007), **103**, **Min 009**(?)

Tomas ziek

- Tomas is ziek: vandaag graag verdelen over andere groepjes

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen

- 1 Overzicht vergelijkingen
 - Overzicht
- 2 Differentiaalvergelijkingen
- 3 Toestandsvergelijkingen

- 4 Opaciteit
- 5 Kernfusie
- 6 Schalingswetten voor
hoofdreekssterren

Differentiaalvergelijkingen (H2.2)

Beschrijven verandering door ster (van centrum tot oppervlak) door **globale** variabelen M, L, P en T :

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r)$$

$$\left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{\text{rad}} = -\frac{L(r)}{4\pi r^2} \frac{3\kappa(r)\rho(r)}{4\sigma} \frac{1}{4T(r)^3}$$

$$\left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{\text{ad}} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T(r)}{P(r)} \frac{dP(r)}{dr}$$

Lokale vergelijkingen (H2.3–2.5)

Bepalen **locale** variabelen ρ, κ en ϵ uit *globale* variabelen P, T :

- $P(\rho, T)$: toestandsvergelijkingen:

- ideaal gas: $P_{\text{gas}}(\rho, T) = \frac{\rho k T}{\mu m_{\text{H}}}$

- straling: $P_{\text{rad}}(T) = \frac{4\sigma T^4}{3c}$

- gedegeneerd gas: $P_{\text{d}}(\rho) = \frac{K_{\text{d}}}{m_{\text{e}}} \left(\frac{\rho}{\mu_{\text{e}} m_{\text{H}}} \right)^{5/3}$

- relativistisch gedegeneerd gas: $P_{\text{d,r}}(\rho) = K_{\text{d,r}} \left(\frac{\rho}{\mu_{\text{e}} m_{\text{H}}} \right)^{4/3}$

- opaciteit: $\kappa = f(\rho_r, T_r)$

- kernfusie: $\epsilon = f(\rho_r, T_r)$

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaalgas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen

1 Overzicht vergelijkingen

2 Differentiaalvergelijkingen

- Massabehoud
- Energiebehoud
- Hydrostatisch evenwicht
- Energietransport

3 Toestandsvergelijkingen

4 Opaciteit

5 Kernfusie

6 Schalingswetten voor
hoofdreekssterren

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

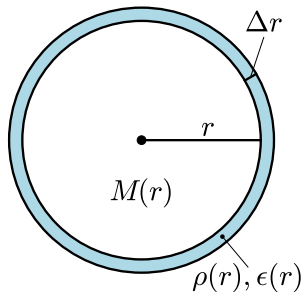
Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen



$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaalgas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

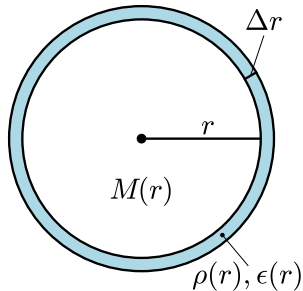
Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen



$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r)$$

- ϵ : energieproductie in W/kg

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaalgas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

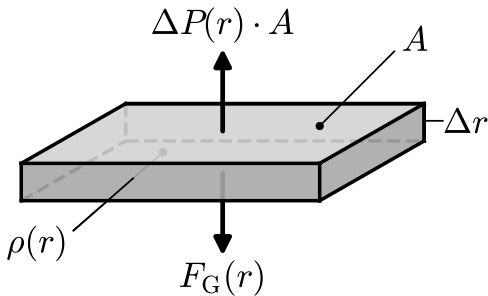
Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen



$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r)$$

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaalgas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen

Diffusie van straling in een gas

- **Energiedichtheid van straling:**

$$u \equiv \frac{4B}{c} = \frac{4\sigma}{c} T^4 \quad (\text{J/m}^3)$$

① flux $\rightarrow$ dichtheid: $1/c$

② integreren over alle richtingen: factor 4: $B/\pi \cdot 4\pi = 4B$

- **Flux:** van hoge naar lage u : $\vec{F} = -\frac{c\ell}{3} \vec{\nabla} u = -\frac{c}{3\kappa\rho} \vec{\nabla} u$

