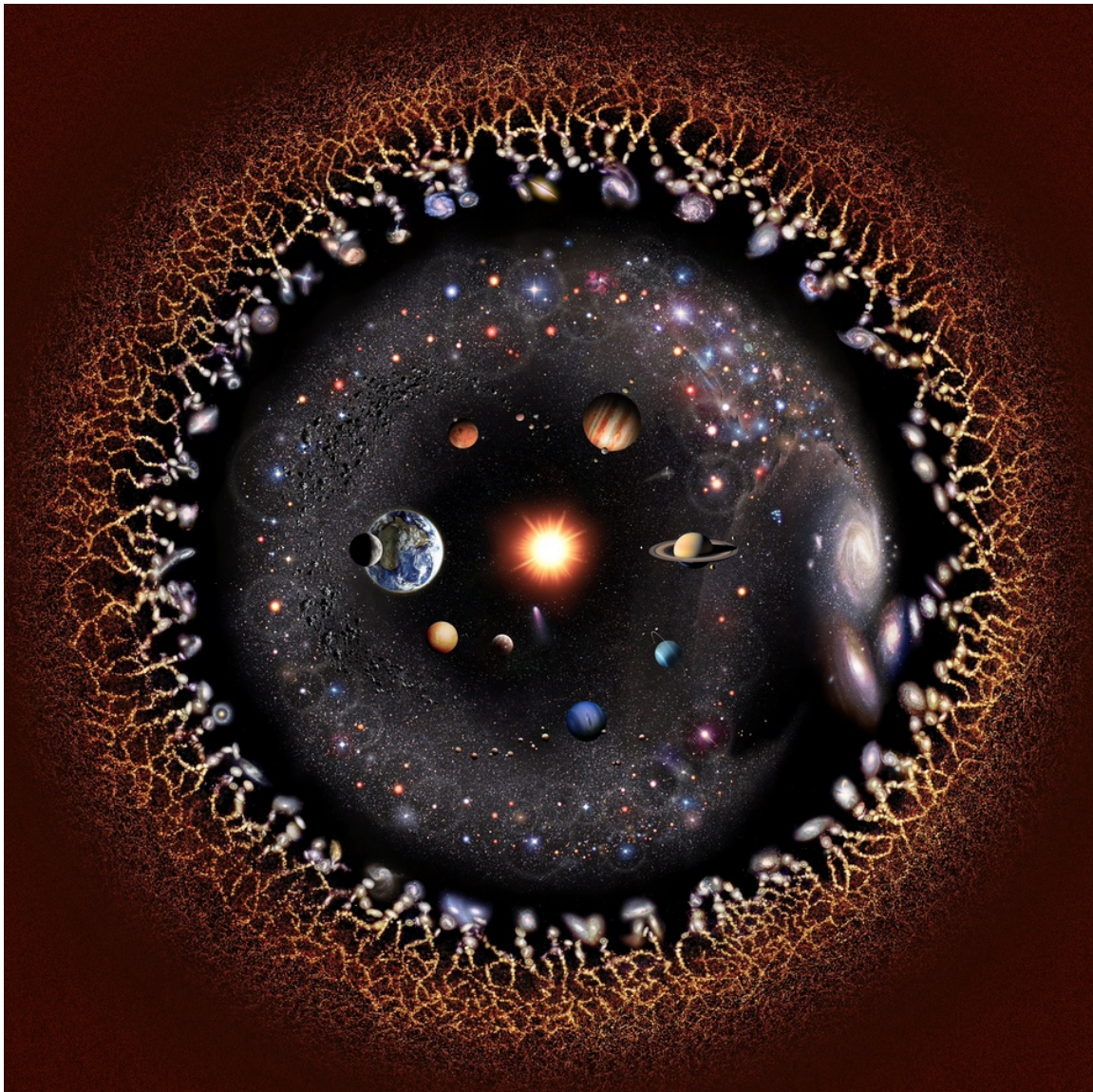


Een korte inleiding in de sterrenkunde

dictaat bij Sterrenkunde en Optica
bachelor Natuur- en sterrenkunde
Universiteit Utrecht



Universiteit
Utrecht

Marc van der Sluys

Nikhef

2025-06-20

Figuur omslag:

De figuur op de omslag toont het heelal met de belangrijkste ingrediënten op een logaritmische schaal, gemaakt door Pablo Carlos Budassi (<https://pablocarlosbudassi.com>). Het beeld kan worden gebruikt onder de voorwaarden van de cc by-sa-licentie v. 4.0: <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.nl>.

Over de auteur:

Marc van der Sluys is onderzoeker en docent sterrenkunde en zwaartekrachtgolven bij Nikhef in Amsterdam en aan de Universiteit Utrecht. Hij is ook de maker van de Nederlandstalige populair-sterrenkundige website <https://hemel.waarnemen.com>, die jaarlijks tussen de een en twee miljoen bezoekers trekt. Net als Julius Caesar schrijft Van der Sluys soms over zichzelf in de derde persoon.

Copyright © 2025 by Marc van der Sluys

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de rechthebbende. Uitzonderingen kunnen worden gemaakt voor het opnemen van citaten in kritische reviews en eventueel ander niet-commercieel gebruik zoals toegestaan door de auteurswet. Voor verzoeken om toestemming kunt u contact opnemen met de auteur via onderstaande adressen.

<https://marc.vandersluys.nl>

<https://www.nikhef.nl/~sluys/intro-astro-uu>

Dit document is vormgegeven in L^AT_EX door de auteur.

Manuscript rev.168, git hash 50fb600 (2025-06-20 15:13, clean), gecompileerd op vr 20 jun 2025, 18:36 CEST.

Voorwoord

Dit dictaat geeft de achtergrond bij het sterrenkundedeel van het college *Sterrenkunde en Optica*, dat wordt gegeven aan het einde van het eerste jaar van de Bacheloropleiding Natuur- en Sterrenkunde van de Universiteit Utrecht. Samen met de **slides**, **afleidingen op het bord** en **werkcollege-opgaven** vormt **dit dictaat** de tentamenstof voor het sterrenkundedeel.

De sterrenkunde in dit vak, verplicht voor alle eerstejaars studenten in Utrecht, betreft weinig mooie plaatjes kijken, maar richt zich op de *astrofysica* — de natuurkunde van het heelal. Er zijn meerdere redenen om het heelal te bestuderen. De belangrijkste reden is dat het heelal ons een *experimenteel laboratorium* voorschotelt. Het grote nadeel van dit lab is dat we de experimenten niet zelf kunnen ontwerpen en plannen. Het zijn natuurkunde-experimenten met extreem weinig (zwakke objecten) of oncontroleerbare (doordat gebeurtenissen kunnen niet worden herhaald) data. We moeten dus slim zijn om toch chocola te maken van de data die we *wel* hebben. Het grote voordeel is dat in dit lab zich omstandigheden voordoen die op Aarde niet te vinden zijn: zeer grote afstandschaalen, zeer hoge of juist lage dichtheden en temperaturen, extreme energiën, enzovoort. Een tweede reden om aan astrofysica te doen is dat we een idee willen hebben van wat er gebeurt in de $1 - (6 \times 10^{-59})$ van ons universum¹ die buiten de Aarde liggen.

Een maatschappelijke reden om aan sterrenkunde te doen is dat het brede publiek zeer geïnteresseerd is in wat er buiten de Aarde gebeurt. Vragen als “Zijn we alleen?” en “Waar is *het* zwarte gat?” keren vaak terug.² Dit komt mede doordat je simpele sterrenkunde zelf kunt doen met een verrekijker en doordat mooie plaatjes redelijk kunnen worden uitgelegd in eenvoudige termen. Sterrenkundige ontdekkingen halen niet alleen vakbladen, maar ook regelmatig het algemene nieuws (zoals nos.nl). Een tweede maatschappelijke reden is dat we met innovatieve methoden (technologie, algoritmen, ...) moeten komen om nuttige informatie te halen uit de schaarse waarnemingen. Uit sterrenkundig onderzoek komen methoden voor kankerscreening (afgeleid van screening van sterrenstelsels), de CCD (ooit een duur alternatief om zwakke objecten te fotograferen, later zat er een in iedere telefoon) en meer. Hoewel sterrenkunde geen *direct* nut lijkt te hebben voor de maatschappij,³ heeft het zeker *indirect* nut.

In dit vak proberen we ons zoveel mogelijk te richten op de meer algemeen toepasbare natuurkunde die we kunnen leren uit de sterrenkunde. Denk hierbij aan stralingsleer, de werking van gassen, mechanica, enzovoort. Daarnaast proberen we te leren *denken* als een sterrenkundige. Hierbij hoort het leren van jargon, maar ook de vraagstelling “Wat kunnen we *wel* met deze data?”. We richten ons hiervoor op algemene zaken als **afstand**, **tijd** en **licht** (Hoofdstuk 1), bestuderen de **gassen** en **straling** waaruit sterren zijn opgebouwd (H. 2), en bekijken de **opbouw van deze sterren** en hoe ze **evolueren** (H. 3). Vervolgens kijken we wat er gebeurt wanneer twee sterren in een **dubbelster** zitten (H. 4), wat het geval is voor de meeste sterren in het heelal, en hoe compacte dubbelsterren **zwaartekrachtgolven** kunnen opwekken en hoe we die detecteren (H. 5). Ten slotte zoomen we uit naar **sterrenstelsels** (H. 6) en het **heelal** op grote schaal, hoe dat **uitdijt** en wat dat betekent voor het **begin** (Hoofdstuk 7).

Het **doel** van dit vak is om u (een beetje) meer fysicus te maken; het tentamen is slechts het *middel* om

[illegible]

²Naast “Wat doet u overdag?”

³Hoewel snappen hoe zwaartekracht werkt uit de beweging van de planeten zeker handig is voor het bouwen van een huis.

te kijken in hoeverre dat is gelukt.⁴ Probeer het doel niet uit het oog te verliezen! Naast de hoorcolleges kent dit vak *werkcolleges*, waar u de geleerde stof toepast en hier en daar wat nieuwe stof bijleert. In totaal zijn er acht colleges en acht werkcolleges⁵ die u een betere fysicus maken (en voorbereiden op het tentamen). Het halve sterrenkundevak staat voor $3.75 \text{ EC} \times 28 \text{ uur/EC} = 105 \text{ uur}$, de totale contacturen (inclusief tentamen) zijn circa 39 uur, wat betekent dat u de overige 63% (66 uur in vijf weken) geacht wordt in uw eigen tijd te doen. Om die reden komen de antwoorden na het werkcollege beschikbaar. Het bijwonen van het hoor- en werkcollege wordt sterk aangeraden maar is niet verplicht; u bent volwassen en het is dus aan u om uit te maken hoe goed u de natuurkunde wilt snappen (en hoe goed u zich wilt voorbereiden op het tentamen).

Voor mensen die wat meer achtergrond willen bij deze cursus, of een fraaier boekje, raad ik *Het leven van sterren* van Frank Verbunt aan, om drie redenen. Ten eerste geeft het een eerste inleiding in de fysica van de vorming, bouw en evolutie van sterren en hoe deze eigenschappen uit de waarnemingen en theorie zijn bepaald, zonder overbodige informatie. Ten tweede is het boekje is hierdoor efficiënt, lekker dun en dus goedkoop. De derde reden is dat het een niet-commercieel boekje is — niets van de aanschafkosten gaat naar de auteur, wat mede de lage prijs verklaart. Dat de auteur ook mijn promotor was, volgens sommigen belangenverstrengeling, is hierdoor irrelevant, maar het verklaart wel hoe ik van dit boekje weet: ik heb er zelf aan bijgedragen als student. Daarnaast heb ik het gebruikt om dit vak op te zetten. Ten slotte is dit een van de weinige boekjes op dit niveau in het Nederlands, en is het gemakkelijk (online) verkrijgbaar.

Als u een bredere en diepere inleiding in de astrofysica wilt, is het boek *An introduction to modern astrophysics* van Carroll en Ostlie een aanrader. Een stuk duurder dan het eerste boekje, maar u krijgt ook veel meer informatie over een zeer breed gebied van de sterrenkunde (zwaartekrachtgolven zijn hierop een opmerkelijke uitzondering). Voor dit college is het boek inefficiënt (teveel andere onderwerpen), maar als uw interesse in de sterrenkunde breed is is dit een goede investering.

⁴Geen enkele werkgever zit straks te wachten op een sollicitant die alleen maar weet hoe deze een tentamen haalt.

⁵In sommige jaren zijn er mogelijk zeven (werk)colleges, afhankelijk van hoe de Nederlandse feestdagen vallen.

Inhoudsopgave

Voorwoord	3
Inhoudsopgave	7
1 Afstand, tijd en licht	9
1.1 De Zon als referentiester	9
1.1.1 Afstanden in het zonnestelsel en de massa en straal van de Zon	9
1.1.2 Lichtkracht, temperatuur en levensverwachting van de Zon	10
1.2 De parallax en afstanden tot sterren	11
1.3 De helderheid en kleur van sterren	11
1.3.1 Flux en lichtkracht	11
1.3.2 Magnituden	12
1.3.3 Fotometrie en “kleur”	13
1.4 Spectra	14
1.4.1 Zwarte stralers en de Planckfunctie	14
1.4.2 Sterspectra en spectraallijnen	15
1.5 Spectraaltypen	17
1.5.1 Helderheidsklassen	17
1.5.2 Metalliciteit en abundanties	17
1.6 Groepen van sterren	20
1.6.1 Straal en lichtkracht uit dubbelsterren	20
1.6.2 Het Hertzsprung-Russelldiagram voor nabije sterren	21
1.6.3 Afstanden en leeftijden van clusters	22
2 Gassen en straling	25
2.1 Overzicht vergelijkingen	25
2.2 De differentiaalvergelijkingen	26
2.2.1 Massabehoud	26
2.2.2 Energiebehoud	26
2.2.3 Hydrostatisch evenwicht	26
2.2.4 Energietransport door straling	27
2.2.5 Energietransport door convectie	28
2.2.6 Convectie of straling?	28
2.3 Toestandsvergelijkingen	29
2.3.1 Ideaal gas	29
2.3.2 Stralingsdruk	31
2.3.3 Gedegeneerde gassen	31
2.4 Opaciteit	32
2.5 Kernfusie	32
2.5.1 Waterstoffusie	33
2.5.2 Verdere kernfusie	34
2.6 Het viriaaltheorema	35
2.7 Schalingswetten voor hoofdreekssterren	36

2.7.1	Centrale druk en temperatuur	36
2.7.2	Tijdschalen	36
3	Structuur en evolutie van sterren	37
3.1	Lage-massasterren	37
3.1.1	De hoofdreks	37
3.1.2	De reuzentakken	39
3.2	Hoge-massasterren	40
3.2.1	De hoofdreks	41
3.2.2	Na de hoofdreks	43
3.2.3	De laatste evolutiefasen van zware sterren	43
3.3	Een overzicht van sterevolutie	44
3.3.1	Eigenschappen van hoofdrekssterren	44
3.3.2	Evolutiesporen in het Hertzsprung-Russelldiagram	44
3.3.3	Leeftijden en isochronen	45
3.4	Supernovae	46
3.5	Compacte sterren	48
3.5.1	Witte dwergen	48
3.5.2	Neutronensterren	50
3.5.3	Zwarte gaten	51
3.5.4	Relatie tussen ZAMS-massa en eindproduct	51
4	De evolutie van dubbelsterren	53
4.1	De geometrie van een dubbelster	53
4.2	De Rochepotentiaal	54
4.3	De evolutie tot donorster	56
4.4	Baanenergie en -impulsmoment	57
4.4.1	Verlies van impulsmoment	58
4.4.2	Gravitatiegolven	58
4.5	Stabiele materie-overdracht	58
4.5.1	Baanverandering door materie-overdracht	59
4.5.2	De snelheid van materie-overdracht	60
4.6	Instabiele materie-overdracht: common envelopes	61
4.7	Na de materie-overdracht	64
4.8	Soorten dubbelsterren	64
5	Zwaartekrachtgolven	67
5.1	Een golfoplossing voor de Algemene Relativiteitstheorie	67
5.2	Het effect van een passerende zwaartekrachtgolf	68
5.3	Quadrupoolstraling en de amplitude van zwaartekrachtgolven	70
5.4	Zwaartekrachtgolven van een dubbelster	71
5.5	Het uitgestraalde vermogen door inspiraliserende dubbelsterren	72
5.6	Het signaal van een inspiral	73
5.6.1	De <i>chirp</i>	74
5.6.2	De duur van een signaal	74
5.6.3	ISCO, <i>merger</i> en <i>ringdown</i>	74
5.6.4	Een eenvoudige golfvorm	75
5.7	Een zwaartekrachtgolfdetector	75
5.7.1	De Michelson-interferometer	75
5.7.2	Een verbeterde Michelson-interferometer	79
5.8	De detectie van zwaartekrachtgolven	79
5.8.1	Spectra en het frequentiedomein	79
5.8.2	De signaal-ruisverhouding	81
5.8.3	De ontwikkeling van LIGO en Virgo en de eerste detecties	82

6	Sterrenstelsels	85
6.1	Ons Melkwegstelsel	85
6.2	Sterrenstelsels waarnemen	86
6.3	De morfologie van sterrenstelsels	87
6.3.1	Elliptische sterrenstelsels	87
6.3.2	Spiraalssterrenstelsels	88
6.3.3	Onregelmatige sterrenstelsels	89
6.4	Groepen en clusters van sterrenstelsels	89
6.4.1	Interacties tussen sterrenstelsels	90
6.5	Het ontstaan van sterrenstelsels	91
7	Kosmologie	93
7.1	De kosmische afstandsladder	93
7.2	Een donkere hemel	95
7.3	Een uitdijend heelal met materie	97
7.3.1	De wet van Hubble-Lemaître	97
7.3.2	Newtoniaanse uitdijng en de Friedmannvergelijking	99
7.3.3	Een vlak heelal	100
7.3.4	Roodverschuiving en terugkijktijd	101
7.4	Een heelal gedomineerd door straling	103
7.4.1	De kosmische achtergrondstraling	103
7.4.2	Straling in een uitdijend heelal	103
7.4.3	Uitdijng van een straling-gedomineerd heelal	105
7.5	Het Λ CDM-model	106
7.6	Een korte geschiedenis van het heelal	107
	Index	113
	Verantwoording van figuren	113
	Verantwoording van tabellen	114
	Dankwoord	115
	Constanten	116

Hoofdstuk 1

Afstand, tijd en licht

1.1 De Zon als referentiester

De uitdijing van het heelal, en daarmee de Oerknal, is ontdekt door de schijnbare beweging van sterrenstelsels van ons af. Die sterrenstelsels zijn zichtbaar door de circa 10^{11} sterren en dubbelsterren die erin voorkomen, en ieder van deze sterren lijkt min of meer op onze **Zon**. Vandaar dat we beginnen met het bepalen van de fysische eigenschappen als massa, straal en lichtkracht van de Zon; zij vormt een *referentiester* waarmee we andere sterren kunnen vergelijken. Daarnaast vinden vele fysische processen in en op de Zon ook plaats bij andere sterren. De Zon vormt dus de sleutel tot het begrijpen van sterren, (compacte) dubbelsterren (die bronnen kunnen vormen van zwaartekrachtgolven), groepen van sterren zoals clusters en sterrenstelsels, en het uitdijende heelal.

Om de *schijnbare* eigenschappen van de Zon, zoals we ze op Aarde waarnemen, te vertalen naar de *fysische* parameters van de Zon, moeten we eerst de afstand tot de Zon meten.

1.1.1 Afstanden in het zonnestelsel en de massa en straal van de Zon

De *verhoudingen* tussen de **afstanden** van de planeten van ons zonnestelsel tot de **Zon** worden gegeven door de Derde **wet van Kepler**:¹

$$\frac{GM_{\odot}}{a^3} = \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{a}{\text{A.U.}}\right)^3 = \left(\frac{P}{\text{jaar}}\right)^2. \quad (1.1)$$

Hierin is a de afstand van de planeet tot de Zon uitgedrukt in **astronomische eenheden** (astronomical units; **A.U.**), de gemiddelde afstand tussen de Aarde en de Zon, en P de baanperiode in jaren. G is de zwaartekrachtconstante van Newton (zie de tabel op pagina 116) en $M_{\odot}$ de massa van de Zon. Zodra we één keer een afstand in kilometers meten, weten we de grootte van 1 A.U. en de absolute afstanden tussen alle planeten. Tegenwoordig gebeurt dit door afstandmetingen van Venus en Mars met behulp van *radar*. Hieruit volgt dat de afstand tot de Zon circa 150 miljoen km bedraagt. Licht heeft circa 8.3 minuten nodig om deze afstand te overbruggen.

Als we de afstand weten en omlooptijd van de Aarde kennen, kunnen we uit Vgl. 1.1 de massa van de Zon bepalen:

$$M_{\odot} \approx \left(\frac{2\pi}{1 \text{ jaar}}\right)^2 \frac{(1 \text{ A.U.})^3}{G} \approx 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad (1.2)$$

circa 333.000 keer zo zwaar als de Aarde.

Vanaf de Aarde gezien is de *schijnbare diameter* van de Zon circa 32 boogminuten, ofwel $r_{\odot} \approx 16'$.² Gecombineerd met de afstand tot de Zon, kunnen we uitrekenen dat de straal van de Zon

$$R_{\odot} = 1 \text{ A.U.} \cdot \tan r_{\odot} \approx 696.000 \text{ km} \quad (1.3)$$

¹We mogen de massa van de planeet verwaarlozen ten opzichte van die van de Zon.

²Zie de uitleg over hoeken op pagina 116.

bedraagt, circa 109 keer zo groot als de Aarde in diameter; circa 1.3×10^6 keer zo groot in volume.

1.1.2 Lichtkracht, temperatuur en levensverwachting van de Zon

Op een soortgelijke manier kunnen we de **lichtkracht** van de Zon bepalen. De zonneconstante, de loodrechte **flux**³ aan top van de aardatmosfeer, bedraagt $f_{b,\odot} \approx 1361 \text{ W/m}^2$. Uit de **kwadratenwet**

$$L = 4\pi d^2 f = 4\pi R^2 F, \quad (1.4)$$

waarin d de afstand tot de bron is, R zijn straal en F de flux aan het oppervlak, vinden we de lichtkracht van de Zon:

$$L_{\odot} = 4\pi (1 \text{ A.U.})^2 f_{b,\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 F_{b,\odot} \approx 3.85 \times 10^{26} \text{ W}. \quad (1.5)$$

Als we aannemen dat het zonnespectrum lijkt op een **Planckspectrum**,⁴ geldt de **wet van Stefan-Boltzmann**

$$F = \sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (1.6)$$

en vinden we

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4. \quad (1.7)$$

Hierin is σ de constante van Stefan-Boltzmann, gegeven op pagina 116, en dit definieert in feite de **effectieve temperatuur** T_{eff} . We kunnen hiermee de effectieve temperatuur van de Zon berekenen:

$$F_{b,\odot} = \sigma T_{\text{eff},\odot}^4 = \frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2} \rightarrow T_{\text{eff},\odot} \approx 5780 \text{ K}. \quad (1.8)$$

De leeftijd van de Zon is gelijk aan die van het zonnestelsel, en bepaald uit meteorieten: $\tau_{\odot} \approx 4.5 \text{ Gyr}$.⁵ Dit stelt sterke beperkingen aan de mogelijke **energiebron** van de Zon. De Zon bestaat voornamelijk uit waterstof. Als dit alleen protonen, met massa m_p , zouden zijn, zou de Zon bestaan uit circa $\frac{M_{\odot}}{m_p} \sim 1.2 \times 10^{57}$ protonen. Bij chemische reacties komt ongeveer een **electronvolt** ($1 \text{ eV} \approx 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$) vrij. Met de huidige lichtkracht van de Zon zou zij na circa

$$\tau_{\odot} \sim \frac{1.2 \times 10^{57} \text{ eV}}{L_{\odot}} \sim 16 \text{ kyr} \quad (1.9)$$

zijn opgebrand; veel korter dan de huidige leeftijd van de Zon. Tegenwoordig weten we dat de Zon ‘loopt’ op **waterstoffusie**, een **kernfusieproces** waarbij vier protonen worden omgezet in een heliumdeeltje.⁶ Hierbij ‘verdwijnt’ circa 7.2% van de massa, die wordt omgezet in (andere vormen van) energie. Als we bovendien stellen dat slechts de binnenste 10% van de massa van de Zon dicht genoeg is en dat 70% van de massa van de Zon uit waterstof bestaat, vinden we

$$\tau_{\odot} \sim 0.0072 \cdot 0.1 \cdot 0.7 \cdot \frac{M_{\odot} c^2}{L_{\odot}} \sim 7.5 \text{ Gyr}, \quad (1.10)$$

wat aardig overeenkomt met gedetailleerde modellen voor de **hoofdreeks** (zie Hoofdstukken 1.6.2 en 3).

De waarden voor A.U., $R_{\odot}$, $L_{\odot}$, $T_{\text{eff},\odot}$ en $M_{\odot}$ die we hier hebben afgeleid zijn terug te vinden in de tabel op pagina 116.

³Wat sterrenkundigen **flux** of *stralingsflux* noemen heet elders *intensiteit* en officieel *irradiantie*.

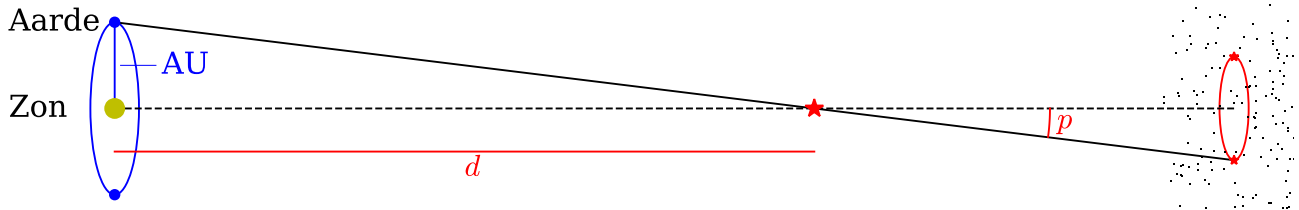
⁴We zullen zien dat dit in eerste-ordebenadering aardig klopt — we noemen zo’n object een **zwarte straler**.

⁵Zie H 2.3 uit Het leven van sterren voor meer details.

⁶Sterrenkundigen spreken vaak van *verbranding* (*burning*) wanneer ze kernfusie bedoelen!

1.2 De parallax en afstanden tot sterren

Met de bepaling van de **astronomische eenheid** hebben we de eerste serieuze kosmische afstandsmaat in handen. We kunnen deze gebruiken als opstapje naar het meten van afstanden tot nabije sterren.⁷ Hierbij maken we gebruik van het feit dat de Aarde om de Zon beweegt, en na een half jaar 2 A.U. verschoven is. Door de **parallax** lijken nabije voorgrondsterren te verschuiven ten opzichte van verre achtergrondsterren, zoals bomen langs het spoor vanuit een trein sneller voorbij lijken te trekken dan de Maan. Dit is schematisch weergegeven in Fig. 1.1.



Figuur 1.1: Door de jaarlijkse beweging van de Aarde (A) om de Zon (Z; links) lijkt een nabije ster op afstand d (midden) bij de ecliptische pool een cirkeltje met schijnbare straal p (eigenlijk een ellips met dezelfde excentriciteit als de aardbaan) te draaien ten opzichte van achtergrondsterren (rechts). Voor $d = 1 \text{ pc}$ geldt $p = 1''$. Voor een ster verder van de pool wordt het ellipsje steeds verder afgeplat; op de ecliptica is het een streepje. De schets is voor een denkbeeldige waarnemer die schuin van opzij kijkt (voor precies opzij zouden beide ellipsjes een streepje zijn) en is niet op schaal.

Uit die figuur volgt dat

$$\tan p = \frac{1 \text{ A.U.}}{d}. \quad (1.11)$$

De afstand van een ster waarvoor de jaarlijkse parallax één **boogseconde** is,⁸ is gedefinieerd als een **parsec** (**pc**, voor *parallax-boogseconde*): $d(\text{pc}) \equiv \frac{1}{p('')}$. De waarde van een parsec is dan dus

$$\begin{aligned} \frac{1 \text{ A.U.}}{1 \text{ pc}} &\equiv \tan 1'' \approx 1'' \rightarrow \\ 1 \text{ pc} &\approx \frac{1'' \times 3600''/^{\circ} \times 360^{\circ}}{2\pi} \cdot (1 \text{ A.U.}) \approx 3.086 \times 10^{16} \text{ m} \approx 3.26 \text{ lichtjaar}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

De Hipparcos-satelliet heeft tussen 1989 en 1993 de parallaxen van $\sim 118\,200$ sterren gemeten met een nauwkeurigheid beter dan $0.001''$ ofwel 1 mas ,⁹ en van nog eens 2.5 miljoen sterren met lagere precisie. De Gaia-satelliet (2013–2025) mat de parallaxen van circa 1.8×10^9 objecten met een nauwkeurigheid van $20 \mu\text{as}$,¹⁰ dus met een relatieve nauwkeurigheid van 10% of beter tot een afstand van $\sim 5 \text{ kpc}$. Tabel 1.1 toont de parallaxen en andere parameters voor een aantal nabije sterren.

1.3 De helderheid en kleur van sterren

1.3.1 Flux en lichtkracht

In H. 1.1.2 zagen we al dat sterrenkundigen **flux** zeggen als ze het vermogen (van straling) door een oppervlak bedoelen, waar anderen *intensiteit* of *irradiantie* zeggen. We zullen het symbool $\mathbf{f}$ gebruiken voor de flux (van bijvoorbeeld een ster) gemeten op Aarde, en $\mathbf{F}$ voor de flux aan het steroppervlak. Beide worden uitgedrukt in Watt per vierkante meter: $[f] = [F] = \text{W m}^{-2}$.

Met de **lichtkracht** $\mathbf{L}$ bedoelen we het *vermogen* (van een ster), met $[L] = \text{W}$ of $L_{\odot}$. Voor de golflengte van licht gebruiken we het symbool λ , vaak uitgedrukt in nanometer (nm).

⁷In Hoofdstuk 7.1 zullen we de kosmische afstandsladder helemaal beklimmen.

⁸Zie de uitleg over hoeken op pagina 116.

⁹Een milliboogseconde wordt afgekort als **mas** voor *milli-arcsecond*.

¹⁰Een microboogseconde heeft als afkorting μas .

Tabel 1.1: De parallaxen en afstanden tot de meest nabije sterren, zoals bepaald door de Hipparcos-satelliet. Andere parameters zijn de eigenbeweging μ , de visuele flux f_V , de visuele lichtkracht L_V , de “kleur” f_V/f_B (zie Sectie 1.3.3), het spectraaltype SpT en de straal van de ster, gemeten met behulp van interferometrie.

Ster	p (")	d (pc)	μ ("/jr)	$\log f_V$ (W/m ² /nm)	$\log L_V$ ($L_{V,\odot}$)	$\log f_V/f_B$	SpT	straal ($R_\odot$)
Zon				0.30	$\equiv 0$	0.004	G2V	$\equiv 1$
Proxima Cen	0.7716	1.296	3.853	−14.81	−4.26	0.46	M5Ve	0.146(11)
α^2 Centauri	0.7424	1.347	3.724	−10.95	−0.36	0.10	K1V	0.865(5)
α^1 Centauri	0.7424	1.347	3.710	−10.40	0.19	0.02	G2V	1.224(3)
Barnards ster	0.5482	1.824	10.359	−14.22	−3.37	0.36	sdM4	
CN Leonis	0.4255	2.35	4.696	−15.82	−4.75	0.54	M5.5	
Lalande 21185	0.3926	2.547	4.801	−13.40	−2.26	0.34	M2V	
UV Ceti	0.3817	2.62	3.328	−15.42	−4.25	0.48	M5.5e	
Sirius	0.3792	2.637	1.339	−9.83	1.34	−0.26	A0m...	1.703(9)
Ross 154	0.3367	2.970	0.665	−14.56	−3.28	0.34	M3.5Ve	
HH And	0.3155	3.17	1.588	−15.32	−3.99	0.50	M5	
ϵ Eridani	0.3109	3.216	0.975	−11.90	−0.55	0.09	K2V	0.744(11)
1HD 217987	0.3053	3.276	6.897	−13.35	−1.98	0.33	M2V	
EZ Aquarii	0.3003	3.33	3.254	−15.28	−3.90	0.52	M5.5	
FI Virginis	0.2981	3.355	1.361	−14.86	−3.48	0.43	M4.5V	
161 Cygni A	0.2868	3.487	5.297	−12.49	−1.07	0.16	K5V	
Procyon	0.2846	3.514	1.259	−10.57	0.85	−0.09	F5IV-V	2.060(20)

Voor zowel de flux als de lichtkracht kunnen we de *totale* waarde bedoelen, geïntegreerd over alle golflengtes. Dit noemen we de **bolometrische flux** of **bolometrische lichtkracht**, uitgedrukt als f , F of L *zonder* subscript. Deze grootheid is echter moeilijk te meten. Metingen van de fluxen van sterren hebben vaak een beperkt golflengtebereik, oftewel **fotometrische band**. We spreken dan van de **monochromatische flux** of **monochromatische lichtkracht** voor een gegeven golflengte(bandje), bijvoorbeeld f_λ of L_λ . Hoe smaller het bandje hoe kleiner de flux, dus wordt dit uitgedrukt als een *dichtheid*: $[X_\lambda] = [X] \text{ nm}^{-1}$, waarbij X staat voor f , F of L . De meest gebruikte fotometrische band is de **visuele band**, aangegeven met V . Deze band piekt rond $\lambda = 550 \text{ nm}$, dus midden in het (voor mensen) visuele spectrum. De grootheden f_V , F_V en L_V verwijzen dus naar deze band. In H. 1.3.3 komen we hierop terug.

De bolometrische flux is (voor zowel f als F) gedefinieerd als

$$f \equiv \int_0^\infty f_\lambda d\lambda. \quad (1.13)$$

Omdat f , F en L vele ordes van grootte spannen worden vaak $\log f$, $\log F$ en $\log L$ gebruikt.

1.3.2 Magnituden

De helderheden van sterren worden al sinds de Griekse oudheid aangegeven met **magnituden**, empirische “omgekeerde grootten” met waarden tussen 1 voor de helderste sterren en 6 voor de zwakst met het oog waarneembare sterren. Hoewel de magnitude een archaïsche grootheid betreft wordt deze nog veel gebruikt in de sterrenkunde. Ze blijkt ruwweg *logaritmisch* af te hangen van de flux: $m \propto -2.5 \log f$.¹¹ Nadat dit werd vastgesteld bleken de helderste sterren *negatieve* magnituden te hebben. De helderste ster aan de hemel na de Zon, Sirius, heeft $m \approx -1.4$; de zwakste sterren zichtbaar met blote oog (zonder lichtvervuiling) hebben zoals gezegd $m \sim +6$. Het gaat hier om de *schijnbare magnitude* m , zoals gezien vanaf de Aarde. De *absolute magnitude* M is de schijnbare magnitude die een ster zou hebben wanneer deze op een afstand van 10 pc zou staan. De Zon heeft $M_V \approx +4.8$, Sirius $M_V \approx +1.5$ en is dus intrinsiek helderder dan de Zon. Het verschil tussen de magnitudes van twee objecten komt overeen met een ratio

¹¹Zie bijvoorbeeld Wikipedia of de Appendix van *Het leven van sterren* voor meer details.

van hun fluxen (of lichtkrachten, voor absolute magnitudes):

$$m_2 - m_1 = -2.5 \log \frac{f_2}{f_1}. \quad (1.14)$$

Sirius is dus intrinsiek ruim 22 keer zo helder als de Zon. De fluxen en magnitudes voor een aantal bronnen zijn te vinden in Tabel 1.2.

Tabel 1.2: Visuele fluxen zoals gemeten op Aarde, lichtkrachten en schijnbare en absolute visuele magnitudes voor een aantal hemellichamen. Alle grootheden zijn gegeven in de visuele band; de Zon zendt dus 13.2% van haar straling uit in die band. Voor de planeten is de helderste verschijning gekozen.

Object	(f_V) (W/m ²)	$\log f_V$ (W/m ²)	L_V ($L_\odot$)	m_V	M_V
Zon	180	2.25	0.132	−26.74	+4.83
Volle Maan	4.5×10^{-4}	−3.34	2.1×10^{-12}	−12.74	+31.8
Venus	2.5×10^{-7}	−6.60	1.7×10^{-11}	−4.6	+29.6
Sirius	1.4×10^{-8}	−7.86	3.01	−1.46	+1.43
Andromedanevel	1.5×10^{-10}	−9.82	2.78×10^9	+3.44	−21.5
Zwakste ster met blote oog	1.4×10^{-11}	−10.8	—	+6	—
Neptunus	3.1×10^{-12}	−11.5	1.9×10^{-12}	+7.67	+31.9
Pluto	1.3×10^{-14}	−13.9	1.4×10^{-14}	+13.65	+37.3
Zwakste bron met telescoop	6×10^{-22}	−21	—	+32	—

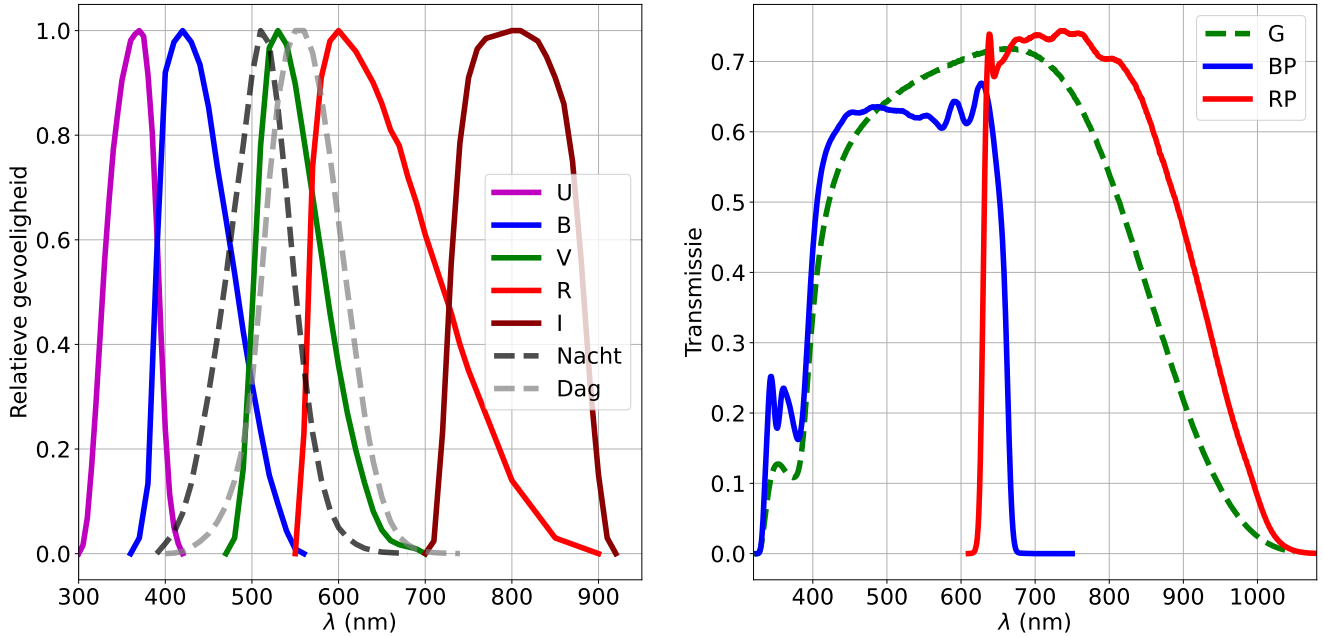
Tabel 1.3: De twaalf helderste en andere bekende sterren aan de nachthemel (voor Mira Ceti bij maximale helderheid).

Ster	code	$\log f_V$ (W/m ² /nm)	$\log L_V$ ($L_{V,\odot}$)	$\log f_V/f_B$	SpT	d (pc)
Sirius	α Canis Majoris	−9.83	1.34	−0.26	A0m...	2.637(11)
Canopus	α Carinae	−10.16	4.14	−0.20	F0Ib	95(5)
Arcturus	α Bootis	−10.39	2.05	0.23	K2IIp	11.26(7)
	α^1 Centauri	−10.40	0.19	0.02	G2V	1.347(3)
Wega	α Lyrae	−10.42	1.69	−0.26	A0Vvar	7.78(2)
Capella	α Aurigae	−10.44	2.12	0.05	G5IIIe	13.12(8)
Rigel	β Orionis	−10.48	4.60	−0.28	B8Ia	265(24)
Procyon	α Canis Minoris	−10.57	0.85	−0.09	F5IV-V	3.514(16)
Achernar	α Eridani	−10.59	3.03	−0.33	B3Vp	42.8(10)
Betelgeuze	α Orionis	−10.59	3.98	0.34	M2Ib	153(19)
	β Centauri	−10.65	4.09	−0.36	B1III	120(7)
Altair	α Aquilae	−10.71	1.04	−0.18	A7IV-V	5.130(15)
Aldebaran	α Tauri	−10.76	2.18	0.35	K5III	20.43(32)
Antares	α Scorpii	−10.83	4.04	0.48	M1Ib+B2.5V	170(29)
Deneb	α Cygni	−10.91	5.42	−0.23	A2Ia	433(60)
Mira Ceti	α Ceti	−11.32	1.55	0.30	M5e-M9e	91(10)
Bellatrix	γ Orionis	−11.06	3.01	−0.35	B2III	77.4(31)

1.3.3 Fotometrie en “kleur”

Om meer te kunnen zeggen over een ster dan alleen zijn helderheid, kunnen we kijken naar de verdeling van de flux van het sterlicht over de verschillende golflengten — dat vertelt ons iets over bijvoorbeeld de **oppervlaktetemperatuur**. De ultieme meting is een **spectrum**, waarbij het sterlicht als een histogram met vele smalle bins wordt weergegeven als functie van de golflengte. Hiervoor moet het licht flink worden uitgesmeerd en blijft er weinig flux over per bin. Voor zwakke objecten, of een snel of goedkoop resultaat, is **fotometrie** het alternatief. Hierbij wordt de flux in beperkte, maar bredere banden (bins) gemeten. Het meten van twee banden is vaak al genoeg om meer over een ster te zeggen.

Het meest gebruikte systeem voor fotometrie is het Johnson UBVRI-systeem, wat staat voor **U**V, **B**lue, **V**isible (groen; ~ 550 nm), **R**ed, **I**nfrared. Dit bestaat uit een aantal filters dat alleen het licht in een bepaalde band doorlaat. Figuur 1.2a en Tabel 1.4 tonen de karakteristieken voor deze filters. De subscripts in f_B , f_V en L_V in Tabellen 1.1 en 1.3 verwijzen naar deze filters. Figuur 1.2b en Tabel 1.4 tonen ook de filters van de Gaia-satelliet.



Figuur 1.2: *Links (a):* doorlaatkarakteristieken van het Johnson UBVRI-systeem (doorgetrokken curves), vergeleken met die van het menselijk oog overdag (O) en in het donker (D — streepjeslijnen). *Rechts (b):* doorlaatkarakteristieken van de filters van de Gaia-satelliet: G (breed), BP (blauw) en RP (rood).

Tabel 1.4: Doorlaatkarakteristieken van het Johnson UBVRI-systeem en de filters van de Gaia-satelliet.

Johnson:			Gaia:		
	λ_{eff}	$\Delta\lambda$		λ_{eff}	$\Delta\lambda$
U	366 nm	64 nm	G	623 nm	418 nm
B	438 nm	96 nm	BP	505 nm	235 nm
V	545 nm	89 nm	RP	773 nm	276 nm
R	641 nm	159 nm			
I	798 nm	150 nm			

Sterrenkundigen definiëren **kleur** als de ratio van twee fluxen. De kolom f_V/f_B die we zagen in Tabellen 1.1 en 1.3 staan voor de verhouding tussen de flux in de *blauwe* B-band over die in de *groene* V-band. Bij *lage* f_V/f_B is er veel blauw licht en is de ster dus *blauwer*; voor een *hoge* f_V/f_B is er juist weinig blauw licht en is de bron dus *roder*.

1.4 Spectra

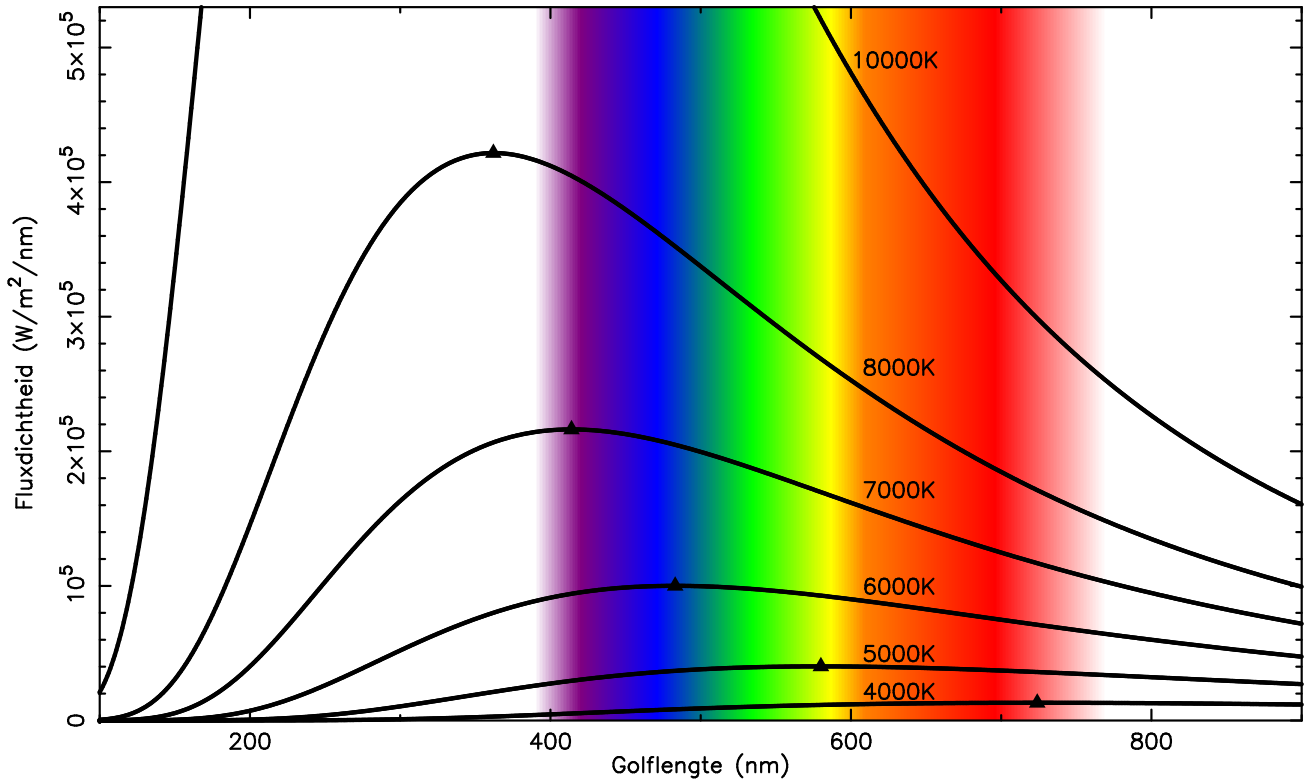
Voor meer detail en/of helderder bronnen kunnen we een **spectrum** maken van een ster. Hierbij wordt de flux gemeten in veel meer en dus smallere bins dan bij fotometrie. De spectra van sterren lijken bij eerste benadering sterk op de Planckfunctie, maar met veel *spectraallijnen*.

1.4.1 Zwarte stralers en de Planckfunctie

Een **zwarte straler** of *zwart lichaam* (*black body*) is een object met temperatuur T wiens uitgestraalde spectrum voldoet aan de **Planckfunctie**:

$$B_\lambda(T) d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda. \quad (1.15)$$

Deze vergelijking geeft de flux in het golflengtebandje λ en $\lambda + d\lambda$ als functie van T . Dit is dus een *monochromatische flux* (of fluxdichtheid), uitgedrukt in $\text{W m}^{-2} \text{nm}^{-1}$.¹² Figuur 1.3 toont de Planckspectra voor zwarte stralers met verschillende temperaturen.



Figuur 1.3: Planckspectra voor zwarte stralers met verschillende temperaturen.

We zien in die figuur dat voor een hogere temperatuur,

1. de **flux** toeneemt voor *alle* golflengten;
2. de **bolometrische flux** hierdoor toeneemt (**wet van Stefan-Boltzmann**);
3. het maximum verschuift naar *kortere* golflengten (**verschuivingswet van Wien**).

Het tweede punt wordt de **wet van Stefan-Boltzmann** genoemd, en wordt beschreven door

$$F(T) = B(T) \equiv \int_0^\infty B_\lambda d\lambda \equiv \sigma T_{\text{eff}}^4, \quad (1.16)$$

zoals we al zagen in Vgl. 1.6. Met behulp van Vgl. 1.7 kunnen we hieruit de lichtkracht L bepalen.

Het derde punt in de lijst hierboven heet de **verschuivingswet van Wien**:

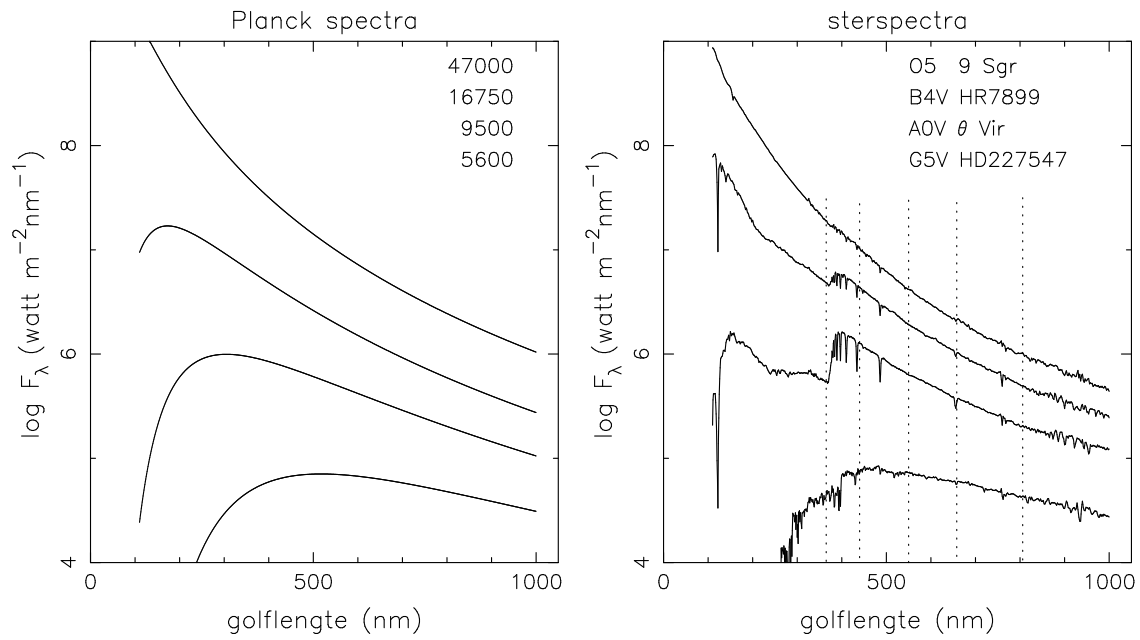
$$\lambda_{\text{max}} T_{\text{eff}} = \text{constant} \simeq 0.29 \text{ cm K}. \quad (1.17)$$

Hieruit volgt dat hete sterren ($\sim 10000 \text{ K}$) blauw-wit van kleur zijn en koele sterren ($\sim 4000 \text{ K}$) rood. Voor sterren met een temperatuur boven de 8000 K ligt de piek zelfs in het ultraviolet. We zagen al eerder dat $T_{\text{eff},\odot} \approx 5780 \text{ K}$, en dus geldt voor de Zon $\lambda_{\text{max}} \approx 502 \text{ nm}$, niet toevallig waar onze ogen het meest gevoelig zijn (zie Fig. 1.2).