- dichtheid $\rightarrow$ flux: factor c

- gemiddeld over halve bol: $1/3$

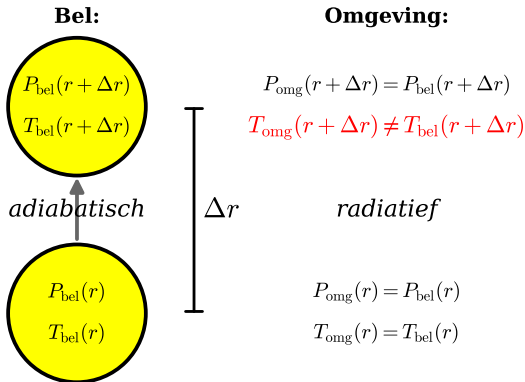
- $\ell = \frac{1}{\kappa\rho}$: gemiddelde vrije weglengte (m)

- κ : opaciteit = “ondoorzichtigheid”

- absorptiedoorsnede per kilogram materie: (m^2/kg)

- **Temperatuurgradiënt** voor straling: $\left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{\text{rad}} = -\frac{L(r)}{4\pi r^2} \frac{3\kappa(r)\rho(r)}{4\sigma} \frac{1}{4T(r)^3}$

- Temperatuurgradiënt voor **straling**: $\left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{\text{rad}} = -\frac{L(r)}{4\pi r^2} \frac{3\kappa(r)\rho(r)}{4\sigma} \frac{1}{4T(r)^3} < 0$
- Temperatuurgradiënt voor **convectie**: $\left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{\text{ad}} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T(r)}{P(r)} \frac{dP(r)}{dr} < 0$
- aanname: gasbel is **adiabatisch**, d.w.z. geen energie-uitwisseling met omgeving



Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch

evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaalgas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,

lichtkracht

Tijdschalen

Schwarzschildcriterium voor convectie:

Er vindt convectie plaats wanneer een gestegen bel **lichter** is dan de nieuwe omgeving, zodat deze **blijft stijgen**:

$$\begin{aligned}\rho_{\text{bel}}(r + \Delta r) &< \rho_{\text{omg}}(r + \Delta r) \\ \rightarrow \frac{P(r + \Delta r)}{T_{\text{bel}}(r + \Delta r)} &< \frac{P(r + \Delta r)}{T_{\text{omg}}(r + \Delta r)} \\ \rightarrow \frac{1}{\left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{\text{ad}}} &< \frac{1}{\left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{\text{rad}}} \\ \rightarrow \left| \frac{dT(r)}{dr} \right|_{\text{ad}} &< \left| \frac{dT(r)}{dr} \right|_{\text{rad}}\end{aligned}$$

Ergo, de **minst steile gradiënt** wint

Convectie is **zeer efficiënt** en domineert het energietransport indien aanwezig

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaalgas

Stralingsdruk

Gedegenereerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

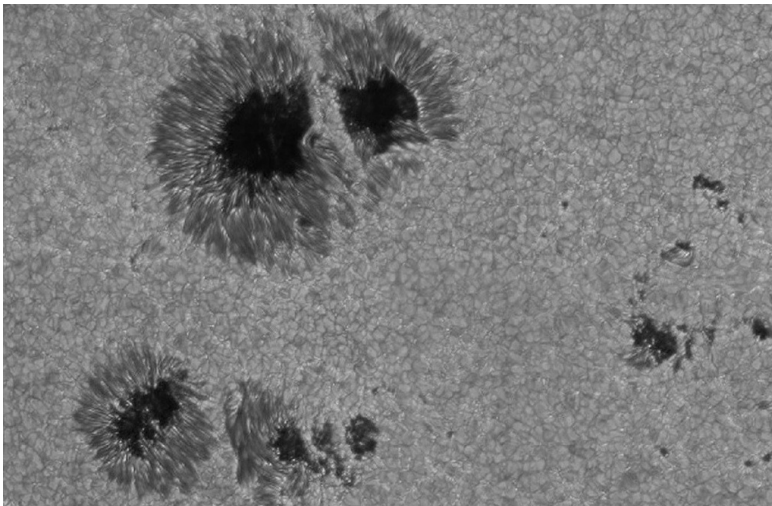
Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen



Bron: [Dutch Open Telescope movies](#)

- Sterren met $M \lesssim 1.3 M_{\odot}$: **radiatieve kern** en een **convectieve mantel** (Zon!)
- **Hoofdrekssterren** met $M \gtrsim 1.2 M_{\odot}$: **convectieve kern** en **radiatieve mantel**
- **Rode reuzen** hebben een diepe **convectieve mantel**

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegenereerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen

1 Overzicht vergelijkingen

2 Differentiaalvergelijkingen

3 Toestandsvergelijkingen

- Overzicht
- Ideaal gas
- Stralingsdruk

- Gedegenereerd gas
- Relativ. ged. gas

4 Opaciteit

5 Kernfusie

6 Schalingswetten voor
hoofdreekssterren

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch

evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegeneroord gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

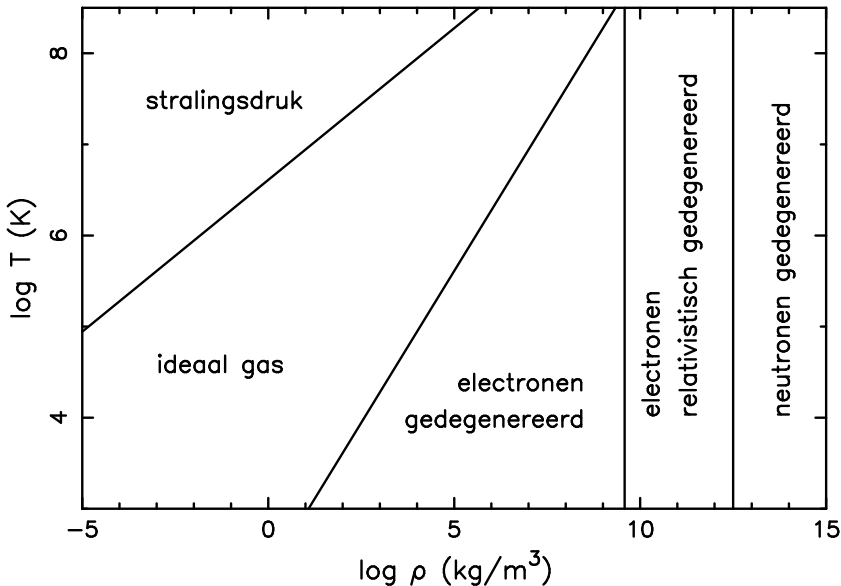
Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,

lichtkracht

Tijdschalen



Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen

Ideaal gas: puntdeeltjes, elastische botsingen, geen interne vrijheidsgraden; b.v. 1-atomig gas

- ① **Maxwell-Boltzmannverdeling** voor thermische snelheid v , gegeven m , T (1D):

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m}$$

$k = k_B \approx 1.38 \times 10^{-23}$ J/K: constante van Boltzmann

- ② **equipartitie:** energie is gelijk verdeeld over alle vrijheidsgraden:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$$

- ③ **thermische energie** = kinetische energie, in 3D, voor één deeltje:

$$E_{\text{th}} = E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m (\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle) = \frac{1}{2} m \cdot 3 \langle v_x^2 \rangle = \frac{3}{2} kT$$

$$E_{\text{th}} = \frac{3}{2} kT$$

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaalgas

Stralingsdruk

Gedegenereerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen

Thermische energie voor één deeltje:

$$E_{\text{th}} = \frac{3}{2}kT$$

Deeltje botst (loodrecht) op muur en blijft plakken:

- druk: $P_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{A} = nmv_{\perp}^2 = npv_{\perp}$

- gemiddeld over halve bol: $\langle v_{\perp}^2 \rangle = \frac{1}{3}v^2 \rightarrow P = \frac{1}{3}nvp = \frac{1}{3}nmv^2 = nkT$

- gemiddelde massa per deeltje $\langle m \rangle = \mu m_{\text{H}} (\approx \mu m_{\text{u}}) \rightarrow n = \frac{\rho}{\mu m_{\text{H}}}$

Ideale-gaswet of algemene gaswet:

$$P_{\text{gas}} = nkT = \frac{\rho kT}{\mu m_{\text{H}}}$$

- μ : **gemiddelde massa per deeltje** — hangt af van soort deeltje *en* ionisatiegraad:
moleculair H_2 : $\mu = 2$; atomair H : $\mu = 1$; geïoniseerd H^+ : $\mu = \frac{1}{2}$

Stralingsdruk

- druk: $P = \frac{1}{3} nvp$
- + fotonen: $p = \frac{E}{c}; \quad v = c$
- + energiedichtheid straling: $u = \frac{4\sigma}{c} T^4$
- = stralingsdruk: $P = \frac{1}{3} nvp = \frac{1}{3} \frac{u}{E} c \frac{E}{c} = \frac{u}{3} = \frac{4\sigma T^4}{3c}$

$$P_{\text{rad}} = \frac{4\sigma T^4}{3c}$$

Totale druk

$$P_{\text{tot}} = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}} = \frac{\rho k T}{\mu m_{\text{H}}} + \frac{4\sigma T^4}{3c}$$

Stralingsdruk overheerst in de kernen van zware sterren, **gasdruk** elders

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdsschalen

Kort-door-de-bocht-quantummechanica

- **Heisenberg:** $\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar \rightarrow$ "ruimte opgedeeld in hokjes" $\sim (\Delta x)^3$ en $(\Delta p)^3$
- Uitsluitingsprincipe van **Pauli:** maximaal twee fermionen per hokje (spin $\uparrow\downarrow$)
- Als ruimtehokje al bezet, nieuw deeltje **gedwongen** naar **hogere impuls**

Druk in een gedegeneerd gas

$$P_d \equiv \frac{K_d}{m_e} \left(\frac{\rho}{\mu_e m_H} \right)^{5/3}; \quad K_d \approx 2.13 \times 10^{-68} \text{ N}^2 \text{ m}^2 \text{ s}^2,$$

μ_e : **gemiddelde massa per elektron**, in m_H ($\approx m_u$)

Merk op:

- 1 P is **sterker** afhankelijk van ρ dan voor een ideaal gas ($P \propto \rho$)
- 2 P is **onafhankelijk** van T !

ijl gas, hoge T : $\rightarrow$ ideaal gas; dicht gas, lage T : $\rightarrow$ gedegeneerd gas

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegenereerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen

Relativistische degeneratie

- n hoog $\rightarrow p$ hoog $\rightarrow$ relativistisch: $v \sim c$

$$P_{d,r} \equiv K_{d,r} \left(\frac{\rho}{\mu_e m_H} \right)^{4/3}; \quad K_{d,r} \approx 2.45 \times 10^{-26} \text{ N m}^2.$$

Toestand afhankelijk van dichtheid en temperatuur

- ijl gas of hoge T : $\rightarrow$ ideaal gas;
- dicht gas of lage T : $\rightarrow$ gedegenereerd gas
- zeer dicht gas: $\rightarrow$ relativistisch gedegenereerd gas
- $\rightarrow$ **werkcollege**