1.4.2 Sterspectra en spectraallijnen

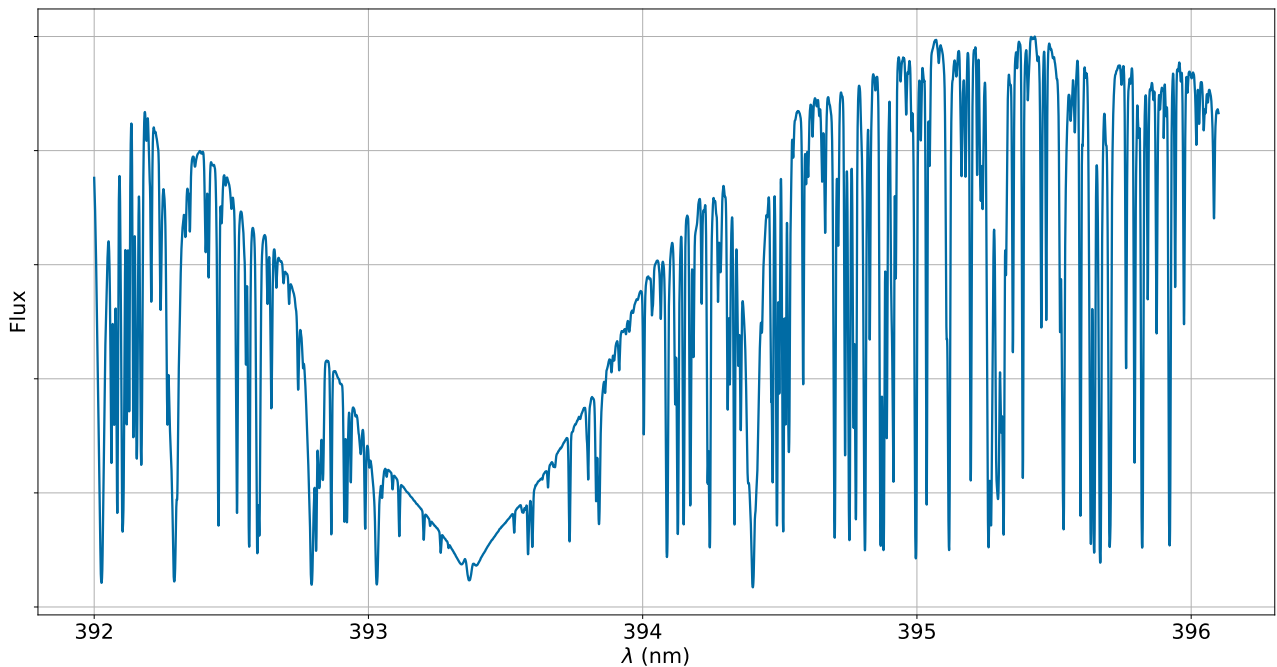
Sterspectra lijken bij eerste benadering op de Planckfunctie. Het grootste verschil is dat sterspectra **spectraallijnen** vertonen, meestal zichtbaar als *absorptielijnen*, dipjes in het Planckspectrum. Figuur 1.4 toont die verschillen.

¹²Let op, als je SI-eenheden invult in Vgl. 1.15 is het resultaat in $\text{W m}^{-2} \text{m}^{-1}$ en moet nog met 10^{-9} worden vermenigvuldigd.



Figuur 1.4: *Vergelijking tussen de Planckfunctie voor vier verschillende temperaturen (links) en sterren met die temperaturen (rechts). De grootste verschillen zijn de spectraallijnen in de sterspectra.*

Een spectrum met absorptielijnen wordt ook wel een **Fraunhofer spectrum** genoemd, naar de ontdekken van de lijnen in de Zon. Veel van de lijnen corresponderen met een overgang van een elektron tussen twee energieniveaus in een atoom. De golflengte van de lijn correspondeert met het energieverval dat hoort bij die overgang. Die golflengten kunnen theoretisch worden berekend of in een laboratorium experimenteel worden bepaald. Op die manier kan een match worden gemaakt tussen de lijnen in het spectrum van een ster en de atomen die deze veroorzaken.



Figuur 1.5: *Een stukje zonnenspectrum in het violet.*

Het is lastig te overschatten hoe belangrijk spectra zijn voor de sterrenkunde. Zonder spectra zijn de meeste sterren puntjes en de meeste sterrenstelsels vlekjes. Met spectra kunnen we de samenstelling van deze objecten meten, hun temperaturen, radiële snelheden (uit **Dopplerverschuivingen** van de lijnen) en daarmee de rotatie van sterren(stelsels) en de uitdijing van het heelal, en zelfs de sterkte en richting

van magnetische velden bepalen.

De sterkte van ieder van de spectraallijnen wordt met name bepaald door de *temperatuur* aan het oppervlak van de ster de hierbij behorende *ionisatiegraad* van de atomen in het gas. De **abundantie**, hoeveelheid van elk element, speelt natuurlijk een rol (zonder atoom geen lijn), maar minder belangrijk (onder andere doordat de meest voorkomende atomen in vrijwel alle sterren te vinden zijn).

1.5 Spectraaltypen

Door sterspectra te sorteren aan de hand van hun waterstoflijnen en een letter uit het alfabet toe te kennen ontstonden de **spectraaltypen**. Later bleek dat een handiger classificatie die naar **temperatuur** was. Na husselen ontstond de verdeling van hoge naar lage temperatuur: **O, B, A, F, G, K, M** en het ezelsbruggetje *Oh Be A Fine Guy/Girl, Kiss Me*. Voor meer precisie werd voor iedere categorie een numerieke onderverdeling aangebracht, van 0–9. Op O8, O9 volgt dus B0, B1, enzovoort. De Zon heeft als spectraaltipe G2. Tabel 1.5 toont de ruwe eigenschappen van sterren van verschillende spectraaltypen op de hoofdreks. Figuur 1.6 toont typische spectra voor de verschillende spectraaltypen.

Tabel 1.5: Ruwe eigenschappen van hoofdrekssterren van verschillend spectraaltipe (O–M). De kolommen tonen de effectieve temperatuur.

SpT	T_{eff}	Kleur	MS M	MS R	MS L	H-lijnen	Frac. van MS
	(kK)	—	($M_{\odot}$)	($R_{\odot}$)	($L_{\odot}$)	—	(%)
O	$\gtrsim 33$	blauw	$\gtrsim 16$	$\gtrsim 6.6$	$\gtrsim 30k$	zwak	0.00003
B	10 – 33	blauw-wit	2.1 – 16	1.8 – 6.6	25 – 30k	medium	0.12
A	7.3 – 10	wit	1.4 – 2.1	1.4 – 1.8	5 – 25	sterk	0.61
F	6 – 7.3	geel-wit	1.04 – 1.4	1.15 – 1.4	1.5 – 5	medium	3.0
G	5.3 – 6	geel	0.8 – 1.04	0.96 – 1.15	0.6 – 1.5	zwak	7.6
K	3.9 – 5.3	licht oranje	0.45 – 0.8	0.7 – 0.96	0.08 – 0.6	zeer zwak	12
M	2.3 – 3.9	oranje-rood	0.08 – 0.45	$\lesssim 0.7$	$\lesssim 0.08$	zeer zwak	76

1.5.1 Helderheidsklassen

Het verschil in helderheid tussen twee sterren van hetzelfde spectraaltipe komt tot uiting in de **helderheidsklasse**, die wordt aangegeven met een Romeins cijfer tussen I en V:

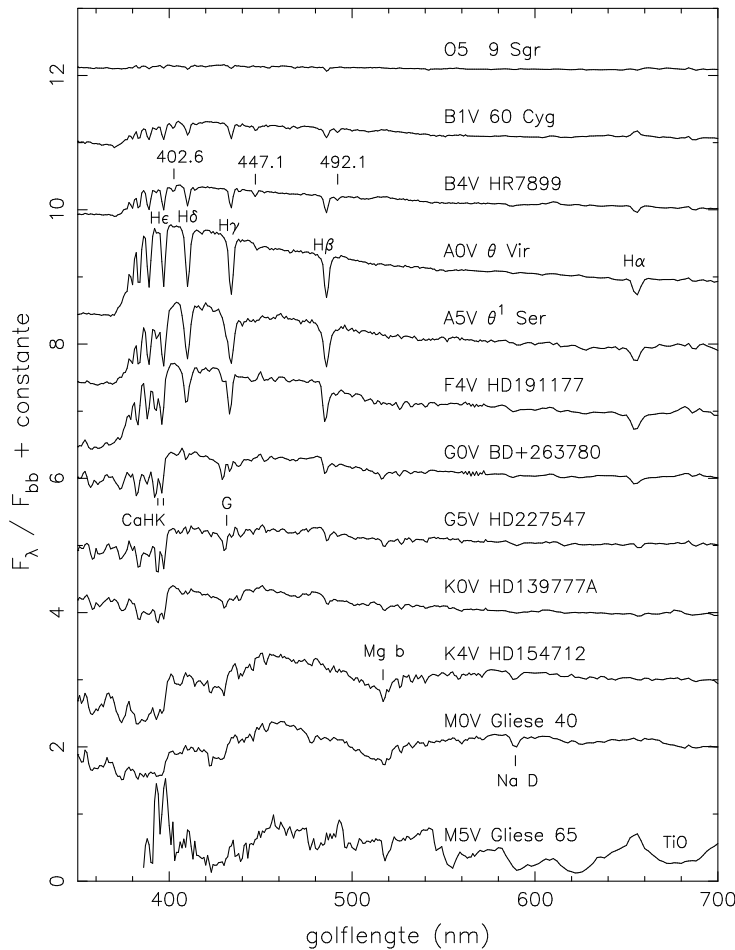
- I:** superreuzen (smalle lijnen)
- II:** heldere reuzen
- III:** reuzen
- IV:** subreuzen
- V:** dwergen/hoofdrekssterren (brede lijnen)

Merk op dat de namen van de klassen meer lijken te zeggen over de *diameter* van de ster dan over zijn helderheid. Echter, voor een gegeven spectraaltipe is de oppervlaktetemperatuur gegeven, en dus het stralend vermogen per vierkante meter oppervlak — ofwel de **flux** (zie Vgl. 1.6). Een grotere ster heeft meer oppervlak en is dus helderder. De helderheidsklasse wordt direct achter het spectraaltipe geplakt: de Zon is een hoofdreksster en heeft dus spectraaltipe G2V.

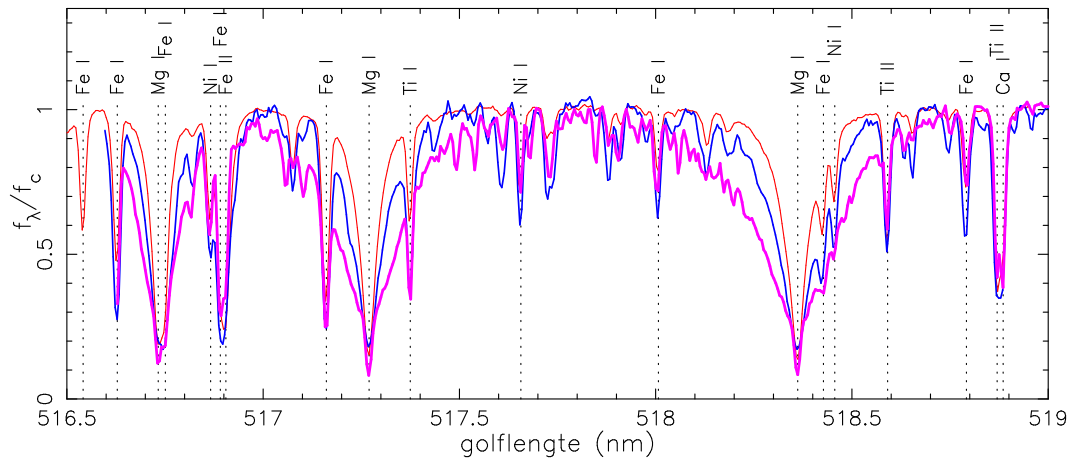
De helderheidsklasse komt in het spectrum tot uiting door de **sterkte** van de spectraallijnen. Grotere sterren hebben een lagere oppervlaktezwaartekracht, waardoor de druk lager is. Dit resulteert in *smallere* spectraallijnen. Figuur 1.7 heeft hiervan een voorbeeld.

1.5.2 Metalliciteit en abundanties

Hoewel de kenmerken van sterspectra worden gedomineerd door de temperatuur, speelt de samenstelling natuurlijk ook een rol. De massa van de Zon bestaat voor circa 70% uit waterstof, 28% uit helium en ongeveer 1.34% uit andere elementen. Elementen anders dan waterstof en helium worden in de sterrenkunde **metalen** genoemd. De fractie van de stermassa die door een element wordt ingenomen noemen



Figuur 1.6: “Vlakgemaakte” (door normeren met de Planckfunctie) spectra voor sterren van verschillende temperaturen, van hoog (bovenin) tot laag. Een perfecte zwarte straler zou een horizontale lijn opleveren. De absolute hoogte van de lijn heeft geen betekenis.



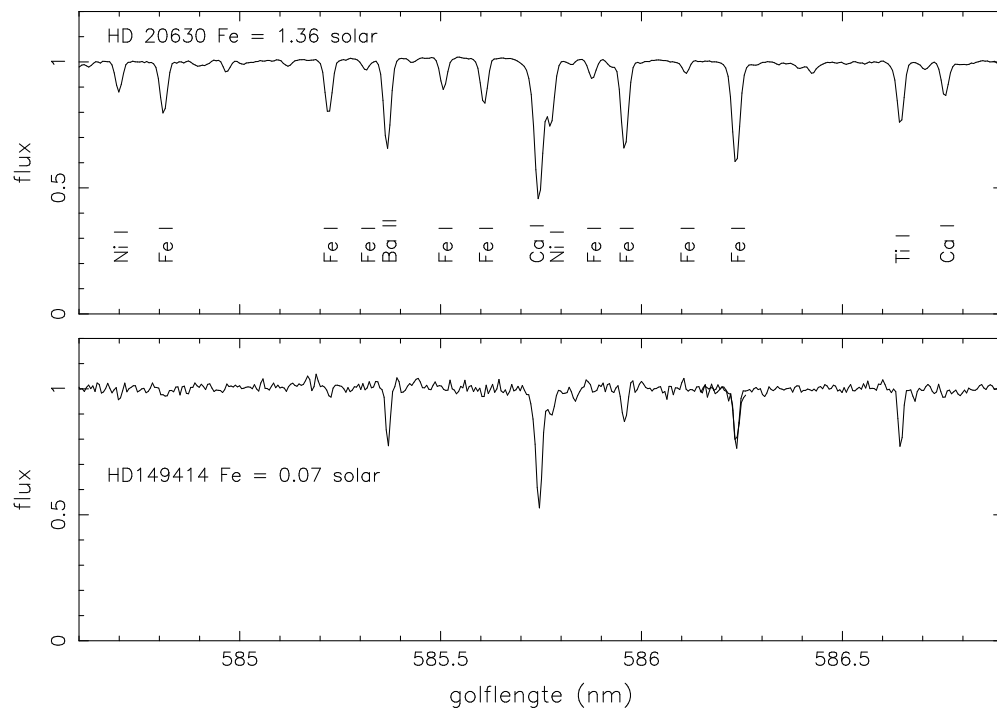
Figuur 1.7: Spectraallijnen voor sterren van verschillende helderheidsklassen. Van dun naar dik: III-IV (rood), III (blauw) ((sub)reus) en V (paars; hoofdreeks).

we de **abundantie**. De abundantie van waterstof wordt aangegeven met X , die van helium met Y en de **metalliciteit** van een ster met Z . Er geldt dus $Z = 1 - X - Y$, en voor de Zon: $X_{\odot} \approx 0.70$, $Y_{\odot} \approx 0.28$, $Z_{\odot} \approx 0.0134$. De metalliciteit van de meeste sterren ligt in het bereik $10^{-4} \lesssim Z \lesssim 0.03$.

Kort na de Oerknal bestond het gas in het heelal vrijwel alleen uit waterstof en helium. De meeste zwaardere elementen zijn gevormd in sterkernen en opnieuw de ruimte ingeblazen via planetaire nevels en supernova-explosies (zie Hoofdstuk 3). Daar is het verrijkte gas gemengd met het oorspronkelijke gas, waardoor het metaalgehalte in de loop van de tijd steeds verder toenam. Hierdoor zijn *oude* sterren vaak *metaalarm*. Uit waarnemingen en modellen weten we ook dat metaalarme sterren blauwer, en dus heter, zijn dan metaalrijke sterren die verder dezelfde eigenschappen hebben. Figuur 1.8 toont het verschil tussen de spectra van een metaalrijke en een metaalarme ster.

Tabel 1.6: Eigenschappen van sterren van verschillende spectraaltypen en helderheidsklassen. De kolommen tonen het spectraaltipe, de massa, straal, bolometrische lichtkracht, effectieve temperatuur, visuele lichtkracht en drie kleuren.

SpTp	M ($M_{\odot}$)	R ($R_{\odot}$)	$\log L$ ($L_{\odot}$)	T_{eff} (K)	$\log L_V$ ($L_{V,\odot}$)	$\log f_B/f_U$	$\log f_V/f_B$	$\log f_I/f_V$
Hoofdreeks:								
O8V	22.0	7.90	5.10	38 900	3.71	−0.68	−0.38	−0.66
B2V	9.0	4.30	3.63	22 400	2.77	−0.57	−0.35	−0.63
B5V	5.0	2.90	2.66	15 600	2.16	−0.46	−0.33	−0.60
A0V	2.5	1.80	1.51	10 200	1.42	−0.25	−0.27	−0.56
A5V	1.9	1.50	1.06	8 590	1.08	−0.19	−0.22	−0.50
F0V	1.5	1.30	0.67	7 420	0.71	−0.22	−0.15	−0.41
F5V	1.3	1.20	0.43	6 800	0.46	−0.23	−0.10	−0.35
G0V	1.2	1.10	0.30	6 470	0.33	−0.22	−0.07	−0.32
G5V	1.0	1.00	0.00	5 780	0.00	−0.15	0.01	−0.25
K0V	0.9	0.85	−0.33	5 180	−0.39	−0.01	0.08	−0.18
M1V	0.6	0.55	−1.22	3 860	−1.64	0.28	0.29	0.12
M4V	0.4	0.40	−1.87	3 110	−2.80	0.29	0.35	0.56
Subreuzen:								
G0 III	2.5	6.0	1.50	5 600	1.49	−0.09	0.03	−0.24
K0 III	4.0	16.0	1.97	4 500	1.79	0.22	0.21	−0.07
M0 III	6.3	65.0	2.60	3 200	0.99		−0.02	0.99
Superreuzen:								
B7 I	15.0	30.0	4.72	16 000	4.21	−0.52	−0.33	−0.59
A3 I	15.0	75.0	4.70	10 000	4.62	−0.31	−0.29	−0.54
F5 I	15.0	180.0	4.66	6 300	4.71	−0.07	−0.08	−0.34
K1 I	15.0	375.0	4.51	4 000	4.14	0.66	0.38	0.06



Figuur 1.8: Een vergelijking van de spectra van een ster met 136% van de metalliciteit van die van de Zon (boven) en een ster met 7% van die van de Zon (onder).

1.6 Groepen van sterren

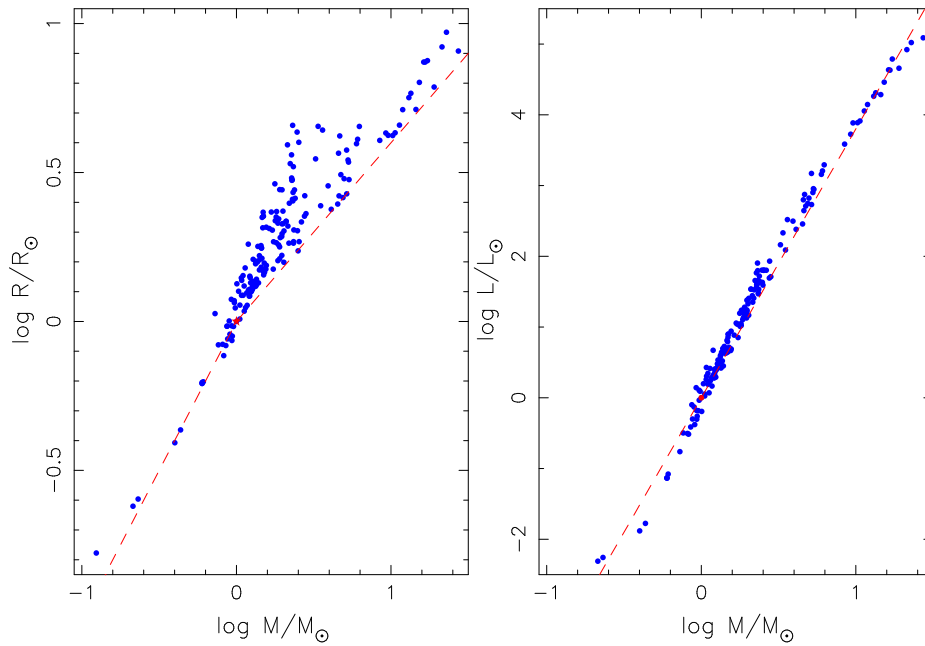
1.6.1 Straal en lichtkracht uit dubbelsterren

Spectra geven ons een machtig middel om sterparameters te bepalen. Uit het waargenomen spectraaltype weten we iets over de temperatuur, en uit de helderheidsklasse kunnen we de helderheid van de ster schatten, en daarmee dus ook zijn afstand. Dit zegt echter alleen iets over individuele sterren, en werkt alleen voor heldere sterren, waarvoor we hoge-resolutie spectra kunnen maken. Voor zwakkere bronnen werkt fotometrie, maar daarmee kunnen we geen helderheid en afstand bepalen voor individuele sterren.

Een mogelijkheid om meer over sterren te weten te komen is wanneer deze zich in **dubbelsterren** bevinden (zie ook Hoofdstuk 4). De omstandigheden zijn ideaal wanneer we:

1. van beide sterren het **spectrum** kunnen meten (dubbellijnig spectrum), en daarmee de **Doppler-verschuiving**: zogenaamde dubbellijnige **spectroscopische dubbelsterren**;
2. de dubbelster **eclipserend** is, d.w.z. dat de sterren vanaf de Aarde gezien voor elkaar langs bewegen.

Voor dubbelsterren die zowel spectroscopisch als eclipserend zijn kunnen we met behulp van gedetailleerde modellen de massaverhouding en stralen van de afzonderlijke sterren bepalen. De straal van de ster gecombineerd met de effectieve temperatuur levert vervolgens de lichtkracht (zie Vgl. 1.6 op pagina 10); modellen geven de afzonderlijke massa's en leeftijden. Hieruit kunnen we empirische **massa-straal-** en **massa-lichtkrachtrelaties** afleiden. Voor hoofdreekssterren zijn deze weergegeven in Figuur 1.9.



Figuur 1.9: Empirische M - R (links) en M - L -relaties (rechts) voor 183 hoofdreekssterren uit eclipserende, dubbellijnig spectroscopische dubbelsterren met nauwkeurige data, en de Zon.

Uit die figuur zien we dat zwaardere hoofdreekssterren *iets groter* zijn dan lichtere, en dat zwaardere hoofdreekssterren *veel helderder* zijn dan lichtere (zoals we al zagen in Tabel 1.5)! In de straal zien we wat spreiding, doordat de straal van een ster langzaam toeneemt op hoofdreeks. Een fit levert

$$\frac{R}{R_{\odot}} \sim \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^n \quad \begin{cases} n \approx 1 & \text{voor } M \lesssim M_{\odot} \\ n \approx 0.6 & \text{voor } M \gtrsim M_{\odot} \end{cases} \quad (1.18)$$

en

$$\frac{L}{L_{\odot}} \sim \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3.8}. \quad (1.19)$$

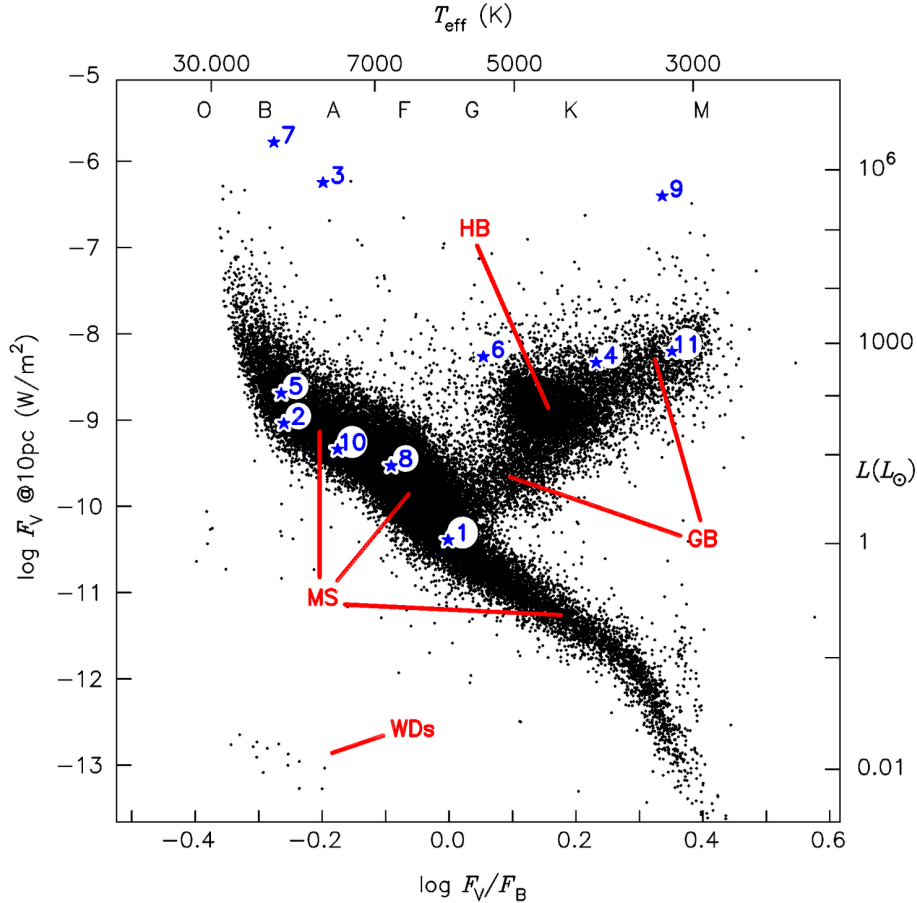
Hieruit kunnen we ook de ruwe levensduur van een hoofdreeksster schatten als functie van de massa:

$$\tau_{n,MS} \sim \tau_{n,\odot} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)^{-1} \sim 10^{10} \text{ yr} \cdot \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-2.8}, \quad (1.20)$$

waar we de simpele benadering $\tau_{n,\odot} \sim 10^{10}$ jaar hebben gebruikt. Zware sterren verblijven dus *veel korter* op de hoofdreeks dan lichte sterren, zoals we al zagen. Voor een O-ster van $15M_{\odot}$ vinden we dan $\tau_n \approx 5 \text{ Myr}$, voor een M-dwerg van $0.5M_{\odot}$ $\tau_n \approx 70 \text{ Gyr}$. Dit laatste is meer dan de leeftijd van het heelal! Het verklaart waardoor in de oude galactische bolhopen alleen nog lage-massasterren voorkomen (zie H. 1.6.3).

1.6.2 Het Hertzsprung-Russelldiagram voor nabije sterren

Voor *nabije* sterren kunnen we de afstand nauwkeurig meten via de **parallax**, en op die manier de lichtkracht L afleiden uit de gemeten flux f . We kunnen dan een tweedimensionaal diagram maken waarin we de kleur (of temperatuur) uitzetten tegen de lichtkracht (of flux). Zo'n diagram heet het **Hertzsprung-Russelldiagram (HRD)**. Een HRD voor sterren waarvan de afstand door Hipparcos is bepaald met een nauwkeurigheid van 10% of beter is te zien in Figuur 1.10. Merk op dat de temperatuur op de horizontale as van een HRD altijd *aflopend* is!



Figuur 1.10: Een Hertzsprung-Russelldiagram voor nabije sterren waarvan de afstand door Hipparcos is bepaald met een nauwkeurigheid van 10% of beter in het kleur–visuele-lichtkrachtvlak. Het betreft hier dus een kleur–fluxdiagram. We onderscheiden de hoofdreeks (MS), die van linksboven (helder en heet) naar rechtsonder (zwak en koel) loopt; de horizontale tak (HB) en de reuzentak (van MS naar HB en verder — helder maar koel), aangegeven in rood. Linksonder bevinden zich witte dwergen (WDs): zwak, maar heet. De blauwe genummerde sterretjes zijn de 11 helderste sterren aan onze hemel: 1: de Zon, 2: Sirius, 3: Canopus, 4: Arcturus, 5: Wega, 6: Capella, 7: Rigel, 8: Procyon, 9: Betelgeuze, 10: Altair, 11: Aldebaran. Op de linker en onderste as zijn de waargenomen fluxen en kleuren weergegeven, op de rechter en bovenste as de totale lichtkracht en effectieve temperatuur, die alleen strikt gelden voor de hoofdreeks.

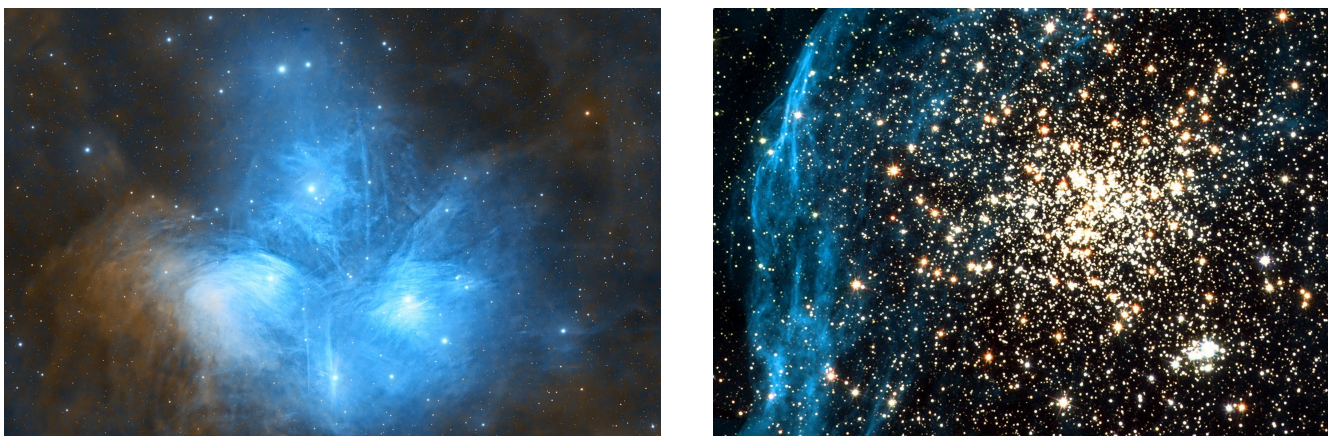
In die figuur kunnen we zien dat de sterren niet willekeurig verdeeld zijn in het $T_{\text{eff}}-L$ -vlak. We onderscheiden groepen of banden die we de **hoofdreeks** (Engels: main sequence; **MS**), de **reuzentak** (Engels: giant branch; **GB**) en de **horizontale tak** (Engels: *horizontal branch*; **HB**) noemen. Linksonder bevinden zich de **witte dwergen**; zeer compacte, hete, kleine en daardoor zwakke overblijfselen van sterren (zie H 3.5.1). Veruit de meeste sterren lijken zich op de hoofdreeks te bevinden (vandaar de naam) en hebben helderheidsklasse V; ook de **Zon** is een hoofdreeksster. We zullen in Hoofdstuk 3 zien dat het hier gaat om verschillende stadia van *sterevolutie*: sterren beginnen op de hoofdreeks en evolueren later naar de reuzentak. De oorzaak van het feit dat we de meeste sterren op de hoofdreeks waarnemen is dat zij daar de meeste tijd doorbrengen. We zien dan ook dat zware sterren heter en helderder zijn dan lichte sterren. Van linksboven naar rechtsonder bevat de hoofdreeks dus sterren van *afnemende* massa.

Er zijn verschillende versies van het Hertzsprung-Russelldiagram in omloop. *Theoretici* berekenen stermodellen die meestal L en T_{eff} opleveren, die dan tegen elkaar worden uitgezet: een *theoretisch* HRD. *Waarnemers* daarentegen nemen kleuren en fluxen waar, die ze tegen elkaar plotten: een *observationeel* HRD, ook wel kleur-magnitudediagram (Engels: *colour-magnitude diagram*; CMD) genoemd. We introduceren hier de term **kleur-fluxdiagram** (*colour-flux diagram*; **CFD**), aangezien we werken met fluxen. Figuur 1.10 is hiervan een voorbeeld. Andere combinaties van T_{eff} of kleur op de horizontale as en L of f op de verticale as zijn mogelijk.

1.6.3 Afstanden en leeftijden van clusters

In de vorige sectie zagen we dat we *nabije* (zodat we de parallax kunnen meten) en heldere (zodat we een spectrum kunnen maken) sterren in een Hertzsprung-Russelldiagram kunnen plaatsen en meer te weten kunnen komen over hun evolutionaire status. Dezelfde procedure lukt niet voor willekeurige sterren waarvan we de (afstand en) intrinsieke helderheid niet kennen, *tenzij* we fysieke **groepen** van sterren bekijken. Zo'n groep heet een **cluster** of **sterhoop**. We maken onderscheid tussen **open sterhopen** en **bolvormige sterhopen** (of bolhopen; zie Figuur 1.11). De *open sterhopen* in ons Melkwegstelsel bevatten vaak jonge, hete sterren en bevinden zich in het vlak van de Melkweg. De *bolhopen* van onze Melkweg bestaan juist uit oude, zwakke sterren en bevinden zich in de halo van de Melkweg (zie Fig. 6.3 op pagina 87). In dat geval kunnen we twee aannamen maken:

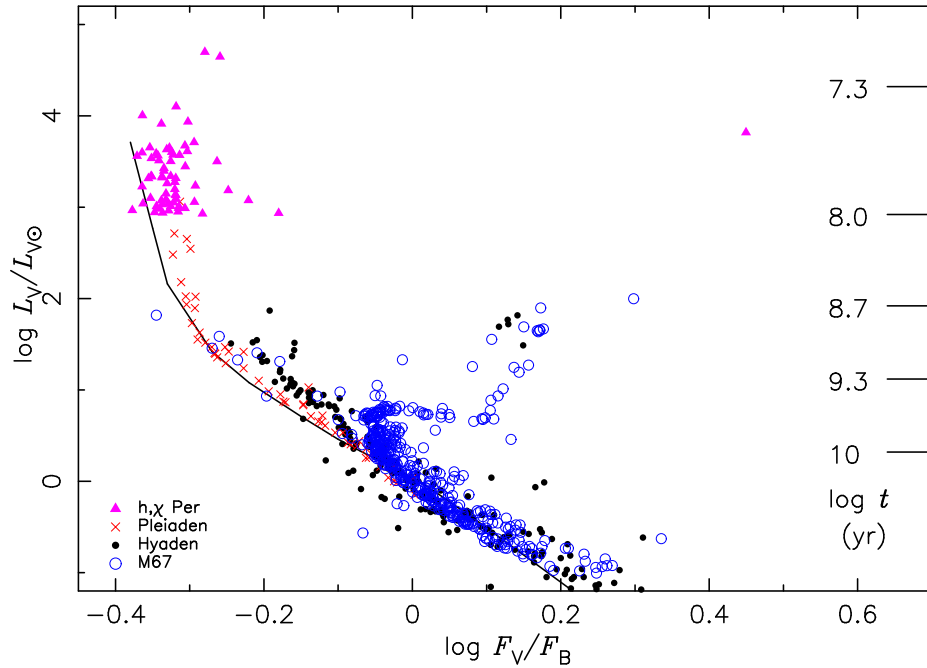
1. deze sterren staan allemaal op **dezelfde afstand**;
2. deze sterren zijn allemaal **even oud**.



Figuur 1.11: *Links:* de bekende open sterhoop de Pleiaden wordt gedomineerd door zware, heldere, hete en dus blauwe sterren en kan met het blote oog worden gezien in het sterrenbeeld Stier. *Rechts:* de bolvormige sterhopen van ons Melkwegstelsel bevatten vooral oude, koele en dus rode, lage-massasterren; de zware sterren zijn al lang uitgedoofd.

Wanneer we een HRD (of CFD) maken van van een stercluster kennen we de lichtkracht L niet, maar wel de flux f . In het HRD van zo'n cluster kunnen we de hoofdreeks herkennen, en die *zo* verschuiven dat deze samenvalt met de hoofdreeks in Fig. 1.10. Op die manier kunnen we van een stercluster de **afstand**

bepalen zonder de parallax of het spectrum te meten, iets wat voor individuele sterren niet lukt! Een voorbeeld hiervan is te zien in Figuur 1.12.



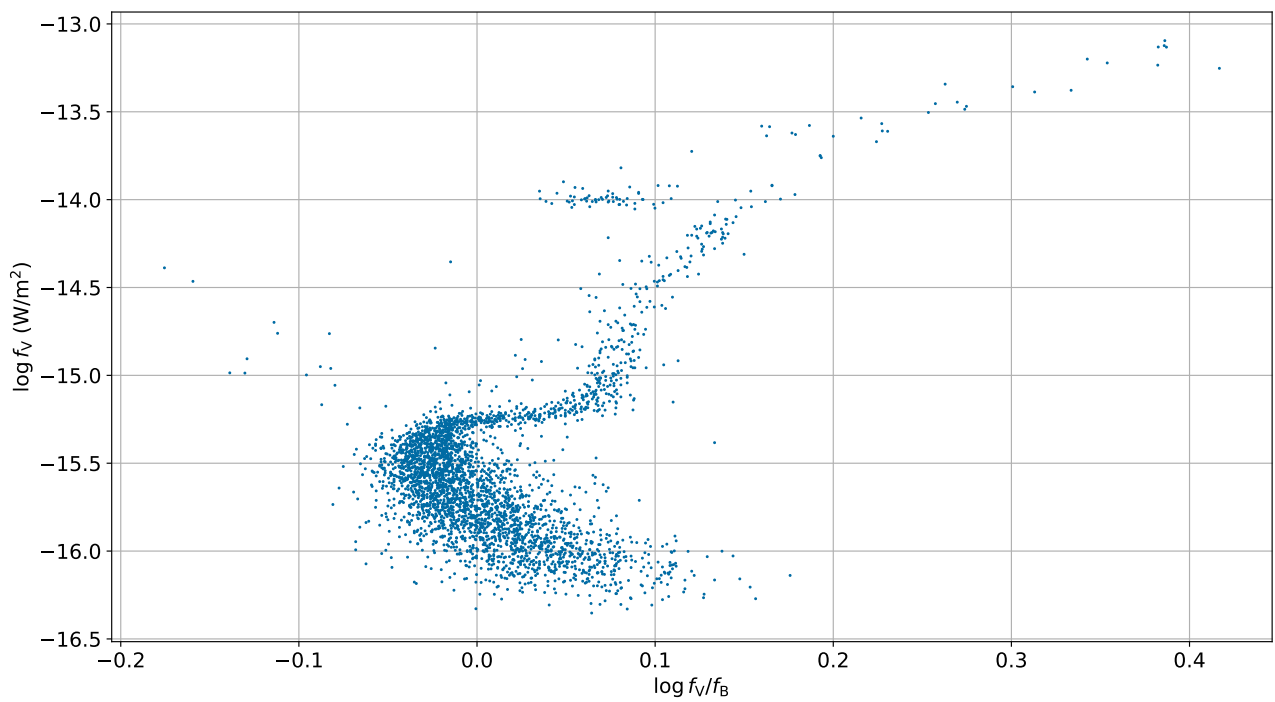
Figuur 1.12: Hertzsprung-Russelldiagram voor drie open sterhopen: h en χ Persei (▲), de Pleiaden (×), de Hyaden (●) en M67 (○) vergeleken met een theoretische hoofdreeks (doorgetrokken lijn). Door de sterren van iedere cluster verticaal te verschuiven kunnen hun lichtkracht en afstand worden bepaald. Uit de hoogte (lichtkracht) van het afbuigpunt kan de leeftijd worden opgemaakt, die rechts is weergegeven. Tussen de hoofdreeks en de reuzen/horizontale tak bevinden zich relatief weinig sterren: dit wordt het **Hertzsprung gap (HG)** genoemd (vooral goed zichtbaar voor de Hyaden). De sterren die zich $\log L_V \sim 0.3$ boven de hoofdreeks bevinden zijn dubbelsterren.

We zullen in Hoofdstuk 3 zien dat zware sterren sneller evolueren dan lichte sterren, en dus korter op de hoofdreeks verblijven (zie ook Tabel 1.5 op pagina 17). Als we het HRD van een cluster zouden kunnen bekijken als een functie van tijd, zouden we dus zien dat de hoofdreeks vanuit de linker bovenhoek steeds korter wordt. We noemen het uiterste punt linksboven aan de hoofdreeks het **afbuigpunt**. Dat punt wordt ingenomen door de zwaarste sterren die zich nog op de hoofdreeks bevinden. De levensduur van deze sterren, bekend uit modellen, is dus een maat voor de leeftijd van de cluster. Voor sterclusters kunnen we dus tot op grote afstand zowel de afstand als de **leeftijd** bepalen! Ook dit is te zien in de vier clusters in Figuur 1.11. Tabel 1.7 toont de resultaten hiervan. We zullen in Hoofdstuk 3.3.3 zien dat we leeftijden nauwkeuriger kunnen bepalen met behulp van **isochronen** gegenereerd met sterevolutiemodellen.

Tabel 1.7: Het afbuigpunt en de bijbehorende massa en leeftijd voor de vier open clusters uit Figuur 1.12.

Cluster	Afbuigpunt $\log L_V/L_{V,\odot}$	Massa (Tabel 1.6)	Leeftijd (Vgl. 1.20)
h & χ Per	4	$> 22 M_\odot$	~ 2 Myr
Pleiaden	2.7	$9 M_\odot$	~ 21 Myr
Hyaden	1.8	$4 M_\odot$	~ 200 Myr
M67	0.7	$1.5 M_\odot$	~ 3.2 Gyr

Figuur 1.13 toont het Hertzsprung-Russelldiagram van de bolvormige sterhoop 47 Tucanae. De korte hoofdreeks laat zien dat het om oude sterren gaat ($\tau \sim 13$ Gyr), net als de metaalarme spectra (zie H 1.5.2).



Figuur 1.13: *Kleur-fluxdiagram van de bolvormige sterhoop 47 Tuc in ons Melkwegstelsel.*

Hoofdstuk 2

Gassen en straling

Een ster is een grote gasbol, bijeengehouden door de zwaartekracht. In de kernen van sterren vindt vaak kernfusie plaats, waar straling uit voortkomt die door de hele ster te vinden is. Dit hoofdstuk geeft eenvoudige beschrijvingen van de fysica die nodig zijn om de interactie tussen gas, zwaartekracht, fusie en straling te begrijpen. Hiermee kunnen we ons een beeld vormen van hoe een ster is opgebouwd, en hoe grootheden als druk, dichtheid en temperatuur variëren door een ster.

2.1 Overzicht vergelijkingen

Om de **globale** structuur van een ster te beschrijven zijn vier differentiaalvergelijkingen nodig: die voor de gradiënt van de **massa** M , **druk** P , **lichtkracht** L en **temperatuur** T . Voor de temperatuurgradiënt bestaan twee alternatieven, waarmee het totaal op vijf vergelijkingen komt. Deze differentiaalvergelijkingen geven aan hoe deze grootheden door de ster heen variëren, van centrum tot oppervlak, en hebben vier **randvoorwaarden** nodig. Deze kunnen we bepalen door waarden te kiezen voor M, L, P en T in het *centrum* van de ster. Voor de massa en lichtkracht zijn deze waarden nul, voor de druk en temperatuur moeten we een goede schatting maken.

Deze differentiaalvergelijkingen introduceren de drie **locale** grootheden **dichtheid** ρ , **opaciteit** κ en **energieproductie** ϵ . Hiervoor zijn drie *locale* vergelijkingen nodig, die de toestand van het gas op een bepaalde plek in de ster beschrijven. Voor de relatie tussen de druk, dichtheid en temperatuur hebben we vier verschillende vergelijkingen: voor een ideaal gas, voor straling, en voor gassen die niet-relativistisch of relativistisch *gedegenereerd* zijn. We noemen deze vergelijkingen **toestandsvergelijkingen**. In de locale vergelijkingen zit overal de **chemische samenstelling** van het gas verstopt.

Hieronder is een overzicht van de vergelijkingen weergegeven. We gebruiken de straal r , de afstand tot het centrum van de ster, als *coördinaat*.¹ We leiden niet alle vergelijkingen af vanuit de basisfysica; in de gevallen waar we dat niet doen geef ik alleen de afhankelijkheden, met een subscript r om aan te geven dat deze weer afhangen van de plaats in de ster. In de volgende secties zullen we de vergelijkingen een voor een in wat meer detail behandelen.

¹Aangezien we voor de positie in de ster *alleen* de afstand tot het centrum beschouwen, behandelen we onze “sterren” *de facto* als ééndimensionaal.

Differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{aligned}\frac{dM(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho(r) \\ \frac{dL(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r) \\ \frac{dP(r)}{dr} &= -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) \\ \left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{\text{rad}} &= -\frac{L(r)}{4\pi r^2} \frac{3\kappa(r)\rho(r)}{4\sigma} \frac{1}{4T(r)^3} \\ \left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{\text{ad}} &= \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T(r)}{P(r)} \frac{dP(r)}{dr}\end{aligned}$$

Locale vergelijkingen:

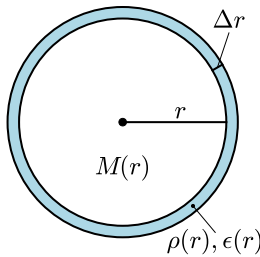
$$\begin{aligned}P_{\text{gas}}(\rho, T) &= \frac{\rho k T}{\mu m_{\text{H}}} \\ P_{\text{rad}}(T) &= \frac{4\sigma T^4}{3c} \\ P_{\text{d}}(\rho) &= \frac{K_{\text{d}}}{m_{\text{e}}} \left(\frac{\rho}{\mu_{\text{e}} m_{\text{H}}} \right)^{5/3} \\ P_{\text{d,r}}(\rho) &= K_{\text{d,r}} \left(\frac{\rho}{\mu_{\text{e}} m_{\text{H}}} \right)^{4/3} \\ \kappa &= f(\rho_r, T_r) \\ \epsilon &= f(\rho_r, T_r)\end{aligned}$$

2.2 De differentiaalvergelijkingen

2.2.1 Massabehoud

Wanneer we van het centrum naar buiten toe door een ster lopen, heeft een bolschilletje op afstand r van het centrum met dikte Δr en massadichtheid $\rho(r)$ een massa van $\Delta M(r) = 4\pi r^2 \rho(r) \Delta r$ (zie Figuur 2.1). Wanneer we de limiet $\Delta r \downarrow 0$ nemen kunnen we de Δ 's schrijven als d 's en vinden we:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r). \quad (2.1)$$



Figuur 2.1: Gas in een bolschilletje met straal r , dikte Δr , massadichtheid $\rho(r)$ en energieproductie $\epsilon(r)$.

2.2.2 Energiebehoud

Wanneer we van het centrum van onze ster naar het oppervlak lopen, neemt de lichtkracht van de omsloten bol $L(r)$ toe. Het verschil in lichtkracht tussen de onder- en bovenkant van een bolschil met dikte Δr moet worden opgewekt in die schil: $\Delta L = L(r + \Delta r) - L(r) = 4\pi r^2 \Delta r \cdot \epsilon(r) \cdot \rho(r)$ (zie weer Figuur 2.1). Hierin is $\epsilon(r)$ de energieproductie (in W/kg) die plaatsvindt in de schil op radiële coördinaat r . Wanneer we weer de limiet $\Delta r \downarrow 0$ nemen vinden we:

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r). \quad (2.2)$$

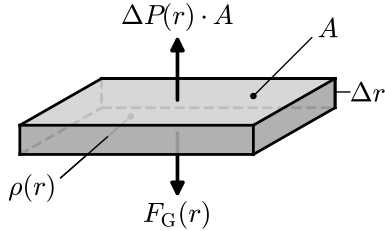
2.2.3 Hydrostatisch evenwicht

Beschouw een dun blokje gevuld met gas op afstand r van het centrum van een ster, met dikte Δr , oppervlak A en dichtheid $\rho(r)$ (zie Figuur 2.2). Het blokje heeft massa $\Delta M(r) = A \Delta r \rho(r)$. De zwaartekracht trekt het blokje naar het centrum van de ster met $F_{\text{G}} = -\frac{GM(r)\Delta M(r)}{r^2} = -\frac{GM(r)A\rho(r)\Delta r}{r^2}$. Om te voorkomen dat het blokje zakt is een tegenkracht nodig, die kan worden gegeven voor het *verschil in druk*

tussen de onderkant en de bovenkant van het blokje: $F_P = (P(r) - P(r + \Delta r)) A \equiv \Delta P(r) \cdot A$. Als we de twee krachten gelijkstellen en weer de limiet $\Delta r \downarrow 0$ nemen, dan kunnen we schrijven

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r). \quad (2.3)$$

Aangezien de zwaartekracht richting centrum werkt (vandaar het minteken), moet $\frac{dP}{dr} < 0$ gelden.



Figuur 2.2: Een dun blokje gas op afstand r van het centrum van een ster. De zwaartekracht $F_G(r)$ van de onderliggende massa trekt het blokje naar beneden. Het drukverschil tussen het boven- en het onderoppervlak, beide met grootte A , kan een tegenkracht geven, mits $\Delta P(r) \equiv P(r + \Delta r) - P(r) < 0$.

2.2.4 Energietransport door straling

Er zijn twee mechanismen van belang voor het **energietransport** in sterren. Een derde mechanisme, *geleiding*, kan in sterren worden verwaarloosd.

Het eerste mechanisme is **stralingstransport**. Hierbij wordt energie via elektromagnetische straling door het gas van een ster verspreid. Dit is een *diffusieproces*, vergelijkbaar met diffusie van deeltjes in een gas. Voor een Planckse straler zegt de wet van Stefan-Boltzmann in Vgl. 1.16 op pagina 15 dat er bij een hogere temperatuur een grotere flux $F = B(T)$ zal zijn. Die **stralingsdichtheid** wordt gegeven door²

$$u = \frac{4}{c} B(T) = \frac{4}{c} \sigma T_{\text{eff}}^4. \quad (2.4)$$

Door de diffusie van de bijbehorende fotonen zal energie stromen van een gebied met hogere stralingsdichtheid naar een gebied met lagere u . De *flux* die hiervoor zorgt is³

$$F = -\frac{c\ell}{3} \nabla u = -\frac{c}{3\kappa\rho} \nabla u. \quad (2.5)$$

Hierin is ℓ de (gemiddelde) **vrije weglengte** voor de fotonen in het gas: hoe korter de vrije weglengte, des te lastiger is het voor de fotonen om te bewegen. Die vrije weglengte wordt gegeven door $\ell = \frac{1}{\kappa\rho}$, waarbij κ de **opaciteit**, of *ondoorzichtigheid*, van het gas is (zie H. 2.4) en ρ de dichtheid. Een ondoorzichtiger gas leidt dus tot een lagere flux. De grootheid ∇u in Vgl. 2.5 is de gradiënt van Vgl. 2.4: hoe steiler het verschil in de stralingsdichtheid, des te sneller de energie zal stromen.

Door Vgl. 2.4 in te vullen in Vgl. 2.5, de gradiënt uit te rekenen en de flux weer in te vullen in Vgl. 1.4 op pagina 10, vinden we

$$\left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{\text{rad}} = -\frac{L(r)}{4\pi r^2} \frac{3\kappa(r)\rho(r)}{4\sigma} \frac{1}{4T(r)^3}. \quad (2.6)$$

Dit is de **temperatuursgradiënt** in de ster als alleen straling een rol zou spelen (vandaar het subscript *rad* voor *radiatie*). Het minteken geeft aan dat de temperatuur afneemt van binnen naar buiten. Deze gradiënt is *steiler* bij hogere lichtkracht L (binnenin de ster), grotere ondoorzichtigheid van het gas ($\kappa\rho$) en bij lagere temperatuur.

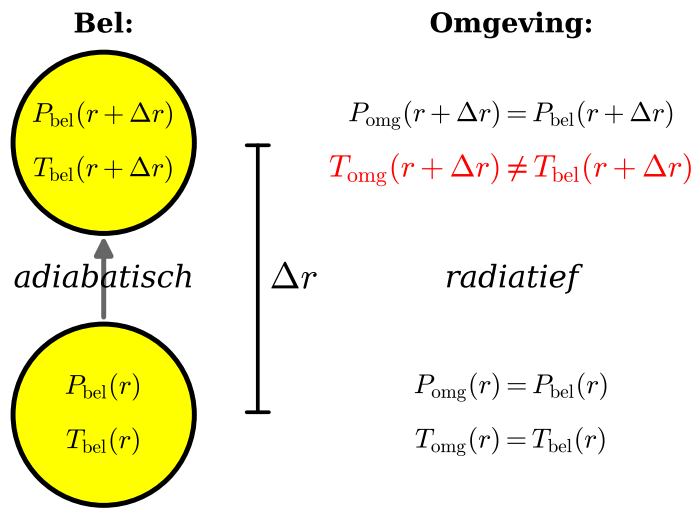
²De c komt van de conversie van flux naar dichtheid. Stel je een cilindervormige kolom fotonen voor met eindoppervlak A en lengte ℓ . Voor een tijd Δt is de lengte van de kolom $\ell = c \cdot \Delta t$, het volume $V = c \cdot \Delta t \cdot A$ en de totale energie per definitie $E = u \cdot V$. De fotonen leveren door A een flux B op, en gedurende een tijd Δt een energie $E = B \cdot \Delta t$. Gelijkstellen en invullen levert $u = B/c$. De factor 4 door integratie over alle richtingen: flux per steradiaal $\times 4\pi$ steradianen geeft $B/\pi \cdot 4\pi = 4B$.

³De factor c komt van de conversie van dichtheid naar flux. De factor $1/3$ is het gemiddelde over de halve bol waarvandaan de fotonen (netto) door een oppervlak kunnen stromen: $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{3}$. Eén factor $\cos\theta$ komt doordat alleen de loodrechte component van c telt, de andere doordat het geprojecteerde oppervlak kleiner is voor een foton dat onder een hoek aankomt. De grootheid ℓ schaalt het geheel.

2.2.5 Energietransport door convectie

Een tweede mechanisme voor energietransport door een ster is **convectie**. Hierbij vindt het transport plaats door **stijgende hete gasbellen** (en dalende koele bellen), vergelijkbaar met lucht boven een verwarming.

Stel dat een gasbel ergens in een ster, op straal r , toevallig iets (Δr) omhoog beweegt. Het gas in de bel is in evenwicht met zijn omgeving en heeft dus dezelfde druk ($P_{\text{bel}} = P_{\text{omg}}$) en temperatuur ($T_{\text{bel}} = T_{\text{omg}}$; zie Figuur 2.3). Aangekomen op een plek iets verder naar de buitenkant van de ster, $r + \Delta r$, heeft de druk van de bel zich aangepast aan die van de nieuwe omgeving. Als er echter geen energie-uitwisseling plaatsvindt met de omgeving, d.w.z. het proces is **adiabatisch**, kan de temperatuur van de bel T_{bel} anders zijn dan die van de omgeving (T_{omg}). Als de nieuwe temperatuur van de bel lager is dan die van de omgeving, is de dichtheid hoger (zie Vgl. 2.12) en zal de bel weer terugzakken richting beginpositie. Is de temperatuur hoger ($T_{\text{bel}} > T_{\text{omg}}$), dan is de dichtheid lager ($\rho_{\text{bel}} < \rho_{\text{omg}}$) en zal de bel *verder stijgen*. Er vindt dan **convectie** plaats in de ster.



Figuur 2.3: Een gasbel stijgt van zijn oorspronkelijke positie in de ster op straal r (onder) naar een nieuwe positie $r + \Delta r$ (boven). Als dit proces adiabatisch is, zal de gasdruk in de bel gelijk blijven aan die van de omgeving ($P_{\text{bel}} = P_{\text{omg}}$), maar kan de nieuwe temperatuur anders zijn ($T_{\text{bel}} \neq T_{\text{omg}}$).

Convectie door stijgende hete gasbellen is een efficiënte manier van energietransport. De bijbehorende temperatuursgradiënt wordt zonder verdere afleiding gegeven door

$$\left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{\text{ad}} = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T(r)}{P(r)} \frac{dP(r)}{dr}, \quad (2.7)$$

waarbij het subscript *ad* staat voor *adiabatisch*. Hierin wordt γ de *adiabatische index* genoemd, met $\gamma = 5/3$ voor een gas dat uit één-atomige moleculen bestaat, en altijd geldt dat $\gamma > 1$.⁴ Deze gradiënt is steiler bij hogere temperatuur of een steilere drukgradiënt, en minder steil bij hogere druk of lagere γ . Ook deze gradiënt is negatief, doordat $\frac{dP}{dr} < 0$.

2.2.6 Convectie of straling?

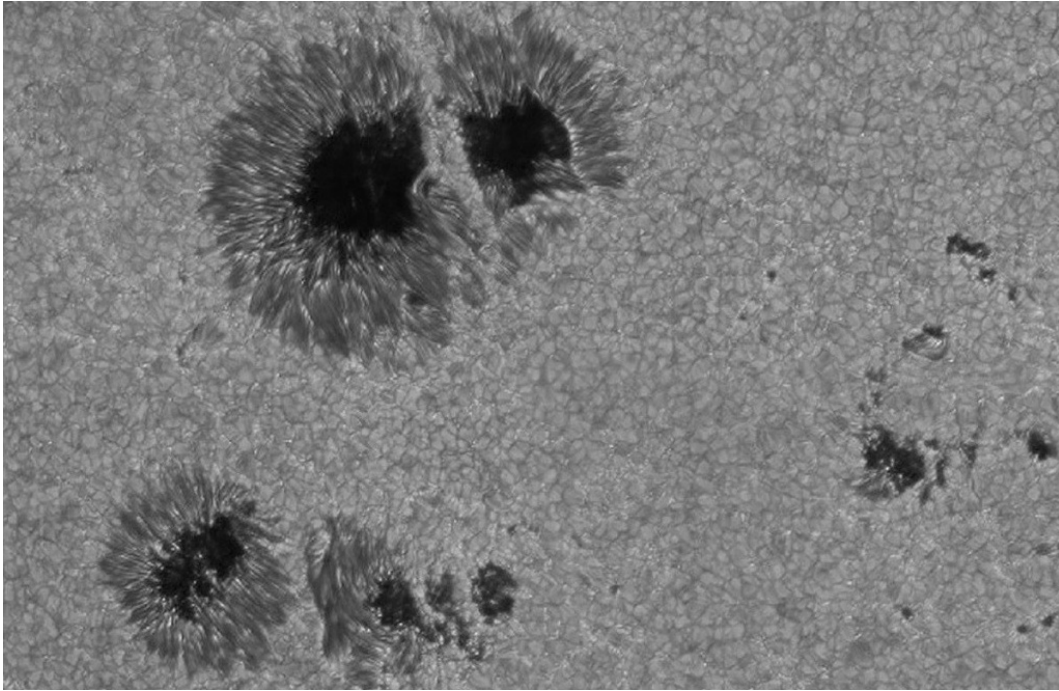
Om te bepalen of een gebied in een ster convectief is of radiatief, wordt het **Schwarzschildcriterium** voor convectie gebruikt. Dat stelt dat convectie dominant is wanneer geldt

$$\left| \frac{dT(r)}{dr} \right|_{\text{ad}} < \left| \frac{dT(r)}{dr} \right|_{\text{rad}}. \quad (2.8)$$

⁴ γ komt steeds dichterbij 1 naarmate er meer vrijheidsgraden zijn. Voor een gas dat op het randje van ionisatie zweeft is $\gamma \sim 1$.

Dit volgt uit $\rho_{\text{bel}} < \rho_{\text{omg}}$ en komt erop neer dat de **minst steile gradiënt wint**. Uit modellen blijkt dat de twee temperatuursgradiënten in Vgl. 2.6 en 2.7 vrijwel nooit bij elkaar in de buurt liggen; er is altijd een duidelijk verschil. Wanneer er convectie plaatsvindt, is er natuurlijk ook nog steeds stralingstransport. Echter, doordat energietransport via convectie zoveel efficiënter is, kan de bijdrage van stralingstransport worden verwaarloosd.

Gebieden met convectie komen voor wanneer de opaciteit hoog is, zodat stralingstransport inefficiënt is, zoals in de buitenlagen van koelere sterren als de Zon (zie Figuur 2.4) en in rode reuzen (zie H. 3.1.2). Een andere plek waar convectie voorkomt is in de kernen van zware sterren. Hier is de energieproductie zeer sterk geconcentreerd in het centrum, waardoor de eerste term in Vgl. 2.6 zeer groot is (grote L bij kleine r ; zie H. 3.2.1).



Figuur 2.4: De granulen (heldere cellen) op de Zon zijn hete convectiebellens die het oppervlak bereiken. In de donkere grensgebieden zakt afgekoeld gas weer af.

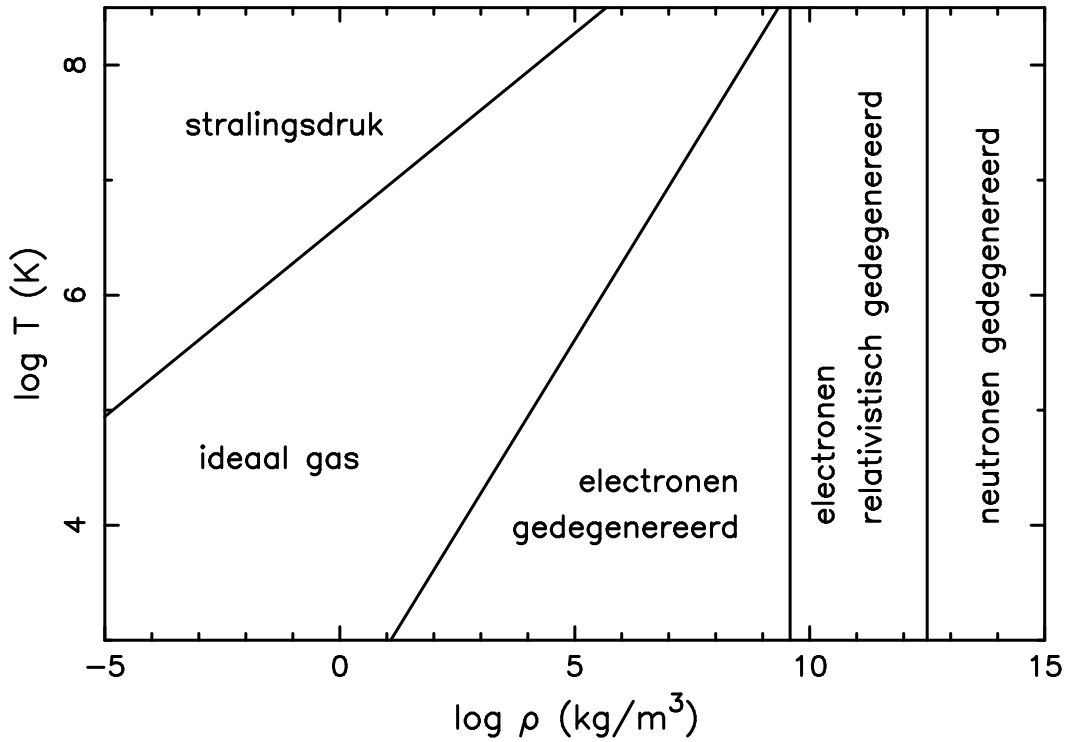
2.3 Toestandsvergelijkingen

Een **toestandsvergelijking** beschrijft de relatie tussen de druk, de dichtheid en de temperatuur van een gas. We onderscheiden hier vier verschillende gevallen: stralingsdruk, de gasdruk van een ideaal gas, en de druk van een *gedegenereerd* (ook wel *ontaard*) elektronengas, waar de deeltjes al dan niet relativistische snelheden hebben. De vier gevallen zijn weergegeven in Figuur 2.5.

2.3.1 Ideaal gas

Een gas bestaat uit moleculen, die een *thermische beweging* hebben: ze bewegen heen en weer en botsen met elkaar. Die beweging is groter wanneer de temperatuur T hoger is. Door de beweging van deze deeltjes oefent een gas een *druk* P uit op zijn omgeving. Deze **gasdruk** is dus groter bij een hogere temperatuur en bij een hogere dichtheid ρ . We kunnen een simpele afschatting maken van deze druk wanneer we een paar aannamen maken:

1. de deeltjes zijn **klein** t.o.v. onderlinge afstanden (puntdeeltjes);
2. de deeltjes hebben **geen onderlinge aantrekkingskracht**;
3. de deeltjes **botsen elastisch**;
4. de deeltjes hebben **geen interne vrijheidsgraden** (b.v. éénatomig gas), en



Figuur 2.5: De gebieden waar straling, de ideale-gaswet, en (relativistisch) gedegeneerde elektronen de druk domineren, in het dichtheid-temperatuurvlak. Voor zeer hoge dichtheden raken ook neutronen gedegeneerd.

5. het gas **blijft een gas**.

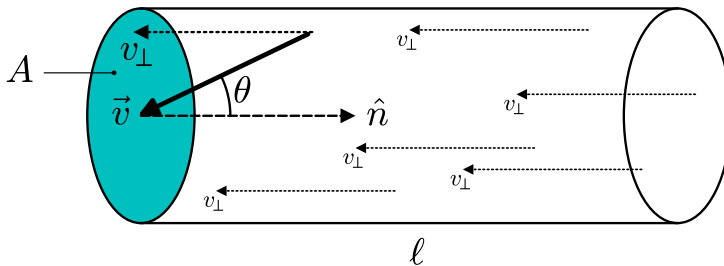
In dit geval geldt de **ideale-gaswet** of **algemene gaswet**; het gas dat hieraan voldoet heet een **ideaal gas**.

We kunnen de ideale-gaswet op de volgende manier aannemelijk maken. Volgens de **Maxwell-Boltzmannverdeling** wordt de gemiddelde van het kwadraat van de snelheid van een deeltje met massa m in een gas met temperatuur T en in één dimensie gegeven door

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m}, \quad (2.9)$$

waarin k (ook wel k_B) de constante van Boltzmann weergeeft (zie pagina 116). Volgens het **equipartitiebeginsel** is de energie van een gas in thermisch evenwicht gelijk verdeeld over de dimensies, zodat $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$. We kunnen dan de thermische energie van een deeltje in een gas schrijven als

$$E_{\text{th}} = E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m (\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle) = \frac{1}{2} m \cdot 3 \langle v_x^2 \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (2.10)$$



Figuur 2.6: Illustratie bij de afleiding van de ideale-gaswet. Een deeltje botst met snelheid $\vec{v}$ op een wand met oppervlak A onder een hoek θ met de normaal $\hat{n}$ en draagt een impuls $mv_{\perp}$ over (links). In totaal zijn er N deeltjes, ieder met snelheidscomponent $v_{\perp}$. Het volume van de kolom met lengte ℓ is $A \cdot \ell$.

Laten we ons nu zo'n deeltje voorstellen dat (loodrecht) op een wand botst en blijft plakken (zie Figuur 2.6). Dit deeltje draagt een impuls over van $\Delta p = m\Delta v = mv$, doordat $\Delta m = 0$ en $\Delta v = |0 - v| = v$.

Aangezien $F = ma = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{mv}{\Delta t}$ blijkt de kracht niets anders dan de verandering in impuls per tijds-eenheid. De **druk** is gedefinieerd als de kracht per oppervlakte-eenheid, dus als we alleen de loodrechte component beschouwen geldt op een oppervlak A : $P_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{A} = \frac{mv_{\perp}}{A\Delta t}$. Als we ons nu een kolom voorstellen met lengte ℓ en doorsnede-oppervlak A , waarin de deeltjes een snelheidscomponent $v_{\perp}$ hebben, dan is het volume van de kolom $V = A \cdot \ell$, en is de tijd die nodig is voor de hele kolom om op het oppervlak te botsen $\Delta t = \ell/v_{\perp}$. We vinden dan $P_{\perp} = \frac{mv_{\perp}}{A\Delta t} = \frac{mv_{\perp}^2}{A\ell} = \frac{mv_{\perp}^2}{V}$.

Wanneer we in die kolom niet één maar N deeltjes hebben geldt $P_{\perp} = N \frac{mv_{\perp}^2}{V} = nmv_{\perp}^2$, waarbij $n = \frac{N}{V}$ de deeltjesdichtheid is (in m^{-3}). En als we de *totale* snelheid van de deeltjes $v = v_{\perp}/\cos\theta$ beschouwen, waarbij θ de hoek is tussen de normaal van de wand en de bewegingsrichting van het deeltje (zie Fig. 2.6), en we middelen over een *halve* bol om alle mogelijke richtingen in rekening te brengen,⁵ vinden we $\langle v_{\perp}^2 \rangle = \frac{1}{3}v^2$ en dus $P = \frac{1}{3}nmv^2 = \frac{1}{3}npv$. Door Vgl. 2.10 in te vullen krijgen we

$$P = \frac{1}{3}nmv^2 = \frac{1}{3}npv = nkT. \quad (2.11)$$

In de sterrenkunde wordt de gemiddelde deeltjesmassa vaak geschreven als $\langle m \rangle = \mu m_{\text{H}} \approx \mu m_{\text{u}}$. De waarde μ staat voor het *gemiddelde massa per deeltje* (Engels: *mean molecular weight*) uitgedrukt in m_{H} of m_{u} . Deze grootheid hangt af van het soort deeltjes en de ionisatiegraad. Voor moleculair waterstof (H_2) is $\mu = 2$ (één deeltje met massa 2), voor atomair waterstof is $\mu = 1$ (één deeltje met $m = 1$), voor geïoniseerd waterstof (H^+) is $\mu = \frac{1}{2}$ (twee deeltjes met $m = 1, m = 0$) en voor volledig geïoniseerd helium geldt $\mu = 4/3$. Hiermee kunnen we de deeltjesdichtheid vervangen door de massadichtheid: $n = \frac{\rho}{\mu m_{\text{H}}}$.

We vinden dan uiteindelijk de **algemene gaswet** of *ideale-gaswet*:

$$P_{\text{gas}} = nkT = \frac{\rho kT}{\mu m_{\text{H}}}. \quad (2.12)$$

2.3.2 Stralingsdruk

Licht bestaat uit fotonen die we kunnen beschouwen als deeltjes met een energie E , een snelheid $v = c$ en een impuls $p \equiv \frac{E}{c}$. Wanneer we dit invullen in Vgl. 2.11 en Vgl. 2.4 gebruiken, vinden we

$$P = \frac{1}{3}nvp \sim \frac{1}{3} \frac{u}{E} c \frac{E}{c} = \frac{u}{3} = \frac{4\sigma T^4}{3c}, \quad (2.13)$$

waarbij ik heb aangenomen dat $u \equiv n \cdot \langle E \rangle \sim n \cdot E$. Fotonen die botsen op een oppervlak kunnen dus net als gasdeeltjes een *druk* uitoefenen. Dit wordt de **stralingsdruk** (ook wel *fotonendruk*) genoemd. De stralingsdruk kan de gasdruk domineren bij hoge temperaturen, zoals in de kernen van zware sterren, of bij lage dichtheden (zie Figuur 2.5).

In veel gevallen kunnen zowel gas als straling een significante bijdrage leveren aan de druk. De totale druk wordt dan simpelweg gegeven door de som van de twee:

$$P_{\text{tot}} = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}} = \frac{\rho kT}{\mu m_{\text{H}}} + \frac{4\sigma T^4}{3c}. \quad (2.14)$$

2.3.3 Gedegenererde gassen

In Figuur 2.5 zien we dat een zeer dicht gas, bij niet al te hoge temperatuur, **gedegenererd** (ook wel *ontaard*) kan worden. In deze situatie gedraagt het gas zich niet meer als een ideaal gas, en wordt de druk op een andere manier gegenereerd. We bespreken hier kort hoe die druk zich gedraagt, maar zonder in te gaan op de details van de kwantummechanica.

⁵De factor $1/3$ die hieruit komt is dezelfde als die in voetnoot 3 op pagina 27.

Twee kwantummechanische processen spelen hier een rol. Het eerste is het **onzekerheidsprincipe van Heisenberg**, dat wordt gegeven door $\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar$. Een mogelijke interpretatie hiervan is dat zowel de fysieke ruimte als de impulsruimte *opgedeeld zijn in hokjes* met grootte $\sim (\Delta x)^3$ en $(\Delta p)^3$. Daarnaast dicteert het **uitsluitingsprincipe van Pauli** dat er zich maximaal één fermion (zoals een elektron) in exact dezelfde toestand mag bevinden. We kunnen dit zien als maximaal twee elektronen per x -en- p -hokje: één met spin *op* en één met spin *neer*. Wanneer er bij hoge dichtheden, zoals in bijvoorbeeld in een **witte dwerg** (zie H. 3.5.1), *nog* een elektron in hetzelfde ruimtehokje gedrukt wordt, kan dat alleen als de impuls anders is dan die van de bestaande elektronen in dat hokje. Wanneer alle lage-impulstoestanden al bezet zijn, krijgt het nieuwe deeltje **gedwongen** een **hogere impuls**.

De impulsen (en dus snelheden) van de elektronen worden nu dus niet bepaald door de temperatuur, maar door de kwantummechanica. Hetzelfde geldt hierdoor voor de gedegenererde druk, via $P \propto npv$ (Vgl. 2.11), die dan wordt gegeven door

$$P_d \equiv \frac{K_d}{m_e} \left(\frac{\rho}{\mu_e m_H} \right)^{5/3}; \quad K_d \approx 2.13 \times 10^{-68} \text{ N}^2 \text{ m}^2 \text{ s}^2, \quad (2.15)$$

waarin ik het subscript “d” gebruik voor *degeneratie* en waar $\mu_e = \frac{\rho}{n_e m_H}$ de gemiddelde massa *per elektron* weergeeft, uitgedrukt in m_H of m_u . Hierbij merken we op dat de druk een **sterkere afhankelijkheid** heeft van de dichtheid ρ dan voor een ideaal gas, en dat de **druk niet afhangt van de temperatuur T !**

Wanneer de dichtheid *zeer* hoog wordt, worden de elektronen relativistisch ($v \sim c$). Dan geldt $P \propto npv \sim npc$ en wordt de druk gegeven door

$$P_{d,r} \equiv K_{d,r} \left(\frac{\rho}{\mu_e m_H} \right)^{4/3}; \quad K_{d,r} \approx 2.45 \times 10^{-26} \text{ N m}^2. \quad (2.16)$$

Een gas kan zoals gezegd gedegenererd raken wanneer de dichtheid hoog is, en de temperatuur niet (zie Figuur 2.5). Wanneer de temperatuur in een gedegenererd gas oploopt, kunnen de elektronen hogere impulsen krijgen dan opgelegd door de kwantummechanica en kan het gas weer de ideale-gaswet gaan volgen. Dit gebeurt bijvoorbeeld wanneer helium ontbrandt in de kern van een lage-massaster, waarbij de degeneratie wordt opgeheven (de **heliumflits**; zie H. 3.1.2).

2.4 Opaciteit

We zagen in H. 2.2.4 al dat de **opaciteit** κ van een gas een maat is voor de *ondoorzichtigheid* van het gas. De officiële definitie is de **absorptiedoorsnede** per kilogram materie, uitgedrukt in m^2/kg . De doorsnede is dus een *oppervlak*. Dit kunnen we ons voorstellen door mee te reizen op een deeltje dat al dan niet zal worden geabsorbeerd door andere deeltjes. Hoe groter die deeltjes er uitzien vanuit ons perspectief, hoe groter de kans dat we ermee botsen (en worden geabsorbeerd). Als we (bolvormige) deeltjes vanuit ons oogpunt zien als tweedimensionale *schietschijfjes*, is de *oppervlakte* van die schijfjes relevant. Dit hoeft niet de (klassieke) fysieke grootte van die deeltjes te betreffen, maar kan ook hun invloedssfeer zijn.

De opaciteit van een gas hangt af van de dichtheid, temperatuur en samenstelling en vergt ingewikkelde berekeningen. Voor stermodellen worden vaak vooraf berekende tabellen met opaciteiten als input gebruikt, om de modelberekening sneller te laten verlopen.

2.5 Kernfusie

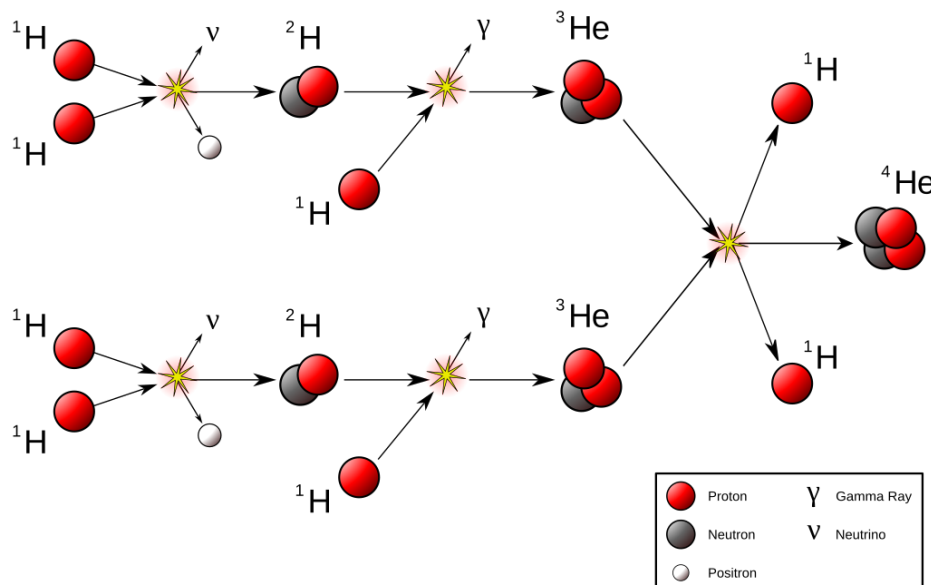
De energiebron van sterren is de **kernfusie** die in hun kernen plaatsvindt. Sterren beginnen hun leven door waterstof te fuseren tot helium. In latere stadia kan verdere kernfusie plaatsvinden. We behandelen hier de waterstoffusie in wat detail, en de verdere fusiestadia meer oppervlakkig.

Voor de fusie beschouwen we alleen atoomkernen (en vrije elektronen), omdat alle atomen in het centrum van een ster geïoniseerd zijn door de hoge temperaturen. Doordat alle kernen positief geladen zijn, moet

de kinetische energie van de kernen voldoende zijn om de **elektrische potentiaal** te overwinnen, zodat de **sterke kernkracht** zijn werk kan doen om de kernen te laten fuseren. Hiervoor zijn **hoge temperaturen** nodig, van ten minste enkele miljoenen Kelvin. Een hoge **dichtheid** zorgt ervoor dat de kernen elkaar vaker tegenkomen.

2.5.1 Waterstoffusie

Figuur 2.7 toont de zogenaamde **proton-protoncyclus** (*pp-cyclus*; Engels: *pp chain*) voor **waterstoffusie**. Hierbij fuseren twee protonen (^1H) tot een deuteriumkern (^2H) onder uitzenden van een neutrino en een positron. Een derde proton maakt hieruit ^3He en een foton. Twee van deze heliumdeeltjes smelten uiteindelijk samen tot een ^4He -aatom, waarbij weer twee protonen vrijkomen. De twee positronen annihileren met twee elektronen tot nog eens vier fotonen (met een andere energie dan de eerste twee). De netto-input bedraagt dus vier protonen en twee elektronen, de netto-output twee neutrino's, zes fotonen en een heliumkern.



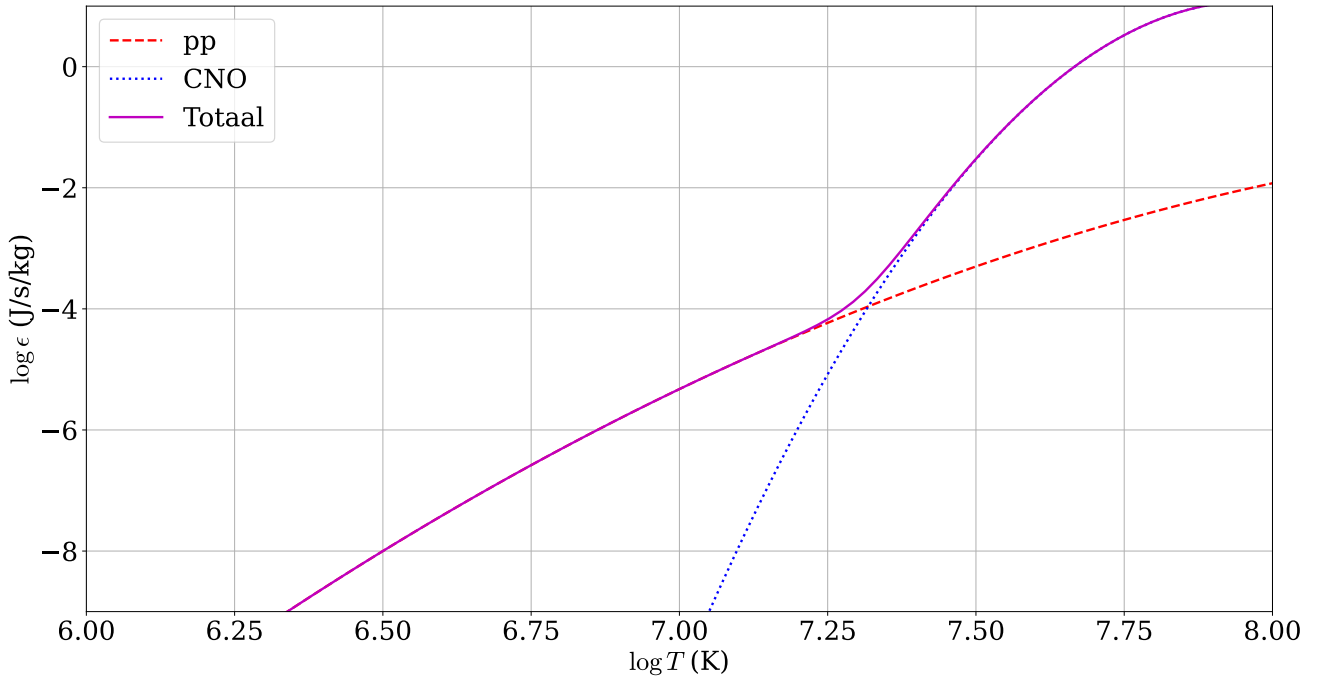
Figuur 2.7: De proton-protoncyclus van waterstoffusie. Als input worden in totaal zes waterstofkernen (protonen) gebruikt, als output komen twee neutrino's, twee positronen, twee fotonen, twee protonen en een heliumkern vrij.

Als we de massa van de uitgaande heliumkern aftrekken van die van de ingaande protonen en elektronen, vinden we dat circa 7.2‰ van de massa “verloren” is gegaan. Deze massa is omgezet in de energie. In totaal is dat 26.73 MeV, waarvan circa 2.2% in neutrino's zit en direct de Zon verlaat. De rest blijft in de Zon als fotonen en kinetische energie van de overige deeltjes, en draagt dus bij aan de druk.⁶ Berekeningen tonen dat een proton in de kern van de Zon gemiddeld circa 5 Gyr moet wachten voor het fuseert, dat een ^2H -aatom na circa 1 s verder fuseert, en dat een ^3He -aatom ongeveer 400 jaar bestaat.

De pp-cyclus is de belangrijkste manier van waterstoffusie in sterren als de Zon. In zwaardere sterren domineert de zogenaamde **CNO-cyclus**. Hierbij worden koolstof (C), stikstof (N) en zuurstof (O) als *katalysator* gebruikt. Door steeds een proton toe te voegen aan een ^{12}C -kern (en af en toe fotonen, positronen en neutrino's uit te zenden) ontstaan achtereenvolgens ^{13}N , ^{14}N en ^{15}N . Als hieraan een proton wordt toegevoegd is het resultaat $^{12}\text{C} + ^4\text{He}$. Ook bij dit mechanisme komt 26.73 MeV vrij, waarvan weer een deel direct uit de ster verdwijnt via neutrino's.

De reactiesnelheid van de pp-cyclus hangt af van T^4 , die van de CNO-cyclus van T^{12} . Boven $T \sim 2 \times 10^7$ K (20 MK) domineert de CNO-cyclus. Dit is het geval in de kernen van sterren met een massa van circa $1.3 M_{\odot}$ of meer. Voor de Zon, met een centrale temperatuur van circa 16 MK, domineert de pp-cyclus.

⁶De hier beschreven proton-protoncyclus neemt circa 84% van de reacties voor zijn rekening; er zijn nog andere paden die van ^3He naar ^4He leiden.



Figuur 2.8: De energieproductie (in W/kg) van waterstoffusie via de pp -cyclus en de CNO -cyclus als functie van de temperatuur. De CNO -cyclus domineert vanaf circa 20 MK . Voor deze figuur is een dichtheid van $\rho = 10^3\text{ kg/m}^3$ aangenomen.

2.5.2 Verdere kernfusie

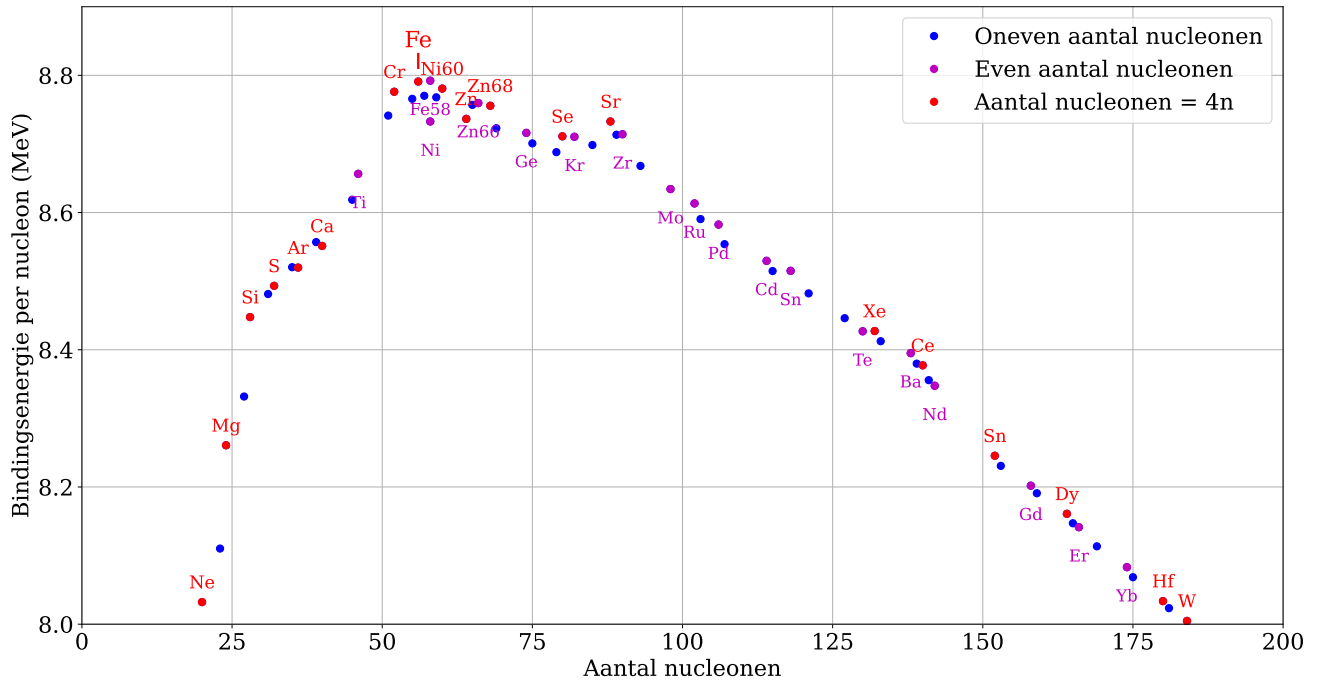
Tabel 2.1 toont de voornaamste stadia van kernfusie in sterren in een sterk versimpelde vorm. Voor iedere volgende fase zijn hogere temperaturen nodig. Wanneer de brandstof van de vorige fusiefase is opgebraakt, neemt de stralingsdruk in de sterkern af en gaat deze samentrekken. Als gevolg hiervan nemen de dichtheid en temperatuur toe, totdat de temperatuur hoog genoeg wordt om de volgende kernfusiereactie te laten plaatsvinden. De stralingsdruk neemt weer toe, de kern stopt met krimpen, en de ster is weer een tijdje stabiel. Merk op dat de opeenvolgende fusiestadia steeds korter duren!

Tabel 2.1: Een vereenvoudigde weergave van de belangrijkste kernfusiestadia in sterren, met de bijbehorende temperaturen, voornaamste reacties, en de ruwe tijdschaal voor iedere fase voor een ster met $M = 10 M_{\odot}$.

Naam	Temperatuur	Reactie	$\tau(10 M_{\odot})$
waterstoffusie	$10 - 30 \times 10^6\text{ K}$	$4^1\text{H} \rightarrow ^4\text{He}$	10 Myr
heliumfusie (triple-alpha)	$100 - 200 \times 10^6\text{ K}$	$4^4\text{He} + ^4\text{He} \rightleftharpoons ^8\text{Be}$ $^8\text{Be} + ^4\text{He} \rightarrow ^{12}\text{C}$	1 Myr
heliumfusie	$200 - 300 \times 10^6\text{ K}$	$4^4\text{He} + ^{12}\text{C} \rightarrow ^{16}\text{O}$ $4^4\text{He} + ^{16}\text{O} \rightarrow ^{20}\text{Ne}$	
koolstoffusie	$\sim 600 \times 10^6\text{ K}$	$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \rightarrow ^{24}\text{Mg}$ $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \rightarrow ^{23}\text{Na} + ^1\text{H}$ $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \rightarrow ^{23}\text{Mg} + n$	1 kyr
zuurstoffusie	$\sim 1 \times 10^9\text{ K}$	$^{16}\text{O} + ^{16}\text{O} \rightarrow ^{32}\text{S}$ $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O} \rightarrow ^{28}\text{Si} + ^4\text{He} + \nu$	2 jaar
siliciumfusie	$\sim 2 \times 10^9\text{ K}$	$^{28}\text{Si} + \gamma \rightarrow p, n, ^4\text{He}$ $p, n, ^4\text{He} \rightarrow ^{56}\text{Fe}, ^{58}\text{Ni}, ^{52}\text{Cr}$	3 dagen

Figuur 2.9 toont de **bindingsenergie van atoomkernen** per nucleon voor een aantal elementen. Deze

energie komt vrij wanneer je alle losse nucleonen op elkaar zou laten vallen. Tot ijzer neemt deze energie toe. Er komt dus energie vrij wanneer je zo'n kern fuseert uit lichtere kernen. Vanaf ijzer neemt deze energie juist weer *af*. Hier *kost* kernfusie dus energie!⁷ Wanneer de kern eenmaal vrijwel geheel uit ijzer en nikkel bestaat, zal deze opnieuw samentrekken, maar nu is er geen kernreactie meer die energie kan leveren om de kern weer te stabiliseren. De kern stort ineen en een Type-II-supernova volgt (zie H.3.4).



Figuur 2.9: De bindingsenergie per nucleon voor de meest voorkomende isotopen van elk element, als functie van het aantal nucleonen in de kern.

2.6 Het viriaaltheorema

Wanneer we de thermische energie van een deeltje uit Vgl. 2.10 vermenigvuldigen met de deeltjesdichtheid n , vinden we de **energiedichtheid** van een gas⁸

$$e_{\text{th}} = \frac{3}{2}nkT = \frac{3}{2}P_{\text{gas}}. \quad (2.17)$$

Voor een gasbol met sferische symmetrie in hydrostatisch evenwicht kunnen we dit integreren van centrum tot oppervlak voor de totale thermische energie van de bol. Door e_{th} te vervangen door P_{gas} , partieel te integreren, Vgl. 2.3 in te vullen en de integratievariabele om te schrijven van straal naar massa, zien we dat dit gelijk is aan minus de helft van de potentiële energie van de gasbol:

$$E_{\text{th}} = -\frac{1}{2}E_{\text{pot}}. \quad (2.18)$$

In het algemeen geldt voor (een gasbol in) sferische symmetrie dat de thermische energie gelijk is aan de helft van de potentiële energie. Dit staat bekend als het **viriaaltheorema**.

Voorbeelden van toepassingen van het viriaaltheorema zijn onder andere de harmonische oscillator, de **Keplerbanen** van planeten en dubbelsterren (waar de kinetische energie de rol van thermische energie op zich neemt, en de gravitatie-energie die van potentiële energie), de **bindingsenergie van een ster** (weer $E_{\text{pot}} \sim E_{\text{gr}}$), de rotatie van sterrenstelsels en de beweging van sterrenstelsels in een cluster. Zwicky gebruikte het viriaaltheorema in 1933 om aan te tonen dat circa 99.8% van de Comacluster bestaat uit **donkere materie**! In Hoofdstuk 4 zullen we zien dat wanneer een dubbelster baanenergie verliest, de sterren *sneller* gaan bewegen.

⁷Omgekeerd levert kern*splitsing* energie op, een principe dat wordt gebruikt in kerncentrales met nog zwaardere elementen als ^{235}U en ^{239}Pu .

⁸Energiedichtheid heeft dus dezelfde eenheid als druk: $\text{J/m}^3 \equiv \text{N/m}^2$.

2.7 Schalingswetten voor hoofdreekssterren

2.7.1 Centrale druk en temperatuur

Uit Vergelijking 2.3 kunnen we afleiden dat voor hoofdreekssterren de **centrale druk** schaalt met de massa en gemiddelde dichtheid, en omgekeerd met de straal van de ster:

$$P_c \propto \frac{GM}{R} \bar{\rho} \propto \frac{3GM^2}{4\pi R^4}; \quad P_c \sim 2.4 \times 10^{16} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-4}. \quad (2.19)$$

Hierbij, en in de uitdrukkingen hieronder, kloppen vooral de **afhankelijkheden** waarmee de druk, temperatuur en lichtkracht schalen. De waarden in de laatste uitdrukking zijn steeds zeer ruw, en bepaald door vergelijken met een model van de Zon met $\mu \sim 0.845$, $\bar{\rho}/\rho_c \sim 1/110$ en $\bar{\kappa} \sim 8.0 \text{ m}^2/\text{kg}$.

Als we de algemene gaswet van Vgl. 2.12 toepassen op het stercentrum en Vgl. 2.19 invullen, vinden we een uitdrukking voor de **centrale temperatuur** van een hoofdreeksster als functie van basale sterparameters:

$$T_c \propto \frac{\mu m_H}{k} \frac{\bar{\rho}}{\rho_c} \frac{GM}{R}; \quad T_c \sim 2.1 \times 10^9 \text{ K} \cdot \mu \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_c}\right) \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-1}. \quad (2.20)$$

2.7.2 Tijdschalen

Voor de evolutie van sterren op de hoofdreeks kunnen we een aantal typische **tijdschalen** afleiden.

De **nucleaire tijdschaal** is de tijd die een ster op de hoofdreeks doorbrengt, en is een maat voor hoe snel de ster evolueert. We kunnen een ruwe uitdrukking vinden door aan te nemen dat de hoofdreeks voor de Zon circa 10 Gyr duurt, en dat dit schaalt met de massa van de ster (de “hoeveelheid brandstof”) en omgekeerd met de lichtkracht (hoe snel verbruikt de ster die “brandstof”?). We vinden dan

$$\tau_n \sim \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{-1} \tau_\odot \sim 10 \text{ Gyr} \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{-1}. \quad (2.21)$$

De **thermische tijdschaal** geeft aan hoe snel de ster zich herstelt wanneer deze uit thermisch evenwicht geraakt. Dit kan gebeuren wanneer extra energie aan een ster wordt onttrokken of toegevoegd, bijvoorbeeld bij stabiele materie-overdracht in een dubbelster (zie H. 4.5). We kunnen deze tijdschaal vinden door te kijken hoe lang een ster nodig heeft om al zijn thermische energie uit te stralen:

$$\tau_{\text{th}} \sim \frac{E_{\text{th}}}{L} \sim \frac{GM^2}{2RL} \sim 31 \text{ Myr} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-1} \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{-1}. \quad (2.22)$$

De **dynamische tijdschaal**, ook wel *vrije-valtijdschaal* genoemd, geeft aan hoe snel een ster in zou storten als de druk ineens zou wegvallen. Deze tijdschaal is relevant wanneer de materie-overdracht in een dubbelster *niet* stabiel is.

$$\tau_{\text{dyn}} \sim \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \sim 27 \text{ min} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1/2} \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{3/2}. \quad (2.23)$$

Hoofdstuk 3

Structuur en evolutie van sterren

Met behulp van de vergelijkingen uit Hoofdstuk 2, en nog wat extra,¹ kan een **structuurmodel** voor een ster worden opgesteld. Door de kernfusie verandert de samenstelling van een ster langzaam, en daardoor de structuur. De opeenvolgende structuurmodellen, met steeds een stapje verder in de tijd, vormen een **evolutiemodel** van de ster.

Doordat we de (interne) details van een ster niet kunnen waarnemen, zoomen we in dit hoofdstuk in op de gedetailleerde structuur en evolutie van sterren met behulp van **modellen**. We doen dat achtereenvolgens voor **lichte sterren** ($M \lesssim 8 M_{\odot}$) en **zware sterren** ($M \gtrsim 8 M_{\odot}$), waarvan de evolutie dramatisch anders verloopt. We sluiten dit hoofdstuk af met de **compacte restanten** van sterren.

3.1 Lage-massasterren

3.1.1 De hoofdreeks

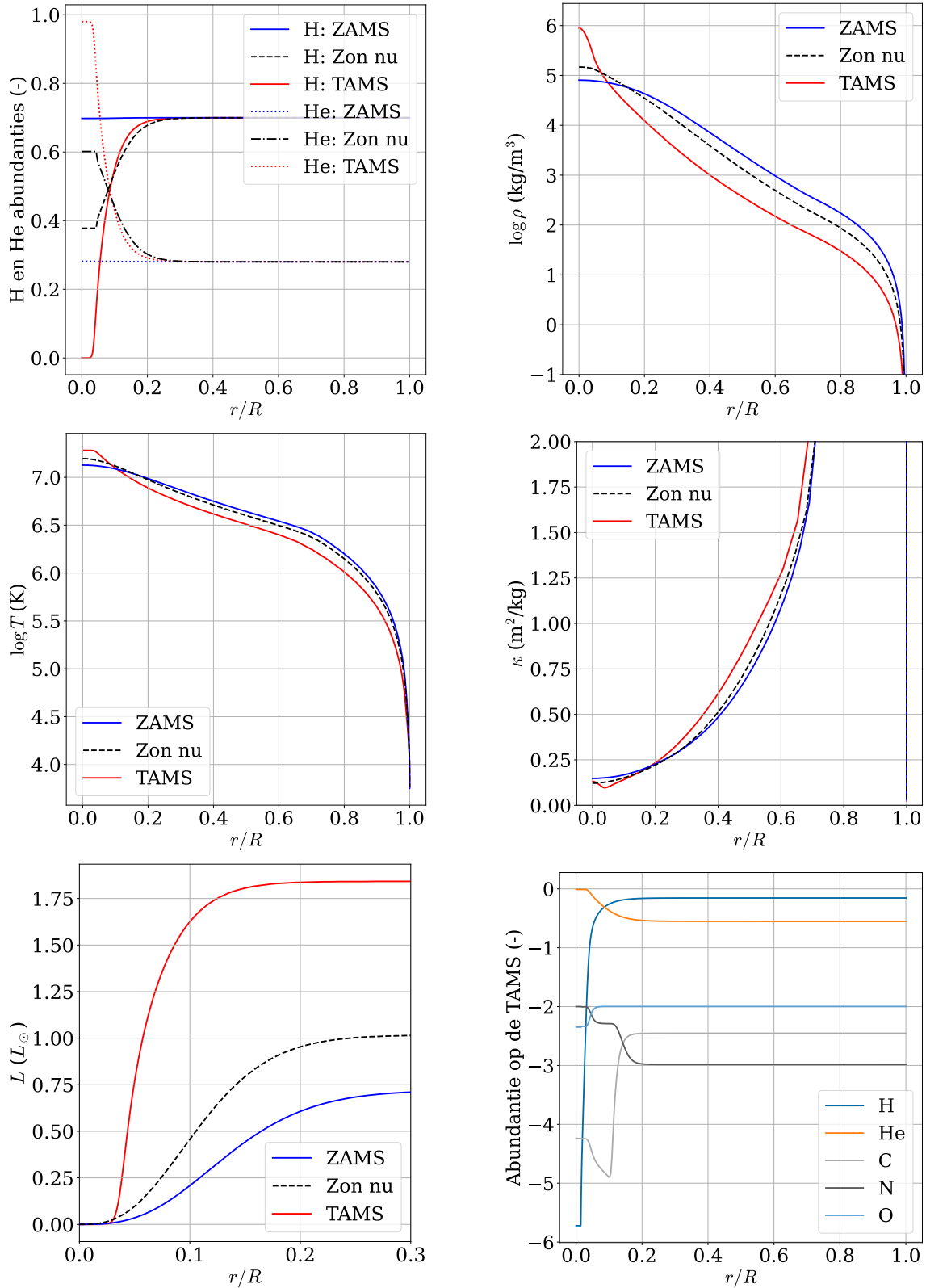
Een ster begint zijn bestaan als een gasbol met een homogene samenstelling. Voor de Zon is dat circa 70% waterstof, 28% helium en 2% “metalen” ($X=0.70$, $Y=0.28$, $Z=0.02$). De jonge ster bevindt zich aan het begin van de **hoofdreeks** (*main sequence*; **MS**) en wordt een *zero-age main-sequence*, ofwel **ZAMS**-ster genoemd.