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch

evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

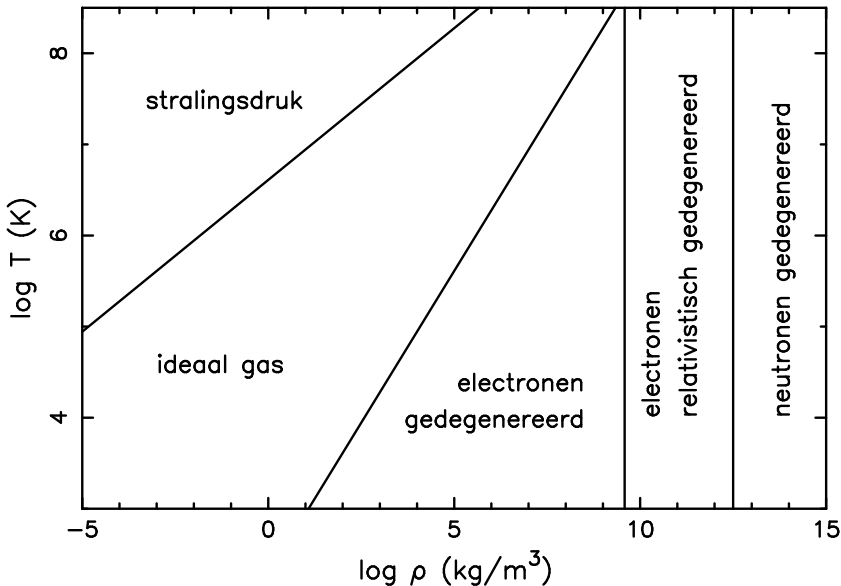
Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,

lichtkracht

Tijdschalen



Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen

- 1 Overzicht vergelijkingen
- 2 Differentiaalvergelijkingen
- 3 Toestandsvergelijkingen

- 4 Opaciteit
 - Opaciteit

- 5 Kernfusie

- 6 Schalingswetten voor
hoofdreekssterren

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen

- **Opaciteit:** “ondoorzichtigheid”; absorptiedoorsnede per kilogram materie
 - $\rightarrow [\kappa] = \text{m}^2/\text{kg}$
 - doorsnede is een *oppervlak*!
- complexe berekeningen $\rightarrow$ tabellen

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen

- 1 Overzicht vergelijkingen
- 2 Differentiaalvergelijkingen
- 3 Toestandsvergelijkingen

4 Opaciteit

5 Kernfusie

- Waterstoffusie
- Verdere kernfusie

6 Schalingswetten voor
hoofdreekssterren

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstofffusie

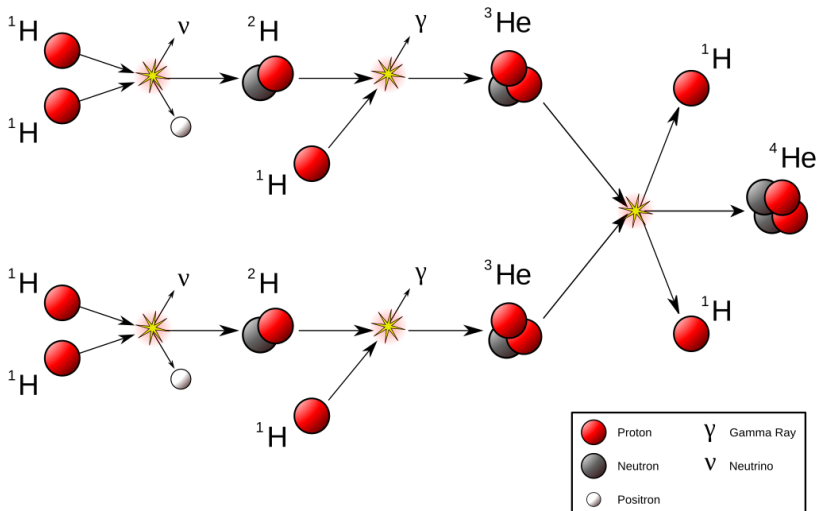
Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur, lichtkracht