De blauwe lijnen in Figuur 3.1 tonen de structuur van een $1 M_{\odot}$ ZAMS-ster een aantal grootheden, als functie van de relatieve radiuscoördinaat r/R . De **abundanties** in het eerste panel zijn saai, want homogeen. De **dichtheid** ρ piekt naar het centrum toe, zoals je zou verwachten. Het bereik is zo groot dat een logaritmische schaal nodig is. In het centrum van de ster heeft het gas een dichtheid van bijna 100 keer die van water! De **temperatuur** T heeft een vergelijkbaar profiel. De **opaciteit** κ is in het centrum laag; daar kan het energietransport via straling verlopen: de **stralingszone** van de ster. Op ongeveer 70% van de straal schiet κ omhoog; straling kan de energie niet langer efficiënt transporteren, en **convectie** neemt dit over. Dit is de **convectiezone**, die de buitenste $0.3R_{\odot}$ van de ster beslaat in straal, maar slechts $0.03M_{\odot}$ in massa. Pas rond $r \sim R$ duikt κ weer omlaag; we zijn aan het steroppervlak gekomen waar het gas weer doorzichtig wordt. De **lichtkracht** van de ZAMS-ster wordt opgebouwd in de binnenste $\sim 30\%$ van de straal (en dus binnenste $\sim 3\%$ van het volume) van de ster. Alleen daar zijn de temperatuur en dichtheid voldoende hoog om waterstoffusie mogelijk te maken.

Onze ster is in **hydrostatisch evenwicht** en hiermee stabiel op de dynamische en thermische tijdschalen (zie Vgl. 2.22 en 2.23). Op de **nucleaire tijdschaal** verandert de ster echter, doordat waterstof in de sterkern wordt omgezet in helium; beide abundanties veranderen. Hierdoor neemt μ toe² waardoor de gasdruk wat afneemt (Vgl. 2.12), de zwaartekracht wat meer overheerst, de kern wat krimpt, de dichtheid wat toeneemt en de helft van de vrijgekomen potentiële energie wordt omgezet in thermische energie

¹Het opstellen van een volledig stermodel valt buiten de stof van deze cursus; we zouden een gedetailleerdere beschrijving moeten hebben van de reactiesnelheid van de kernfusie en van de opaciteit.

²We zagen in H. 2.3.1 dat $\mu = \frac{1}{2}$ voor geïoniseerd waterstof en $\mu = \frac{4}{3}$ voor geïoniseerd helium.



Figuur 3.1: Gedetailleerde structuurmodellen voor een ster met de massa en samenstelling van de Zon. De verschillende panels tonen verschillende grootheden als functie van de radiuscoördinaat. Van linksboven naar rechts-onder: de abundenties voor waterstof en helium, de massadichtheid, de temperatuur, de opaciteit, de lichtkracht en de abundenties van H, He, C, N en O. De eerste vijf panels tonen de structuur voor de ZAMS, voor een model met een leeftijd van 4.6 Gyr en voor de TAMS; het laatste panel geldt alleen voor de TAMS. Merk op dat het vijfde panel alleen het binnenste deel van de ster toont.

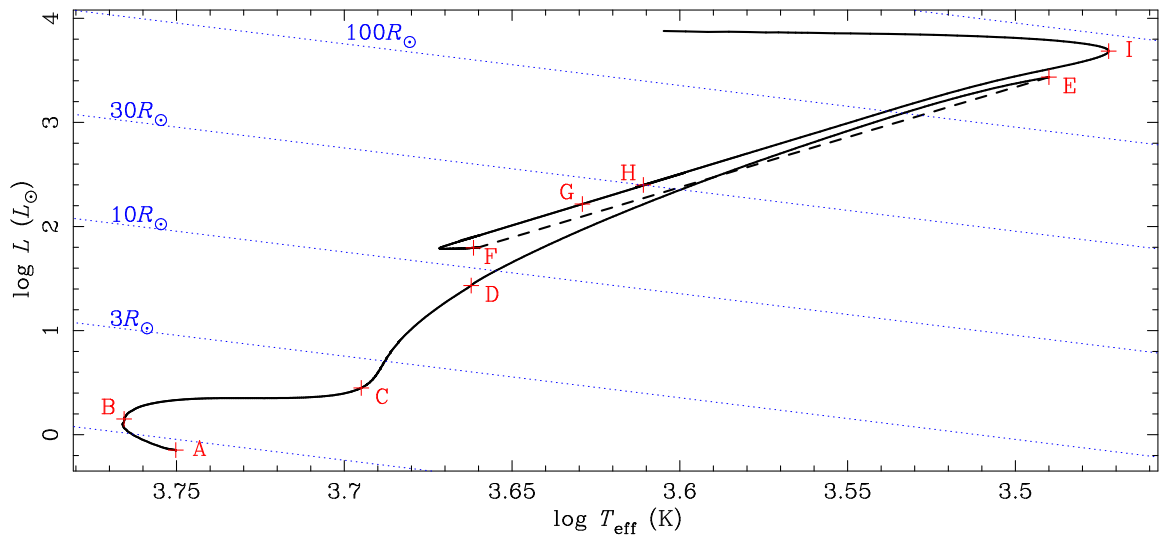
(Vgl. 2.18), waardoor de temperatuur stijgt. De hogere dichtheid en temperatuur in de kern maken een hogere energieproductie door waterstoffusie mogelijk, waardoor de lichtkracht toeneemt.

Deze veranderingen zijn te zien in Figuur 3.1, wanneer we de zwarte (gestreepte) en rode lijnen bekijken en vergelijken met die van de ZAMS. De zwarte lijn is voor een model met een leeftijd van 4.6 Gyr, en geeft een redelijk model van de Zon op dit moment. De rode lijn is voor de *terminal-age main sequence*, ofwel **TAMS**, het moment dat het waterstof in de kern opdraakt en daarmee het einde van de hoofdreeks. We zien inderdaad dat de waterstofabundantie in de kern afneemt en de heliumabundantie toeneemt: $X_{\text{ZAMS}} \approx 0.70$, $X_{\text{TAMS}} \approx 0$; $Y_{\text{ZAMS}} \approx 0.28$, $Y_{\text{TAMS}} \approx 0.98$. Aan het oppervlak is hier echter niets van te zien. De profielen van de **dichtheid** en de **temperatuur** worden zoals verwacht steeds steiler, en de **lichtkracht** neemt alsmaar toe: de jonge Zon had slechts circa 72% van haar huidige lichtkracht, tegen het einde van de hoofdreeks zal dat $1.8 L_{\odot}$ zijn. De pas-gevormde Aarde ontving dus significant minder energie dan tegenwoordig! De oppervlaktetemperatuur wordt maar iets hoger gedurende de hoofdreeks, en dus moet de straal van de Zon toenemen: van $0.89 R_{\odot}$ op de ZAMS tot $1.36 R_{\odot}$ op de TAMS.

Het laatste panel in Figuur 3.1 toont de abundanties van H, He, C, N en O voor de TAMS. Blijkbaar vindt een (klein) deel van de waterstoffusie via de CNO-cyclus plaats, want hoewel hun totale abundantie niet verandert, verschuiven de C-, N- en O-ratio's gedurende ~ 8 Gyr tot een nieuw evenwicht. Dit is mogelijk doordat de centrale temperatuur tijdens de hoofdreeks toeneemt van 13.4 MK op de ZAMS tot 15.7 MK tegenwoordig en 19.2 MK op de TAMS.

3.1.2 De reuzentakken

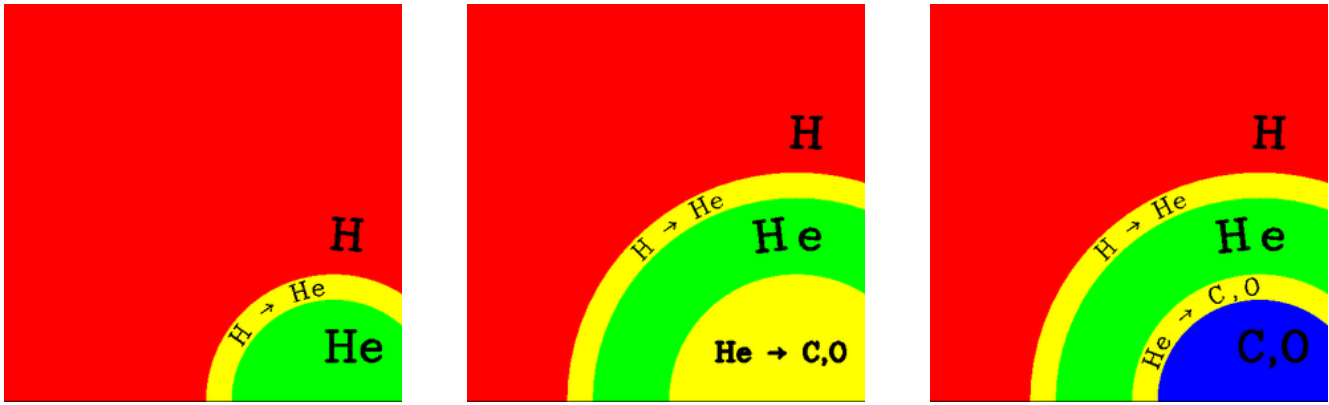
Figuur 3.2 toont een Hertzsprung-Russelldiagram met het **evolutiespoor** voor een modelster met de eigenschappen van de Zon. De ster begint zijn evolutie op de **hoofdreeks**, tussen de **ZAMS** (punt A) en de **TAMS** (punt B), waarbij de ster iets heter, groter en helderder wordt. Wanneer het waterstof in de kern is opgeraakt krimpt deze, waardoor de kerntemperatuur toeneemt en waterstoffusie kan plaatsvinden in een schil *rondom* de heliumkern (zie Figuur 3.3a). We noemen dit **waterstofschildfusie** en de schil een **fusieschil**. De mantel wordt hierdoor steeds meer convectief, waardoor de ster zelf juist uitzet, en de oppervlaktetemperatuur afneemt: de ster beweegt naar rechts in het HRD. Het stuk tussen punt B en punt C wordt het **Hertzsprung gap** (HG) genoemd; doordat sterren hier snel evolueren nemen we er relatief weinig waar. De ster heet ook wel een **subreus**.



Figuur 3.2: Een theoretisch Hertzsprung-Russelldiagram met het evolutiespoor van een ster met een ZAMS-massa van $1 M_{\odot}$ en zonnemetalliteit. De opeenvolgende stadia A–I zijn beschreven in de tekst. De diagonale stippellijnen zijn lijnen van constante straal tussen $1 R_{\odot}$ en $300 R_{\odot}$.

Aangekomen in punt C is de ster mantel volledig convectief. De heliumkern wordt steeds zwaarder, doordat de fusieschil waterstof uit de mantel omzet in helium en aan de kern toevoegt. De heliumkern is **gedegenereerd** en *krimpt* door de hogere massa,³ waardoor de temperatuur (viriaaltheorema) en energieproductie door kernfusie (zie Figuur 2.8 op pagina 34) verder oplopen. Om al dat geproduceerde licht kwijt te raken neemt de sterstraal sterk toe (Vgl. 1.7) en beweegt de ster de **rode-reuzentak** (Engels:

³Net als in het geval van een witte dwerg, zie Vgl. 3.5.



Figuur 3.3: Schematische weergave van de kern van een RGB-ster (links; punt D in Fig. 3.2), HB-ster (midden; punt F) en AGB-ster (rechts; punt H). Van buiten naar binnen zien we voor de RGB-ster 1) de waterstofmantel, 2) de waterstoffusieschil en 3) de inerte heliumkern. Voor een HB-ster vindt heliumfusie plaats in de kern, binnen een inerte heliumschil. En in een AGB-ster is de heliumfusie gereduceerd tot een schil en omsluit deze een inerte CO-kern.

red-giant branch; **RGB**). Door de hoge lichtkracht en lage oppervlaktezwaartekracht ontwikkelt de rode reus een sterke **sterrenwind**, waardoor deze significant massa begint te verliezen.

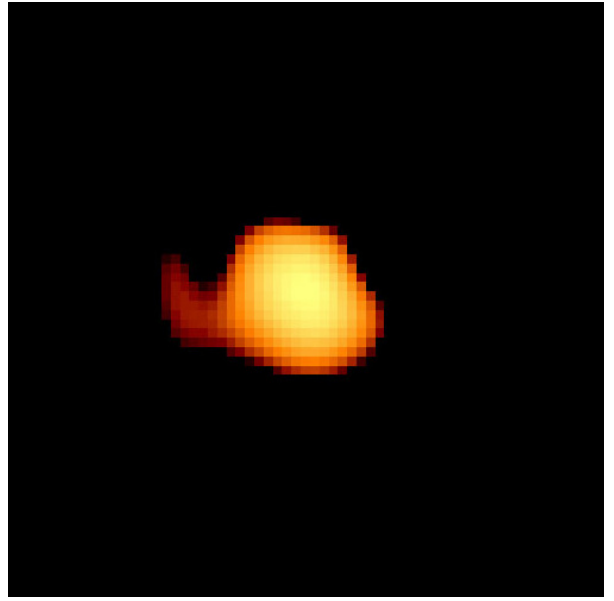
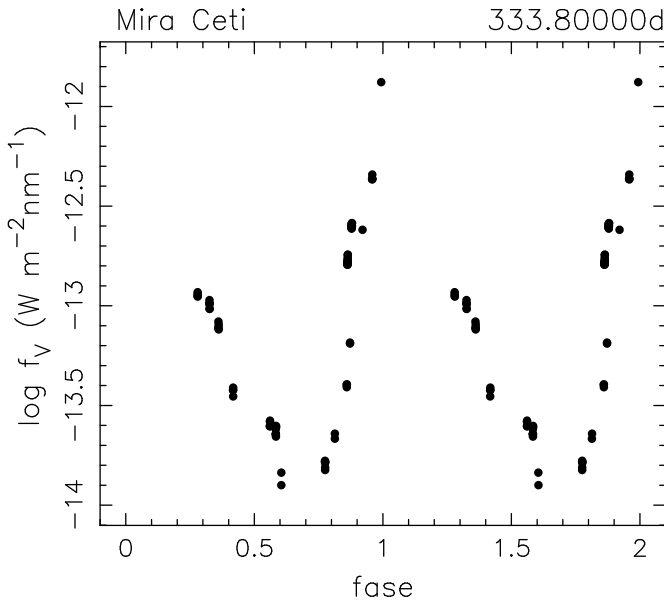
Dit proces duurt voort totdat de temperatuur in de kern voldoende hoog wordt voor **heliumfusie** (punt **E**). De ster heeft dan inmiddels een straal van circa $200 R_{\odot}$. De kerntemperatuur neemt toe, doordat deze **gedegenereerd** is en niet uitzet bij verhitting. Hierdoor gaat de fusie steeds sneller en wordt een significant deel van de heliumkern omgezet in koolstof en zuurstof voordat de hoge temperatuur de degeneratie opheft. De kern zet dan alsnog uit, de fusie stabiliseert en de ster zelf krimpt. Dit proces verloopt erg snel, en wordt de **heliumflits** genoemd. In Figuur 3.2 is een streepjeslijn getekend omdat we dit proces met het gebruikte model niet exact kunnen uitrekenen.

Tussen punt **F** en punt **G** bevindt de ster zich op de **horizontale tak** (Engels: *horizontal branch*; **HB**) waar helium in de kern op een gecontroleerde manier fuseert tot koolstof en zuurstof (zie Tabel 2.1 op pagina 34 en Figuur 3.3b). Deze fase lijkt op de hoofdreeks, maar met een andere “brandstof”. Aan het einde van de HB is het helium in de kern uitgeput, en in het stuk **G–H** gebeurt iets soortgelijks als in punt **B**: de kern trekt samen en er ontstaat een fusieschil. In dit geval is dat een heliumfusieschil om de CO-kern (zie Figuur 3.3c). De fase **H–I** wordt de **asymptotische reuzentak** (**AGB**) genoemd. De ster wordt groter en helderder dan op de RGB. De **sterrenwind** wordt hierdoor zó sterk, dat de ster instabiel wordt, gaat pulseren (zie Fig. 3.4) en de stermantel uiteindelijk verdwijnt: van binnen omgezet in CO en toegevoegd aan de kern; van buiten “weggeblazen”, de ruimte in. Wat overblijft is de sterkern, in het geval van de Zon een CO-kern met een massa van circa $0.6 M_{\odot}$, en een mantel van circa $0.01 R_{\odot}$. Dit laatste is te weinig om de druk te leveren die nodig is om de mantel te ondersteunen, en deze zakt als een pudding in elkaar, op de kern. Doordat het oppervlak dichterbij de hete kern komt, neemt de oppervlaktetemperatuur toe en beweegt de ster weer naar links in het Hertzsprung-Russelldiagram.

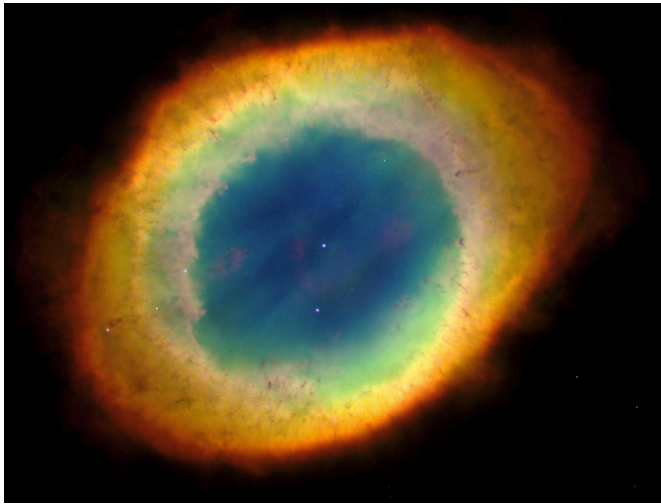
De energetische straling van de steeds heter wordende ster straalt de voormalige mantel aan, die nog als een nevel op de ster hangt. We zien dit als een **planetaire nevel**, vaak te zien als een klein schijfje dat aan een planeet doet denken. De ster wordt in deze fase ook wel *centrale ster van de planetaire nevel* (**CSPN**) genoemd (zie Fig. 3.5).

3.2 Hoge-massasterren

Zware sterren volgen dezelfde natuurkundewetten als lichte sterren, maar de massa van een ster blijkt de voornaamste factor die het lot van een ster bepaalt. We zagen al in Vgl. 1.19 dat de **lichtkracht** van een (hoofdreeks)ster zeer sterk afhangt van de massa, waardoor hoge-massasterren zich veel korter op de hoofdreeks bevinden dan lage-massasterren (Vgl. 1.20). We zullen hier zien dat ook de laatste evolutiefasen en de eindproducten van zware sterren sterk verschillen van die van lage-massasterren,



Figuur 3.4: De ster *Mira Ceti* is een AGB-ster die hevige pulsaties en schommelingen in lichtkracht vertoont (links). Rechts: een Hubble-opname toont dat de ster instabiel is en in hoog tempo massa verliest. De ster heeft $M \sim 1.18 M_{\odot}$, $R \sim 350 R_{\odot}$, $L \sim 9000 L_{\odot}$ en $T_{\text{eff}} \sim 3000 \text{ K}$.



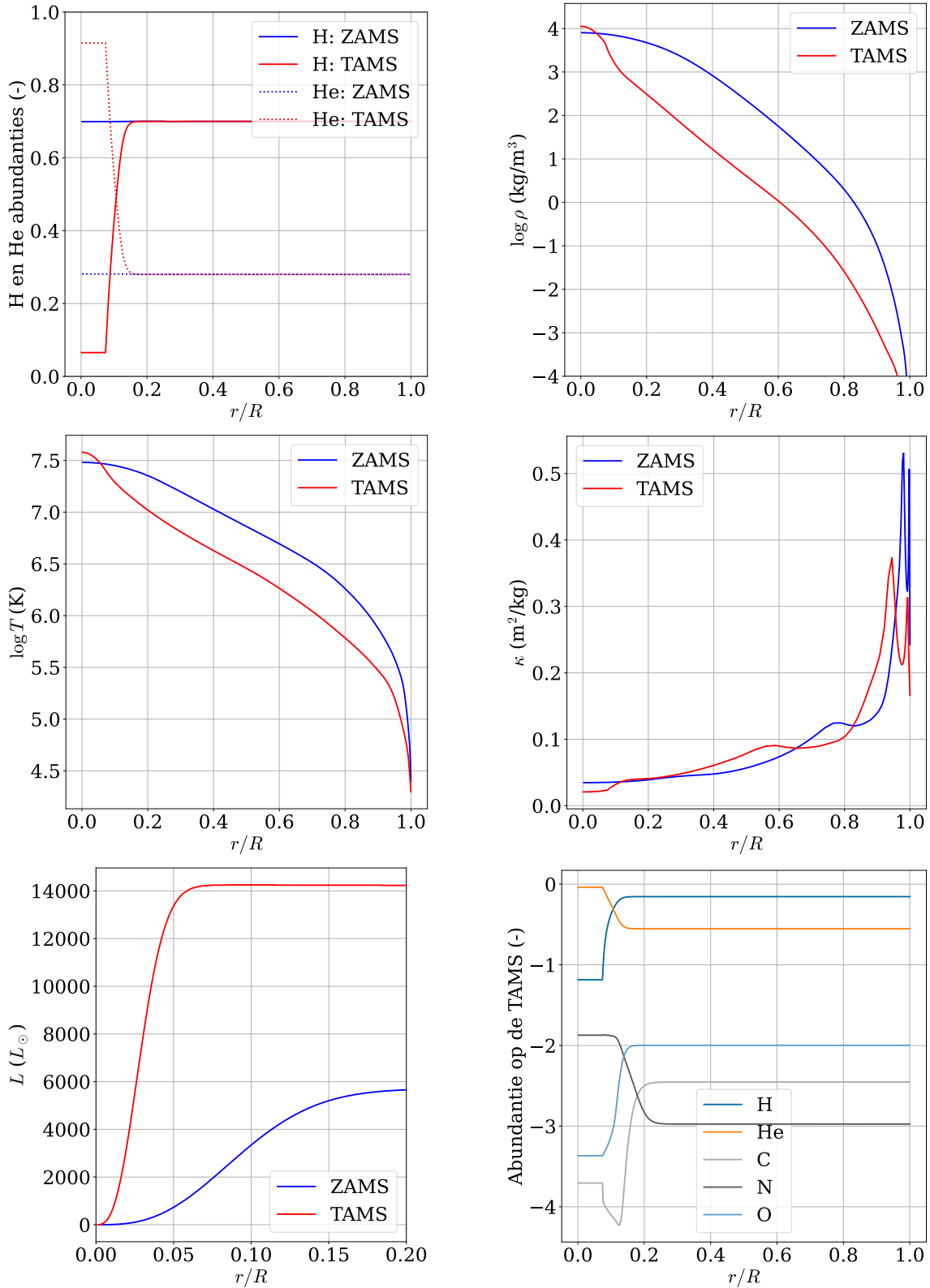
Figuur 3.5: De *Ringnevel* in het sterrenbeeld *Lier* is een van de bekendste planetaire nevels. De oude, hete sterkern is nog zichtbaar als de centrale ster (CSPN).

onder andere doordat hoge-massasterren een hogere centrale temperatuur bereiken (Vgl. 2.20), waardoor meer stadia van kernfusie mogelijk worden (Tabel 2.1 op pagina 34).

3.2.1 De hoofdreeks

Figuur 3.6 toont de structuur van een ster van 10 zonsmassa's, voor de **ZAMS** en de **TAMS**. Zeer globaal gezien lijken deze profielen op die van een ster met $M = 1 M_{\odot}$ in Figuur 3.1, maar als we naar de details kijken valt een aantal verschillen op. Om te beginnen heeft een $10 M_{\odot}$ een **lagere centrale dichtheid** dan een $1 M_{\odot}$ -ster (tweede panel van Fig. 3.6). Dit kan worden verklaard door de hogere **centrale temperatuur** van de $10 M_{\odot}$ -ster (derde panel): volgens Vgl. 2.14 draagt de **stralingsdruk** veel meer bij, waardoor de **gasdruk** minder hoog hoeft te zijn om toch **hydrostatisch evenwicht** te bereiken.

In panel 4 van Fig. 3.6 zien we dat de **opaciteit** nergens zo hoog wordt als in de buitenlagen van een $1 M_{\odot}$ -ster. Het gevolg is dat een $10 M_{\odot}$ -ster een **radiatieve mantel** heeft, geen convectieve; het energietransport verloopt voldoende efficiënt via straling. Panel 5 toont dat het **lichtkrachtprofiel** van de $10 M_{\odot}$ -ster veel steiler is dan dat van een $1 M_{\odot}$ -ster, zeker voor de TAMS. Waar de halve lichtkracht van de laatste bereikt wordt op $r/R \sim 0.05$ is dat voor de eerste rond $r/R \sim 0.025$: een verschil van een factor twee in straal, en een factor acht in volume. Die halve lichtkracht wordt opgewekt in de binnenste $\sim 10^{-5}$



Figuur 3.6: Gedetailleerde structuurmodellen voor een ster met $M = 10 M_{\odot}$ en de samenstelling van de Zon. De panels tonen dezelfde grootheden als in Figuur 3.1, voor de ZAMS en (bijna) de TAMS. Het vijfde panel toont een nog kleinere fractie van het binnenste van de ster, het laatste panel is weer alleen voor de TAMS.

van het volume van de ster! Dit is verklaarbaar door de hogere kerntemperatuur; de waterstoffusie vindt vrijwel volledig plaats via de CNO-cyclus, waardoor de fusiesnelheid hoog is, maar snel afneemt met de afnemende temperatuur naar buiten toe (zie H. 2.5.1).

Doordat de lichtkracht zo geconcentreerd is, is de flux $L(r)/4\pi r^2$ in het centrum zeer hoog. In de eerste

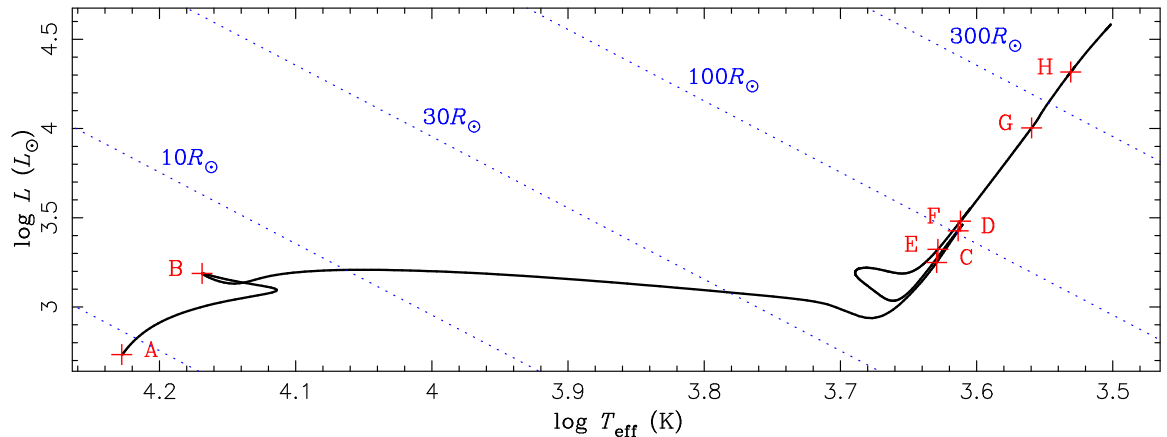
term van Vgl. 2.6 zien we dat dat betekent dat de **radiatieve temperatuursgradiënt** zeer steil is, en dat **convectie** plaats kan vinden in de sterkern. Doordat heet gas hier stijgt en kouder gas daalt, wordt de kern van een zware ster sterk **gemengd** door de convectie. Deze **mixing** verklaart de vlakke **abundantieprofielen** in het eerste panel van Fig. 3.6. Wanneer de convectieve kern zich tot buiten de kernfusiezone uitstrekt, kan extra waterstof uit gebieden waar de temperatuur te laag is voor fusie worden getransporteerd naar het centrum, waar het alsnog kan fuseren. Hoofdrekssterren met $M \gtrsim 1.2 M_{\odot}$ hebben zo'n convectieve kern.⁴

Gedurende de hoofdreks groeit een $10 M_{\odot}$ -ster van $\sim 4 R_{\odot}$ naar $\sim 11 R_{\odot}$, koelt af van ~ 25 kK tot 20 kK, maar wordt door de grotere straal toch circa 150% helderder (van 5.7 naar $14.2 \times 10^3 L_{\odot}$).

3.2.2 Na de hoofdreks

Figuur 3.7 toont het evolutiespoor van een $5 M_{\odot}$ -ster. We zien dat de ster iets helderder en koeler wordt gedurende de **hoofdreks** (punt **A–B**). Rond de **TAMS** maakt de ster een ruk naar links. Dit komt doordat het waterstof opraakt in de gehele convectieve kern tegelijk, waardoor deze als geheel krimpt. Vervolgens maakt de ster een grote oversteek naar de **rode-reuzentak**, waar **waterstofschildfusie** plaatsvindt. De reuzentak (punt **C–D**) voor zwaardere sterren is korter dan die voor lichtere sterren. Door de hogere temperatuur is de kern niet gedegenerereerd, en helium kan gecontroleerd ontbranden, zonder *heliumflits* (punt **D**). Op de **horizontale tak** (**HB**; punt **D–E**), waar helium fuseert in de kern, vertonen sterren met $4\text{--}10 M_{\odot}$ een lus naar links, de zogenaamde *blue loop* (zie ook Figuur 3.10). Wanneer het helium in de kern uitgeput raakt gaat de ster de **AGB** op en worden zowel waterstof als helium gefuseerd in schillen (zie Figuur 3.3c). De ster wordt hierbij duidelijk groter dan een $1 M_{\odot}$ -ster ($\gg 300 R_{\odot}$). Zeer zware sterren, met $M \gtrsim 11 M_{\odot}$, evolueren na de hoofdreks bij vrijwel **constante lichtkracht** en vertonen nauwelijks een reuzentak (zie Fig. 3.10).

Zware sterren hebben sterke **sterrenwinden**. Dit massaverlies speelt een grote rol bij de evolutie en eindmassa van de ster. De precieze sterkte van deze winden is zeer **onzeker** en zeer zware sterren verliezen mogelijk hun **hele waterstofmantel**, worden hierdoor weer **heter en blauwer** en gaan verder als **heliumsterren**, ook wel *Wolf-Rayetsterren* genoemd (zie Figuur 3.8b).



Figuur 3.7: Een Hertzsprung-Russelldiagram met het evolutiespoor van een $5 M_{\odot}$ -ster.

3.2.3 De laatste evolutiefasen van zware sterren

Het precieze lot van zwaardere sterren, en waar exact de grenzen liggen voor de verschillende scenario's, is niet altijd goed bekend, onder andere doordat zware sterren zeer zeldzaam zijn (zie Tabel 3.1), en door de onzekerheden in de sterkte van de sterrenwind. Sterren tot $\sim 6 M_{\odot}$ eindigen hun kernfusie bij koolstof en zuurstof en leveren een **CO-WD** op. Bij sterren met een ZAMS-massa van $\sim 6 M_{\odot}$ – $8 M_{\odot}$ kan C-fusie plaatsvinden in de gedeeltelijk gedegenerereerde kern en wordt een **ONe(Mg)-WD** gevormd.

⁴Hoofdrekssterren met $M \lesssim 1.3 M_{\odot}$, zoals de Zon, hebben juist een convectieve *mantel*, die steeds dieper is voor lichtere sterren. Hoofdrekssterren met $M \lesssim 0.35 M_{\odot}$ zijn *volledig convectief*.



Figuur 3.8: Links (a): de *rode superreus* Betelgeuze linksboven in het sterrenbeeld Orion heeft een massa van circa $18 M_{\odot}$, een straal van $\sim 700 - 1000 R_{\odot}$ en een lichtkracht van $L \sim 87\,100 L_{\odot}$. De ster is duidelijk niet sferisch, en de variaties in lichtkracht van de afgelopen jaren doen vermoeden dat de ster dicht bij een supernova-explosie is. Rechts (b): De *Wolf-Rayetster* WR 124 heeft een massa van circa $20 M_{\odot}$. De nevel rond de ster wijst op krachtige uitbarstingen; waarschijnlijk heeft de ster al een significant deel van zijn massa verloren.

Voor sterren met $8 M_{\odot} \lesssim M_{\text{ZAMS}} \lesssim 10 M_{\odot}$ wordt de ONeMg-kern volledig relativistisch gedegenerereerd en bereikt deze de **Chandrasekhar massa** (zie H. 3.5.1): de elektronen kunnen geen hogere druk genereren en de kern stort in. Hierbij worden protonen en elektronen samengeperst tot neutronen en ontstaat een **neutronenster**. Door de vrijgekomen potentiële energie ontploffen de buitenlagen van de ster tot wat we een **type-II-supernova** noemen: de explosie van een zware ster door zijn instortende kern, ofwel een **core-collapse supernova** (zie H. 3.4).

Voor een ster met $M_{\text{ZAMS}} \gtrsim 10 M_{\odot}$ kan koolstof stabiel ontbranden in de kern en ontstaan zuurstof, neon en magnesium, waaruit in een volgend stadium silicium en zwavel kunnen ontstaan en uiteindelijk **ijzer en nikkel** (zie Tabel 2.1 op pagina 34). Hierbij ontstaat een **uienschilstructuur**, waarbij inerte lagen met verschillende samenstelling worden gescheiden door **fusieschillen** die lichtere elementen uit hun buitenlaag omzetten in zwaardere elementen en toevoegen aan hun binnenlaag (zie Figuur 3.9). Zoals we al zagen in Figuur 2.9 op pagina 35 kan uit verdere kernfusie geen energie worden geput, zodat de (stralings)druk in de kern wegvalt, de kern instort en een **type-II-supernova** ontstaat. Afhankelijk van de massa van de kern op dat moment wordt een **neutronenster** of **zwart gat** gevormd, of misschien blijft helemaal *niets* over.

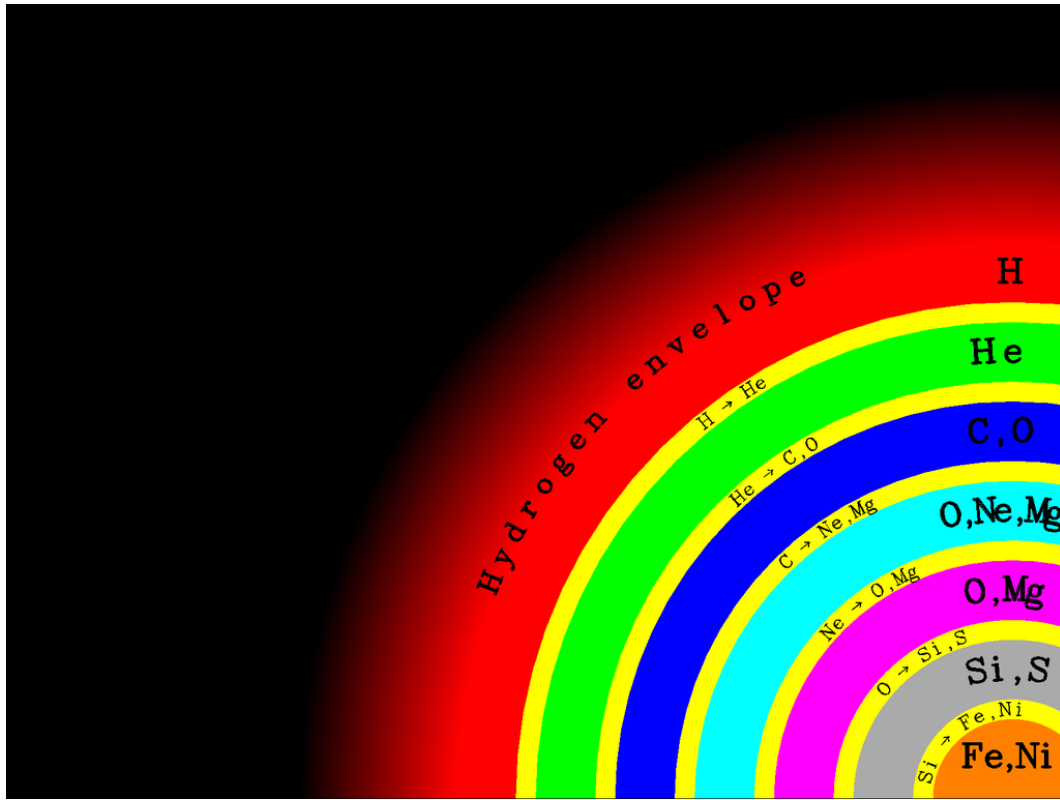
3.3 Een overzicht van sterevolutie

3.3.1 Eigenschappen van hoofdreekssterren

Tabel 3.1 toont de belangrijkste eigenschappen van sterren halverwege de hoofdreeks. We zien hier gekwantificeerd hoe de belangrijkste eigenschappen afhangen van de massa van de ster. Dit maakt nog eens duidelijk hoe de straal slechts zwak schaalt met de massa, maar grootheden als de nucleaire tijdschaal, temperatuur en vooral lichtkracht zeer sterk. De laatste kolom geeft het relatieve aantal sterren met deze massa voor iedere ster met de massa van de Zon. Dit geeft aan hoe zeldzaam zware sterren zijn!

3.3.2 Evolutiesporen in het Hertzsprung-Russelldiagram

Figuur 3.10 toont een kleur-fluxdiagram voor nabije sterren waarvan de afstand nauwkeurig gemeten is door Hipparcos, met de evolutiesporen van een aantal sterren met massa's tussen $0.5 M_{\odot}$ en $20 M_{\odot}$ ingetekend. Het wordt duidelijk dat zware sterren inderdaad zeldzaam zijn; we zien geen sterren zwaarder dan $20 M_{\odot}$ die dicht genoeg bij de Zon staan voor een nauwkeurige parallaxmeting. Doordat we de verschillende sporen kunnen vergelijken is te zien dat waar lichtere sterren een kleine oversteek maken naar de reuzentak (RGB) en een lange RGB hebben, zwaardere sterren vooral *horizontaal*, bij vrijwel constante lichtkracht, door het Hertzsprung-Russelldiagram bewegen. Ook zien we dat een ster van



Figuur 3.9: De uienchilstructuur in de eindfase van een zware ster.

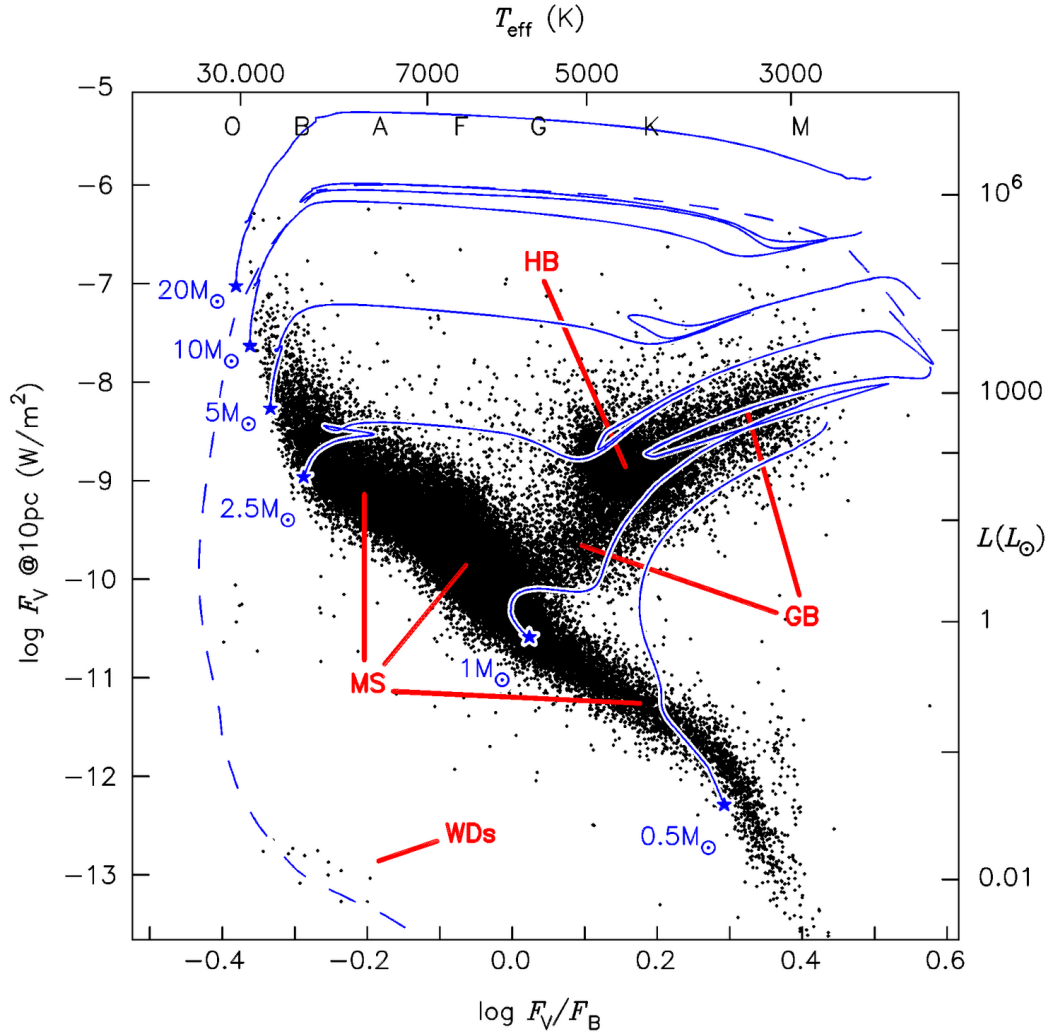
Tabel 3.1: Eigenschappen van sterren met zonnemetalliciteit halverwege de hoofdreeks ($X = 0.35$). De kolommen geven de massa, leeftijd, straal, lichtkracht, oppervlaktetemperatuur, kerntemperatuur en het relatieve aantal van deze sterren in vergelijking met $1 M_{\odot}$ -sterren.

M ($M_{\odot}$)	t (Myr)	R ($R_{\odot}$)	L ($L_{\odot}$)	$T_{\odot}$ (K)	T_c (10^6 K)	Aantal (t.o.v. $1 M_{\odot}$)
0.5	52 600	0.50	0.05	4410	9.8	7.07
0.8	11 600	0.79	0.38	5650	13.4	2.34
1.0	4900	1.01	1.05	6350	15.9	1.00
1.5	1660	1.95	6.75	7200	20.9	0.131
2.0	582	2.23	20.4	8770	22.5	0.0232
2.5	405	2.80	57.8	10 100	24.1	9.59×10^{-3}
3.0	246	3.09	120	11 400	25.2	3.80×10^{-3}
5.0	70.6	4.19	895	16 000	28.6	3.27×10^{-4}
10.0	12.7	5.74	8590	23 800	32.8	1.16×10^{-5}
20.0	5.18	8.78	67 900	32 000	37.0	9.3×10^{-7}
50.0	2.41	15.9	527 000	39 600	41.4	5×10^{-8}

$10 M_{\odot}$ een veel grotere *blue loop* maakt op de HB dan een $5 M_{\odot}$ -ster. De sporen van de zwaardere sterren in deze figuur eindigen meestal wanneer koolstoffusie begint. Vaak verloopt de rest van de evolutie zo snel (zie Tabel 2.1 op pagina 34) dat de ster ook rond die plek in het HRD een supernova wordt, al kan de ster door extreem massaverlies zijn mantel verliezen, heter worden en naar links bewegen (zie Fig. 3.8b).

3.3.3 Leeftijden en isochronen

Figuur 3.11a laat een Hertzsprung-Russelldiagram zien met de evolutiesporen van sterren met massa's tussen $1 M_{\odot}$ en $40 M_{\odot}$. Door van ieder track het model te vinden met een gegeven leeftijd, kan een **isochroon** worden gecreëerd: een lijn die sterren van verschillende massa maar gelijke leeftijd verbindt. Deze isochronen kunnen worden vergeleken met het waargenomen HRD van een stercluster, waardoor de leeftijd van de cluster kan worden bepaald.



Figuur 3.10: Het kleur-fluxdiagram voor nabije sterren van Figuur 1.10, maar nu met de evolutiesporen van sterren met massa's tussen $0.5 M_{\odot}$ en $20 M_{\odot}$. Voor de $1 M_{\odot}$ -ster is gestreept het traject naar planetaire nevel en witte dwerg ingetekend.

Figuur 3.11b toont het HRD van de sterren in de open cluster M 67. Daaroverheen zijn de evolutiesporen van sterren met $1.25 M_{\odot}$ en $1.50 M_{\odot}$ geplot. Dit laat zien dat clustersterren met een massa tussen deze twee waarden net van de hoofdreeks af evolueren. De leeftijd van de cluster ligt dus tussen de TAMS-leeftijden van de sterren met deze twee massa's.

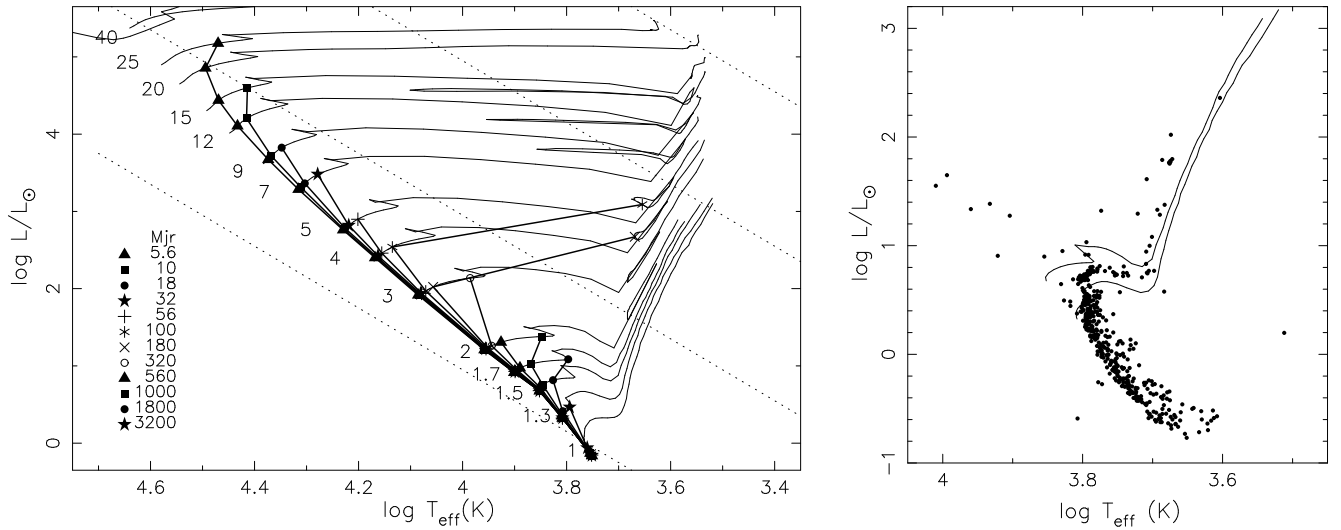
3.4 Supernovae

Wanneer de kern van een zware ster instort worden protonen en elektronen samengedrukt tot neutronen:

$$p + e^{-} \rightarrow n + \nu_e. \quad (3.1)$$

Hierbij komen neutrino's vrij.⁵ Bij **supernova** SN 1987a in de Grote Magelhaese Wolk (zie Figuur 3.12a) werden door drie detectoren inderdaad 25 (anti)neutrino's gedetecteerd gedurende circa 12 seconden. De vrijkomende neutrino's worden deels geabsorbeerd in de instortende mantel, die daardoor explodeert als een supernova. Doordat veel neutronen ontstaan, kunnen deze worden ingevangen door zware atoomkernen, waardoor elementen zwaarder dan ijzer ontstaan. Uit waarnemingen blijkt dat **supernovares-tanten**, zoals de **Krabnevel** (zie Figuur 3.12b), inderdaad vaak **neutronensterren** bevatten, wat de theorie bevestigt.

⁵En antineutrino's in β -verval: $n \rightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}_e$.



Figuur 3.11: Links (a): door punten van gelijke leeftijd uit evolutiesporen te halen kunnen we isochronen bepalen. Rechts (b): Een HRD van M67 met evolutiesporen van sterren met massa's van $1.25 M_{\odot}$ en $1.50 M_{\odot}$.



Figuur 3.12: Links (a): Een gebiedje in de Grote Magelhaese Wolk (LMC) met een pijltje wijzend naar een blauwe superreus, en hetzelfde gebiedje tijdens een type-II-supernova: SN 1987a. Rechts (b): De Krabnevel in het sterrenbeeld Stier staat op een plek aan de hemel waar Chinese en Japanse waarnemers in het jaar 1054 een “nieuwe ster” optekenden, die ook overdag zichtbaar was: SN 1054! De dynamica van de expanderende nevel toont dat deze circa 1000 jaar oud is. In het centrum van de nevel bevindt zich een neutronenster: de Krabpulsar.

De energie voor de explosie van de buitenlagen van de ster komt uit de potentiële energie die vrijkomt bij het instorten van de kern. Als we er vanuit gaan dat de kern implodeert van de omvang van een witte dwerg naar die van een neutronenster, dan vinden we:⁶

$$\Delta E_{\text{tot}} \sim -\frac{3}{5} \cdot \frac{GM^2}{2R_{\text{wd}}} - \left(-\frac{3}{5} \cdot \frac{GM^2}{2R_{\text{ns}}} \right) \sim \frac{3GM^2}{10R_{\text{ns}}} \sim \frac{3G \cdot (1.4 M_{\odot})^2}{10 \cdot 12 \text{ km}} \sim 2 \times 10^{46} \text{ J}. \quad (3.2)$$

Hierbij hebben we de initiële potentiële energie verwaarloosd omdat $R_{\text{wd}} \gg R_{\text{ns}}$ en hebben we de typische massa en straal van een neutronenster gebruikt. Supernova SN 1054 was 23 dagen lang overdag te zien en 642 dagen 's nachts.⁷ Als we aannemen dat de bovenstaande energie in een jaar tijd wordt uitgezonden, vinden we een gemiddelde lichtkracht van $2 \times 10^{12} L_{\odot}$, ongeveer de helderheid van een sterrenstelsel! (Zie H. 6.)

Als we typische uitdijnsnelheden en massa's van supernovarestanten aannemen, zien we dat een klein deel

⁶De factor $3/5$ geldt voor een bol met homogene dichtheid.

⁷Bekende supernova's die met het blote oog zichtbaar waren vonden plaats in de jaren 185, 1006, 1054, 1572 en 1604.

van de vrijkomende energie van de instortende kern in de uitdijng van de nevel gaat zitten:

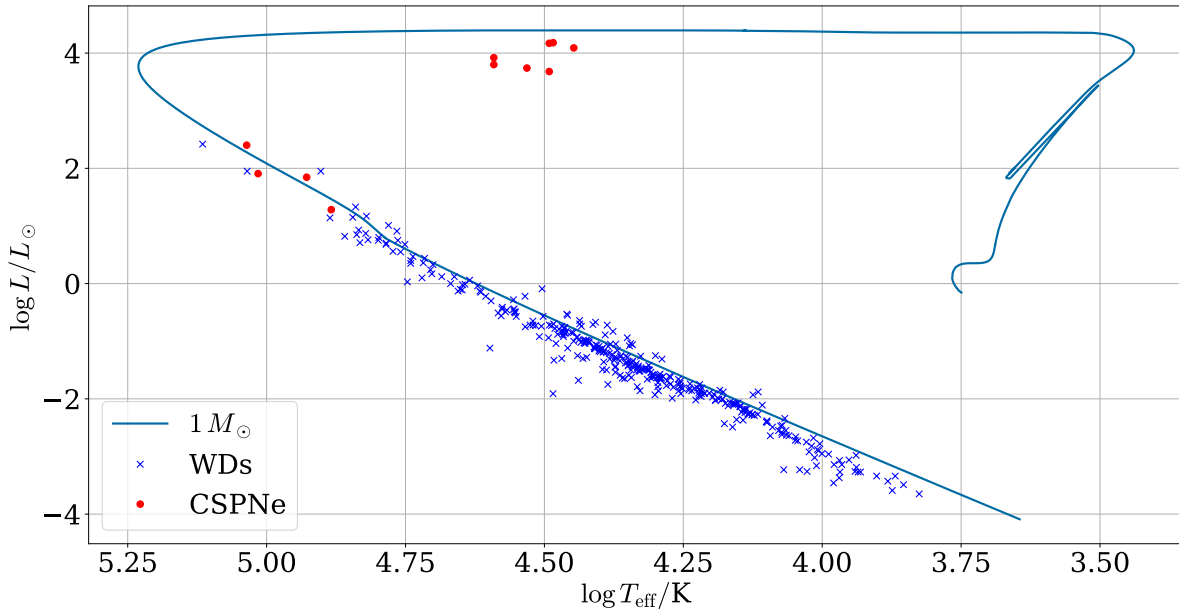
$$E_{\text{kin}} \sim \frac{1}{2} M v^2 \sim \frac{1}{2} 10 M_{\odot} (10^4 \text{ km/s})^2 \sim 10^{45} \text{ J}. \quad (3.3)$$

Bij de kernimplosie en ontplofing van een zware ster zijn waterstoflijnen, veroorzaakt door het waterstof in de mantel, duidelijk aanwezig in het spectrum. Een supernova met duidelijke waterstoflijnen wordt een **type-II-supernova** genoemd. Een supernova *zonder* waterstoflijnen heet *type I*.

3.5 Compacte sterren

3.5.1 Witte dwergen

Nadat de mantel van een post-AGB-ster ($M_{\text{ZAMS}} \lesssim 8 M_{\odot}$) helemaal is verdwenen, is de ster gekrompen tot de afmetingen van de kern van de oorspronkelijke ster. De materie van zo'n ster is zeer dicht en gedegeneerd. We noemen zo'n ster een **witte dwerg**. Er vindt geen kernfusie meer plaats, en de hete ex-kern kan alleen nog maar afkoelen door het uitzenden van straling. Dit gebeurt bij een constante straal, en de ster beweegt van linksboven naar rechtsonder in het HRD. Dit is te zien in Figuur 3.13. In het begin verloopt die afkoeling snel, daarna steeds langzamer, totdat de ster zwak en onzichtbaar wordt.



Figuur 3.13: *Evolutiespoor van een $1 M_{\odot}$ -ster, uitgezoomd zodat de evolutie tot planetaire nevel en witte dwerg zichtbaar wordt. De symbolen tonen waargenomen witte dwergen en centrale sterren van planetaire nevels.*

Een witte dwerg is de eindfase van een ster met een ZAMS-massa van circa $8\text{--}10 M_{\odot}$ of lager. Aangezien dit meer dan 90% van alle sterren betreft, eindigen veruit de meeste sterren als witte dwerg. De meeste witte dwergen bestaan uit helium (**He-WD**) of koolstof en zuurstof (**CO-WD**). Een typische witte dwerg heeft een massa van circa $0.6 M_{\odot}$ en een straal van $\sim 0.01 R_{\odot}$ en daarmee een gemiddelde dichtheid van $10^5\text{--}10^6$ keer die van water.

Omdat witte dwergen *gedegeneerd* zijn kunnen we voor de centrale druk ruwweg Vgl. 2.19 op pagina 36 gelijkstellen aan Vgl. 2.15 op pagina 32:

$$P_c \sim P_{d,c} \rightarrow \frac{3GM^2}{4\pi R^4} \sim \frac{K_d}{m_e} \left(\frac{\rho_c}{\mu_e m_H} \right)^{5/3} \sim \frac{K_d}{m_e} \left(\frac{fM}{\mu_e m_H R^3} \right)^{5/3}, \quad (3.4)$$

waar $f \sim 1$ in de laatste stap het dichtheidsprofiel van de witte dwerg beschrijft. Hieruit volgt dat

$$R_{\text{wd}} \sim \frac{4\pi K_d}{3Gm_e} \left(\frac{f}{\mu_e m_H} \right)^{5/3} M_{\text{wd}}^{-1/3}, \quad (3.5)$$

en we vinden een omgekeerde massa-straalrelatie voor witte dwergen: zwaardere witte dwergen zijn kleiner dan lichtere!⁸ Uit gedetailleerde modellen blijkt dat voor witte dwergen met een massa $M_{\text{wd}} \lesssim 0.6 M_{\odot}$ een aardige benadering van de straal wordt gegeven door⁹

$$R_{\text{wd}} \approx 0.012 R_{\odot} \left(\frac{M_{\text{wd}}}{M_{\odot}} \right)^{-1/3}. \quad (3.6)$$

We zien dus dat de sterren met $R \sim 0.01 R_{\odot}$ linksonder in het Hertzsprung-Russelldiagram in Figuur 1.10 op pagina 21 inderdaad witte dwergen zijn!

Bovenstaande vergelijkingen gelden voor witte dwergen met een lage massa. Voor witte dwergen met een massa hoger dan circa $0.6 M_{\odot}$ wordt het gas **relativistisch gedegenereerd** en moeten we Vgl. 2.16 gaan gebruiken. Als een witte dwerg zwaarder wordt, krimpt deze en neemt de druk in het centrum toe om de sterkere zwaartekracht te weerstaan. Dit kan door de elektronen sneller te laten bewegen. De degeneratie wordt als eerste relativistisch in de kern, waar de dichtheid het hoogst is. Naarmate de ster zwaarder wordt kruipt de grens tussen de relativistische kern en de niet-relativistische buitenlagen steeds dichter naar het oppervlak, totdat de ster *volledig* relativistisch gedegenereerd is. De elektronen hebben dan allemaal de lichtsnelheid en kunnen niet sneller bewegen. De ster kan dus niet verder krimpen.

De massa waarbij dit gebeurt kunnen we vinden door aan te nemen dat de witte dwerg volledig relativistisch gedegenereerd is. Als we dan dezelfde stappen maken als hierboven, maar met Vgl. 2.16, dan vinden we voor de centrale druk

$$P_c \sim P_{\text{d,r,c}} \rightarrow \frac{3GM^2}{4\pi R^4} \sim K_{\text{d,r}} \left(\frac{\rho_c}{\mu_e m_H} \right)^{4/3} \sim K_{\text{d,r}} \left(\frac{fM}{\mu_e m_H R^3} \right)^{4/3}. \quad (3.7)$$

Hieruit kunnen we de massa oplossen, die we de **Chandrasekhar massa** M_{Ch} noemen:

$$M_{\text{Ch}} \sim \left(\frac{4\pi K_{\text{d,r}}}{3G} \right)^{3/2} \left(\frac{f}{\mu_e m_H} \right)^2 \sim 1.44 M_{\odot}. \quad (3.8)$$

Het blijkt dat deze massa *onafhankelijk* is van de straal en een constante waarde heeft!¹⁰

Als de ster zwaarder zou worden en verder zou moeten krimpen, is er geen weerstand meer tegen de hogere zwaartekracht. De witte dwerg zou ineensstorten en een neutronenster vormen,¹¹ ware het niet dat de temperatuur oploopt door de sterke compressie. Hierdoor ontstaat kernfusie, loopt de temperatuur nog verder op, ontstaat er meer kernfusie, *et cetera*. In een niet-gedegenereerde ster zou de druk oplopen, het gas expanderen en afkoelen, maar hier gebeurt dat niet. De algemene aanname is dat een witte dwerg explodeert als een **type-Ia-supernova**¹² zodra deze circa 99% van de Chandrasekhar massa bereikt.¹³

Nauenberg (1972) geeft een analytische formule waarmee de straal van een witte dwerg uitgerekend kan worden:

$$\left(\frac{R_{\text{wd}}}{R_{\odot}} \right) \approx 0.01125 \left[\left(\frac{M_{\text{wd}}}{1.454 M_{\odot}} \right)^{-2/3} - \left(\frac{M_{\text{wd}}}{1.454 M_{\odot}} \right)^{2/3} \right]^{1/2}. \quad (3.9)$$

Deze vergelijking is weergegeven in Figuur 3.14. We zien dat de grafieklijn (bijna) verticaal wordt nabij $M_{\text{wd}} \sim M_{\text{Ch}}$ — de straal wordt dus inderdaad “onafhankelijk” van de massa ($R_{\text{wd}} \sim 0$) bij deze bovenlimiet.

⁸Hetzelfde geldt voor de gedegenereerde (helium)kernen van lage-massareuzen.

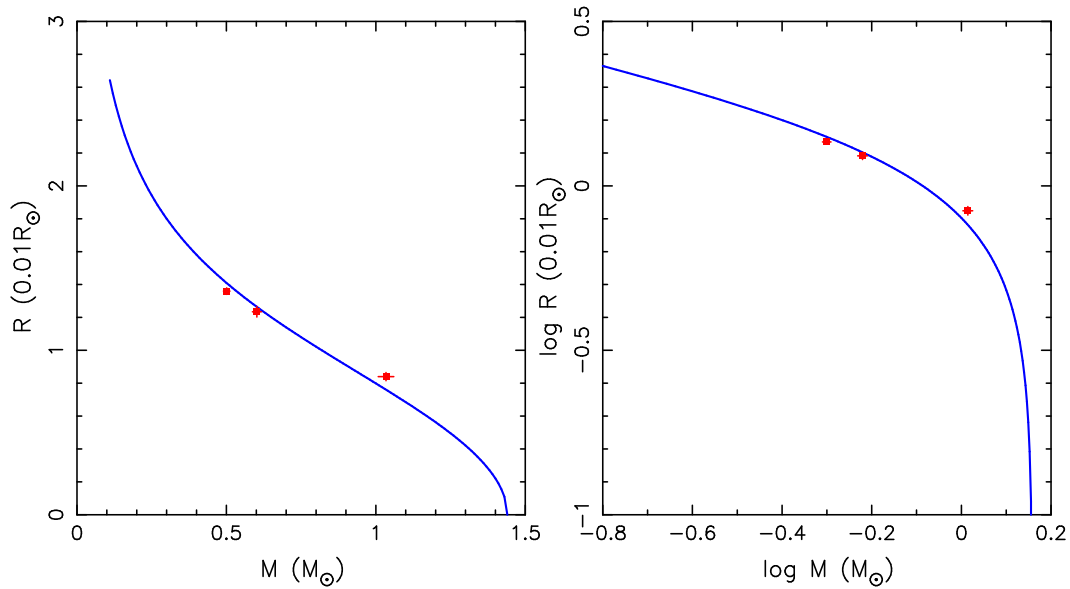
⁹Dit geldt voor Vgl. 3.4 met $\mu_e \approx 2$ en $f \sim 0.7$.

¹⁰De numerieke waarde in Vgl. 3.8 komt overeen met $\mu_e \approx 2$ en $f \sim 0.73$ in Vgl. 3.7.

¹¹De ster zou instorten, waarbij de elektronen en protonen zouden worden samengeperst tot neutronen. De gedegenereerde *neutronen* zouden weer een druk kunnen opbrengen om de ineensstorting tot staan te brengen.

¹²Supernovae van type I vertonen geen waterstof in hun spectrum, in dit geval doordat het om een witte dwerg gaat.

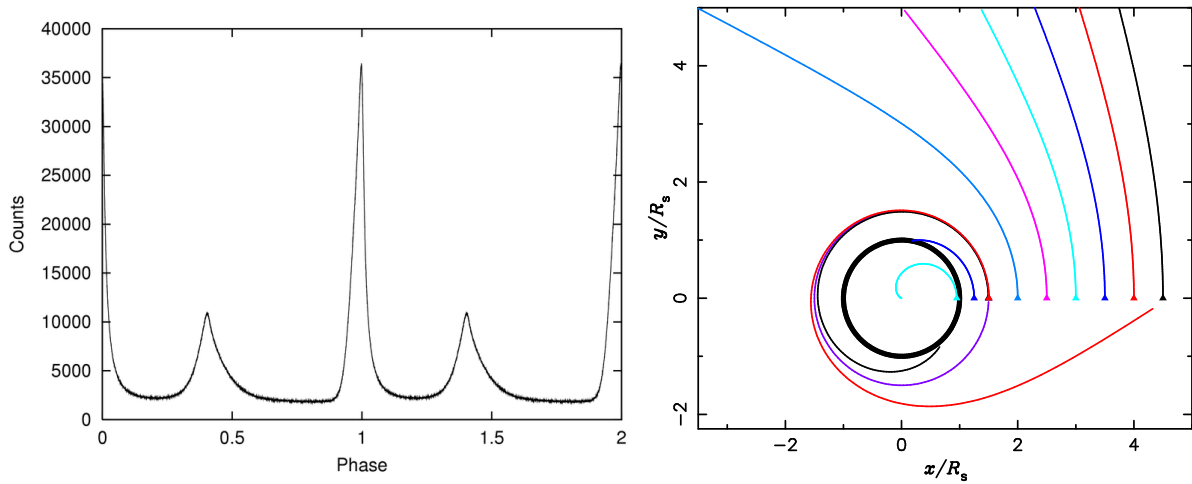
¹³Bijvoorbeeld door *accretie* in een dubbelster (zie Hoofdstuk 4.5).



Figuur 3.14: Massa-straalrelatie voor witte dwergen volgens Nauenberg (1972), vergeleken met een drietal witte dwergen waarvan de massa en straal nauwkeurig zijn gemeten.

3.5.2 Neutronensterren

In veel supernovarestanten nemen we **neutronensterren** waar, wat een aanwijzing is dat zij inderdaad worden gevormd in de kernimplosie van een zware ster. Vaak zien we zo'n neutronenster als een **pulsar**; door het sterke magneetveld zendt de ster twee bundels (radio)straling uit aan de polen. Als de magnetische as niet samenvalt met de rotatie-as, werkt dit als een *vuurtoren*, die we kunnen zien in het geval dat de bundels ook langs de richting van de Aarde zwiepen.



Figuur 3.15: Links (a): Het signaal van de Krabpulsar: een roterende neutronenster met een frequentie van ~ 30 Hz. Rechts (b): Fotonbanen rond een zwart gat.

De precieze toestandsvergelijking van een neutronenster is nog niet bekend.¹⁴ Om een idee te krijgen, kunnen we Vergelijking 2.15 voor de druk voor een gedegenereerd elektronengas schalen naar een gas waar de druk wordt geleverd door *gedegenereerde neutronen*. We vinden dan

$$\frac{P_{d,n}}{P_{d,e}} \sim \frac{m_e}{m_n} \left(\frac{\mu_e}{\mu_n} \right)^{5/3} \sim \frac{1}{579}, \quad (3.10)$$

doordat $\mu_e \sim 2$ voor een witte dwerg en $\mu_n \sim 1$ in een gas met vrijwel uitsluitend neutronen. Voor een gegeven dichtheid ρ is de gedegenereerde neutronendruk dus 579 keer lager dan de gedegenereerde

¹⁴De toestandsvergelijking kan worden opgemaakt uit de massa en straal, maar die laatste is lastig te meten. We zullen in Hoofdstuk 5 zien dat waarnemingen van *zwaartekrachtgolven* hier mogelijk verandering in kunnen brengen.

elektronendruk. Als we de ratio van stralen uit Vgl. 3.5 nemen voor gelijke massa vinden we de omgekeerde factor tussen de *stralen* van neutronensterren en witte dwergen:

$$\frac{R_{\text{ns}}}{R_{\text{wd}}} \sim \frac{m_e}{m_n} \left(\frac{\mu_e}{\mu_n} \right)^{5/3} \rightarrow R_{\text{ns}} \sim \frac{R_{\text{wd}}}{579}. \quad (3.11)$$

Veel modellen van gedetailleerde toestandsvergelijkingen geven een straal van $R_{\text{ns}} \sim 12$ km.

Ook de **Chandrasekhar**massa uit Vergelijking 3.8 kunnen we schalen voor een neutronenster:

$$\frac{M_{\text{Ch,ns}}}{M_{\text{Ch,wd}}} \sim \left(\frac{\mu_e}{\mu_n} \right)^2 \rightarrow M_{\text{Ch,ns}} \sim 4 M_{\text{Ch,wd}} \sim 5.8 M_{\odot}. \quad (3.12)$$

Gezien de onzekerheden is het goed mogelijk dat Vgl. 3.12 een overschatting is; mogelijk is $M_{\text{Ch,ns}} \sim 3 M_{\odot}$. We denken dat een neutronenster zwaarder dan deze limiet instort tot een zwart gat.¹⁵ De zwaarste neutronenster tot nu toe waargenomen, J0740+6620, heeft een massa van circa $2.1 M_{\odot}$.

3.5.3 Zwarte gaten

Hoe compacter een ster, des te hoger zijn **ontsnappingsnelheid** (Engels: *escape velocity*). De snelheid die nodig is om een steen met massa m zo hard omhoog te gooien dat deze aan de zwaartekracht van de Aarde ontsnapt, kan worden opgemaakt uit de potentiële en kinetische energiën (waarbij we luchtweerstand en mintekens negeren):

$$\frac{1}{2} m v_{\text{esc}}^2 = \frac{GMm}{R} \rightarrow v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (3.13)$$

Hierin zijn M en R de massa en straal van de planeet (of ander object) waarop we ons bevinden. Voor de Aarde vinden we $v_{\text{esc}} \approx 11.2$ km/s, voor de Zon $v_{\text{esc}} \approx 618$ km/s. Een witte dwerg met $M \sim 0.6 M_{\odot}$ heeft $v_{\text{esc}} \approx 4200$ km/s en een neutronenster $v_{\text{esc}} \approx 175\,000$ km/s; bijna 60% van de lichtsnelheid.

Onafhankelijk van elkaar bedachten Michell (1784) en Laplace (1795) dat een zeer compacte ster een dermate hoge ontsnappingsnelheid zou kunnen hebben dat het licht er niet aan zou kunnen ontsnappen. Zij noemden dit een *donkere ster*. Uit $v_{\text{esc}} = c$ vinden we dat de straal van zo'n ster gegeven wordt door

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (3.14)$$

Dit blijkt exact overeen te komen met de **Schwarzschildstraal** van een niet-roterend **zwart gat**, zoals volgt uit de **Algemene Relativiteitstheorie**. Op $r = 1.5 R_s$ bevindt zich de *fotonsfeer*, waar fotonen cirkelbanen kunnen beschrijven (zie Figuur 3.15b) en op $r = 3 R_s$ bevindt zich de *innermost stable circular orbit* **ISCO** waarbinnen deeltjes geen stabiele cirkelbanen kunnen hebben, die we nodig hebben in Hoofdstuk 5.6.3. Zwarte gaten hebben veel meer tegenintuïtieve eigenschappen, waarover je in de collegereeks *Zwarte gaten* meer kunt leren.

3.5.4 Relatie tussen ZAMS-massa en eindproduct

Van lage naar hoge ZAMS-massa kunnen we het lot van sterren als volgt samenvatten.

$M_{\text{ZAMS}} \lesssim 0.01 M_{\odot}$ (13 M_{J}): Deze gasbollen zijn te licht voor enige vorm van kernfusie, en noemen we **planeten**.

$0.01 M_{\odot} \lesssim M_{\text{ZAMS}} \lesssim 0.08 M_{\odot}$: Deze sterren kunnen geen waterstof fuseren via de pp- of CNO-cycli, maar wel deuterium en lithium. Ze worden **bruine dwergen** genoemd.

$0.08 M_{\odot} \lesssim M_{\text{ZAMS}} \lesssim 0.5 M_{\odot}$: M-dwergen fuseren waterstof, maar zijn te licht voor heliumfusie en eindigen dus als een **helium-witte dwerg**. Hun levensverwachting is (vele malen) langer dan de huidige leeftijd van het heelal! In **dubbelsterren** kunnen wel He-witte dwergen ontstaan binnen een Hubbletijd.

¹⁵ Al zijn er ook wetenschappers die denken dat er *quarksterren* bestaan, opgebouwd uit de elementaire deeltjes waaruit ook protonen en neutronen bestaan. Nog exotischer hypothesen omvatten bosonsterren, Plancksterren, donkere-materiesterren, *gravastars* en meer.

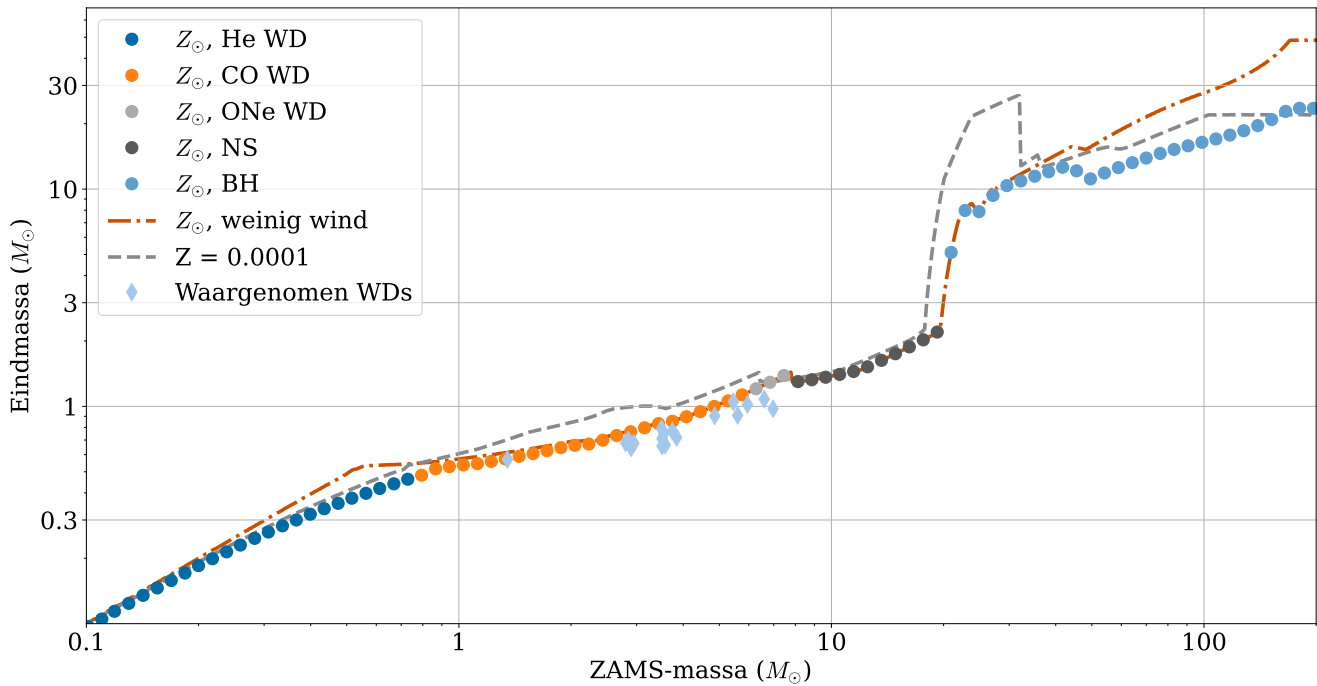
$0.5 M_{\odot} \lesssim M_{\text{ZAMS}} \lesssim 6 M_{\odot}$: Sterren als de Zon kunnen waterstof en helium fuseren, maar geen koolstof. Ze eindigen als **CO-witte dwerg**.

$6 M_{\odot} \lesssim M_{\text{ZAMS}} \lesssim 8 M_{\odot}$: Voor *enkelvoudige* sterren van deze massa's vindt waarschijnlijk koolstoffusie plaats in de gedeeltelijk gedegenereerde kern. Ze eindigen als **ONe(Mg)-witte dwergen**. In **dubbelsterren** kan een *koolstofflits* plaatsvinden in de gedegenereerde kern als de kernmassa groter is dan de **Chandrasekhar**massa. Mogelijk **ontploffen** deze sterren als geheel en blijft er **geen compact object** achter.

$8 M_{\odot} \lesssim M_{\text{ZAMS}} \lesssim 10 M_{\odot}$: Voor deze sterren bereikt de ONeMg-kern de **Chandrasekhar**massa en stort in. Het gevolg is een **type-II-supernova** met vermoedelijk een **neutronenster** als compact restant.

$M_{\text{ZAMS}} \gtrsim 10 M_{\odot}$: Zeer zware sterren kunnen stabiel koolstof fuseren en gaan waarschijnlijk door de bekende fusiestadia uit Tabel 2.1 op pagina 34: zuurstof, neon, magnesium, silicium en zwavel, totdat een **ijzer-nikkelkern** ontstaat. Vervolgens ontstaat een **core-collapse-supernova**, oftewel een **type-II-supernova**. Het compacte restant is, op een onzekere manier afhankelijk van de massa, een **neutronenster**, **zwart gat** of mogelijk **niets**, doordat de ster geheel ontploft.

Figuur 3.16 toont het type compact object en zijn massa als functie van de ZAMS-massa van de enkelvoudige ster¹⁶ die het produceert. Dit toont dat enkelvoudige sterren met een ZAMS-massa tot circa $0.8 M_{\odot}$ een helium-witte dwerg vormen, sterren met $0.8 \lesssim M_{\text{ZAMS}} \lesssim 6 M_{\odot}$ een CO-witte dwerg; $6 \lesssim M_{\text{ZAMS}} \lesssim 8 M_{\odot}$ levert een ONe(Mg)-WD, $8 \lesssim M_{\text{ZAMS}} \lesssim 22 M_{\odot}$ een neutronenster en zwaardere sterren een zwart gat. Zoals eerder aangegeven zijn met name de grenzen voor zware sterren erg onzeker.



Figuur 3.16: Type compact object en zijn massa als functie van de ZAMS-massa van de enkelvoudige ster die het produceert, zoals berekend door de populatiesynthesecode *SSE* voor standaardaannamen (cirkeltjes). De kleuren van de cirkeltjes geven aan om welk soort compact object het gaat. De lijnen tonen het resultaat wanneer een veel lagere metalliciteit wordt aangenomen, of een veel zwakkere sterwind. De ruitjes tonen waargenomen witte dwergen. Merk op dat beide assen een logaritmische schaal hebben.

Sterren in een dubbelster kunnen elkaar sterk beïnvloeden, waardoor het eindproduct anders kan zijn dan aangegeven in de figuur.

¹⁶We zullen in Hoofdstuk 4 zien dat dit in dubbelsterren drastisch anders kan zijn.

Hoofdstuk 4

De evolutie van dubbelsterren

Veel sterren ontstaan niet als enkele ster, maar als paren of in kleine groepjes, die door de zwaartekracht aan elkaar gebonden zijn en in **Keplerbanen** rond een gemeenschappelijk zwaartepunt draaien. Naar schatting is slechts 15% van de sterren (25% van de stersystemen) enkel, bevindt zich 55% van de sterren (55% van de systemen) in een dubbelster, en zit 30% van de sterren in een systeem van drie of meer sterren (20% van de systemen). De Zon bevindt zich als enkele ster dus in de minderheid. We noemen de systemen met twee of meer sterren *dubbelsterren* of *meervoudige sterren* (Engels: *binary (star)* en *multiple star*). Meervoudige systemen zijn vaak hiërarchisch; een driedubbelster bestaat meestal uit een nauwe dubbelster, waaromheen een derde ster draait in een veel ruimere baan. In dit hoofdstuk zullen we ingaan op de nauwere dubbelsterren, en de aanwezigheid van eventuele componenten op grotere afstand negeren. Daarnaast vereenvoudigen we de materie door aan te nemen dat alle banen cirkelvormig zijn en dat we het impulsmoment van de rotatie van sterren om hun as in de meeste gevallen kunnen verwaarlozen.

4.1 De geometrie van een dubbelster

Voor we aan de slag kunnen met dubbelsterren, moeten we eerst wat begrippen definiëren. Figuur 4.1 toont een schets van de geometrie van een dubbelster met massa's M_1 en M_2 , en baanafstand a_b of kortweg a^1 (Engels: *orbital separation*, a_{orb}), en de afstanden van ster 1 en ster 2 tot het zwaartepunt, tevens rotatie-as, a_1 en a_2 . Het is gebruikelijk de definitie $M_1 > M_2$ te hanteren, al kan die relatie veranderen door materie-overdracht (zie Sectie 4.5). We gebruiken hieronder ook de totale massa van de dubbelster $M_T = M_1 + M_2$ en de massaratio's $q_1 = M_1/M_2$ en $q_2 = M_2/M_1$. Uit de definitie van de positie van het zwaartepunt van een aantal massa's, $\vec{R} = \frac{1}{M_T} \sum_i m_i \vec{r}_i$, en door afwisselend ster 1 en ster 2 in de oorsprong te plaatsen, vinden we:

$$\frac{a_b}{M_T} = \frac{a_1}{M_2} = \frac{a_2}{M_1}, \quad (4.1)$$

waaruit volgt

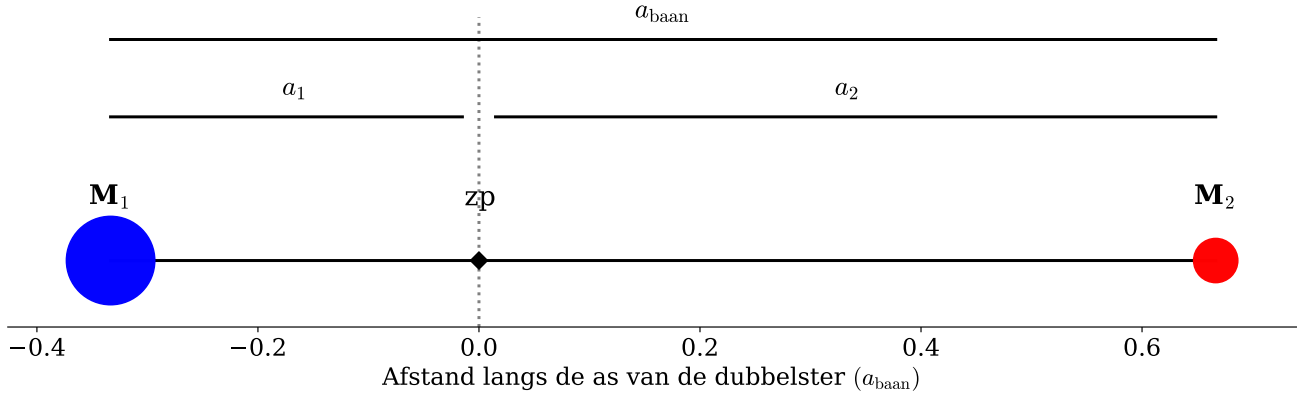
$$a_1 = \frac{M_2}{M_T} a_b; \quad a_2 = \frac{M_1}{M_T} a_b; \quad (4.2)$$

$$q_1 = \frac{a_2}{a_1}; \quad q_2 = \frac{a_1}{a_2}. \quad (4.3)$$

Anders dan we impliciet aannamen in Vgl. 1.1 mogen we nu niet een van de twee massa's verwaarlozen. De **wet van Kepler** volgt dan uit de centrifugaalkracht van de sterren die om het zwaartepunt draaien en hun onderlinge zwaartekracht:

$$\left(\frac{2\pi}{P_b}\right)^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{(a_1 + a_2)^3} = \frac{GM_T}{a^3} = \omega_b^2, \quad (4.4)$$

¹We zullen het subscript 'b' steeds vaker laten vallen om vergelijkingen compacter en beter leesbaar te maken.



Figuur 4.1: Schematische weergave van de geometrie van een dubbelster met massa's $M_1 > M_2$ en baanafstand a_b . Het zwaartepunt, tevens rotatieas, is aangegeven met “zp”, de afstanden van iedere ster tot dat punt met a_1 en a_2 , waarbij $a_1 + a_2 = a_b$.

waar $\omega_b = 2\pi f = \frac{2\pi}{P_b}$ de **hoeksnelheid** van de dubbelster is.² Dit kunnen we gebruiken om baanafstand en baanperiode P_b (Engels: *orbital period*, P_{orb}) in elkaar om te rekenen:

$$a_b = \left(\frac{GM_T}{4\pi^2} \right)^{1/3} P_b^{2/3}; \quad P_b = \left(\frac{4\pi^2}{GM_T} \right)^{1/2} a_b^{3/2}. \quad (4.5)$$

Ten slotte definiëren we nog de **gereduceerde massa** μ en **chirpmassa** M_{Ch} , die we zullen gebruiken in Hoofdstuk 5:

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}; \quad (4.6)$$

$$\mathcal{M}_c \equiv \left(\frac{M_1 M_2}{M_T^{1/3}} \right)^{3/5}. \quad (4.7)$$

4.2 De Rochepotentiaal

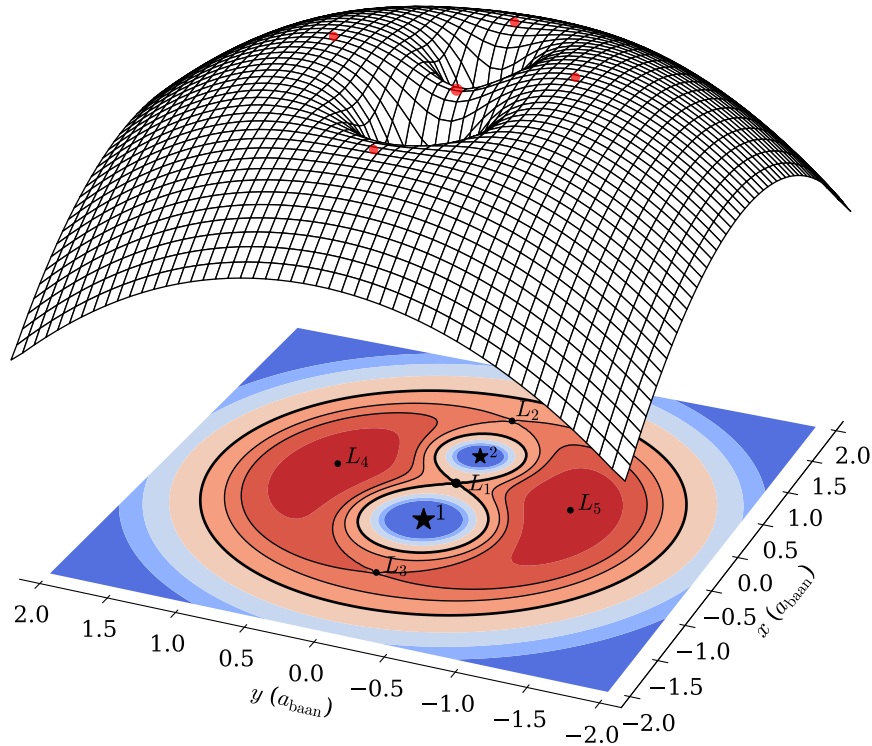
Een (gas)deeltje in het coroterende frame van een dubbelster heeft te maken met zowel de zwaartekracht van de twee sterren als de centrifugaalkracht door de rotatie. De bijbehorende potentiaal wordt de **Rochepotentiaal** genoemd en kan worden geschreven als

$$\Phi_{\text{Roche}}(\vec{r}) = -\frac{GM_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{GM_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} - \frac{1}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r})^2, \quad (4.8)$$

waar $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ de posities van de twee sterren aangeven en de laatste term komt van de centrifugaalkracht. De hoeksnelheid is in vectorvorm gedefinieerd als $\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}$. De Rochepotentiaal is grafisch weergegeven in Figuur 4.2. De onderkant van die figuur toont equipotentiaallijnen (in werkelijkheid oppervlakken in de driedimensionale ruimte). In het bijzonder vormt de dikke lijn twee druppelvormige gebieden om de sterren, die elkaar raken in het eerste **Lagrangepunt** L_1 tussen de twee sterren. De druppelvormige volumes worden de *Rochelobben* (Engels: *Roche lobes*) van de twee sterren genoemd (zie Figuur 4.3).

De Lagrangepunten L_1 – L_3 zijn *zadelpunten* en liggen in het baanvlak van de dubbelster. L_1 ligt tussen de twee sterren in (maar niet op de rotatie-as, tenzij $q = 1$), en **materie-overdracht** (Engels: *mass transfer*; MT) tussen de twee sterren kan plaatsvinden van de ene ster/Rochelob via dit punt naar de andere. L_2 ligt achter de lichtste ster (gezien vanuit het zwaartepunt) en kan fungeren als doorgeefluik voor massaverlies uit de dubbelster. L_3 ligt achter de zwaardere ster; hierdoor kan die ster materie verliezen die een ring vormt om de dubbelster. De Lagrangepunten L_4 en L_5 zijn *maxima*, liggen eveneens in het baanvlak van

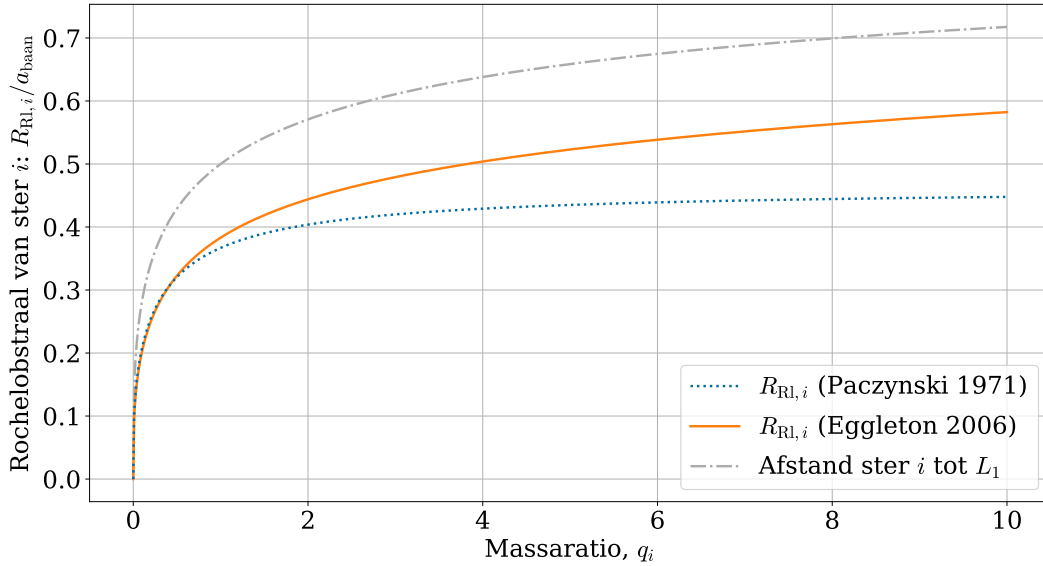
²In SI-eenheden uitgedrukt in rad/s, dus s^{-1} .



Figuur 4.2: Schematische weergave van de Rochepotential voor een dubbelster met $q = 2$ in een coroterend stelsel. Het tweedimensionale vlak onderin de figuur is een equipotentialplot die geldt voor het baanvlak van de dubbelster (loodrecht op de rotatie-as). De druppelvormige gebieden geven de Rochelobben weer (dikke lijnen); de grotere lob voor de zwaardere ster. In de Lagrangepunten L_1 (tussen de sterren), L_2 (achter de lichtste ster) en L_3 heffen de krachten elkaar op. Materie-overdracht tussen de sterren kan plaatsvinden via L_1 . Als beide sterren hun Rochelob vullen kan materie ontsnappen naar een ring rond de dubbelster via L_3 , of naar oneindig door L_2 . Merk op dat L_1 niet het zwaartepunt/de rotatie-as is! Het bovenste deel van de figuur geeft een driedimensionale weergave van de potential. Horizontale richtingen geven de (tweedimensionale) ruimte weer, de hoogte is een maat voor de potential. De Lagrangepunten L_1 – L_3 zijn herkenbaar als zadelpunten, gemarkeerd met een rode stip. Roche-lobe overflow kan hier worden gezien als een ster die zijn ‘kuiltje’ vult, waarbij gas via het zadelpunt L_1 naar het andere ‘kuiltje’ stroomt. De punten L_4 en L_5 zijn maxima die zich naast de as van de dubbelster bevinden. Alle Lagrangepunten bevinden zich in het baanvlak van de dubbelster.



Figuur 4.3: Rendering van een dubbelster waarin de donor zijn Rochelob vult en materie overdraagt naar de accretor. De donorster heeft dezelfde kenmerkende druppelvorm als zijn Rochelob. De figuur is gebaseerd op een gedetailleerde berekening met een dubbelsterevolutiecode. De initiële massa's van de sterren zijn $1.83 M_{\odot}$ en $0.73 M_{\odot}$ en de baanperiode is 2.12 dagen. De dubbelster is 1.46 Gyr oud op het moment dat materie-overdracht begint.



Figuur 4.4: De straal van een Rochelob als fractie van de baanafstand en als functie van de massaratio volgens de fits van Paczyński (puntenlijn; Vgl. 4.9), vergeleken met de benadering van Eggleton uit Vgl. 4.10 (doorgetrokken lijn). Ter vergelijking is de afstand tussen (het centrum van) de ster en het eerste Lagrangepunt L_1 weergegeven (puntstreeplijn).

de dubbelster, maar niet op de hoofdas. Voor $q = 1$ is de situatie symmetrisch, ligt L_1 op de rotatie-as en zijn zowel L_2 en L_3 als L_4 en L_5 identiek.

Zolang een ster binnen zijn Rochelob blijft, is zijn gas gebonden aan die ster. Als de ster echter opzwellt, bijvoorbeeld door sterevolutie, dan kan de ster zijn Rochelob vullen ($R_1 > R_{Rl,1}$) en materie overdragen aan zijn begeleider via het L_1 -punt. We zullen hier in Sectie 4.5 verder op ingaan. Aangezien stermodellen vaak sferisch symmetrisch (eendimensionaal) zijn, wordt de straal van de druppelvormige Rochelob meestal uitgedrukt als de straal van een bol met hetzelfde *volume* als de lob, dus $R_{Rl} \equiv \left(\frac{3}{4\pi} V_{Rl}\right)^{1/3}$. Dit stelt ons in staat om de grootte (straal) van een ster(model) direct te vergelijken met die van zijn Rochelob. Een eenvoudige uitdrukking voor deze straal, met een beperkte nauwkeurigheid van beter dan 2% voor $0 < q_1 < 0.8$, maar waarmee gemakkelijk kan worden gerekend, wordt gegeven door Paczyński. Voor ster 1 is dit:

$$\frac{R_{Rl,1}}{a_b} \approx \frac{2}{3^{4/3}} \left(\frac{M_1}{M_T}\right)^{1/3} \approx 0.46 \left(\frac{M_1}{M_T}\right)^{1/3}. \quad (4.9)$$

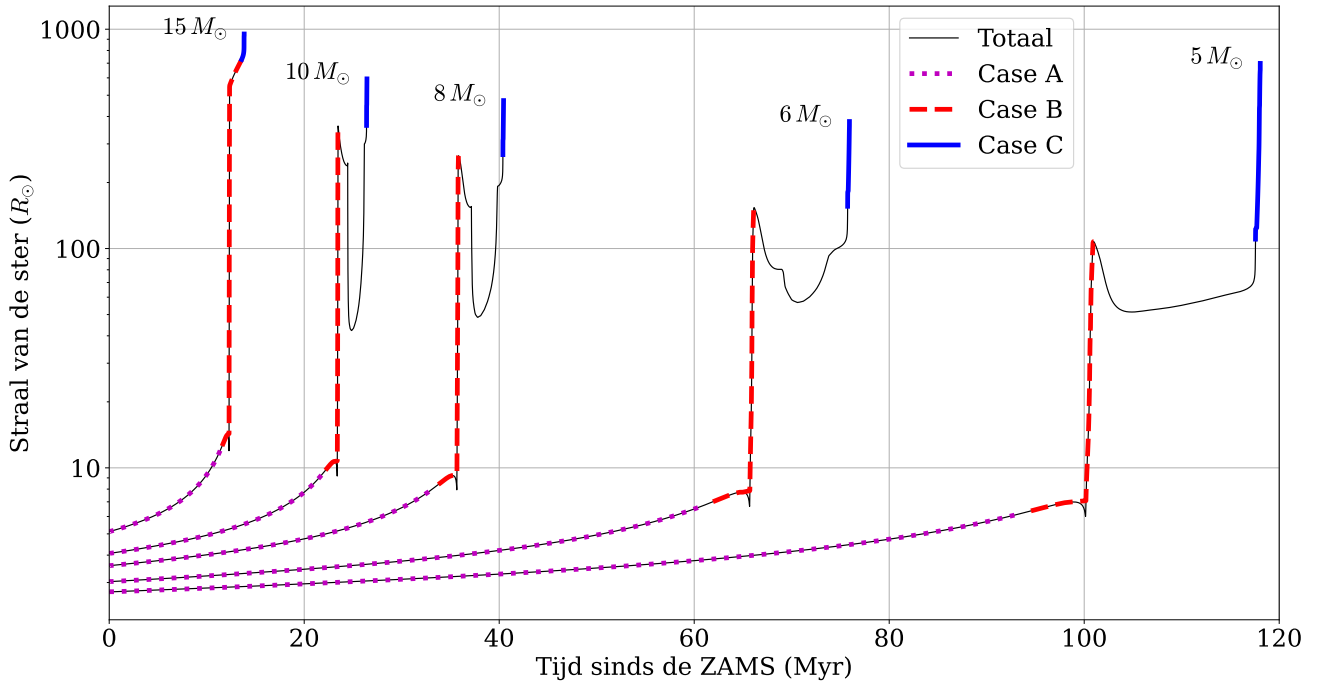
Hieruit kunnen we direct aflezen dat de zwaardere component van een dubbelster de grotere Rochelob heeft. Eggleton geeft een nauwkeuriger fit, ongeveer 1% voor $0 < q_i < \infty$:

$$\frac{R_{Rl,1}}{a_b} \approx \frac{0.44 q_1^{0.33}}{(1 + q_1)^{0.2}}. \quad (4.10)$$

De fits zijn weergegeven in Figuur 4.4. Duidelijk is dat voor een massaratio groter dan ongeveer één de simpele uitdrukking van Eggleton de voorkeur geniet boven die van Paczyński als nauwkeurigheid belangrijk is. Merk ook op dat de gemiddelde straal van de Rochelob duidelijk *kleiner* is dan de afstand van de ster tot het eerste Lagrangepunt, dat ook in de figuur is weergegeven.

4.3 De evolutie tot donorster

In Hoofdstuk 3 zagen we dat sterren van de hoofdreeks naar de reuzentak evolueren. Hun omvang kan daarbij flink toenemen. Indien de oorspronkelijke baanafstand van een dubbelster voldoende klein is, dus de baanperiode voldoende kort, kan het voorkomen dat de diameter van de ster vergelijkbaar wordt met die van zijn Rochelob. Er kan dan interactie plaatsvinden tussen de componenten van de dubbelster, zoals synchronisatie van de ster- en baanrotatie (zoals bij onze Maan) en met name **materie-overdracht**, waarbij gas van de ene ster naar de andere ster vloeit. Hierdoor kunnen de massa's van de twee sterren



Figuur 4.5: De straal van enkelvoudige sterren van 5, 6, 8, 10 en $15 M_{\odot}$ als functie van de tijd. De dunne zwarte doorgetrokken lijnen tonen de totale evolutie. De dikkere lijnen geven de drie gebieden weer waar materie-overdracht van type case A (op de hoofdreeks), case B (op de rode-reuzentak) en case C (op de asymptotische reuzentak) kan beginnen.

sterk veranderen, en, doordat de massa van een ster de dominante factor is die zijn evolutie bepaalt, kunnen de evolutie en de eindproducten van beide sterren drastisch worden beïnvloed.

Figuur 4.5 toont de straal van vijf sterren als functie van hun leeftijd. We zien dat de sterstraal gedurende het eerste, langste deel van de sterevolutie, de hoofdreeks, al langzaam toeneemt. Als de ster oorspronkelijk niet veel kleiner was dan zijn Rochelob, kan het zijn dat deze hierdoor nog op de hoofdreeks zijn Rochelob vult. We spreken in dat geval van **case-A materie-overdracht**. Aan het einde van de hoofdreeks vertonen de lijnen een klein dipje, waar de ster kort krimpt voordat deze de reuzentak opdraait. De expansie van de ster is hier duidelijk groter dan op de hoofdreeks, en de kans dat een ster zijn Rochelob vult op de reuzentak is hierdoor significant groter dan dat dit op de hoofdreeks plaatsvindt. Als dat gebeurt, spreken we van **case-B materie-overdracht** wanneer dit op de rode-reuzentak is en van **case-C** materie-overdracht wanneer dit op de AGB plaatsvindt. De grotere dip tussen RGB en AGB voor sterren met $M \lesssim 11 M_{\odot}$ is de HB, waar de Rochelob niet gevuld kan worden door evolutie.

De expansie van een (donor)ster is één manier om de ster zijn Rochelob te laten vullen. Een andere manier waarop materie-overdracht kan beginnen is doordat de baan krimpt, zoals we zullen zien in Hoofdstuk 4.4.1.

4.4 Baanenergie en -impulsmoment

De twee componenten van een dubbelster draaien in banen om een gemeenschappelijk zwaartepunt, waarbij zowel zwaartekracht als baanbeweging een rol spelen. Om veranderingen in de baan, bijvoorbeeld door materieverlies of -overdracht, te berekenen is het nuttig om de energie en het impulsmoment van de dubbelster te definiëren. We nemen hierbij ter vereenvoudiging aan dat de rotatie van sterren om hun eigen as verwaarloosbaar is (wat lang niet altijd klopt!).

De **baanenergie** van een dubbelster is de som van de potentiële energie door de zwaartekracht van de

twee componenten en de kinetische energie van ieder van de componenten:

$$\begin{aligned} E_b &= E_{\text{pot}} + (E_{\text{kin},1} + E_{\text{kin},2}) = E_{\text{pot}} + \left(\frac{M_1 v_{\text{baan},1}^2}{2} + \frac{M_2 v_{\text{baan},2}^2}{2} \right) \\ &= \frac{-GM_1 M_2}{a_b} + \frac{GM_1 M_2}{2 a_b} = -\frac{GM_1 M_2}{2 a_b} = -\frac{1}{2} \mu a_b^2 \omega_b^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dit doet ons denken aan het viriaaltheorema (zie Sectie 2.6), waarbij de rol van thermische energie (in de beweging van de deeltjes) hier wordt vervuld door de kinetische energie.