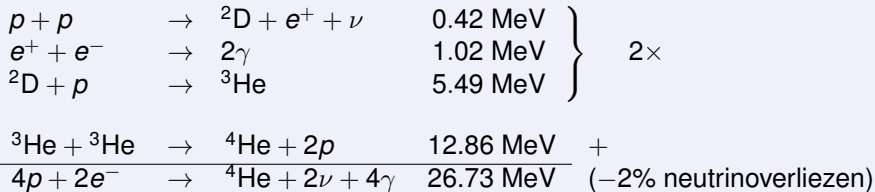
Tijdschalen



Bron: [Wikimedia Commons, user Doctor C](#)

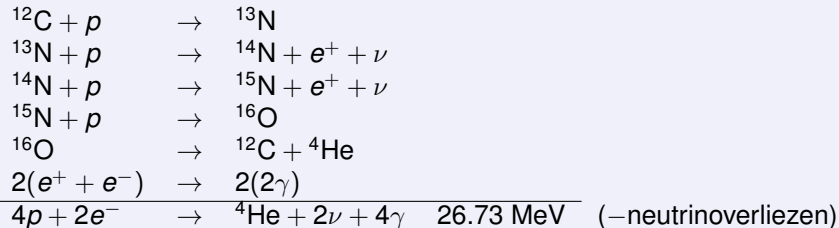
$4^1\text{H} \rightarrow ^4\text{He}$: **7.2% van de massa ontbreekt!**

Proton-protoncyclus



→ werkcollege

CNO-cyclus

C, N en O treden op als **katalysator**

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentialvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch

evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

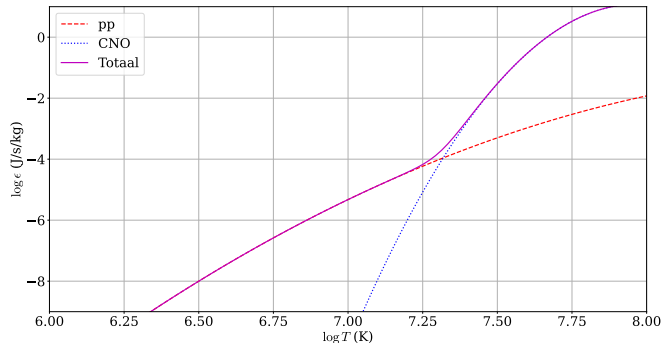
Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,

lichtkracht

Tijdschalen



- ϵ : energieproductie per seconde per kilogram gas (W/kg)
- E_{kin} van positief geladen kernen moet **elektrische potentiaal** overwinnen om **sterke kernkracht** te laten werken $\rightarrow$ **hoge temperatuur** nodig
- **pp-cyclus:** $\Gamma \propto T^4$ (lichte sterren)
- **CNO-cyclus:** $\Gamma \propto T^{12}$ (zware sterren)
- Voor $T \gtrsim 20 \times 10^6$ K domineert de CNO-cyclus
- Zon: $T_c \sim 16 \times 10^6$ K $\rightarrow$ pp

Naam	Temperatuur	Reactie	$\tau(10 M_{\odot})$
waterstoffusie	$10 - 30 \times 10^6 \text{ K}$	$4^1\text{H} \rightarrow ^4\text{He}$	10 Myr
heliumfusie (triple-alpha)	$100 - 200 \times 10^6 \text{ K}$	$4^4\text{He} + ^4\text{He} \rightleftharpoons ^8\text{Be}$ $^8\text{Be} + ^4\text{He} \rightarrow ^{12}\text{C}$	1 Myr
heliumfusie	$200 - 300 \times 10^6 \text{ K}$	$4^4\text{He} + ^{12}\text{C} \rightarrow ^{16}\text{O}$ $4^4\text{He} + ^{16}\text{O} \rightarrow ^{20}\text{Ne}$	
koolstoffusie	$\sim 600 \times 10^6 \text{ K}$	$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \rightarrow ^{24}\text{Mg}$ $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \rightarrow ^{23}\text{Na} + ^1\text{H}$ $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \rightarrow ^{23}\text{Mg} + n$	1 kyr
zuurstoffusie	$\sim 1 \times 10^9 \text{ K}$	$^{16}\text{O} + ^{16}\text{O} \rightarrow ^{32}\text{S}$ $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O} \rightarrow ^{28}\text{Si} + ^4\text{He} + \nu$	2 jaar
siliciumfusie	$\sim 2 \times 10^9 \text{ K}$	$^{28}\text{Si} + \gamma \rightarrow p, n, ^4\text{He}$ $p, n, ^4\text{He} \rightarrow ^{56}\text{Fe}, ^{58}\text{Ni}, ^{52}\text{Cr}$	3 dagen