Voor een ster (of willekeurig ander deeltje) met massa M_i die een cirkelvormige beweging maakt met snelheid v_i op een afstand a_i van de rotatie-as is het **impulsmoment** gedefinieerd als

$$J_i = |\vec{J}_i| = M_i |\vec{r}_i \times \vec{v}_i| = M_i a_i v_i. \quad (4.12)$$

Voor beide componenten samen kunnen we dit uitschrijven en samenvoegen tot het **baanimpulsmoment**

$$J_b = J_1 + J_2 = M_1 M_2 \left(\frac{G a_b}{M_T} \right)^{1/2}. \quad (4.13)$$

Hierin is de asrotatie van de sterren zoals aangegeven niet meegenomen.

4.4.1 Verlies van impulsmoment

Wanneer een dubbelster massa en bijbehorend impulsmoment verliest, zal dit over het algemeen invloed hebben op de baan van de dubbelster. Afhankelijk van het precieze mechanisme kan die baan krimpen (bijvoorbeeld door zwaartekrachtgolven) of juist uitzetten (bijvoorbeeld door een sterrenwind). Naast de evolutie van de (donor)ster (zie Sectie 4.3) kan dit een manier zijn waarop materie-overdracht begint of juist wordt vermeden. We zullen hier alleen het geval van zwaartekrachtgolven behandelen.

Om te bepalen wat het effect is op de baan, is het handig om de **logaritmische afgeleide** van Vgl. 4.13 te gebruiken:³

$$\frac{\dot{J}}{J} = \frac{\dot{M}_1}{M_1} + \frac{\dot{M}_2}{M_2} - \frac{1}{2} \frac{\dot{M}_T}{M_T} + \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a}. \quad (4.14)$$

4.4.2 Gravitatiegolven

Een van de manieren om impulsmoment te verliezen uit een dubbelstersysteem is door **gravitatiegolven**. Volgens Einsteins Algemene Relativiteitstheorie worden die uitgezonden wanneer twee massa's om elkaar draaien. We komen in Hoofdstuk 5 uitgebreid terug op dit onderwerp, en geven hier alleen het verlies aan impulsmoment voor een dubbelster met gegeven parameters:

$$\left(\frac{\dot{J}}{J} \right)_{\text{GW}} = -\frac{32}{5} \frac{G^3}{c^5} \frac{M_1 M_2 M_T}{a^4}. \quad (4.15)$$

Door de term a^{-4} zal een dubbelsterbaan binnen een Hubbletijd alleen significant veranderen door zwaartekrachtgolven voor **compacte dubbelsterren**.

4.5 Stabiele materie-overdracht

In Hoofdstuk 4.3 zagen we dat de straal van een ster tijdens zijn evolutie sterk kan toenemen waardoor deze groter wordt dan zijn Rochelob en materie-overdracht (*mass transfer*; MT) door het L₁-punt (zie

³We gebruiken hier de notatie $\dot{x}$ voor de (met name tijds)afgeleide van x , dus $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$. De *logaritmische afgeleide* is dan $\frac{d \ln x}{dt} = \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \frac{\dot{x}}{x}$. Dit is handig voor machtsfuncties met de vorm $x = ay^b$, waarvoor dan geldt dat $\frac{\dot{x}}{x} = b \frac{\dot{y}}{y}$.

Fig. 4.2) kan plaatsvinden.⁴ In een dubbelstermodel kunnen we dat bepalen door de straal van de ster te vergelijken met die van de Rochelob, bijvoorbeeld met behulp van Vgl. 4.9 of 4.10. Als de ster groter is dan de lob, spreken we van **Roche-lobe overflow** (RLOF). Dit kan gebeuren doordat de ster groeit en groter wordt dan de Rochelob, bijvoorbeeld door evolutie. Een andere mogelijkheid is dat de Rochelob krimpt en kleiner wordt dan de ster, bijvoorbeeld door het verlies van impulsmoment. Een dubbelster waarin geen van de componenten zijn Rochelob vult wordt in het Engels een **detached binary** genoemd. Als één van de twee sterren dat doet heet de dubbelster **semidetached**. Bij langdurig en stabiel overvullen van beide Rochelobben noemen we dit een **contactdubbelster** (*contact binary*). Hier zijn we met name geïnteresseerd in semidetached dubbelsterren.

4.5.1 Baanverandering door materie-overdracht

In een *semidetached* dubbelster zal gas van de **donorster** naar de begeleider stromen door het L_1 -punt. De begeleider kan het gas (deels) opslokken (*accreteren*) en deze ster noemen we de **accretor**. Als al het gas wordt geaccreteerd heet de materie-overdracht *conservatief*. Bij het uitwisselen van de materie wordt ook impulsmoment uitgewisseld, en de combinatie van beide zorgt voor een verandering van de baan van de dubbelster. Die verandering kunnen we bepalen uit Vgl. 4.14, waar we M_1 en M_2 vervangen door M_d en M_a voor donor en accretor, door ons te realiseren dat voor conservatieve materie-overdracht moet gelden $\dot{M}_a = -\dot{M}_d$ en $\dot{J} = \dot{M}_T = 0$. Daaruit volgt dat

$$\frac{\dot{a}}{a} = 2\dot{M}_d \frac{M_d - M_a}{M_d M_a}. \quad (4.16)$$

Merk hierbij op dat $\dot{M}_d$ negatief is. Bij materie-overdracht door evolutie verwacht je dat de zwaardere ster het snelst evolueert (zie Vgl. 2.21 op p. 36) en als eerste zijn Rochelob vult.⁵ In dat geval is $M_d > M_a$ en zien we dat $\dot{a}$ aanvankelijk negatief is. De baan krimpt dus, maar door de materie-overdracht kan de accretor zwaarder worden dan de donor, waardoor het teken in de teller van Vgl. 4.16 omklapt en de baan weer uitzet. Het minimum vinden we door $a = a_{\min}$ op te lossen uit Vgl. 4.13, met $M_1 = M_2 = M_T/2$:

$$a_{\min} = \frac{16J^2}{GM_T^3}. \quad (4.17)$$

Door te realiseren dat J constant is en Vgl. 4.13 gelijk te stellen aan zichzelf met de waarden voor het minimum, vinden we een analytische beschrijving van de baan gedurende de materie-overdracht:

$$a = a_{\min} \left(\frac{M_T^2}{4M_d M_a} \right)^2 \quad (4.18)$$

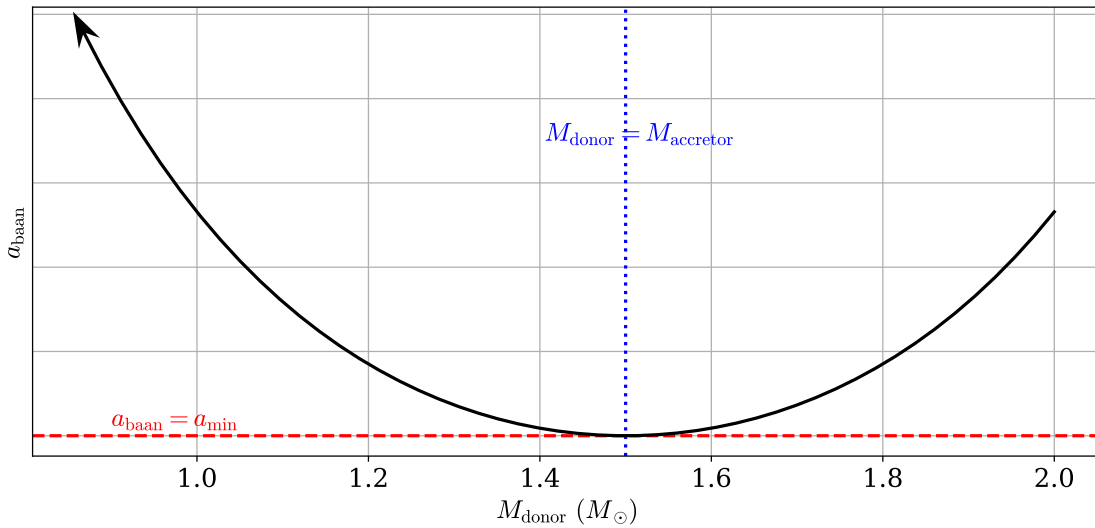
(zie Figuur 4.6). De baanevolutie is symmetrisch rond $a_{\min}$, en op het moment dat de oorspronkelijke massa's zijn verwisseld heeft de dubbelster weer dezelfde baanperiode als voor de materie-overdracht. Vaak stopt de materie-overdracht niet voordat het grootste deel van de oorspronkelijke massa van de donor is overgedragen en in veel gevallen is de eindmassa van de donor veel lager dan de beginmassa van de accretor. Door het kwadraat in Vgl. 4.18 is de baan *na* een episode van stabiele, conservatieve materie-overdracht doorgaans significant groter dan de beginafstand, met name door het laatste beetje materie dat wordt overgedragen:

$$a_e = a_b \left(\frac{M_{d,b} M_{a,b}}{M_{d,e} M_{a,e}} \right)^2, \quad (4.19)$$

waar de labels 'b' en 'e' staan voor begin en einde. We zien dat $\lim_{M_d \downarrow 0} a_e \propto M_d^{-2}$. Voor een dubbelster met beginmassa's van $1.2 M_\odot$ en $1.0 M_\odot$ die eindigt als $0.3 M_\odot$ en $1.9 M_\odot$ is dit een factor 4.4; mocht $M_{d,e} = 0.2 M_\odot$ bedragen, dan wordt dit een factor 9 en met $M_{d,e} = 0.1 M_\odot$ is dit maar liefst $33\times$.

⁴Het is ook mogelijk dat een ster de (langzame) wind van zijn begeleider opslokt, zogenaamde *windaccretie*, maar dat laten we hier buiten beschouwing.

⁵Weliswaar heeft de zwaardere ster de grotere Rochelob (Vgl. 4.9), maar het verschil in straal tussen een reus en een hoofdreeksster overtreft over het algemeen het effect van de massaverhouding.



Figuur 4.6: Schematische baanevolutie voor conservatieve materie-overdracht in een dubbelster volgens Vgl. 4.18. Merk op dat de donorster aanvankelijk zwaarder is dan de accretor, en dat het systeem van rechts naar links evolueert in deze figuur.

4.5.2 De snelheid van materie-overdracht

We kunnen de snelheid van materie-overdracht schatten aan de hand van de massa en typische tijdschaal van de donorster:

$$\dot{M} \equiv \frac{dM_d}{dt} \sim \frac{M_d}{\tau}. \quad (4.20)$$

Als we de tijdschalen τ uit Hoofdstuk 2.7.2 op pagina 36 gebruiken om typische waarden af te schatten voor de overdrachtsnelheid, vinden we voor de nucleaire tijdschaal:

$$\dot{M}_{\text{nuc}} \sim \frac{M_d}{\tau_{\text{nuc}}} \sim 10^{-10} M_{\odot} \text{ yr}^{-1} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) \sim 10^{-10} M_{\odot} \text{ yr}^{-1} \left(\frac{M_d}{M_{\odot}} \right)^{3.8}, \quad (4.21)$$

waar de laatste stap alleen geldt voor hoofdreekssterren.

De thermische tijdschaal is vaker relevant voor sterren in de Hertzsprungscheiding of op de rode-reuzentak, waarvoor we Vgl. 2.22 vaak schrijven als

$$\tau_{\text{th}} \sim \frac{GM_d M_{\text{mntl}}}{RL} \sim 3 \times 10^7 \text{ yr} \left(\frac{M_d}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{M_{\text{mntl}}}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^{-1} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)^{-1}, \quad (4.22)$$

waarbij M_{mntl} de massa is van de waterstofmantel van de donorster. Hieruit vinden we voor de materie-overdrachtsnelheid

$$\dot{M}_{\text{th}} \sim \frac{M_d}{\tau_{\text{th}}} \sim 3 \times 10^{-8} M_{\odot} \text{ yr}^{-1} \left(\frac{M_{\text{mntl}}}{M_{\odot}} \right)^{-1} \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right) \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right). \quad (4.23)$$

Voor een subreus met $M_d = 1 M_{\odot}$, $R = 10 R_{\odot}$, $L = 10 L_{\odot}$ en een heliumkern van $M_{\text{kern}} = 0.3 M_{\odot}$, zodat $M_{\text{mntl}} = 0.7 M_{\odot}$, vinden we dan $\dot{M} \approx 5 \times 10^{-6} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$, enkele grootteordes meer dan voor de nucleaire tijdschaal.

Ten slotte kunnen we voor de dynamische tijdschaal Vgl. 2.23 gebruiken om de snelheid van instabiele materie-overdracht af te schatten als

$$\dot{M}_{\text{dyn}} \sim \frac{M}{\tau_{\text{dyn}}} \sim 10^4 M_{\odot} \text{ yr}^{-1} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3/2} \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^{-3/2}. \quad (4.24)$$

Deze waarde geeft vooral aan dat instabiele materie-overdracht op een astronomisch *extreem* korte tijdschaal plaatsvindt: in de orde van *jaren* voor een reus met $M = 1 M_{\odot}$ en $R = 100 R_{\odot}$; vandaar de naam. We zullen hier in Sectie 4.6 verder op ingaan.

4.6 Instabiele materie-overdracht: common envelopes

In Sectie 4.5.2 zagen we dat materie-overdracht in een dubbelster kan plaatsvinden op de extreem korte dynamische tijdschaal. Dit gebeurt wanneer de straal van de donorster zeer snel groter wordt dan die van zijn Rochelob, of de straal van de Rochelob zeer snel kleiner wordt dan die van de donor. Hierdoor raakt de ster uit thermisch evenwicht, resulterend in **instabiele materie-overdracht**. We zagen dat hierbij mogelijk tijdschalen horen in de orde van grootte van jaren.

Dit kan gebeuren met reuzensterren met een diepe convectieve mantel. Deze sterren hebben een *omgekeerde* massa-straalrelatie: wanneer de donor een beetje massa verliest zal de straal van de ster toenemen, waardoor deze zijn Rochelob *nog* meer overvult, waardoor de materie-overdrachtsnelheid toeneemt, de ster *nog* sneller materie verliest, enzovoort. Dit resulteert in zeer korte tijd in een situatie van exponentieel toenemende steromvang en materie-overdrachtsnelheid. Een andere mogelijke oorzaak van instabiele materie-overdracht is dat juist de *accretor* uit thermisch evenwicht raakt, opzwelt en zijn eigen Rochelob vult en overvult.

In beide gevallen hebben we te maken met één of twee sterren die snel (veel) groter worden dan hun Rochelob. De details van dit proces zijn niet precies bekend, maar over het algemeen wordt aangenomen dat de ster zo snel opzwelt dat zijn begeleider wordt omgeven door de mantel van de (donor)ster. We noemen dit fenomeen een **common envelope** (“gemeenschappelijke mantel”) ofwel CE.

Door de complexiteit van de modellen hebben we van dit proces niet veel meer kennis dan de beschrijving die nu volgt. Binnen de common envelope bewegen de (helium)kern van de donorster en de begeleider nog om het gemeenschappelijk zwaartepunt van de dubbelster, maar dit gebeurt nu niet langer in vacuüm. Door de wrijving van het omhullende gas zullen de twee objecten baanenergie verliezen, waardoor de baanafstand a_b kleiner wordt en de twee een hogere baansnelheid zullen krijgen (viriaaltheorema). Hierdoor ontstaat meer wrijving, waardoor de baan *nog* kleiner wordt, et cetera. De twee objecten zullen op deze manier naar elkaar toe spiraliseren (Engels: *inspiral*).

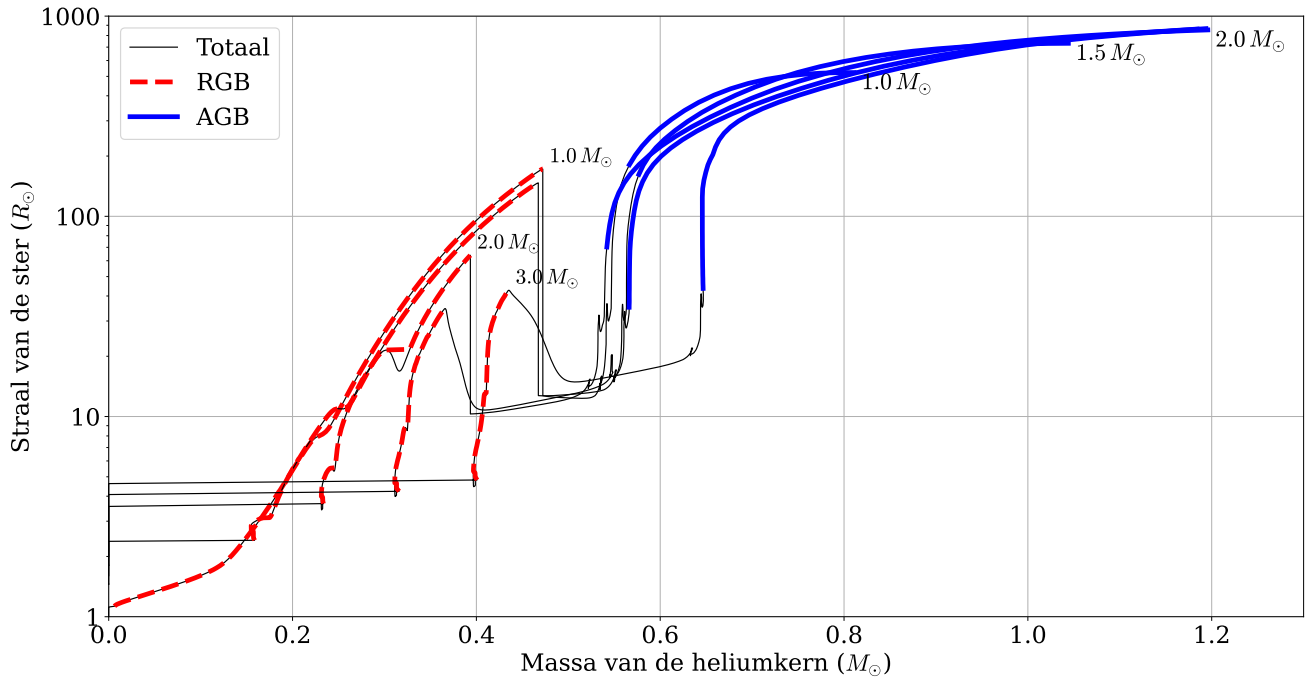
De aanname is dat de baanenergie die vrijkomt bij dit proces wordt gebruikt om de gemeenschappelijke mantel te verhitten, waardoor deze zal uitzetten. In veel modellen wordt er van uitgegaan dat het proces van de common envelope stopt wanneer de mantel van de donorster zodanig is uitgedijd dat deze volledig is ontbonden van de zwaartekracht van de dubbelster. Je zou kunnen zeggen dat dit betekent dat het gas van de mantel ‘oneindig’ ver van de dubbelster terecht is gekomen, en dat is precies wat meestal wordt aangenomen. We kunnen dan schatten hoeveel de baan van de dubbelster is gekrompen gedurende de CE-fase:

$$|E_{\text{bind,mntl}}| = \alpha_{\text{CE}} |\Delta E_b| = \alpha_{\text{CE}} \left[\frac{GM_{\text{d,e}}M_a}{2a_e} - \frac{GM_{\text{d,b}}M_a}{2a_b} \right]. \quad (4.25)$$

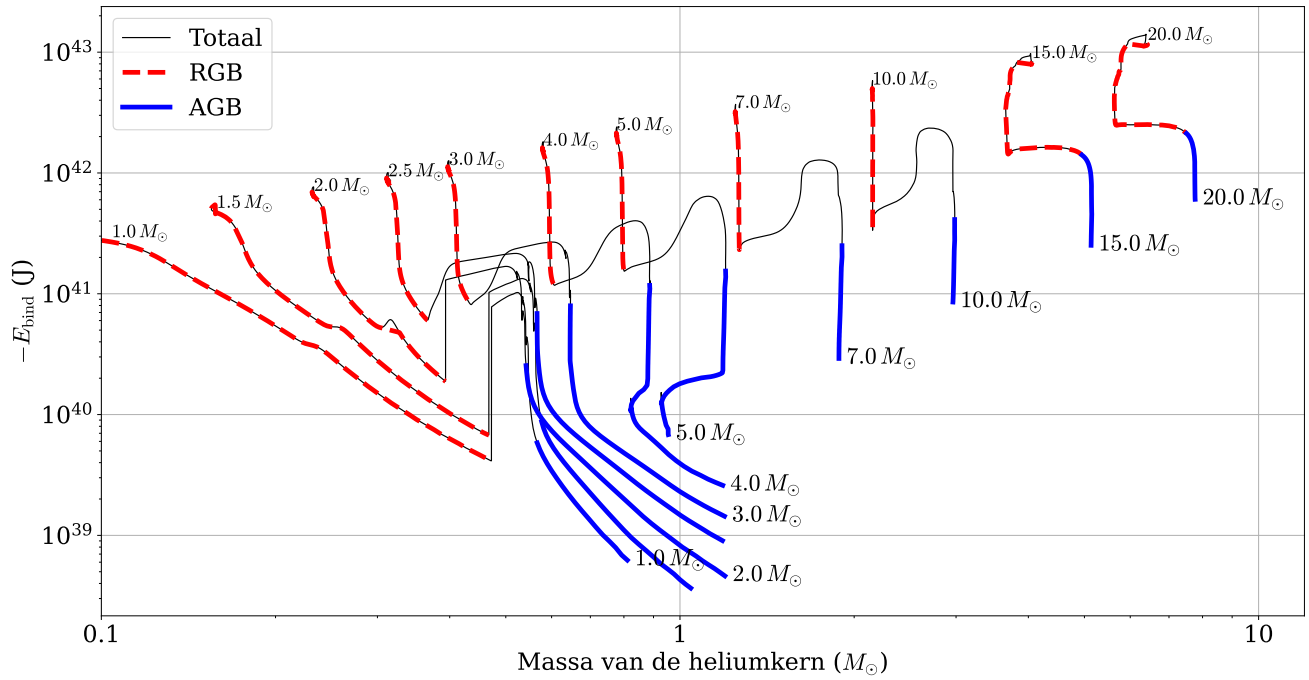
Hierin is $E_{\text{bind,mntl}}$ de bindingsenergie van de donormantel, hebben we de subscripts ‘b’ en ‘e’ gebruikt voor de begin- en eindsituatie, en ‘d’ en ‘a’ voor donor en “accretor”, ook al accreteert die laatste niet veel. De parameter α_{CE} speelt de rol van “efficiëntiefactor”: meestal wordt $\alpha_{\text{CE}} = 1$ aangenomen. De reden hiervoor is dat de korte tijdschaal van een CE het vrijwel onmogelijk maakt om energie aan het systeem toe te voegen of te onttrekken. Er zijn gedetailleerde modellen nodig om de bindingsenergie uit te rekenen, zoals te zien in Figuur 4.8.

Die korte tijdschaal betekent ook dat er weinig tijd is voor de donor om te evolueren en voor de accretor om massa te accreteren. Over het algemeen wordt aangenomen dat de massa van de heliumkern van de donor bij het begin van de CE de massa is van het restant van de ex-donorster na de CE (zie Figuur 4.7), en dat de massa van de accretor niet verandert.

Kort samengevat, een common envelope gebeurt wanneer instabiele materie-overdracht plaatsvindt in een dubbelster. We berekenen dan de bindingsenergie van de donormantel, trekken die af van de baanenergie, en bepalen op die manier wat de baanperiode is van de overblijvende dubbelster, die over het algemeen bestaat uit de (helium)kern van de donorster en de oorspronkelijke begeleider. Mocht een van de twee sterren in die resulterende dubbelster groter zijn dan zijn Rochelob, dan wordt over het algemeen aangenomen dat de twee sterren samensmelten tot één enkele ster: een *merger*. Dit is ook de aanname wanneer $|E_{\text{bind,mntl}}| < \alpha_{\text{CE}} |\Delta E_b|$.



Figuur 4.7: De straal van een aantal lage-massasterren als functie van de massa van de heliumkern. De sterren hebben massa's van 1, 1.5, 2, 2.5 en $3 M_{\odot}$. De dunne doorgetrokken zwarte lijn toont de totale evolutie van iedere ster, de dikkere lijnen tonen de rode-reuzentak (RGB), waar case B Roche-lobe overflow kan plaatsvinden (gestreepte lijn) en de asymptotische reuzentak (AGB), waar dat case C is (doorgetrokken lijn). Sterren van $1.5 M_{\odot}$ of lichter vertonen hetzelfde profiel op de RGB, al heeft een lichtere ster bij dezelfde kernmassa een iets grotere straal dan een zwaardere. Sterren van $2 M_{\odot}$ of meer eindigen alle op hetzelfde punt op de AGB, doordat daar koolstof ontbrandt in de kern en de modellen zijn gestopt. Wanneer een van deze sterren zijn Roche-lobe vult bij een gegeven straal en een common envelope veroorzaakt, zal de massa van het restant van de donorster, een helium- of koolstof-zwurstof witte dwerg, gelijk zijn aan de bijbehorende massa van de heliumkern van de donor (op de AGB bestaat verreweg het grootste deel van de massa van de heliumkern uit CO, de CO-kern binnenin de heliumkern, zodat $M_{\text{He}} \sim M_{\text{CO}}$).



Figuur 4.8: Bindingsenergiën (in Joule) van de waterstofmantel van sterren met massa's van 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 4, 5, 7, 10, 15 en $20 M_{\odot}$, als functie van hun heliumkernmassa. Merk op dat deze grootte negatief is, en een minteken nodig is voor de logaritmische schaal op de verticale as. De dikke gestreepte lijnen geven de RGB aan, dikke doorgetrokken lijnen de AGB; de dunne lijnen ertussen zijn momenten waarop de ster kleiner is dan voorheen en dus niet (door evolutie) zijn Roche-lobe kan vullen. Voor sterren zwaarder dan $10 M_{\odot}$ verdwijnt het stuk tussen de RGB en AGB doordat de ster continu groeit. Naar mate de sterren evolueren zetten ze uit en wordt de bindingsenergie minder negatief; het kost minder energie om de mantel van de ster te verwijderen. Aan het eind van de AGB is de bindingsenergie van de mantel van een $2 M_{\odot}$ -ster minder dan een promille van de oorspronkelijke waarde. Het is alsof de mantel “vanzelf” van de ster “afvalt”. In feite gebeurt dit ook inderdaad; zo’n ster verliest in korte tijd zijn waterstofmantel in een sterke sterwind (zie Hoofdstuk 3.2). In sommige gevallen neemt de kernmassa af (b.v. voor $10 M_{\odot}$ op de AGB en voor $20 M_{\odot}$ op de RGB). Dit komt doordat de convectieve waterstofmantel zich verdiept tot in de heliumkern, waardoor er waterstof de kern in gemixt wordt (die daar dus geen pure heliumkern meer is). Tevens worden er fusieproducten de mantel in gemixt, tot op het oppervlak, waar we deze kunnen waarnemen. Dit proces wordt dredge-up genoemd. De bindingsenergie van de sterromantel is relevant voor de berekening van common envelopes (zie Vgl. 4.25).

4.7 Na de materie-overdracht

Door materie-overdracht kunnen de massa's en de baanperiode van een dubbelster drastisch veranderen, en daarmee ook het verdere lot van de twee sterren. In veel gevallen wordt de mantel van de donor geheel of gedeeltelijk overgedragen naar de accretor of afgeworpen in een *common envelope* (CE). In een CE krimpt de baan van de dubbelster dramatisch tot een *compacte dubbelster* of zelfs een *merger*. Ten minste een deel van de waargenomen *bipolaire* planetaire nevels is vermoedelijk de uitgestoten mantel van een CE. Na stabiele materie-overdracht kan de baanperiode juist veel langer zijn geworden. De dubbelster bestaat dan uit de kern van de donor en de begeleider, die al dan niet materie heeft geaccreteerd. Met de massa's en periode veranderen ook de Rochelobben.

De toestand van de donorkern hangt af van die van de donorster voor de materie-overdracht. Als dit een lage-massa ster was ($M \lesssim 2.0 M_{\odot}$) met een gedegenerende kern, is het overblijfsel een witte dwerg (WD), die zelf alleen zal afkoelen maar niet verder evolueren. Doordat het dichtheidscontrast tussen kern en mantel groot is voor deze sterren, is de massa van de helium- (HeWD) of CO-witte dwerg (COWD) waarschijnlijk gelijk aan die van de helium- of CO-kern van de donor. Als de donor een reus met hogere massa ($M \gtrsim 2.0 M_{\odot}$) was, was de kern niet-gedegenerend, was het dichtheidscontrast minder groot en is minder duidelijk waar de grens tussen kern en mantel lag en dus welk deel overblijft. Tenzij gedetailleerde modellen beschikbaar zijn is een goede eerste schatting dat de heliumkern overblijft. Aangezien deze niet-gedegenerend is, kan hier alsnog heliumfusie optreden. Het is in feite het equivalent van een hoofdreeksster, maar met helium in de plaats van waterstof; een 'kaal' heliumsterretje.⁶ Zo'n ster wordt een *subdwarf* genoemd. Subdweren met een massa van $M \lesssim 0.75 M_{\odot}$ verbranden een groot deel van hun helium en eindigen als COWD met een heliummantel. Sterren zwaarder dan dat kunnen, nadat het helium in de kern uitgeput geraakt is, expanderen tot een "heliumreus". Hierbij dijen ze opnieuw uit en kunnen een volgende fase van Roche-lobe overflow veroorzaken.

Zeer zware heliumkernen ($\gtrsim 2 M_{\odot}$) worden **heliumsterren** genoemd, en kunnen koolstof ontsteken in hun kern, en eventueel latere fusiestadia doorlopen (zie Hoofdstuk 2.5.2). Bij voldoende massa kan een supernova volgen (zie Hoofdstuk 3.4) van type Ib (geen waterstoflijnen in het spectrum) of type Ic (ook geen heliumlijnen). De *supernovakick* kan de dubbelsterbaan elliptisch maken of zelfs de gehele dubbelster ontbinden. Dit laatste gebeurt wanneer meer dan de helft van de totale dubbelstermassa wordt uitgestoten in de supernova, al hangt dit af van de excentriciteit van de baan. De supernova kan een neutronenster of zwart gat achterlaten (Hoofdstuk 3.5); een supernova van type Ic produceert mogelijk een *gammaflits*.

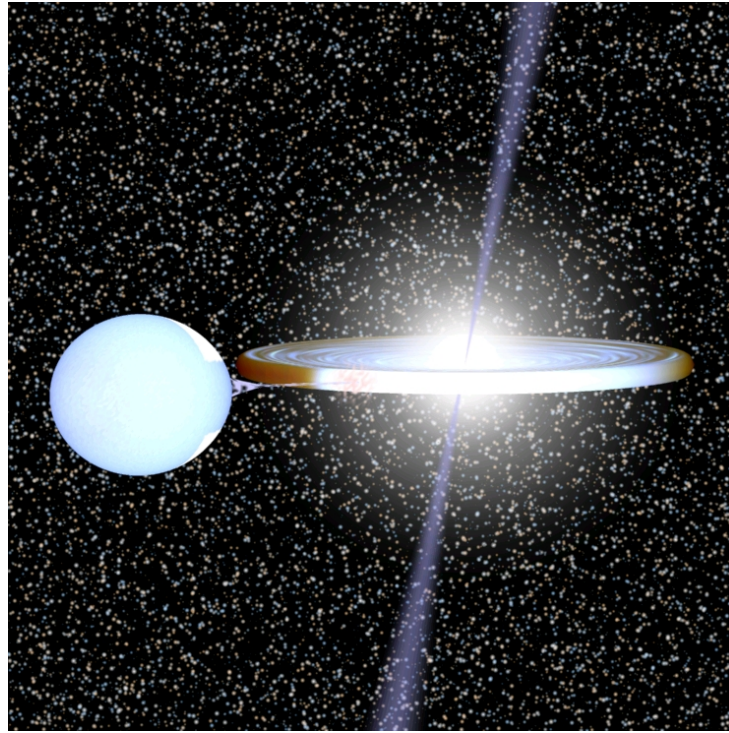
Daarnaast hangt de verdere dubbelsterevolutie af van de staat van de begeleider. Wanneer dit een lage-massa hoofdreeksster is met een convectieve mantel, kan *magnetische remming* de baan verder doen krimpen, zodat opnieuw materie-overdracht plaatsvindt, bijvoorbeeld in de vorm van een CV (zie Hoofdstuk 4.8). Wanneer de ster zwaarder is dan $\sim 0.9 M_{\odot}$ dan kan deze binnen een Hubbletijd evolueren tot reus en op die manier zijn Rochelob vullen. Ook zwaartekrachtstraling (zie Hoofdstuk 4.4.2) kan de baan doen krimpen, wanneer deze na de common envelope voldoende nauw is.

4.8 Soorten dubbelsterren

Algol-systemen vormen het standaardvoorbeeld van een dubbelster waar stabiele materie-overdracht plaatsvindt. De sterren bevinden zich op de hoofdreeks of subreuzentak. Zeker als deze dubbelsterren ook nog eclipsen vertonen, helpen Algols ons om massa's, leeftijden en afstanden van sterren te bepalen. Dit type dubbelsterren is vernoemd naar het prototype: Algol is een variabele ster die met het blote oog kan worden gezien in het sterrenbeeld Perseus. Zijn Arabische naam betekent *duivel* en verwijst mogelijk naar de variabiliteit van de ster.

Cataclysmische variabelen (CVs) zijn interagerende, compacte dubbelsterren met een witte dwerg als accretor. Hun naam komt van hun grillige veranderingen in helderheid. Waterstofrijke CVs hebben vaak een M-dwerg als donor en baanperiodes van enkele uren; de kortste gemeten periode is 51 minuten. Het geaccreteerde waterstof kan ophopen op het oppervlak van de witte dwerg, totdat de druk voldoende

⁶Dit zijn in feite hetere, blauwere versies van sterren op de horizontale tak, maar *zonder* waterstofmantel.



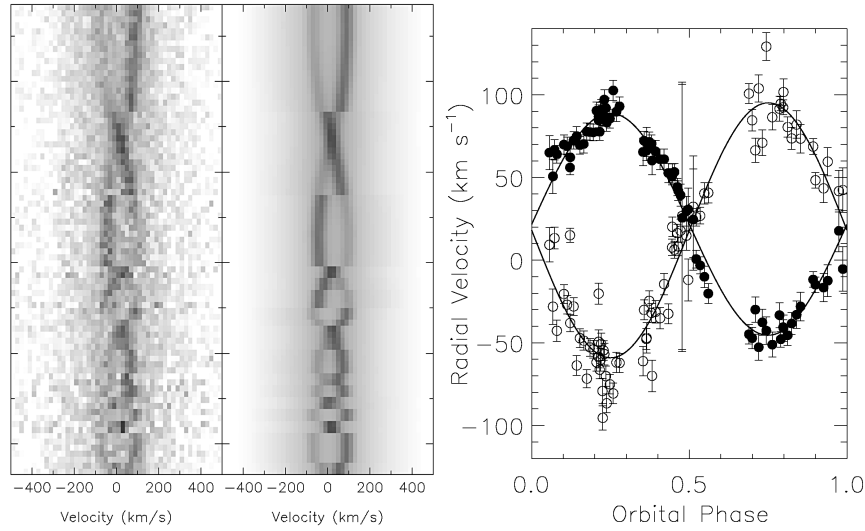
Figuur 4.9: *Rendering van een röntgendubbelster. De donor draagt materie over naar een neutronenster of zwart gat. Doordat de materie teveel impulsmoment heeft, valt het niet direct op de accretor, maar vormt een accretieschijf. Hierin verliest het gas energie en impulsmoment, waardoor het alsnog (deels) geaccreteerd kan worden. De energie wordt omgezet in (röntgen)straling. We nemen meestal de hete accretieschijf waar, niet het compacte object. Een deel van het gas ontsnapt mogelijk als jets.*

hoog wordt voor waterstoffusie. Er vindt dan een **nova-uitbarsting**, waarbij het meeste geaccreteerde materiaal weer de ruimte in wordt geslingerd.

AM CVn-sterren zijn waterstofarme CVs met een periode korter dan een uur (ultracompacte dubbelsterren). Ze zijn vernoemd naar hun prototype in het sterrenbeeld Jachthonden (Canes Venatici; CVn). Het ontbreken van waterstof duidt op een geëvolueerde donor, zoals een tweede witte dwerg, een naakte heliumkern of een “uitgeklede” ster rond het einde van de hoofdreeks. Baanperiodes liggen tussen 10 en 65 minuten, wat erop duidt dat in de systemen met de kortste perioden beide sterren gedegenerereerd moeten zijn, en dat er geen plaats is voor een **accretieschijf**. AM CVn-sterren zijn bronnen van zwaartekrachtgolven die kunnen worden gemeten door de LISA-missie.

Röntgendubbelsterren (X-ray binaries) hebben neutronensterren (NSs) en (soms) zwarte gaten (BHs) als accretor. Zij zijn typisch helderder dan $25 L_{\odot}$ in **röntgenstraling** (X rays). Die straling wordt veroorzaakt doordat het overgedragen gas in een **accretieschijf** terechtkomt en daar flink wordt verhit, voordat het op de accretor terechtkomt of in jets wordt uitgespoten (zie Figuur 4.9). De energie van de röntgenstraling komt van de diepe potentiaalkuil van de accretor. Tot 2015 bevonden de enige waargenomen stellaire zwarte gaten zich in röntgendubbelsterren, waarvan de accretormassa te hoog was voor een neutronenster. Aangezien NSs en BHs worden geproduceerd door sterren van $8 M_{\odot}$ of meer, leren deze dubbelsterren ons meer over de evolutie van zware sterren, waarover nog veel onzeker is. Deze systemen kunnen na een tweede supernova leiden tot **dubbele neutronensterren (BNSs)**, **dubbele zwarte gaten (BBHs)** en systemen bestaande uit een **neutronenster en zwart gat (NSBHs)**. De meest compacte hiervan kunnen binnen een Hubbletijd samensmelten en bronnen vormen van **zwaartekrachtstraling** voor de LIGO- en Virgo-detectoren (zie Hoofdstuk 5). Wanneer daarbij een neutronenster aanwezig is, kunnen hier korte, harde **gammaflitsen** (*gamma-ray bursts*; **GRBs**) en hun optische evenknie **kilonovae** bij plaatsvinden.

Dubbele witte dwergen (DWDs) bestaan uiteraard uit **twee witte dwergen** (zie Figuur 4.10), waar-tussen over het algemeen *geen* materie-overdracht plaatsvindt. Aangezien de meeste sterren een lage



Figuur 4.10: Linker paneel (a): Waarnemingen van de dubbelgelijnde dubbele witte dwerg WD 0136+768. De twee spectraallijnen van de twee sterren verschuiven ritmisch door het Dopplereffect. Rechter paneel (b): Fit aan de radiële snelheden van de witte dwergen in WD 0136+768.

massa hebben, en lage-massa sterren eindigen als een witte dwerg (zie Figuur 3.16 op pagina 52), zullen veel dubbelsterren eindigen als een DWD. Waargenomen (nauwe) DWDs hebben typische baanperiodes van een dag tot een paar dagen, en baanafstanden van enkele zonsstralen. Aangezien de witte dwergen de voormalige kernen zijn van reuzensterren met diameters van enkele tientallen tot honderden zonsstralen, moet de baanperiode van deze systemen flink zijn gekrompen gedurende hun evolutie: een duidelijke aanwijzing voor tenminste één **common envelope**. De DWDs met de kortst waargenomen baanperiodes zijn gegarandeerde bronnen van **zwaartekrachtstraling** voor de **LISA-detector** en hebben zullen binnen een Hubbletijd samensmelten. Wanneer hun gecombineerde massa hoger is dan de **Chandrasekharlimiet** (zie Hoofdstuk 3.5.1) zal een **type-Ia-supernova** optreden (Hoofdstuk 3.4), die kan worden gebruikt voor afstandmeting in het heelal (Hoofdstuk 7.1).

Hoofdstuk 5

Zwaartekrachtgolven

Dit hoofdstuk vormt een korte inleiding in de zwaartekrachtgolven. We kijken hoe de golven ontstaan en hoe ze zich gedragen, in het bijzonder voor het geval waar compacte dubbelsterren de bron zijn. Vervolgens laten we zien hoe de huidige zwaartekrachtgolfdetectoren LIGO en Virgo werken, en hoe we een signaal kunnen detecteren.

5.1 Een golfoplossing voor de Algemene Relativiteitstheorie

Volgens de **Algemene Relativiteitstheorie** (ART; Engels: *General Relativity*; *GR*) van Einstein uit 1915 leven we in een vierdimensionale *ruimtetijd*, die wordt gekromd door de aanwezige massa en energie. Die kromming uit zich door wat wij als *zwaartekracht* ervaren, en voor de meeste dagelijkse verschijnselen is de *zwaartekrachtwet van Newton* een goede beschrijving:

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}, \quad (5.1)$$

waar $\vec{g}$ de versnelling van een testmassa weergeeft, ten gevolge van een object met massa M op afstand r . Volgens Newtons theorie volgen planeten ellipsbanen doordat vooral de Zon aan de planeet trekt via deze kracht. Volgens Einsteins ART komt dit doordat de planeet in feite ‘rechtdoor’ beweegt in een gekromde ruimte. Dit kan worden vergeleken met een dik, opgespannen rubber vel (de ‘ruimte’) waarop een bowlingbal is geplaatst (de ‘Zon’), die het vel in zijn directe omgeving vervormt (kromt). Wanneer een knikker (testdeeltje) langs de bowlingbal wordt gerold, zal deze van richting veranderen door de kromming van de ruimte. Met wat oefening en geluk kan de knikker een paar rondjes om de bal draaien — een proces dat zeer lang zou kunnen doorgaan als er geen wrijving zou zijn: een *Keplerbaan*.

De relatie tussen de kromming van de ruimte enerzijds, en de massa’s (of impuls) en energie in die ruimte anderzijds wordt in de ART weergegeven met de **Einsteinvergelijking**.¹

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (5.2)$$

Hierin zijn $G_{\mu\nu}$ en $T_{\mu\nu}$ **tensoren**.² De eerste heet de **Einsteintensor** en geeft de kromming van de ruimtetijd weer, en dus de sterkte van de zwaartekracht voor de klassieke beschrijving. Deze tensor reduceert tot de *Minkowskitensor* voor de *vlakke* ruimtetijd, die wordt gebruikt in de *Speciale Relativiteitstheorie*. De tweede tensor staat voor de verdeling van energie en impuls, en wordt de **energie-impulstensor** genoemd, en is nul voor een vacuüm (de afwezigheid van massa en energie). De constante c is de lichtsnelheid, en beide helften van de vergelijking hebben de dimensie $1/\text{afstand}^2$, zodat $T_{\mu\nu}$ uitgedrukt wordt in energie per volume-eenheid. De Einsteinvergelijking geeft weer hoe enerzijds de ruimtetijd wordt vervormd

¹De Einsteinvergelijking is complexer dan op het eerste oog lijkt. $G_{\mu\nu}$ is een symmetrische 4×4 -matrix, dus met tien onafhankelijke componenten. In de Einsteinvergelijking zitten tien niet-lineaire tweedegraadsdifferentiaalvergelijkingen verstopt.

²We zullen hier niet verder ingaan op het begrip *tensor*, maar de notatie aanhouden voor compatibiliteit met de (meer gedetailleerde) literatuur.

door de aanwezigheid van materie en energie, en hoe omgekeerd de beweging van materie en straling wordt beïnvloed door die kromming. De Einsteinvergelijking kan tot op zekere hoogte worden vergeleken met de **zwaartekrachtwet van Gauss** in zijn differentiële vorm:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho(\vec{r}), \quad (5.3)$$

waar het linker lid de gegenereerde zwaartekrachtversnelling voorstelt en het rechter lid de verdeling van massa (via de dichtheid ρ) in de ruimte weergeeft.³

In de Einsteintensor in Vgl. 5.2 zit de **metrische tensor** $g_{\mu\nu}$ verstopt, die op iedere plek in de ruimtetijd de (lokale) geometrie beschrijft. Ver van compacte materie kan die geometrie worden beschreven als een verstoring van de vlakke Minkowskiruimte:

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (5.4)$$

Hierin is $\eta_{\mu\nu}$, met diagonaal $(-1, 1, 1, 1)$ en verder nul, de metrische Minkowskitensor die de vlakke Minkowskiruimtetijd beschrijft die ook wordt gebruikt in de Speciale Relativiteitstheorie. De tensor $h_{\mu\nu}$ is de verstoring, met $|h| \ll 1$. Bij deze benadering verwaarlozen we termen van $\mathcal{O}(h^2)$ en hoger en gebruiken we een *gelineariseerde vorm* van de ART. Door extra vrijheidsgraden in de veldvergelijkingen kunnen we een slimme ijking kiezen, die bekend staat als de *Lorenz-ijking*⁴ (Engels: *Lorenz gauge*) of *De Donder-ijking*, die de veel termen doet verdwijnen met als resultaat een eenvoudige vorm van de *gelineariseerde Einsteinvergelijking*.⁵

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} \equiv \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (5.5)$$

De operator $\square$ wordt de *d'Alembertiaan* genoemd en is voor de Minkowskiruimtetijd wat de Laplaciaan is voor de Euclidische ruimte (de divergentie van de gradiënt van een scalaire functie u : $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} u$ of $\vec{\nabla}^2 u$). Vergelijking 5.5 is een relatief simpele **golfvergelijking**⁶ en heeft dus *golven* als oplossing. De constante c in de d'Alembertiaan impliceert dat deze golven met de lichtsnelheid bewegen.

De vereenvoudigingen die we impliciet hebben gebruikt voor de gelineariseerde theorie houden in dat vergelijking 5.5 geldt voor lichamen die in de *vlakke* ruimtetijd bewegen (vanwege het gebruik van $\eta_{\mu\nu}$) door hun onderlinge invloed. In het bijzonder is die invloed de *Newtoniaanse* zwaartekracht uit Vgl. 5.1, *niet* de beschrijving van de ART. Deze benadering is geldig voor bijvoorbeeld zwarte gaten zolang zij voldoende ver van elkaar staan; als dat niet langer het geval is, moeten we overstappen op de volledige ART (of een betere benadering). Componenten in een (compacte) dubbelster volgen in de benadering in dit hoofdstuk dus *Keplerbanen* en zenden daarbij golven uit die zich met de lichtsnelheid verspreiden. We noemen deze golven **zwaartekrachtgolven**, **gravitatiegolven**, of ook wel **zwaartekrachtstraling** of **gravitatiestraling** (Engels: *gravitational waves*; **GWs** of *gravitational radiation*).

5.2 Het effect van een passerende zwaartekrachtgolf

In vacuüm, dus bij de afwezigheid van (dichte) materie en energie,⁷ is $T_{\mu\nu} = 0$ en vereenvoudigt vergelijking 5.5 tot

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} \equiv \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (5.6)$$

Deze vereenvoudigingen gelden alleen **buiten** de bron van de zwaartekrachtgolven, voor welk geval we de metriek nog meer kunnen versimpelen tot wat de *transverse, spoorloze ijking* (Engels: *transverse-traceless gauge*; *TT gauge*) ofwel *TT-ijking* wordt genoemd. Met de Lorenz-ijking hadden we het aantal

³Deze vergelijking kan, met wat aannamen, worden omgezet in Vgl. 5.1. Dit is ook te vergelijken met de wet van Gauss die het door lading gegenereerde elektrische veld beschrijft: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho(\vec{r})/\epsilon_0$.

⁴Vernoemd naar de Deense fysicus Ludvig Lorenz, *niet* naar de bekendere Hendrik Lorentz.

⁵We vervangen hier $h_{\mu\nu}$ door $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$, een andere beschrijving van dezelfde verstoring, zonder verder commentaar.

⁶Zoals we konden vermoeden door de overeenkomst met het klassieke geval $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = c^2 \nabla^2 u$.

⁷Wat de ART betreft is de Aarde een vacuüm!

vrijheidsgraden in $h_{\mu\nu}$ al teruggebracht van tien naar zes, in de TT-ijking blijven daarvan slechts twee over. De oplossingen van Vgl. 5.6 zijn hierdoor *vlakke golven* met *twee polarisaties* die worden aangegeven met + (plus) en $\times$ (kruis; *cross*; zie Figuur 5.1). Wanneer deze golven in de driedimensionale ruimte (met coördinaten $\vec{r} = (x, y, z)$) in de z -richting bewegen hebben zij als vorm⁸

$$h_{ij}(t, z) = \begin{pmatrix} A_+ & A_\times & 0 \\ A_\times & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \sin[\omega_{\text{gw}} \cdot (t - z/c)], \quad (5.7)$$

waarbij A_+ en $A_\times$ de amplitudes zijn van de twee polarisaties h_+ en $h_\times$, waar we hebben gekozen voor de sinus zodat $h(t=0, z=0) = 0$ en waar $\omega_{\text{gw}} = 2\pi f_{\text{gw}}$ de hoeksnelheid is van de golf. Uit deze formule zien we dat de golven *transversaal* zijn, met andere woorden dat de amplitude loodrecht staat ($x-y$ -vlak) op de bewegingsrichting (z).