→ steeds hogere T , steeds kortere τ !

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch

evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

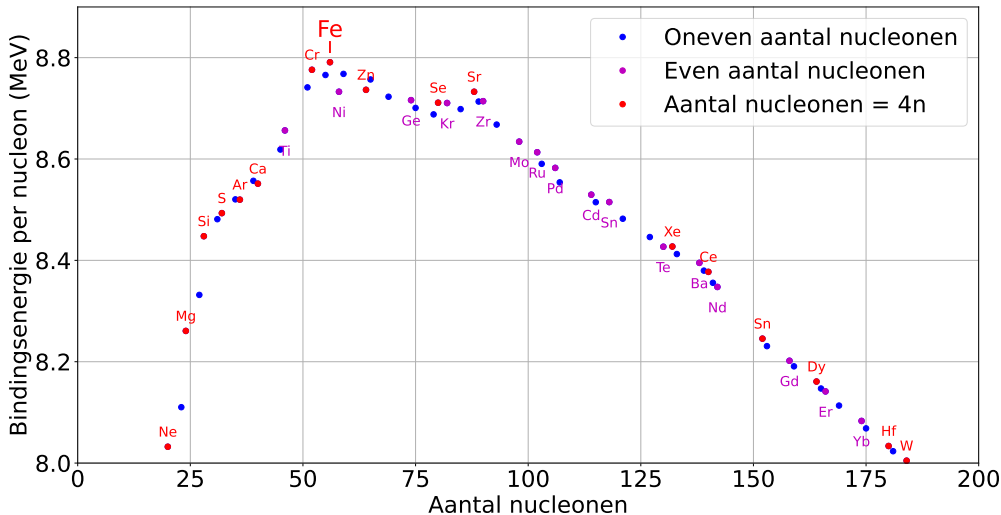
Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,

lichtkracht

Tijdschalen



- IJzer (^{56}Fe) heeft de grootste **bindingsenergie per nucleon**
- Verdere fusie **kost** energie → geen stralingsdruk!

Differentiaalvergelijkingen (H2.2)

Beschrijven verandering door ster (van centrum tot oppervlak) door **globale** variabelen M , L , P en T :

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r)$$

$$\left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{\text{rad}} = -\frac{L(r)}{4\pi r^2} \frac{3\kappa(r)\rho(r)}{4\sigma} \frac{1}{4T(r)^3}$$

$$\left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{\text{ad}} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T(r)}{P(r)} \frac{dP(r)}{dr}$$

Lokale vergelijkingen (H2.3–2.5)

Bepalen **lokale** variabelen ρ , κ en ϵ uit *globale* variabelen P , T :

- $P(\rho, T)$: toestandsvergelijkingen:

- ideaal gas: $P_{\text{gas}}(\rho, T) = \frac{\rho k T}{\mu m_{\text{H}}}$

- straling: $P_{\text{rad}}(T) = \frac{4\sigma T^4}{3c}$

- gedegeneerd gas: $P_{\text{d}}(\rho) = \frac{K_{\text{d}}}{m_{\text{e}}} \left(\frac{\rho}{\mu_{\text{e}} m_{\text{H}}} \right)^{5/3}$

- relativistisch gedegeneerd gas: $P_{\text{d,r}}(\rho) = K_{\text{d,r}} \left(\frac{\rho}{\mu_{\text{e}} m_{\text{H}}} \right)^{4/3}$