Wat is nu het **effect** van een passerende zwaartekrachtgolf? In de TT-ijking geldt voor *werkelijke* afstanden⁹ de volgende bewegingsvergelijking voor de afwijking in een geodeet (die de kortste afstand tussen twee punten aangeeft in een gegeven geometrie) door een passerende golf:

$$\ddot{r}^i = \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij} r^j. \quad (5.8)$$

Hierin geeft r de ruimtelijke coördinaten weer en staan de dubbele punten voor de tweede tijdsafgeleides. We beschouwen een ring met testmassa's in het $x-y$ -vlak, rond de oorsprong $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. We zagen al dat een golf die in de z -richting beweegt alleen veranderingen in het $x-y$ -vlak teweegbrengt, zodat z constant is en we $z = 0$ kunnen kiezen om de sinus in Vgl. 5.7 te vereenvoudigen. Voor r^i en r^j in Vgl. 5.8 hoeven we dan alleen de vier overgebleven combinaties tussen x en y te bekijken. Hiervoor schrijven we $r_i(t) = (x(t), y(t)) = (x_0 + \delta x(t), y_0 + \delta y(t))$, waarin (x_0, y_0) de oorspronkelijke positie geeft van de testmassa, en $(\delta x(t), \delta y(t))$ de variabele afwijking daarop, veroorzaakt door de golf. Als we $i = j = 1$, dus $r_i = r_j = x(t)$, invullen in Vgl. 5.8, dan vinden we

$$\frac{\partial}{\partial t^2}(x_0 + \delta x(t)) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial t^2}(x_0 + \delta x(t)) \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [A_+ \sin(\omega_{\text{gw}} t)] x_0 \rightarrow \delta \ddot{x} = -\frac{1}{2} A_+ \omega_{\text{gw}}^2 \sin(\omega_{\text{gw}} t) x_0.$$

Merk op dat we links x_0 wegwerken door de differentiatie, rechts δx verwaarlozen door aan te nemen dat $\delta x \sim h \ll x_0$, en dat we $\delta \ddot{x}$ noteren voor de tweede tijdsafgeleide van δx . Bovenstaande kunnen we links en rechts tweemaal integreren in de tijd om δx als functie van de tijd te vinden:

$$\delta x(t) = \frac{x_0}{2} A_+ \sin(\omega_{\text{gw}} t) \equiv \frac{x_0}{2} h_+(t), \quad (5.9)$$

waarmee we $h_+(t)$ definiëren. Voor de andere drie combinaties van i en j ofwel x en y nemen we steeds een ander element uit Vgl. 5.7 en vinden we op analoge wijze, gescheiden naar ruimtecoördinaat en polarisatie:

$$\delta y(t) = -\frac{y_0}{2} A_+ \sin(\omega_{\text{gw}} t) \equiv -\frac{y_0}{2} h_+(t); \quad (5.10)$$

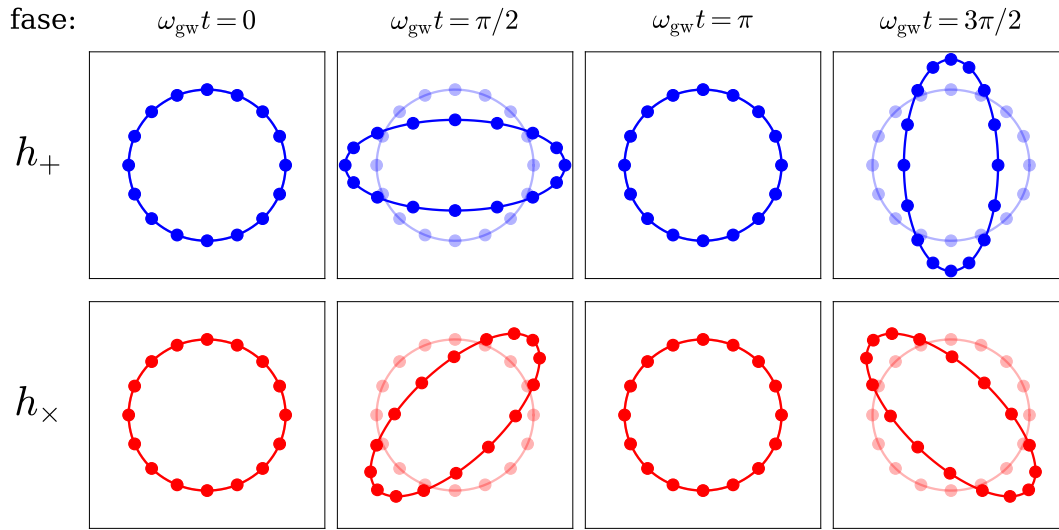
$$\delta x(t) = \frac{y_0}{2} A_\times \sin(\omega_{\text{gw}} t) \equiv \frac{y_0}{2} h_\times(t); \quad (5.11)$$

$$\delta y(t) = \frac{x_0}{2} A_\times \sin(\omega_{\text{gw}} t) \equiv \frac{x_0}{2} h_\times(t). \quad (5.12)$$

Merk op dat voor de plustermen δr_i afhangt van $r_{i,0}$ met $i \in \{x, y\}$, terwijl voor de kruistermen δr_i afhangt van $\delta r_{j,0}$ met $i, j \in \{x, y\}$ en $i \neq j$; vandaar de naam. Het effect van een zwaartekrachtgolf in de z -richting op een ring van deeltjes in vrije val in het $x-y$ -vlak is geïllustreerd in Figuur 5.1, voor de twee polarisaties afzonderlijk en met dezelfde amplitude om de effecten te verduidelijken. In werkelijkheid komen de twee polarisaties *tegelijk* voor, en in het algemeen zal $A_+ \neq A_\times$ zijn, zoals we hieronder zullen zien.

⁸Hierbij zijn we overgestapt van Griekse indices naar Romeinse, om aan te geven dat we niet langer de vierdimensionale ruimtetijd beschouwen, maar alleen de driedimensionale ruimtecoördinaten overgebleven zijn.

⁹In tegenstelling tot de *coördinaatafstand*, die in de TT-ijking per definitie *niet* verandert bij een passerende golf.



Figuur 5.1: Het effect van een passerende zwaartekrachtgolf op een ring van deeltjes in vrije val volgens Vgl. 5.9–5.12, gesplitst in plus- (boven) en kruistermen (onder). De golf beweegt loodrecht op het vlak van de ring. In de rustsituatie is de ring cirkelvormig, maar door de golf verandert deze in een ellips. De figuur toont de situatie voor vier fases en voor beide polarisaties (met dezelfde amplitude: $A_+ = A_\times$) en maakt duidelijk waar de namen plus en kruis/cross vandaan komen.

5.3 Quadrupoolstraling en de amplitude van zwaartekrachtgolven

Zonder ART en zonder Vergelijking 5.6 in detail op te lossen kunnen we proberen aannemelijk te maken hoe een systeem van verder geïsoleerde massa's zwaartekrachtgolven kan produceren. We zijn met name op zoek naar een **dimensieloze amplitude** $h \equiv \delta x/x$ voor de verstoring van de ruimtemetrieë door een passerende golf, waarbij δx de absolute verandering is van de lengte x . Om te beginnen moeten we er rekening mee houden dat de golven **informatie** overdragen en er dus een **tijdsvariatie** moet plaatsvinden in de bron. Bovendien weten we dat voor elektromagnetische golven (zoals licht) het vermogen (de flux) afneemt met het kwadraat van de afstand: $P \propto 1/d^2$, doordat we de *energie* van de straling meten. We weten ook dat de energie schaalst met het kwadraat van de amplitude van de golf, en voor de **amplitude** van een zwaartekrachtgolf verwachten we dus $h \propto 1/d$. We houden ten slotte ook de analogie met elektromagnetisme in ons achterhoofd, waarvoor geldt dat een elektrische **monopool** (de totale lading) geen straling kan uitzenden, maar een elektrische **dipool** wel.

We beginnen onze zoektocht bij het massa-*monopool*moment. Dat wordt gegeven door de totale massa van het systeem. Uit het feit dat de totale hoeveelheid massa/energie en impuls behouden moet zijn in de energie-impulstensor $T_{\mu\nu}$ uit Vgl. 5.2 en 5.5 leiden we af dat er hier niets verandert en er dus geen golven zijn. Het massa-*dipool*moment $\vec{p} \equiv \sum_i m_i \vec{r}_i$ is het *massamiddelpunt* of zwaartepunt van onze massa's. De tijdsafgeleide is de totale (lineaire) *impuls*, en die is eveneens behouden voor een geïsoleerd systeem.

Vervolgens bekijken we het **massaquadrupoolmoment** Q . Dit lijkt op het traagheidsmoment, maar dan met richtingsgevoeligheid, want het is een *tensor* in plaats van een scalar. Het traagheidsmoment voor een deeltje met massa m draaiend op afstand r van de rotatieas is gedefinieerd als $I = mr^2$. Het massaquadrupoolmoment wordt op analoge wijze gegeven door de 3×3 -tensor

$$Q_{ij}(t) = \sum_k m_k r_{k,i}(t) r_{k,j}(t). \quad (5.13)$$

Hierin zijn i, j de dimensies (x, y, z), geeft k de verschillende (punt)massa's met massa m_k aan en is $r_{k,i}$ de afstand van deeltje k tot het massamiddelpunt in de dimensie i . Het quadrupoolmoment geeft de *massaverdeling* weer, en als Q in de tijd verandert van grootte en/of oriëntatie, kan het een bron vormen van onze straling. We verwachten dan dat onze dimensieloze amplitude (in leidende orde) evenredig is met een tijdsafgeleide van Q .

Maar om welke orde van afgeleide gaat het? Uit Vgl. 5.13 zien we dat $Q \propto mr^2$, en voor elke tijdsafgeleide komt hier een dimensie $1/t$ bij. We kunnen nu een *dimensioneel* argument gebruiken om te bepalen

welke van deze opties een dimensieloze grootheid oplevert. Hiervoor maken we een kort uitstapje naar de zogenaamde **natuurlijke eenheden** die in de ART worden gebruikt, waarbij $c = G = 1$ wordt gekozen, en via deze constanten zoveel mogelijk grootheden worden uitgedrukt in dezelfde eenheden. Zo kunnen we tijd schrijven als een lengtemaat ℓ : $t = \ell/c = \ell$, maar ook de massa: $m = \frac{\ell c^2}{G} = \ell$,¹⁰ waar we in de tweede stap steeds $c = G = 1$ toepassen.

We vinden dan voor de n -de afgeleide $h \propto \frac{1}{d} \frac{d^n Q}{dt^n} \propto \frac{1}{d} m r^2 t^{-n} \propto \frac{1}{\ell} \ell^2 \ell^{-n} \propto \ell^{2-n}$, wat dimensieloos is voor $n = 2$. Als we teruggaan naar SI-eenheden, en de c 's en G 's weer terugzetten, dan zien we dat de tweede afgeleide de dimensie $\frac{1}{d} m r^2 t^{-2} \propto \frac{1}{\ell} \frac{\ell c^2}{G} \ell^2 \left(\frac{\ell}{c}\right)^{-2} \propto \frac{c^4}{G}$ heeft. Om dit dimensieloos te maken, moeten we dus delen door c^4/G , en krijgen:

$$h \sim \frac{1}{d} \frac{G}{c^4} \ddot{Q}. \quad (5.14)$$

We kunnen in Vgl. 5.14 $\ddot{Q}$ schrijven als $\ddot{Q} \sim \frac{mr^2}{\tau^2}$, waarbij τ een of andere relevante tijdschaal is,¹¹ en kunnen dan de orde van grootte van een golf schatten uit $h \sim \frac{1}{d} \frac{G}{c^4} \frac{mr^2}{\tau^2}$, door SI-eenheden in te vullen: $d = 1 \text{ m}$, $m = 1 \text{ kg}$, $r = 1 \text{ m}$ en $\tau = 1 \text{ s}$. We vinden dan $h \equiv \frac{\delta x}{x} \sim 10^{-44}$, een extreem (en onmeetbaar) kleine relatieve verstoring van de ruimtemetrick. De amplitudes van deze zwaartekrachtgolven zijn dus zeer gering — we zullen naar bronnen met hoge massa's en/of korte tijdschalen op niet al te grote afstand moeten kijken om enig meetbaar effect te vinden. We zullen zien dat sommige kosmische bronnen ondanks de grote afstand de juiste combinatie van eigenschappen verschaffen.

5.4 Zwaartekrachtgolven van een dubbelster

Als we de diagonaal- en kruistermen van $\ddot{Q}$ uit Vergelijking 5.14 opsplitsen en toekennen aan h_+ respectievelijk $h_{\times}$, kunnen we de leidende orde van de amplitude van zwaartekrachtgolven in de TT-ijking, als oplossing van Vgl. 5.6 analoog aan Vgl. 5.7, schrijven als

$$h_+ = \frac{1}{d} \frac{G}{c^4} (\ddot{Q}^{11} - \ddot{Q}^{22}); \quad h_{\times} = \frac{1}{d} \frac{G}{c^4} \ddot{Q}^{12} + \frac{1}{d} \frac{G}{c^4} \ddot{Q}^{21} = \frac{2}{d} \frac{G}{c^4} \ddot{Q}^{12}. \quad (5.15)$$

De betekenis hiervan is dat¹²

1. de amplitude van de golven omgekeerd evenredig is met de **lineaire afstand** tot de bron;
2. de leidende orde van zwaartekrachtstraling de **quadrupoolstraling** is;
3. een massaquadrupoolmoment nodig is, dat wil zeggen een **asymmetrie** in de massaverdeling die **variëert met de tijd**, om zwaartekrachtgolven te kunnen opwekken.

Dit laatste punt betekent dat een perfect sferische, snelroterende neutronenster (pulsar; zie Hoofdstuk 3.5.2) *geen* zwaartekrachtgolven zal uitzenden. Een pulsar met een “heuvel” wel, en daar wordt ook daadwerkelijk naar gezocht. Een andere categorie van tijdsvariabele asymmetrische zware massa's zijn de **compacte dubbelsterren** uit Hoofdstuk 4.8. Het blijkt dat dit de meestbelovende bronnen zijn voor zwaartekrachtgolven. Voor de zwaartekrachtdetectoren LIGO en Virgo gaat het om dubbelsterren die bestaan uit neutronensterren en/of zwarte gaten. De drie mogelijke combinaties worden in het Engels aangeduid als *binary neutron star* (**BNS**), *neutron star–black hole* (**NSBH**) en *binary black hole* (**BBH**). Op het moment van schrijven zijn dit de enige bronnen van zwaartekrachtgolven die direct zijn waargenomen, en we zullen ons in dit hoofdstuk hierop richten.

¹⁰Denk aan de Schwarzschildstraal van een zwart gat in Vgl. 3.14 op pagina 51.

¹¹We zullen hieronder zien dat $\tau \sim 1/\omega_{\text{gw}}$, waarbij $\omega_{\text{gw}} = 2\pi f_{\text{gw}}$ de *hoeksnelheid* van de gravitatiegolf is.

¹²Wij hebben deze eigenschappen in H. 5.3 gebruikt als input om de amplitude “af te leiden”; in werkelijkheid volgen ze uit de ART.

Als we een compacte dubbelster voorstellen met het baanvlak in het $x - y$ -vlak, kunnen we de tijdsafhankelijke positie van ster 1 schrijven als

$$\vec{r}_1(t) = (x_1, y_1, z_1)(t) = a_1 \left(\cos \left(\omega_b t + \frac{\pi}{2} \right), \sin \left(\omega_b t + \frac{\pi}{2} \right), 0 \right), \quad (5.16)$$

waar ω_b de *hoeksnelheid* van de dubbelster is (zie Vgl. 4.4). We vinden dan uit Vgl. 5.13, na wat rekenwerk,¹³ dat $\ddot{Q}^{11} = 2\mu a_b^2 \omega_b^2 \cos(2\omega_b t)$, $\ddot{Q}^{22} = -\ddot{Q}^{11}$ en $\ddot{Q}^{12} = \ddot{Q}^{21} = 2\mu a_b^2 \omega_b^2 \sin(2\omega_b t)$.¹⁴ Wanneer we dit invullen in Vgl. 5.15 krijgen we

$$\begin{aligned} h_+(t) &= \frac{4}{d} \frac{G}{c^4} \mu a_b^2 \omega_b^2 \cos(2\omega_b t); \\ h_\times(t) &= \frac{4}{d} \frac{G}{c^4} \mu a_b^2 \omega_b^2 \sin(2\omega_b t). \end{aligned} \quad (5.17)$$

De amplitude kan met behulp van de wet van Kepler ook worden geschreven als

$$|h_{+, \times}| = \frac{4}{d} \frac{G}{c^4} \mu a_b^2 \omega_b^2 = \frac{4}{d} \frac{G^2}{c^4} \frac{M_1 M_2}{a_b} = \frac{4}{d} \frac{G^{5/3}}{c^4} \frac{M_1 M_2}{M_T^{1/3}} (\pi f_{\text{gw}})^{2/3} = \frac{4}{d} \left(\frac{G \mathcal{M}_c}{c^2} \right)^{5/3} \left(\frac{\pi f_{\text{gw}}}{c} \right)^{2/3}, \quad (5.18)$$

waar we in de laatste term de **chirpmassa** $\mathcal{M}_c$ uit Vgl. 4.7 op pagina 54 hebben gebruikt. Uit bovenstaande formules zien we dat

1. de frequentie waarmee zwaartekrachtgolven worden uitgezonden tweemaal de baanfrequentie is:
 $\omega_{\text{gw}} = 2\pi f_{\text{gw}} = 2\omega_b = 4\pi f_b$;
2. h_+ en $h_\times$ enkel via de *chirpmassa* afhangen van de ster massa's.¹⁵

Om de amplitude van een zwaartekrachtgolf af te schatten, nemen de parameters van GW 150914 als voorbeeld. Dit was de eerste detectie van zwaartekrachtgolven, door de LIGO-detector, op 14 september 2015, en betrof een inspiraliserend dubbel zwart gat (*binary black hole*; **BBH**) met massa's van 35 en $30 M_\odot$ op een afstand van 440 Mpc. Verder kiezen we een frequentie van 100 Hz.¹⁶ Uit Vgl. 5.18 blijkt dan dat de amplitude van het signaal $|h_{+, \times}| \approx 1.5 \times 10^{-21}$ was. Vergelijking 5.4 herinnert ons dat dit een *relatieve* verstoring is, ook wel **strain** genoemd, van de (lokaal) vlakke metrie met waarde 1. Over een afstand van de armen van de LIGO-detector van $L = 4$ km gaat het dan om een absolute verandering van $\Delta L \approx 6 \times 10^{-18}$ m. Deze afstand is ongeveer een 280e deel van de *ladingsdiameter* van een proton ($\approx 1.7 \times 10^{-15}$ m). De detectie van de eerste zwaartekrachtgolf komt dus neer op het meten van een verandering in afstand van een fractie van een protondiameter over 4 km!

5.5 Het uitgestraalde vermogen door inspiraliserende dubbelsterren

Een bron die zwaartekrachtgolven uitzendt verliest daarbij energie. Om een idee te krijgen hoe dat energieverlies, dat we kunnen zien als een **vermogen** P_{gw} , eruit ziet, kunnen we als volgt redeneren:

1. We hebben te maken met een **tijdsafgeleide** van de bron van onze golven. Aangezien we zagen dat de amplitude schaaft als $h \propto \ddot{Q}$, ligt een afhankelijkheid in termen van $\ddot{Q}$ voor de hand.
2. Bij licht schaaft de energie met het **kwadraat** van de amplitude van de golf. Om bij GWs van amplitude naar energie te converteren, kunnen we ook kwadrateren. We vinden dan een afhankelijkheid van $h \propto (\ddot{Q})^2 \propto \left(\frac{dh}{dt} \right)^2$.

¹³Begin met de 1,1-term van ster 1: $Q_1^{11}(t) = M_1 x_1(t) x_1(t)$, vul Vgl. 5.16 in, gebruik $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$, neem twee keer de tijdsafgeleide met kettingregel (wat o.a. twee factoren ω_b oplevert) en gebruik dat $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$. Analoog voor Q_2^{11} voor ster 2. Na optellen van de twee sterren, vervang $M_{1,2}$ en $a_{1,2}$ door μ en a_b m.b.v. Vgl. 4.6 op pagina 54. De andere drie termen hebben vergelijkbare stappen nodig.

¹⁴Merk op dat voor een dubbelster $\dot{I} = 0$ aangezien de grootte van deze scalar niet verandert, terwijl $\dot{Q} \neq 0$, doordat de oriëntatie en dus de tensor *wel* veranderen.

¹⁵In de eerste uitdrukking voor $|h_{+, \times}|$ in Vgl. 5.17 bevat de term $a_b^2 \omega_b^2$ de massa.

¹⁶Deze keuze is nodig om een enkele waarde te krijgen, aangezien de amplitude van het signaal varieert met de frequentie.

3. Om een verder idee te krijgen van de afhankelijkheden, kunnen we opnieuw een *dimensioneel* argument gebruiken met behulp van *natuurlijke eenheden*.

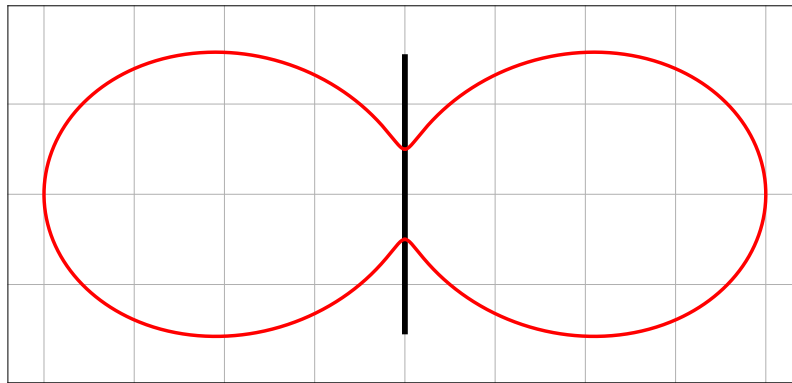
Als we met het laatste punt te beginnen, vinden we dat voor vermogen geldt dat $P = \frac{dE}{dt} \sim \frac{mc^2}{\tau} \sim \frac{\ell c^2}{G} c^2 \left(\frac{\ell}{c}\right)^{-1} = \frac{c^5}{G}$, wat dimensieloos is. Verder geldt $(\ddot{Q})^2 \sim \left(\frac{mr^2}{\tau^3}\right)^2 \sim \left(\frac{\ell c^2}{G} \ell^2 \left(\frac{\ell}{c}\right)^{-3}\right)^2 = \left(\frac{c^5}{G}\right)^2 \sim \frac{c^5}{G} P$ (eveneens dimensieloos). Als we dan meteen maar m , r en τ vervangen door μ , a_b en $1/(2\omega_b)$, vinden we $P_{\text{gw}} \propto \frac{G}{c^5} (\ddot{Q})^2 \sim \frac{G}{c^5} \mu^2 a_b^4 \omega_b^6$.

Ons resultaat blijkt de juiste afhankelijkheden op te leveren en slechts een factor ~ 6 te verschillen met de volledige formule die voor het eerst werd afgeleid door Peters in 1963:

$$P_{\text{gw}} = \frac{32}{5} \frac{G}{c^5} \mu^2 a_b^4 \omega_b^6 = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{M_1^2 M_2^2 M_{\text{T}}}{a_b^5} = \frac{32}{5} \frac{c^5}{G} \left(\frac{G M_{\text{c}}}{c^3}\right)^{10/3} (\pi f_{\text{gw}})^{10/3}. \quad (5.19)$$

Het uitgezonden vermogen is niet in alle richtingen gelijk (niet *isotroop*). Figuur 5.2 geeft hiervan een grafische weergave. De energie wordt met name uitgezonden loodrecht op het vlak van de dubbelster. Dat betekent dat we het signaal van een dubbelster sterker “zien” wanneer deze we van ‘boven’ of ‘onder’ waarnemen (*face-on/face-off* — de gezichtslijn staat *loodrecht* op het baanvlak). De amplitude voor die *optimale oriëntatie* wordt gegeven door Vgl. 5.18. Wanneer wordt gemiddeld over alle mogelijke oriëntaties van de dubbelster, blijkt dit een factor $\frac{2}{\sqrt{5}}$ *lager* te zijn. Daarnaast wordt een zwaartekrachtgolf die de Aarde bereikt *geprojecteerd* op de onze zwaartekrachtdetectoren, die in een plat vlak liggen. Het effect van deze projectie wordt beschreven door het **antennepatroon** (*antenna-beam pattern*). De *gemiddelde* projectiefactor over alle mogelijke oriëntaties van de huidige detectoren is $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Als zowel het effect van de oriëntatie als van de projectie worden beschouwd kan het product van de twee factoren worden gebruikt voor de gemiddelde strain:

$$\langle h(t) \rangle = \frac{2}{5} h_{\text{opt}}(t). \quad (5.20)$$



Figuur 5.2: Grafische weergave van de richtingsafhankelijkheid van het uitgestraalde vermogen van zwaartekrachtgolven. De verticale lijn geeft het baanvlak van de dubbelster weer; de golven worden dus vooral loodrecht op dat vlak uitgezonden. In drie dimensies heeft de figuur ongeveer de vorm van een pindadop.

5.6 Het signaal van een inspiral

In dit hoofdstuk zullen we bekijken hoe het GW-signaal van een inspiraliserende compacte dubbelster eruitziet. Deze *golfvorm*, die met de tijd toeneemt in amplitude en frequentie, wordt een *chirp* genoemd.

5.6.1 De chirp

De energie die wordt uitgestraald door de zwaartekrachtgolven gegenereerd door een compacte dubbelster gaat ten koste van de dubbelsterbaan, waardoor deze steeds nauwer wordt en de twee componenten *inspiraliseren* (Engels: **inspiral**): $\frac{dE_{\text{gw}}}{dt} = \frac{dE_{\text{b}}}{dt}$. Uit gelijkstellen van Vgl. 5.19 aan de tijdsafgeleide van Vgl. 4.11 op pagina 58, die we eerst omschrijven naar termen van $\mathcal{M}_{\text{c}}$ en f_{gw} , volgt de afgeleide van de frequentie:

$$\dot{f}_{\text{gw}} = \frac{96}{5} \pi^{8/3} \left(\frac{G\mathcal{M}_{\text{c}}}{c^3} \right)^{5/3} f_{\text{gw}}^{11/3}. \quad (5.21)$$

Dit toont dat de chirpmassa $\mathcal{M}_{\text{c}}$ bepaald kan worden uit de meting van f en $\dot{f}$. Deze differentiaalvergelijking kunnen we vervolgens integreren van een gegeven beginfrequentie tot oneindig, wat overeenkomt met een tijdsintegraal van een gegeven tijd t tot het tijdstip waarop de dubbelster samensmelt t_{coal} (*time of coalescence*; eigenlijk het moment waarop de frequentie mathematisch oneindig wordt), met als oplossing

$$f_{\text{gw}}(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{G\mathcal{M}_{\text{c}}}{c^3} \right)^{-5/8} \left(\frac{5}{256} \frac{1}{t_{\text{coal}} - t} \right)^{3/8}. \quad (5.22)$$

We zien dat de frequentie van de golven toeneemt met de tijd, met een snelheid die afhangt van de chirpmassa. Uit vergelijking 5.18 zien we dat daardoor de amplitude van de golf ook toeneemt. Om die reden wordt dit een **chirp** (*tjilp*; vandaar *chirpmassa*) genoemd.

5.6.2 De duur van een signaal

Door te integreren over een *eindig* frequentie-interval en op te lossen naar de tijd, volgt uit Vgl. 5.21 de tijd gedurende welke het GW-signaal zich binnen een bepaalde frequentieband $f_{\text{min}} - f_{\text{max}}$ bevindt:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{5}{256} \pi^{-8/3} \left(\frac{G\mathcal{M}_{\text{c}}}{c^3} \right)^{-5/3} \left[f_{\text{min}}^{-8/3} - f_{\text{max}}^{-8/3} \right] \\ &\approx 2.16 \text{ s} \left(\frac{\mathcal{M}_{\text{c}}}{1.22 M_{\odot}} \right)^{-5/3} \left[\left(\frac{f_{\text{min}}}{100 \text{ Hz}} \right)^{-8/3} - \left(\frac{f_{\text{max}}}{100 \text{ Hz}} \right)^{-8/3} \right], \end{aligned} \quad (5.23)$$

waar $\mathcal{M}_{\text{c}} \approx 1.22 M_{\odot}$ geldt voor twee neutronensterren van ieder $1.4 M_{\odot}$. Dit is relevant omdat detectoren een eindig frequentiebereik hebben; het geeft de tijdspanne dat het signaal “zichtbaar” is voor de detector. De minimale frequentie f_{min} wordt gegeven door de gevoeligheid van de detector; de frequentie waarbij het signaal met toenemende frequentie “zichtbaar” wordt. De maximale frequentie f_{max} wordt over het algemeen gegeven door de frequentie waarbij de dubbelster samensmelt (zie H. 5.6.3) en kan worden verwaarloosd indien $f_{\text{max}} \gg f_{\text{min}}$. Voor een typische waarde $f_{\text{min}} \approx 30 \text{ Hz}$ vinden we dat het signaal van een BNS ongeveer een minuut zichtbaar is, dat van een NSBH met massa’s van $1.4 + 10 M_{\odot}$ circa 12 s, voor een BBH met $10 + 10 M_{\odot}$ is $\Delta t \approx 2 \text{ s}$ en voor een BBH met $30 + 30 M_{\odot}$ is dat circa 0.3 s.

Ook kunnen we Vgl. 5.19 omschrijven naar een afname van de baanafstand met behulp van Vgl. 4.11

$$\left(\frac{da_{\text{b}}}{dt} \right)_{\text{gw}} = -\frac{64}{5} \frac{G^3}{c^5} \frac{M_1 M_2 M_{\text{T}}}{a_{\text{b}}^3}. \quad (5.24)$$

Als we dit integreren, vinden we de tijd die nodig is om de baan tot nul te laten krimpen:

$$\tau_{\text{merge}} = \frac{5}{256} \frac{c^5}{G^3} \frac{a_{\text{b}}^4}{M_1 M_2 M_{\text{T}}} \approx 150 \text{ Myr} \left(\frac{a_{\text{b}}}{R_{\odot}} \right)^4 \left(\frac{M_1}{M_{\odot}} \right)^{-1} \left(\frac{M_2}{M_{\odot}} \right)^{-1} \left(\frac{M_{\text{T}}}{M_{\odot}} \right)^{-1}. \quad (5.25)$$

5.6.3 ISCO, merger en ringdown

In werkelijkheid wordt de frequentie natuurlijk nooit oneindig, doordat de componenten in de dubbelster een eindige afmeting hebben. In het bijzonder geldt dat voor een **zwart gat** een afstand bestaat waarbinnen geen cirkelbanen kunnen voorkomen. Dit wordt de *innermost stable circular orbit* (**ISCO**) genoemd,

en wordt voor een testmassa in een baan om een niet-roterend zwart gat in de Schwarzschildmetriek gegeven door

$$R_{\text{isco}} = 3R_s = \frac{6GM}{c^2}, \quad (5.26)$$

waar R_s de **Schwarzschildstraal** is (Vgl. 3.14 op pagina 51). Doordat R_s lineair schaalt met de massa geldt dit ook voor twee zwarte gaten wanneer we de som van hun massa's en stralen nemen. We kunnen met behulp van Kepler de baanfrequentie uitrekenen en dit omzetten naar de frequentie van de gravitatiegolf:

$$f_{\text{gw,isco}} = 2f_{\text{orb,isco}} = 2 \cdot \frac{1}{6^{3/2}2\pi} \frac{c^3}{GM} = \frac{1}{6^{3/2}\pi} \frac{c^3}{GM} \approx 4.4 \text{ kHz} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1}. \quad (5.27)$$

Vergelijking 5.27 geeft dus een schatting van de maximale frequentie voor de fase waarin de twee objecten inspiraliseren. Vanaf dat moment maakt de **inspiral**-fase plaats voor de **merger**, waarin de objecten naar elkaar toe vallen en samensmelten. In de meeste gevallen zal dit een enkel en roterend zwart gat opleveren. Voor een heel ruwe schatting van de maximale frequentie van het signaal van een inspiral van twee objecten met radii R_1 en R_2 wordt gegeven door

$$f_{\text{gw,max}} \sim \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{GM}{a_{\text{min}}^3}}; \quad a_{\text{min}} \sim 1.5 (R_1 + R_2), \quad (5.28)$$

waar we voor R_i de Schwarzschildstraal kunnen nemen voor zwarte gaten, en $R_i \approx 12 \text{ km}$ een aardige aanname is voor **neutronensterren**. De factor 1.5 is ad-hoc, en geeft redelijke resultaten voor onze vereenvoudigde beschrijving. De **merger**-fase wordt gevolgd door de **ringdown**, waarin het zwarte gat nog wat nagalmt door de heftige gebeurtenis, totdat de hierbij veroorzaakte zwaartekrachtgolven deze pulsaties hebben “weggestraald” en een normaal (roterend) zwart gat achterblijft. De merger en ringdown duren over het algemeen kort in vergelijking met de inspiralfase, behalve voor zeer zware zwarte gaten.

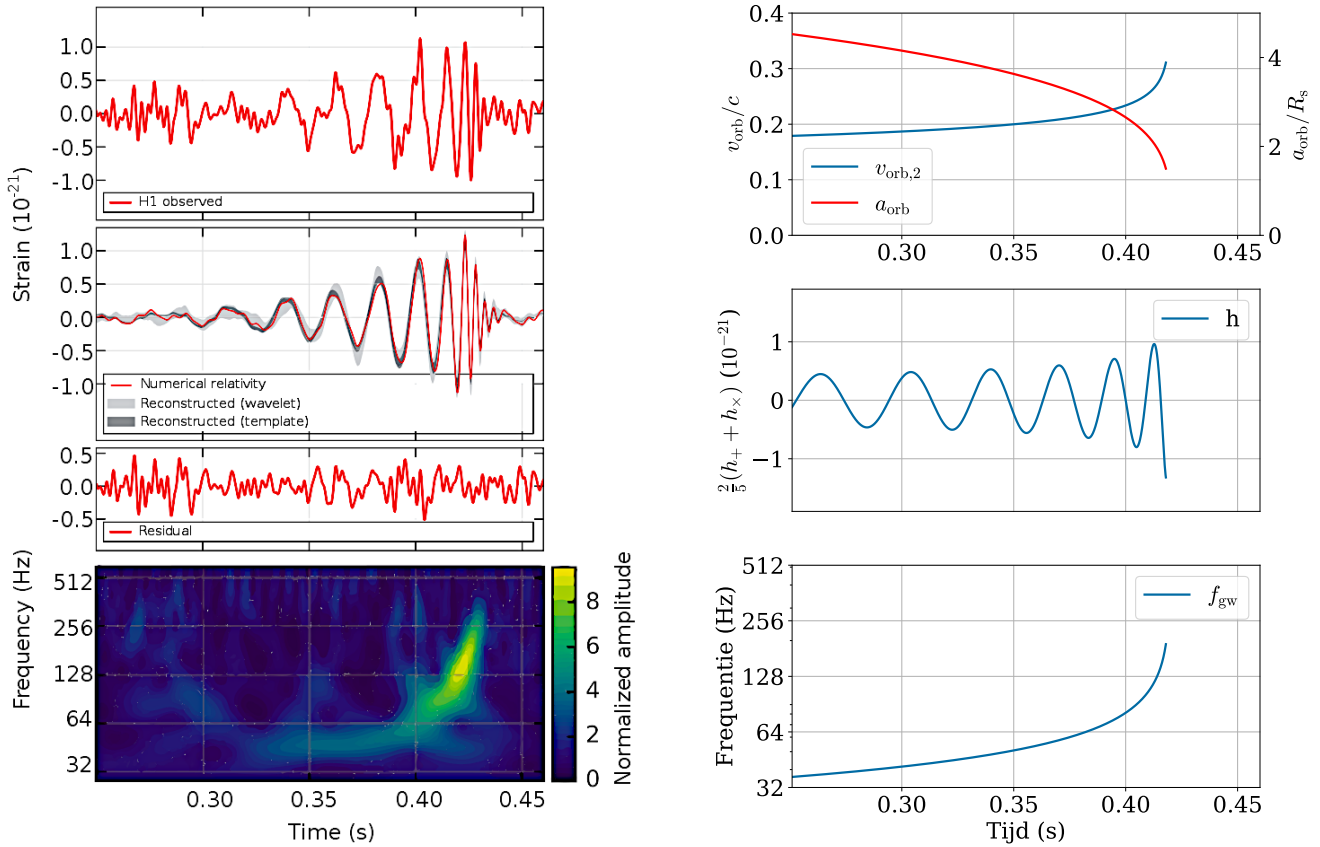
5.6.4 Een eenvoudige golfvorm

Met bovenstaande vergelijkingen kunnen we een versimpelde golfvorm opstellen voor de inspiral van een compacte dubbelster. Figuur 5.3 toont deze resultaten voor de eerste directe detectie van zwaartekrachtgolven, GW150914, vergeleken met het werkelijke signaal. Figuur 5.4 vergelijkt een aantal van deze signalen voor verschillende bronnen, berekend met een nauwkeurig model. In Hoofdstuk 5.8 zullen we zien hoe een dergelijk signaal er in het *frequentiedomein* uitziet, dat wil zeggen het *spectrum* van een golfvorm, waarmee de meeste data-analyse plaatsvindt.

5.7 Een zwaartekrachtgolfdetector

5.7.1 De Michelson-interferometer

In Sectie 5.3 zagen we dat de amplitude van een zwaartekrachtgolf van de orde $h \sim 10^{-21}$ is, en dat dit kan worden gemeten als een relatieve verandering in lengte: $h \equiv \frac{\Delta L}{L}$. Deze h wordt vaak de **strain** genoemd (“relatieve lengteverandering”). Om zulke minieme afstandsveranderingen te meten maken de huidige gravitatiegolfdetectoren als LIGO (in de VS), Virgo (in Italië) en KAGRA (in Japan), maar ook toekomstige detectoren als LISA (ruimtemissie), Einstein Telescope (EU) en Cosmic Explorer (VS) gebruik van een **Michelson-interferometer**. Een versimpelde weergave is te zien in Figuur 5.5a. De interferometer bestaat uit een **lichtbron** (vrijwel altijd een laser), een halfdoorlatende spiegel die fungeert als **bundelsplitser** (*beam splitter*) die (in dit geval) onder een hoek van 45° is geplaatst en de laserbundel in twee delen splitst naar de twee armen die loodrecht op elkaar staan, twee **eindspiegels** die de twee bundels terugkaatsen, en een **fotodetector**. Wanneer de twee laserbundels de bundelsplitser bereiken, worden zij (gedeeltelijk) gecombineerd en in de richting van de fotodetector gestuurd, die het signaal uitleest. De eindspiegels zijn tevens de *testmassa's*, seismisch geïsoleerd opgehangen zodat ze vrij kunnen bewegen onder invloed van een passerende golf, waartussen de (verandering in) afstand gemeten wordt. De spiegels in LIGO en Virgo hebben een gemiddelde afwijking van minder dan 1 nm in hun vorm, en verstrooiing en absorptie blijven beperkt tot minder dan 10^{-6} van het opvallende licht.



Figuur 5.3: Linker kolom: het signaal van GW150914 in de LIGO-detector in Hanford (H1). Het bovenste paneel geeft de ruwe data, het tweede het beste model (met onzekerheid), en het derde de overgebleven ruis nadat het model is afgetrokken van de data. Het is ongebruikelijk dat het signaal met het oog is te zien in de data. Het onderste paneel toont de amplitude (kleurgecodeerd) in een tijd-frequentiediagram.

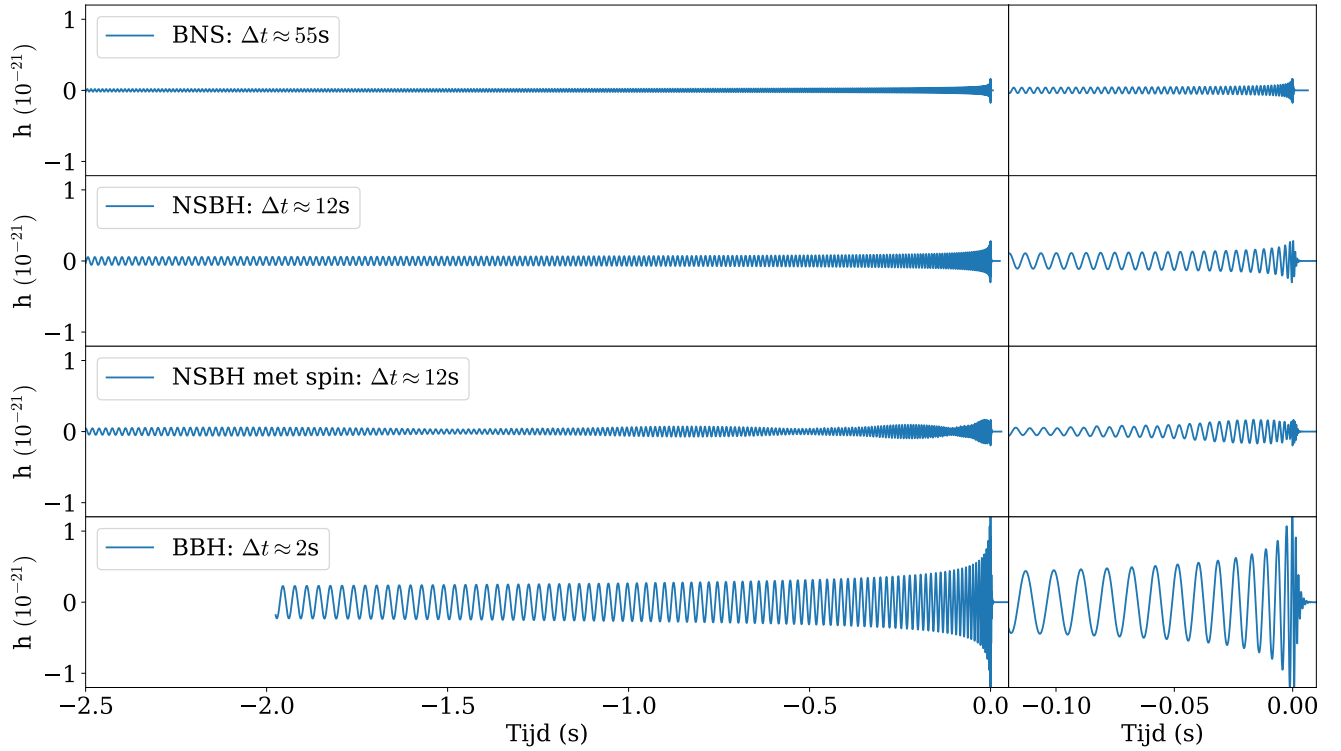
Rechter kolom: een simpele golfvorm voor de inspiral van een dubbel zwart gat met componenten van 35 en $30 M_{\odot}$ en een afstand van 440 Mpc, de beste waarden voor GW150914, volgens vergelijkingen 5.17 en 5.22. Het bovenste paneel toont de krimpde dubbelsterbaan en de toenemende snelheid van het tweede zwarte gat, het middelste de golfvorm en het onderste de frequentie als functie van de tijd. Merk op dat onze formules Newtoniaans zijn en dus geen rekening houden met de gekromde ruimtetijd, wat zeker voor deze massieve zwarte gaten onnauwkeurigheden oplevert: volgens vergelijking 5.27 is $f_{\text{gw}, \text{isco}} \sim 68$ Hz. Ook is het signaal niet netjes op een detector geprojecteerd, maar een gemiddelde sterkte genomen (vandaar de factor $\frac{2}{5}$ in het middelste paneel; zie Vgl. 5.20). Toch lijken onze vereenvoudigde resultaten kwalitatief op de werkelijkheid, al boeten ze kwantitatief in, zeker tegen het einde. De merger en ringdown zijn geen onderdeel van ons simpele model; het signaal is afgebroken volgens Vgl. 5.28.

We kunnen de nauwkeurigheid van een Michelson-interferometer afschatten door aan te nemen dat standaard *destructieve* interferentie optreedt en de fotodetector geen licht meet.¹⁷ Wanneer de lengte van de armen dan (op ongelijke wijze) verandert, wordt de destructieve interferentie (gedeeltelijk) opgeheven en wordt een signaal gemeten. Als we nog eens kijken naar de pluspolarisatie in Figuur 5.1 op pagina 70 en ons voorstellen dat daar een L-vormige Michelson-interferometer in geplaatst is, dan zien we dat in het optimale geval de ene arm uitstrekt terwijl de andere krimpt. Vergelijkingen 5.9–5.10 tonen dan dat het totale weglengteverschil in de twee armen wordt gegeven door

$$\Delta L(t) = \Delta L_x(t) - \Delta L_y(t) = \frac{L_x}{2} h(t) - \frac{-L_y}{2} h(t) \approx L h(t), \quad (5.29)$$

aangezien de lengte van de twee armen ruwweg gelijk is om zoveel mogelijk lokale ruisbronnen in de twee armen elkaar te laten opheffen: $L_x \approx L_y \equiv L$. Bij een kleine verstoring in armlengte $\Delta L \ll \lambda_L$ zal dan

¹⁷Ook wel *dark fringe* genoemd. De hier geschetste situatie is een grove versimpeling; de realiteit is complexer, waar de interferometer *dicht bij* maar niet *in* een dark fringe wordt gehouden en gebruik wordt gemaakt van modulatie van het laserlicht.



Figuur 5.4: De laatste 2.5 s van vier gesimuleerde signalen van een zwaartekrachtgolf gedetecteerd door een enkele detector. Van boven naar beneden: een BNS van $1.4+1.4 M_{\odot}$, een NSBH van $1.4+10 M_{\odot}$, dezelfde NSBH met spin en een BBH van $10+10 M_{\odot}$. Alle bronnen staan op een afstand van 100 Mpc en hebben dezelfde oriëntatie- en projectiefactor op de detector ($\frac{2}{5}$; zie Vgl. 5.20). Het verschil in amplitude komt dus voort uit de intrinsieke sterkte van de bron. De signalen starten bij 30 Hz, maar alleen van het laatste is de volledige golfvorm te zien. De duur van de signalen vanaf die frequentie is respectievelijk 54.6 s, 11.8 s, 12.2 s en 1.98 s. De kleinere rechter panelen tonen steeds hetzelfde signaal, maar ingezoomd op de laatste 0.14 s. Hier zijn de merger en ringdown zichtbaar. Bij het derde signaal heeft het zwarte gat een spin van 80% van maximaal, en de spinas maakt een hoek van 60° . Als die hoek 0° zou zijn zou er geen precessie plaatsvinden van de dubbelsterbaan. De veranderende inclinatie ι en polarisatiehoek ψ veroorzaken de modulatie van het signaal die niet te zien is in het paneel erboven.

een faseverschil $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_L} \Delta L$ ontstaan en een laservermogen worden gemeten dat wordt gegeven door

$$P = \eta_{PD} P_L \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = \eta_{PD} P_L \sin^2 \frac{\pi \Delta L}{\lambda_L} \sim \eta_{PD} P_L \left(\frac{\pi \Delta L}{\lambda_L} \right)^2, \quad (5.30)$$

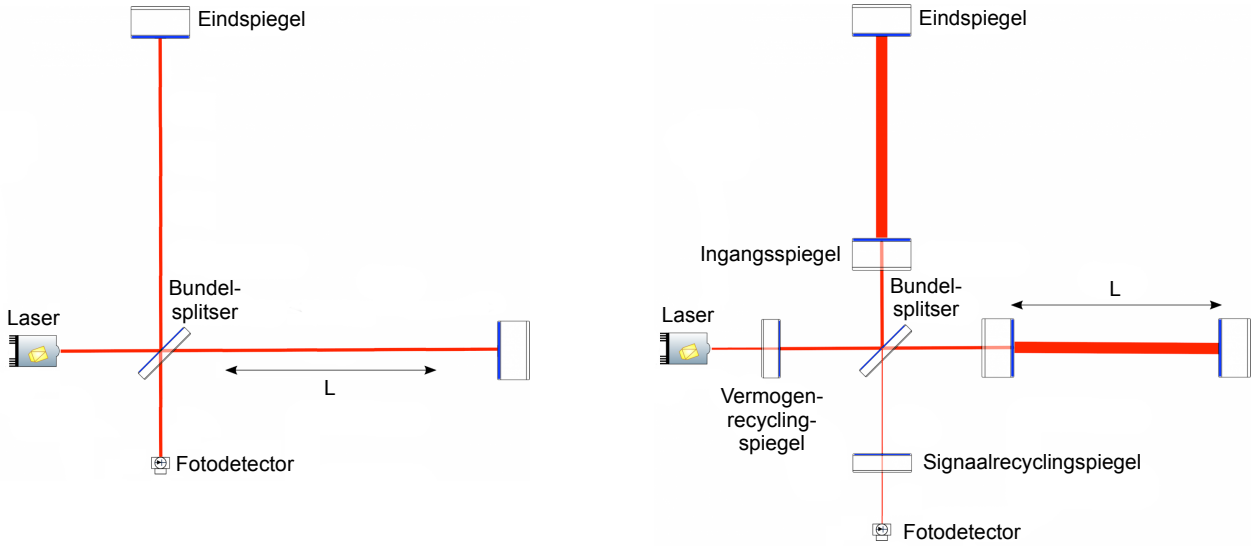
waarin η_{PD} de efficiëntie van de fotodetector is, P_L en λ_L het vermogen en de golflengte van het laserlicht voorstellen, en waarbij we de eerste-orde Taylorexpanctie $\sin x \sim x$ mogen gebruiken doordat $\Delta L \ll \lambda_L$. Het aantal fotonen dat door de fotodetector wordt geteld is dan

$$N_{ph} = \eta_{PD} P \frac{\lambda_L}{hc} \tau = \eta_{PD} P_L \frac{\pi^2 \Delta L^2}{hc \lambda_L} \tau, \quad (5.31)$$

met $\frac{hc}{\lambda_L}$ de energie van een laserfoton¹⁸ en τ de meettijd, en waar we P hebben gesubstitueerd met behulp van Vgl 5.30. Het tellen van fotonen volgt de *Poissonstatistiek*, waarvoor geldt dat de onzekerheid, gevormd door **shot noise** (ook wel “hagelruis” genoemd), schaalt met de wortel van het aantal fotonen: $\sigma_{N_{ph}} \sim \sqrt{N_{ph}}$. Het minimale verschil in de twee armlengtes dat we nog kunnen detecteren bij een signaal-ruisverhouding (*signal-to-noise ratio*; **SNR**) van 1 is per definitie $\Delta L_{\min} = \sigma_{\Delta L}$, zodat

$$\Delta L_{\min} = \sigma_{\Delta L} = \left(\frac{\partial N_{ph}}{\partial \Delta L} \right)^{-1} \sigma_{N_{ph}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{hc \lambda_L}{\eta_{PD} P_L \tau}}. \quad (5.32)$$

¹⁸Let op: de h die we in deze subsectie zonder uitzondering zien als het product hc is de constante van Planck, niet de amplitude! (In de literatuur wordt vaak $2\pi\hbar$ gebruikt om verwarring te voorkomen.)



Figuur 5.5: Linker paneel (a): Een simpele Michelson-interferometer bestaat uit een lichtbron (laser), een halfdoorlatende spiegel die fungeert als bundelsplitser, twee eindspiegels en een fotodetector. **Rechter paneel (b):** Met extra halfdoorlatende spiegels kan het vermogen in de armen van de interferometer worden opgeschroefd, en daarmee de nauwkeurigheid van de zwaartekrachtgolfdetector.

De minimale strain als dimensieloze relatieve verandering is dan

$$h_{\min} = \frac{\Delta L_{\min}}{L} = \frac{1}{2\pi L} \sqrt{\frac{hc\lambda_L}{\eta_{PD} P_L \tau}}. \quad (5.33)$$

Om de detectorruis te kunnen vergelijken met de signalen, die vaak significant in sterkte veranderen gedurende hun duur, wordt gebruik gemaakt van de **amplitude-spectrale dichtheid** (*amplitude-spectral density*, **ASD**), maar ook *strain* genoemd, gemeten in $1/\sqrt{\text{Hz}}$. De gangbare notatie is om “(f)” toe te voegen aan de spectrale strain, ook als deze geen functie is van de frequentie. De ASD voor ruis wordt ook aangegeven als $S_n^{1/2}(f)$, waarbij de macht $1/2$ aangeeft dat het om de *amplitude* gaat, niet het vermogen. De dimensieloze strain die we hierboven hebben afgeleid voor de shot noise kan worden vervangen door de ASD als

$$S_n^{1/2}(f) \Big|_{\text{shot}} = h_{\min}(f) \Big|_{\text{shot}} = \frac{\Delta L_{\min}(f)}{L} \Big|_{\text{shot}} = \frac{1}{2\pi L} \sqrt{\frac{hc\lambda_L}{\eta_{PD} P_L}} \quad (5.34)$$

$$\approx \frac{7 \times 10^{-20}}{\sqrt{\eta_{PD}}} \left(\frac{L}{1 \text{ km}} \right)^{-1} \left(\frac{\lambda_L}{\mu\text{m}} \right)^{1/2} \left(\frac{P_L}{\text{W}} \right)^{-1/2}, \quad (5.35)$$

waarbij in feite alleen de meettijd τ is komen te vervallen.