- opaciteit: $\kappa = f(\rho_r, T_r)$

- kernfusie: $\epsilon = f(\rho_r, T_r)$

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaalgas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur, lichtkracht

Tijdschalen

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen

- 1 Overzicht vergelijkingen
- 2 Differentiaalvergelijkingen
- 3 Toestandsvergelijkingen
- 4 Opaciteit

5 Kernfusie

- 6 Schalingswetten voor
hoofdreekssterren
- Het viriaaltheorema
 - Druk, temperatuur, lichtkracht
 - Tijdschalen

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaalgas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen

- Slide 15: $E_{\text{th}} = \frac{3}{2}kT$

- Hieruit volgt voor een gasbol met sferische symmetrie in hydrostatisch evenwicht:

$$E_{\text{th}} = -\frac{1}{2}E_{\text{pot}}$$

- Dit staat bekend als het **viriaaltheorema**

- Voorbeelden:

- 1 Keplerbanen ($E_{\text{th}} \sim E_{\text{kin}}; E_{\text{pot}} \sim E_{\text{gr}}$)

- 2 bindingsenergie ster ($E_{\text{pot}} \sim E_{\text{gr}}$)

- 3 harmonische oscillator

- 4 rotatie van sterrenstelsels

- 5 beweging van sterrenstelsels in een cluster

- Comacluster: 99.8% “donkere materie” (Zwicky, 1933!)

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen

Centrale druk

$$P_c \propto \frac{GM}{R} \bar{\rho} \propto \frac{3GM^2}{4\pi R^4}$$

$$P_c \sim 2.4 \times 10^{16} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-4} \rightarrow \text{werkcollege}$$

Centrale temperatuur

$$T_c \propto \frac{\mu m_H}{k} \frac{GM}{R} \frac{\bar{\rho}}{\rho_c}$$

$$T_c \sim 2.1 \times 10^9 \text{ K} \cdot \mu \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_c}\right) \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-1} \rightarrow \text{werkcollege}$$

Lichtkracht (overslaan)

$$L \propto \frac{64\pi^2}{9} \frac{\sigma}{\bar{\kappa}} \left(\frac{G\mu m_H}{k}\right)^4 \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_c}\right)^4 M^3$$

$$L \sim 2.4 \times 10^8 L_\odot \frac{\text{m}^2}{\text{kg}} \cdot \frac{\mu^4}{\bar{\kappa}} \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_c}\right)^4 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^3$$

- Vergelijk empirische $L \sim M^{3.8}$ uit het vorige hoofdstuk
 - belangrijkste verschil: negeren stralingsdruk

Nucleaire tijdschaal

Hoe snel evolueert de ster?

$$\tau_n \sim \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{L}{L_\odot} \right)^{-1} \tau_\odot \sim 10 \text{ Gyr} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{L}{L_\odot} \right)^{-1}$$

Thermische tijdschaal

Hoe snel herstelt de ster thermisch evenwicht?

$$\tau_{\text{th}} \sim \frac{E_{\text{th}}}{L} \sim \frac{GM^2}{2RL} \sim 31 \text{ Myr} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{-1} \left(\frac{L}{L_\odot} \right)^{-1}$$

Dynamische tijdschaal (vrije val)

Hoe snel stort de ster in als de druk wegvalt?

$$\tau_{\text{dyn}} \sim \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \sim 27 \text{ min} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/2} \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{3/2}$$

Overzicht vgl.

Overzicht

Differentiaalvgl.

Massabehoud

Energiebehoud

Hydrostatisch
evenwicht

Energietransport

Toestandsvgl.

Overzicht

Ideaal gas

Stralingsdruk

Gedegeneerd gas

Relativ. ged. gas

Opaciteit

Opaciteit

Kernfusie

Waterstoffusie

Verdere kernfusie

Schalingswetten

Het viriaaltheorema

Druk, temperatuur,
lichtkracht

Tijdschalen