Voor de LIGO-detectoren in de VS, met een armlengte van $L \approx 4 \text{ km}$, een laser met $\lambda_L \approx 1064 \text{ nm}$ en $P_L \approx 100 \text{ W}$ en een fotodetector met efficiëntie $\eta_{PD} = 0.93$ vinden we $h_{\min}(f) \approx 2 \times 10^{-21}/\sqrt{\text{Hz}}$ (zie Fig. 5.6), oftewel een relatieve verandering van $h_{\min} \approx 2 \times 10^{-20}$ bij $f_{\text{gw}} = 100 \text{ Hz}$. Uit Sectie 5.3 weten we dat dit een orde van grootte te weinig is om een (sterke, korte) zwaartekrachtgolf te kunnen detecteren.¹⁹

Vergelijking 5.34 toont dat er drie mogelijkheden zijn om de Michelson-interferometer gevoeliger te maken. Een langere golflengte voor de laser realiseren is echter lastig, doordat de opties beperkt zijn en een goede keuze al gebruikt wordt.²⁰ Langere armen zijn geologisch ingewikkeld²¹ en duur. Het vermogen van de lasers wordt over de jaren langzaam opgeschroefd. Dit heeft een gunstig effect op de shot noise, maar creëert extra ruis door de toegenomen **stralingsdruk**, wat de nauwkeurigheid weer schaadt. Deze ruis

¹⁹Dit hangt af van de duur van het signaal.

²⁰Voor te lange golflengtes worden de huidige spiegels van kwartsglas (puur, amorf SiO_2) transparant.

²¹Zelfs over een afstand van 3–4 km kunnen de armen van een zwaartekrachtgolfdetector niet over het aardoppervlak gelegd worden; de kromming van de Aarde is te sterk!

ontstaat bij lage frequenties doordat fluctuaties in de laser een variatie in de stralingsdruk veroorzaakt, die de spiegel licht laten bewegen. Bij een te sterke laser worden het vermogen en de golflengte van het laserlicht minder stabiel en de ruis sterker.

5.7.2 Een verbeterde Michelson-interferometer

Naast de interferometer *fysiek* te verbeteren, worden verschillende truuks gebruikt om zijn werking *effectief* te versterken. Een selectie aan (optische) technieken waarmee een simpele Michelson-interferometer kan worden uitgebreid is weergegeven in Figuur 5.5b. Ten eerste wordt een **ingangsspiegel** aan het begin van ieder van de twee armen geplaatst, net achter de bundelsplitser. Hierdoor wordt de arm in feite een **Fabry-Pérot-holte**, waarin het laserlicht typisch 250–300 keer heen en weer gekaatst wordt voordat het kan ‘ontsnappen’ naar de bundelsplitser. De armen worden dan effectief verlengd met deze factor, wat de shot noise verlaagt met dezelfde factor. Nu gaat echter ruis uit stralingsdruk een rol spelen voor lage frequenties, waardoor het effect ongeveer wordt gehalveerd. Ook wordt de ruis frequentie-afhankelijk; het minimum ligt nu bij $S_n^{1/2}(f) \approx 8 \times 10^{-24} / \sqrt{\text{Hz}}$ (zie Fig. 5.6).

Ten tweede kan tussen de laser en de bundelsplitser een **vermogensrecyclingspiegel** worden geplaatst. Deze spiegel kaatst een groot deel van het licht dat terugkeert naar de laser (in plaats van naar de fotodetector) terug het systeem in, om zo het effectieve laservermogen te verhogen. Doordat de ruimte tussen deze spiegel en de ingangsspiegels ook als een Fabry-Pérot-holte werkt, ligt dit effectieve vermogen circa 50 keer hoger dan het werkelijke laservermogen. Dit voegt een factor $\sqrt{50}$ toe aan de reductie van de shot noise, maar verhoogt de totale gevoeligheid van de interferometer met slechts een deel daarvan, doordat ook de ruis door stralingsdruk toeneemt en de maximale gevoeligheid opschuift naar hogere frequentie. Deze maximale gevoeligheid wordt daarmee $h_{\min} \approx 3 \times 10^{-23}$ bij 100 Hz, ofwel $S_n^{1/2}(f) \approx 3 \times 10^{-24} / \sqrt{\text{Hz}}$, voldoende om zwaartekrachtgolven uit de kosmos te detecteren. Figuur 5.6 vergelijkt de ruiscurves voor een simpele Michelson-interferometer en versies met de hierboven beschreven toevoegingen.

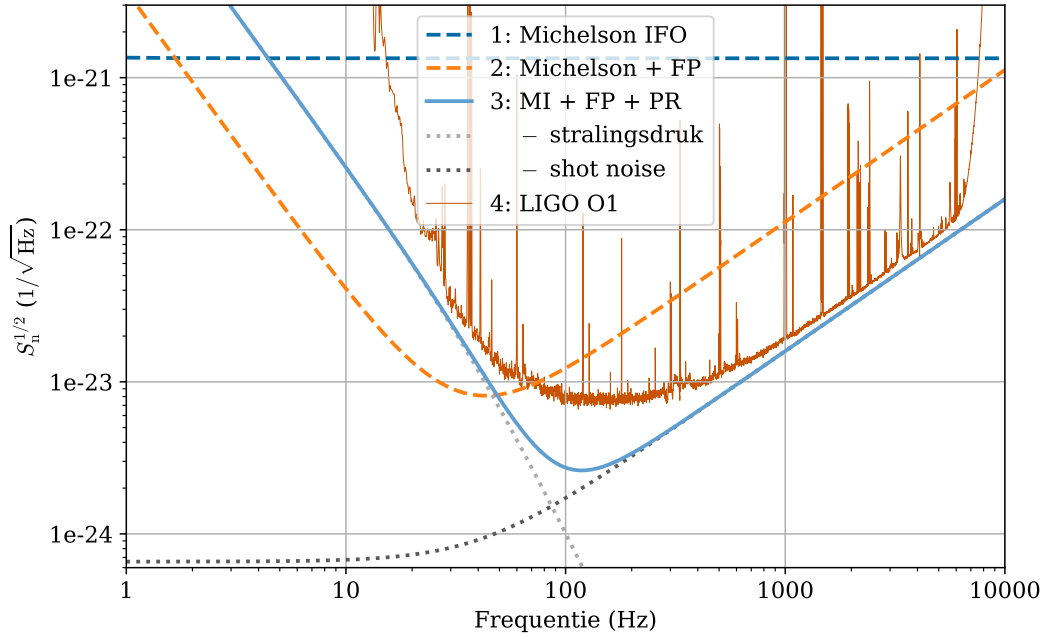
Als laatste truuk toont Figuur 5.5b de **signaalrecyclingspiegel** tussen de fotodetector en de bundelsplitser, die als volgt werkt. Stel dat de zwaartekrachtgolf arm 1 laat uitdijen, waardoor het laserlicht een faseverschil oploopt. Een tijdje $\frac{1}{2f_{\text{gw}}}$ later krimpt arm 1 terwijl arm 2 uitdijt (zie Fig. 5.1 op pagina 70). Deze laatste spiegel kan ervoor zorgen dat het laserlicht juist op dat moment door arm 2 reist, waardoor een extra faseverschil en dus extra gevoeligheid wordt opgebouwd. Dit werkt echter alleen rond één bepaalde frequentie f_{gw} , die geselecteerd kan worden door het afstemmen van Fabry-Pérot-holtes die ontstaan tussen deze spiegel en de twee ingangsspiegels.

5.8 De detectie van zwaartekrachtgolven

5.8.1 Spectra en het frequentiedomein

De data-analyse gebeurt doorgaans in het **frequentiedomein**, dus door aan de hand van het spectrum van de detectordata vast te stellen of hier alleen ruis in voorkomt, of ook een signaal. Hiervoor worden de data onderworpen aan een *Fouriertransformatie* (FT). De uitkomst hiervan, $\tilde{h}(f)$, geeft aan hoeveel signaal er bij iedere *frequentie* aanwezig is, in plaats van op ieder moment, zoals voor $h(t)$. De tilde op de $\tilde{h}$ duidt hier aan dat we in het frequentiedomein werken.

Zonder een formele FT toe te passen, kunnen we afschatten hoe de amplitude $|\tilde{h}(f)|$ in het frequentiedomein eruit ziet als functie van de amplitude in het tijddomein $|h(t)|$, zoals gegeven door Vgl. 5.18. Een FT heeft de vorm $\tilde{h}(f) = \int_{\Delta t} h(t) e^{-2\pi i f t} dt$, zodat we de amplitude ruwweg kunnen benaderen met $|\tilde{h}(f)| \sim |h(t)| \cdot \Delta t$. Voor een *chirp*, met (vrijwel) monotoon oplopende amplitude en frequentie, kan Δt worden geïnterpreteerd als de tijdspanne gedurende welke het signaal ongeveer de frequentie f heeft, en dus bijdraagt aan $|\tilde{h}(f)|$ voor deze f . Om te zien hoe lang dat is, schrijven we de golf als $h(t) = A e^{i\varphi}$, waar A de amplitude is en φ de fase. Wanneer we die fase ontwikkelen als *Taylorreeks* vinden we $\varphi \sim \varphi_0 + \dot{\varphi}t + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}t^2 = \varphi_0 + ft + \frac{1}{2}\dot{f}t^2$, aangezien de frequentie de tijdsafgeleide is van de fase. We zien dan dat de frequentie ongeveer constant is zolang $\frac{1}{2}\dot{f}t^2 \sim 1$, ofwel wanneer $\Delta t \sim \left(\frac{2}{\dot{f}}\right)^{1/2}$. We kunnen



Figuur 5.6: Versimpelde ruiscurves voor interferometers van toenemende complexiteit: De horizontale streepjeslijn bovenin (1) toont de ruis voor een simpele Michelson-interferometer (MI) met armen van 4 km, zoals de LIGO-detector. In de tweede streepjeslijn (2) zijn hier Fabry-Pérot-holtes (FP) aan toegevoegd. De dikke doorgetrokken lijn (3) toont de ruis wanneer ook vermogensrecycling (PR) wordt toegepast. De stippellijnen tonen de bijdragen aan de doorgetrokken lijn voor de stralingsdruk (dominant voor lage frequenties) en shot noise (bepalend bij hoge frequenties). Dit maakt duidelijk dat vermogensrecycling de ruis door stralingsdruk verhoogt en de shot noise verlaagt. De parameters zijn zo gekozen dat de curve vergelijkbaar wordt met die van LIGO. De dunne lijn (4) toont een representatieve ruiscurve van de LIGO-detectors gedurende de eerste waarnemingsrun (O1). De extra laagfrequente ruis ten opzichte van (3) onder ~ 30 Hz komt door het imperfect afgesteld houden van de verschillende Fabry-Pérot-holtes; de extra ruis rond 100 Hz komt door thermische ruis op de spiegels (Browniaanse beweging van de spiegelcoatings).

dan schrijven $|\tilde{h}(f)| \sim |h(t)| \cdot \Delta t \sim |h(t)| \left(\frac{2}{f}\right)^{1/2}$, en substitueren vervolgens het laatste lid van Vgl. 5.18 voor $|h(t)|$ en Vgl. 5.21 voor $\dot{f}$. Na wat rekenwerk levert dit $|\tilde{h}(f)| \sim \left(\frac{5}{3}\right)^{1/2} \frac{1}{\pi^{2/3}} \frac{c}{d} \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{5/6} f_{\text{gw}}^{-7/6}$.

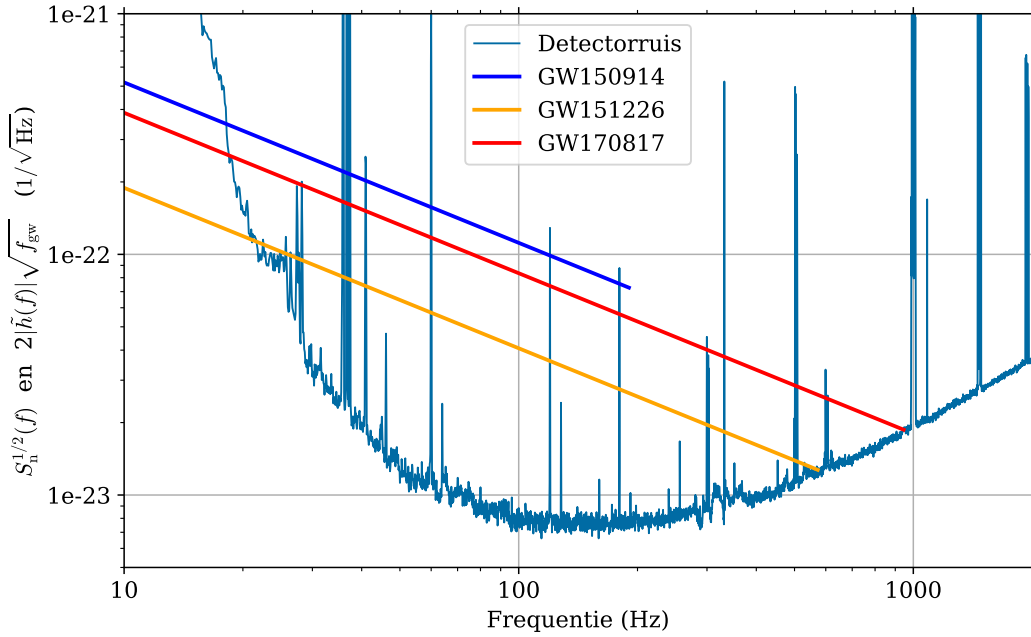
Een wat nauwkeuriger analytische benadering voor het spectrum van een inspiral geprojecteerd op een Michelson-interferometer, dat wil zeggen een benadering van de Fouriertransformatie van Vgl. 5.17 met weer het laatste lid van Vgl. 5.18 als input voor $h_{+,\times}$, en gemiddeld over alle mogelijke posities en oriëntaties (de factor $\frac{2}{5}$ uit Vgl. 5.20), wordt gegeven door

$$\tilde{h}(f) = \frac{2}{5} \left(\frac{5}{6}\right)^{1/2} \frac{1}{2\pi^{2/3}} \frac{c}{d} \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{5/6} f_{\text{gw}}^{-7/6}. \quad (5.36)$$

Dit ligt slechts een factor $2\sqrt{2} \sim 3$ af van onze ruwe schatting.

Door de Fouriertransformatie wordt de dimensieloze $h(t)$ omgezet in $\tilde{h}(f)$, die *niet* dimensieloos is, maar wordt uitgedrukt in $1/\text{Hz}$.²² Om de amplitude-spectrale dichtheid ASD te berekenen en te kunnen vergelijken met de detectorruis, moeten we $\tilde{h}(f)$ dus *vermenigvuldigen* met $\sqrt{f_{\text{gw}}}$ om de eenheid $1/\sqrt{\text{Hz}}$ te verkrijgen. Figuur 5.7 vergelijkt de spectra van drie gedetecteerde signalen met de detectorruis op deze manier.

²²In de FT wordt de dimensieloze h in feite vermenigvuldigd met een Δt , zodat je als eenheid seconde, oftewel $1/\text{Hz}$ krijgt.



Figuur 5.7: Een typische ruiscurve van de LIGO-detector tijdens de eerste waarnemingrun (O1), vergeleken met drie signalen van zwaartekrachtgolven. Door Vergelijking 5.37 te schrijven als $\rho^2 = \int \left(\frac{2|\tilde{h}(f)|\sqrt{f}}{S_n^{1/2}(f)} \right)^2 d\ln(f)$ wordt duidelijk waarom een signaal via $2|\tilde{h}(f)|\sqrt{f}$ goed kan worden vergeleken met $S_n^{1/2}(f)$ van de ruis, bij een logaritmische frequentieschaal.

5.8.2 De signaal-ruisverhouding

De **signaal-ruisverhouding** (*signal-to-noise ratio*; **SNR**) ρ geeft de verhouding tussen de sterkte (amplitude) van het signaal en die van de ruis. Dit is een belangrijke grootheid om te bepalen of een signaal sterk genoeg is om te kunnen worden gedetecteerd. Voor een gegeven signaal en ruis is de SNR in het frequentiedomein gedefinieerd door

$$\rho^2 \equiv 4 \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)} df, \quad (5.37)$$

waarin $S_n(f)$ de *vermogensspectraaldichtheid* (*power-spectral density*; **PSD**) is, het kwadraat van de ASD. Wanneer meerdere detectoren hetzelfde signaal meten, kunnen de afzonderlijke detector-SNRs eenvoudig worden gecombineerd tot

$$\rho_{\text{tot}} = \sqrt{\sum_i^{N_{\text{det}}} \rho_i^2}. \quad (5.38)$$

In de praktijk wordt alleen van een detectie gesproken wanneer een signaal in twee of meer detectoren wordt gemeten, om *glitches*²³ in de detectorruis die toevallig op een GW-signaal lijken uit te sluiten. Daarnaast moet het signaal een totale SNR hebben van de drempelwaarde $\rho_{\min} \approx 8$ of meer.²⁴ Om de **gevoeligheid** van een detector aan te geven worden vaak twee **afstanden** gebruikt, meestal uitgedrukt in Mpc. De **range** voor een bepaalde bron is de afstand waarop die bron voor een *gemiddelde* hemelpositie en oriëntatie een SNR van 8 zou opleveren in de detector. En de **horizon** is de afstand waar een SNR van 8 bereikt wordt voor de bron met een *optimale* positie en oriëntatie. Wanneer over *de range* of *horizon* wordt gesproken, gaat het meestal om het signaal van een $1.4+1.4 M_{\odot}$ BNS.

Om een idee te krijgen wat een SNR van $\rho_{\min}$ (of iedere andere waarde) betekent, kunnen we de data d schrijven als de som van **ruis** (noise) n en een **signaal**: $d(t) = n(t) + h(t)$. Wanneer er een model van het

²³Korte, vaak luide “signalen” die vermoedelijk uit de detector zelf komen.

²⁴Er zijn een paar uitzonderingen voor zware BBHs.

signaal $h(t)$ kan worden uitgerekend, kan het worden vergeleken met de data $d(t)$ en het product worden gemiddeld over de waarneemtijd T_{obs} , die bijvoorbeeld wordt gegeven door Vgl. 5.23:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{\text{obs}}} \int_0^{T_{\text{obs}}} d(t)h(t)dt &= \frac{1}{T_{\text{obs}}} \left(\int_0^{T_{\text{obs}}} n(t)h(t)dt + \int_0^{T_{\text{obs}}} h(t)^2 dt \right) \\ &\sim \frac{1}{T_{\text{obs}}} \left(\sqrt{\tau_0 T_{\text{obs}}} n_0 h_0 + T_{\text{obs}} h_0^2 \right) \sim \sqrt{\frac{\tau_0}{T_{\text{obs}}}} n_0 h_0 + h_0^2. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Hierin zal de bijdrage van de ruis $n(t)h(t)$ soms positief en soms negatief zijn en de integraal erover bij een voldoende lange meting dus ongeveer nul opleveren, terwijl het pure signaal $h(t)^2$ alleen positieve waarden geeft. In Vgl. 5.39 zijn n_0 en h_0 de typische amplituden van respectievelijk de ruis en het signaal, en is τ_0 een typische tijdschaal van $h(t)$, bijvoorbeeld de periode van de zwaartekrachtgolf. De eerste term $\sqrt{T_{\text{obs}}}$ in Vgl. 5.39 geeft aan dat de integraal groeit met de wortel van de tijd, zoals de afgelegde weg in een dronkemansgang groeit met de wortel van het aantal stappen. Door de normering met de waarneemtijd slaat dit om in een *afname* met de wortel van de tijd.

Hieruit blijkt dat een signaal niet per se duidelijk boven de ruis uit hoeft te steken. Zeker voor langere inspirals zal het signaal gedurende de meting *consistent* aanwezig zijn in de data en dus lineair groeien met de waarneemtijd, terwijl de ruis willekeurig is en groeit met de *wortel* van de tijd. De verhouding tussen die twee, de SNR, neemt dus toe met de wortel van de waarneemtijd. Uit Vgl. 5.39 kunnen we aflezen dat het totale signaal kan worden gedetecteerd wanneer de bijdrage van het signaal een gekozen factor ρ_{min} keer groter is dan de bijdrage van de ruis, dat wil zeggen wanneer is voldaan aan

$$\rho \sim \frac{h_0}{n_0} \gtrsim \rho_{\text{min}} \sqrt{\frac{\tau_0}{T_{\text{obs}}}}. \quad (5.40)$$

Voor een zwakke (want lage massa's, zie Vgl. 5.18) inspiral van een dubbele neutronenster duurt het signaal al gauw een minuut (zie H. 5.6.2), en als we $\tau_0 \sim 1/100$ Hz nemen, waar de detectoren het gevoeligst zijn, vinden we dat we in dit geval en met $\rho_{\text{min}} = 8$ van een detectie kunnen spreken wanneer $h_0 \gtrsim 0.10 n_0$, dus als het signaal bijna 10 keer zo zwak is als de ruis! Signalen van pulsars met een heuvel zijn nog veel zwakker, maar duren bijna oneindig lang, zodat er toch hoop is op detectie.

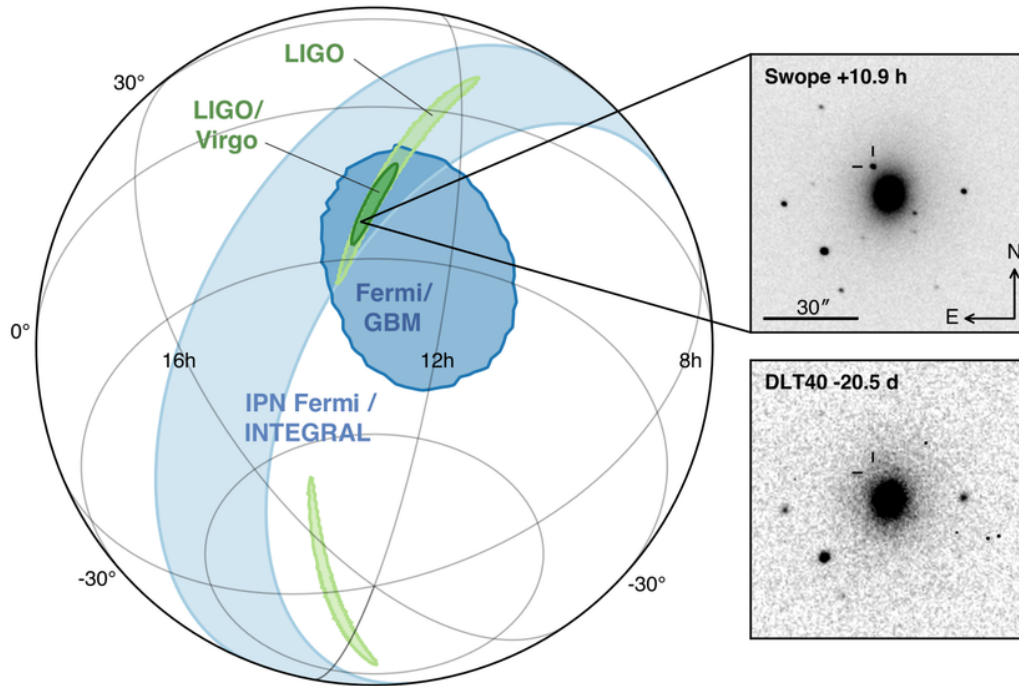
5.8.3 De ontwikkeling van LIGO en Virgo en de eerste detecties

De LIGO- en Virgo-detectoren zijn in stappen gebouwd, waarbij de installaties steeds nauwkeuriger werden, onder andere door technologie die speciaal voor dit doeleinde ontwikkeld of verbeterd moest worden. Denk hierbij aan stabielere en krachtiger **lasers**, gladdere en zwaardere spiegels/**testmassa's**, betere **optiek** voor de Fabry-Pérot-holtes en betere **seismische isolatie** om het schokken van de Aarde bij de testmassa's vandaan te houden. De verwachting was dat de eerste versies van de interferometers niet gevoelig genoeg waren om daadwerkelijk een detectie te doen, maar doordat de *aantallen* signalen per jaar erg onzeker waren bleef daar een kleine kans op. En terwijl de ingenieurs de eerste versie met upgrades steeds gevoeliger maakten, konden de wetenschappers tussen de upgrades door, in zogenaamde *Science runs* (S1–S6), alvast zien hoe de ruis eruit zag en hiermee ervaring opdoen om hun data-analysecodes te ontwikkelen.

Na een grote upgrade begon op 12 september 2015 eerste *Observation run* (O1), waarbij alleen de LIGO-detectoren online waren. Al twee dagen later werd de eerste directe detectie van een zwaartekrachtgolf gedaan, afkomstig van een inspiral van twee zwarte gaten (**BBH**) van rond de $30 M_{\odot}$: GW150914. Tegen het einde van O2 kwam de Virgo-detector online, en op 17 augustus 2017 werd voor het eerst een het signaal van een dubbele neutronenster (**BNS**) gedetecteerd: GW170817. Doordat nu drie detectoren online waren, kon de richting nauwkeuriger worden bepaald.²⁵ Vrijwel tegelijkertijd (1.7 s later), en onafhankelijk, detecteerde de Fermi-satelliet een korte **gammaflits** (*gamma-ray burst*; *GRB*), waarvan al langer werd aangenomen dat ze worden veroorzaakt door samensmeltende neutronensterren. Door de richtingsgevoeligheid van de drie interferometers, en met behulp van Fermi, werd de hemelpositie voldoende

²⁵Dit gebeurt met driehoeksmeting aan de hand van de aankomsttijden bij verschillende detectoren. Een enkele detector is volstrekt ongevoelig voor richting, twee detectoren vinden een ring aan de hemel waar de bron zou kunnen zijn, bij drie reduceert dit tot één of twee gebiedjes en pas bij vier detectoren is de hemelpositie echt goed te bepalen.

nauwkeurig om de *afterglow* te vinden met optische telescopen: een zogenaamde **kilonova**. Figuur 5.8 toont een hemelkaart van de bijdragen van de verschillende detectoren aan het inperken van de mogelijke posities van GW 170817/GRB 170817A. Tabel 5.1 toont een paar vroege, belangrijke detecties door de LIGO- en Virgo-detectoren. In O1, met twee detectoren, was er gemiddeld één detectie per 43 dagen. Voor O2, deels met drie detectoren, was dat eens per 35,6 dagen, en voor O3 was dit opgelopen tot één GW-detectie per 4,5 dagen. Ook na de eerste detectie worden de interferometers dus nog steeds gevoeliger. Aan het einde van O3, in maart 2020, waren er in totaal 91 bevestigde detecties van zwaartekrachtgolven. De waarneemrun O4 begon in mei 2023 en heeft een geplande duur van 18 maanden.



Figuur 5.8: Bijdragen van de INTEGRAL-satelliet (lichtblauwe band), Fermi-satelliet (donkerblauwe ellips), de LIGO-detectoren alleen (twee lichtgroene ellipsen) en de LIGO- en Virgo-detectoren gecombineerd (donkergroene ellips) aan de bepaling van de hemelpositie van GW 170817/GRB 170817A op een kaart van de halve sterrenhemel. Merk op dat ondanks het feit dat een enkele GW-detector geen richtingsgevoeligheid heeft, de drie detectoren tezamen de belangrijkste beperkingen opleggen. Ondanks (of mogelijk dankzij) het feit dat de SNR in de Virgo-detector lager was dan in de twee LIGO's, draagt Virgo significant bij aan de inperking van het zoekgebied. De inzetten tonen het gaststerrenstelsel van de inspiral/GRB 10.9 uur na en 20.5 uur voor het GW-signaal.

Signaal	M_1 ($M_\odot$)	M_2 ($M_\odot$)	Afstand (Mpc)	N_{det} —	SNR —	T_{obs} (s)	Run	Opmerkingen
GW 150914	35.6	30.6	440	2	26.0	0.3	O1	eerste detectie, BBH
GW 151012	23.2	13.6	1080	2	10.0	0.8	O1	tweede detectie, BBH
GW 151226	13.7	7.7	450	2	13.1	1.9	O1	derde detectie, BBH
GW 170817	1.46	1.27	40	3	33.0	56	O2	eerste BNS, GRB 170817A, luidste signaal in O1–O3
GW 190425	2.1	1.3	150	2	12.4	121	O3	BNS
GW 190426	105.5	76.0	4580	2	8.7	0.1	O3	zwaarste BBH in O1–O3
GW 190521	98.4	57.2	3310	3	14.3	0.2	O3	zwarte BBH
GW 200105	9.1	1.91	270	2	13.7	28	O3	eerste NSBH
GW 200115	5.9	1.44	290	3	11.3	50	O3	NSBH
GW 200308	60	24	7100	3	4.7	0.5	O3	zwarte BBH

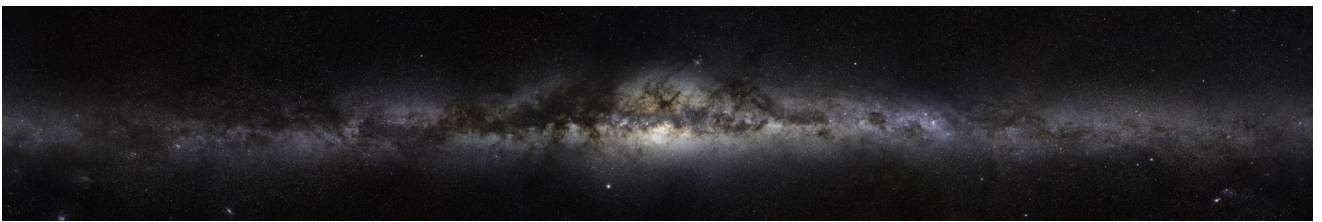
Tabel 5.1: Een selectie van vroege en belangrijke detecties van zwaartekrachtgolven. De kolommen tonen de naam van het signaal, de twee massa's van de dubbelstercomponenten in zonsmassa's, de afstand van de bron in megaparsecs, het aantal detectoren in gebruik, de SNR, de geschatte duur van het signaal, de waarnemrun en een korte opmerking. T_{obs} is een benadering van de duur van het signaal van 30 Hz (O1–O2) of 20 Hz (O3) tot merger. Meer details, inclusief onzekerheden, zijn te vinden in de Gravitational-wave Transient Catalog (GWTC): <https://gwosc.org/eventapi/html/GWTC/>.

Hoofdstuk 6

Sterrenstelsels

6.1 Ons Melkwegstelsel

In donkere heldere nachten is aan de hemel een lichtende band te zien: de **Melkweg** (zie Figuur 6.1). Met telescopen blijkt dat deze bestaat uit sterren en gasnevels. De donkerder gebieden in de Melkweg zijn niet sterloos, maar donkere stofwolken die het licht van verder gelegen bronnen blokkeren. De sterren, gasnevels en stofwolken vormen een *schijf* waar wij ons in bevinden, die we het **Melkwegstelsel** noemen. De Melkweg is hoe we dit stelsel van binnenuit aan de hemel zien. Naast de Melkweg kijken het uit het vlak van het Melkwegstelsel en zien we veel minder sterren.



Figuur 6.1: De Melkweg aan de hemel bestaat uit sterren, gasnevels en stofwolken. Richting het centrum (midden) zien we de dikkere bulge.

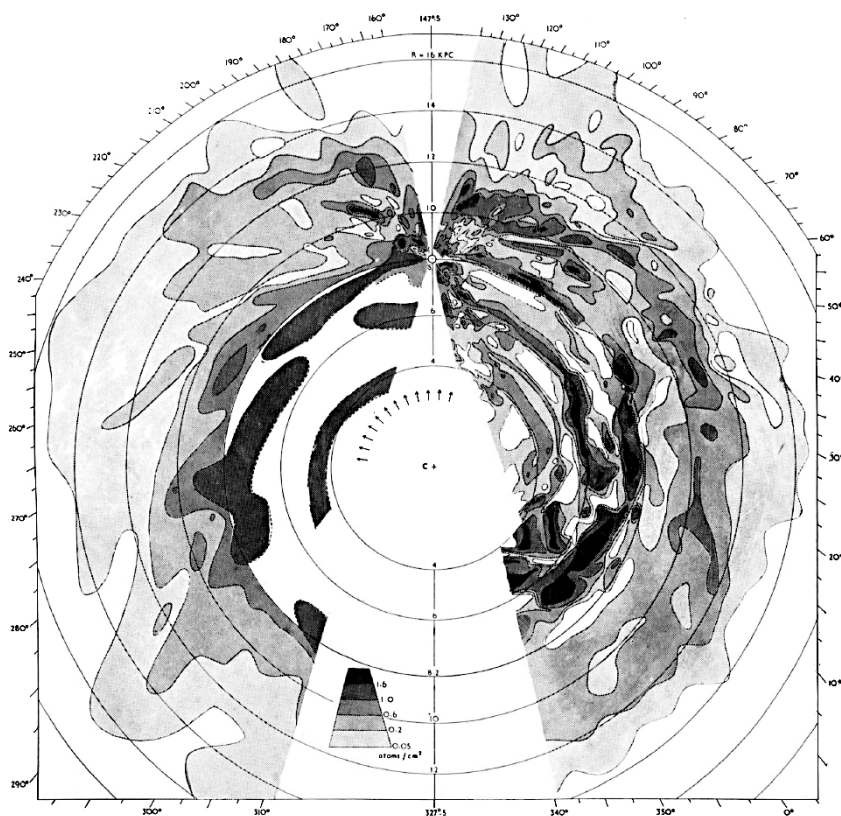
Door de stofwolken is het lastig een compleet beeld te vormen van deze schijf. Met radiowaarnemingen is dat anders: **radiostraling** dringt door de stofwolken heen. In de jaren 1950 is onder andere met de radiotelescopie van Dwingeloo een kaart van het Melkwegstelsel gemaakt (Figuur 6.2). Hierop zijn (delen van) **spiraalarmen** te zien.

Ons Melkwegstelsel blijkt een **balkspiraalstelsel** te zijn (zie H. 6.3.2), met $1 - 4 \times 10^{11}$ sterren (waarvan circa 10^{10} witte dwergen, 10^9 neutronensterren en 10^8 zwarte gaten), een totale massa van circa $1.15 \times 10^{12} M_{\odot}$ waarvan $\sim 6 \times 10^{10} M_{\odot}$ aan sterren met een gezamenlijke lichtkracht van $\sim 2 \times 10^{10} L_{\odot}$ en een diameter van ongeveer 26–30 kpc (zie Tabel 6.1 op pagina 90). De Zon bevindt zich op circa 8.1 kpc van het centrum en heeft ongeveer 212 Myr nodig voor één rondje. Onze Melkweg beweegt met circa 550 km/s ten opzichte van de **kosmische achtergrondstraling** (zie H. 7.4.1).

Het stelsel bestaat uit vier hoofdcomponenten: de **bulge**, de **dikke schijf** (*thick disc*), de **dunne schijf** (*thin disc*) en de **halo**, die zich ver uitstrekt buiten het vlak van de Melkweg (zie Figuur 6.3). Deze vier componenten onderscheiden zich door verschillende leeftijden, samenstellingen en dynamica's van de sterpopulaties.

Het centrum van het Melkwegstelsel bevat het supermassieve zware gat (**SMBH**) Sagittarius A*¹, met een massa van circa $4.3 \times 10^6 M_{\odot}$. We denken dat veel andere grote sterrenstelsels ook een supermassief zwart gat in hun centrum hebben. De **bulge** bevat met name **oude sterren**, die circa 10 Gyr geleden zijn gevormd in een enkel event. De **thin disc** is circa $\sim 220 - 450$ pc dik en bevat de **spiraalarmen**,

¹“Sagittarius-A-ster”



Figuur 6.2: Radiowaarnemingen van neutraal waterstof met onder andere de radiotelescoop van Dwingeloo uit 1958 tonen koud gas waaruit sterren worden gevormd. Deze liggen met name in de spiraalarmen van ons Melkwegstelsel, die op deze opnamen zichtbaar worden. Het centrum van de Melkweg bevindt zich in het midden van de figuur en is onzichtbaar door de grote dichtheid van stof, gas en sterren. Dit wordt de zone of avoidance genoemd. De Zon bevindt zich boven het midden, op circa 8.1 kpc van het centrum.

met veel stof en **stervorming**, en dus ook **jonge sterren**. De spiraalarmen hebben een omlooptijd van circa 220–360 Myr, langer dan die van de Zon. De **thick disc** heeft een dikte van ongeveer 2.6 kpc en is waarschijnlijk ontstaan uit *diffusie* van een eerdere *thin disc*, mogelijk door een interactie met een ander sterrenstelsel (zie H. 6.4.1), is dikker in de richting loodrecht op het Melkwegvlak, maar heeft een kleinere diameter in het vlak. De **halo** strekt zich uit tot ver buiten de heldere delen van de Melkweg en bevat de **oudste sterren**, met een lage **metalliciteit**. Hier bevinden zich de 150–200 **bolhopen** van de Melkweg, en **stromen van sterren** die zijn gestript uit interacties met andere sterrenstelsels (zie H. 6.4.1).

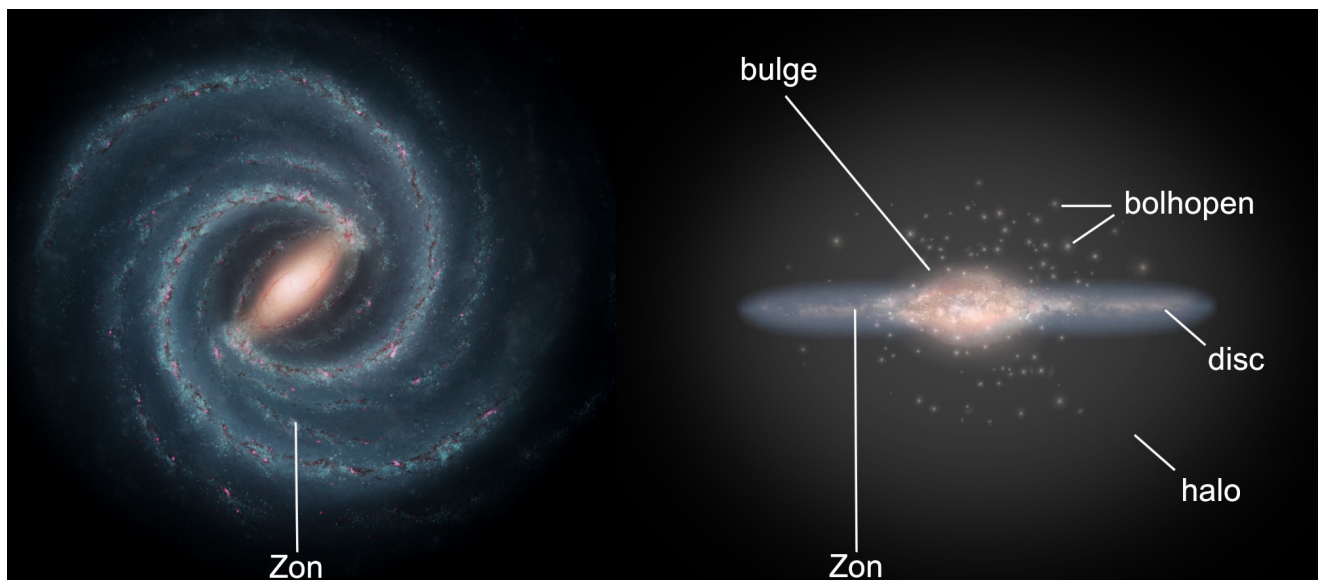
6.2 Sterrenstelsels waarnemen

In 1925–26 gebruikte Edwin Hubble **Cepheïden** (zie H. 7.1) om de afstanden naar de **Andromedanevel** (M31) en de **Driehoeknevel** (M33) te meten. Hij vond waarden die veel lager zijn dan de moderne waarden, maar zijn conclusie dat dit externe sterrenstelsels waren was desondanks correct. Daarmee beslechtte hij het *Great Debate* over de aard van “spiraalnevels”: lokale gasnevels of verre “eilanden van sterren”.

We zien sterrenstelsels als enorme groepen van sterren. Voor het waarnemen van sterrenstelsels kunnen we dus dezelfde technieken gebruiken als voor sterren (zie Hoofdstuk 1.3–1.4), maar er zijn ook verschillen:

1. Het licht van een (stukje) sterrenstelsel bevat het gecombineerde licht van **vele sterren**, die niet afzonderlijk opgelost kunnen worden.² Hiermee moeten we rekening houden bij het analyseren van de fotometrie en spectra.
2. De sterren in sterrenstelsels draaien baantjes om het centrum. Doordat sterren zowel van ons af als naar ons toe bewegen, zien we in de spectra zowel rood- als blauwverschuivingen. Het gevolg hiervan is dat de spectraallijnen *verbreden*. Uit de breedte van de lijnen kunnen we de **snelheidsdispersie** meten, wat iets zegt over de (geprojecteerde) rotatiesnelheid van het sterrenstelsel.
3. Bij het waarnemen van (verre) sterrenstelsels moeten we rekening houden met de **uitdijng van**

²Behalve voor zeer heldere sterren en/of nabije sterrenstelsels.



Figuur 6.3: Een schematische weergave van de anatomie van ons Melkwegstelsel, met de ruwe positie van de Zon, de disc, bulge, halo en de bolhopen.

het heelal, die een **kosmologische roodverschuiving** veroorzaakt (zie H. 7.3.4). Sterrenstelsels hebben zelf ook (radiële) snelheden ten opzichte van de **Hubbleflow** (zie H. 7.3.1), wat een **Dopplerverschuiving** veroorzaakt. In waarnemingen zien we de combinatie van deze twee effecten. De eigen snelheden van sterrenstelsels zijn typisch honderden kilometers per seconde, tot ~ 1000 km/s, dus het nauwkeurig meten van de afstand via de kosmologische roodverschuiving lukt alleen voor sterrenstelsels met $cz \gg 1000$ km/s, ofwel $z \gg 0.03$.

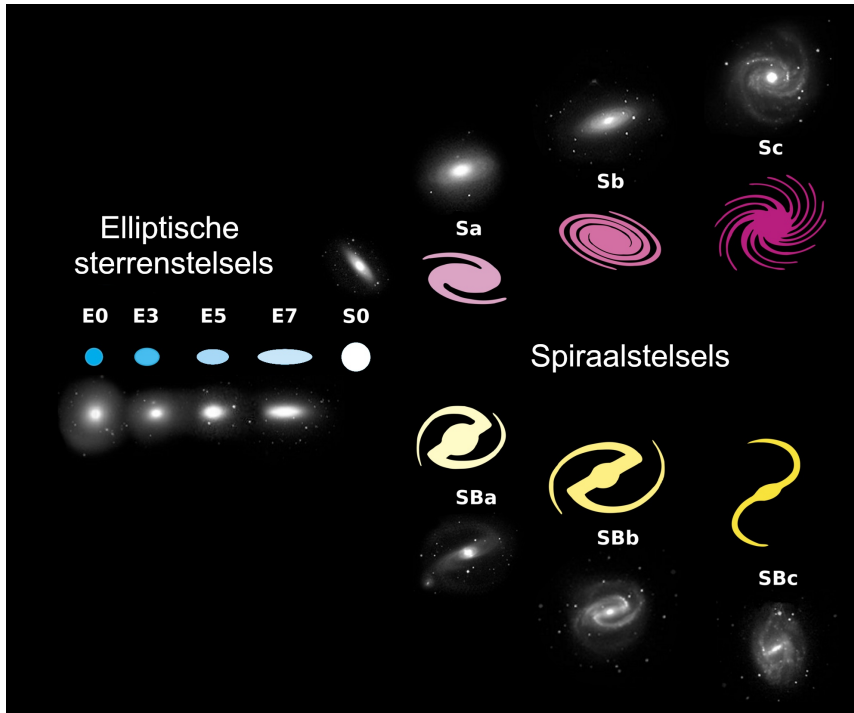
Hoe verder een sterrenstelsel van ons vandaan is (d.w.z. hoe hoger de roodverschuiving), hoe langer het licht nodig heeft gehad om ons te bereiken en hoe jonger het heelal (en dus het sterrenstelsel) was toen het licht werd uitgezonden. In principe is het hierdoor mogelijk om de geschiedenis van de evolutie van sterrenstelsels te reconstrueren, en de geschiedenis van stervorming. Echter hoe hoger z , des te zwakker het stelsel en des te lastiger om er nuttige gegevens van te bepalen. Het is hierdoor moeilijk om een homogene dataset te verkrijgen die geldig is over een groot bereik van de roodverschuiving.

6.3 De morfologie van sterrenstelsels

Edwin Hubble classificeerde sterrenstelsels volgens hun **morfologie**, en zijn classificatie is in 1959 uitgebreid door De Vaucouleurs. Hubble presenteerde zijn classificatie als het “**stenvorkdiagram**” dat is weergegeven in Figuur 6.4. Let op: de lijnen zijn misleidend — ze suggereren een evolutie die er (vaak) niet is! We onderscheiden elliptische sterrenstelsels, spiraalstelsels en onregelmatige sterrenstelsels. Combinaties, tussenvormen en subtypen komen ook voor.

6.3.1 Elliptische sterrenstelsels

Elliptische sterrenstelsels worden aangegeven met een **E** en een cijfer dat de ellipticiteit (e ; 0–1) aangeeft en dat varieert van 0 (cirkelvormig; $e = 0.0$) tot 9 (sterk elliptisch; $e = 0.9$). Dit zijn de zwaarste (tot $\sim 10^{14} M_{\odot}$) en helderste sterrenstelsels in ons heelal. De stelsels zijn ellipsoïden, glad en **zonder veel structuur**. De lichtkracht is geconcentreerd in het centrum. Deze sterrenstelsels bevatten weinig koud gas waaruit sterren gevormd worden en zijn roodachtig van kleur. Er vindt dus **geen stervorming** plaats, en de sterpopulatie is **oud**. De banen van de sterren zijn willekeurig en hebben geen of alleen een lichte voorkeursrichting. Het bekendste grote elliptische sterrenstelsel is M 87, het zwaarste sterrenstelsel in de **Virgo cluster** waartoe ook onze Melkweg behoort. Het stelsel bevat het supermassieve zwarte gat M 87*, waarvan de “schaduw” op de bekende foto staat. De sterrenstelsels met de grootste lichtkracht zijn massiever, groter in diameter en hebben een grotere snelheidsdispersie.



Figuur 6.4: Het stemborkdiagram dat de verschillende morfologiën van sterrenstelsels weergeeft. Elliptische sterrenstelsels worden aangegeven met een **E** en een cijfer dat de ellipticiteit weergeeft. Spiraalstelsels worden aangeduid met een **S** en de letters a–c om aan te geven hoe duidelijk de spiraalarmen ontwikkeld zijn. Lensvormige sterrenstelsels worden aangeduid met **S0**. Merk op dat dit diagram geen evolutie weergeeft! Stelsels van type Irr en dSph zijn niet opgenomen in de figuur.

Dwerg-elliptische sterrenstelsels (dSph) zijn zeer klein, ruwweg elliptisch en hebben een oude sterpopulatie. De lichtste stelsels hebben een massa van $\sim 10^7 M_{\odot}$; nauwelijks meer dan een bolhoop.³

6.3.2 Spiraalsterrenstelsels

Spiraalstelsels worden aangegeven met een **S** en een letter a–c (of d) om aan te geven hoe duidelijk de spiraalstructuur ontwikkeld is (licht–sterk). Deze stelsels hebben in het midden een dikke, min of meer elliptische **bulge** waaruit de kenmerkende **spiraalarmen** steken. Bij **balkspiraalstelsels**, circa twee derde van alle spiraalstelsels, steekt uit de bulge een *balk*, aan het einde waarvan de spiraalarmen beginnen. Deze stelsels worden aangeduid met **SB**.

De spiraalarmen liggen in een platte schijf. Zo'n schijf wordt gevormd doordat de samentrekking van de meer sferische wolk waaruit het stelsel ontstaat door de zwaartekracht *in* het rotatievlak wordt tegengewerkt door de centrifugaalkracht, maar niet loodrecht op dat vlak. De armen zijn **dichtheidsgolven** van stof en gas, waar door de hogere dichtheid (meer) sterforming plaatsvindt. De dichtheidsgolven bewegen met een andere snelheid dan de sterren, die hier in en uit bewegen. De spiraalarmen zijn blauwer van kleur dan de rest van het sterrenstelsel, door de jonge sterpopulatie.

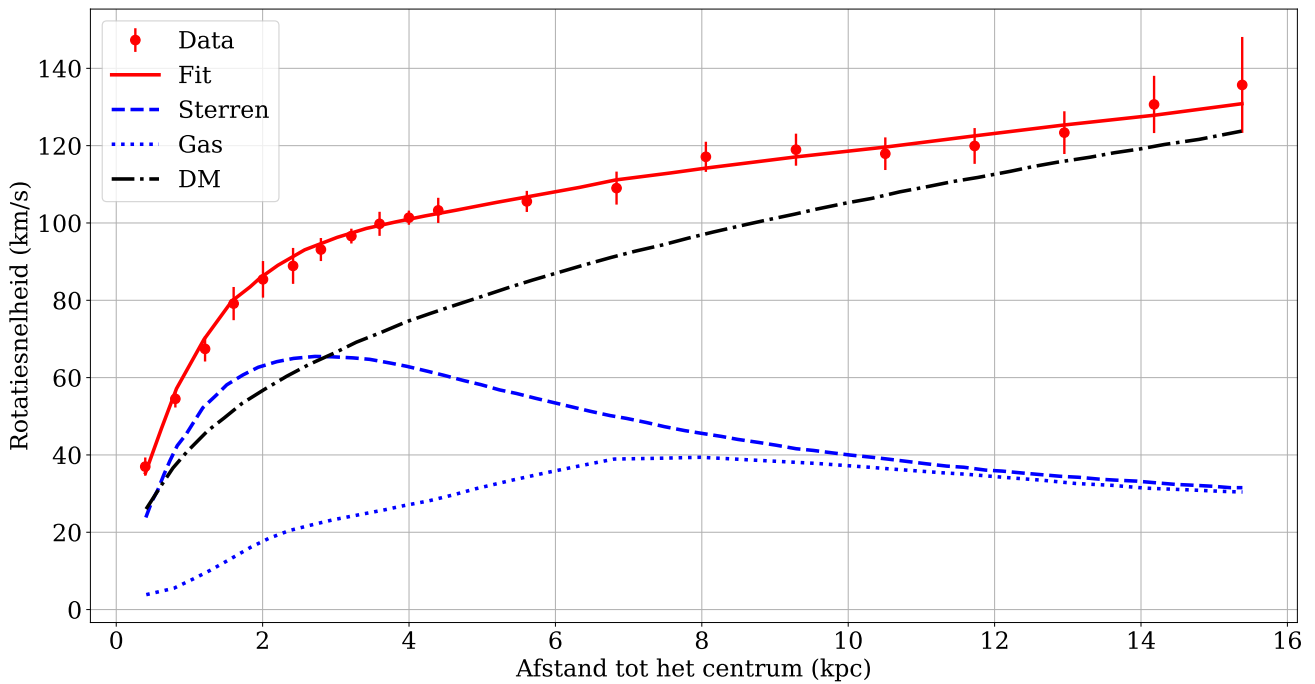
Lensvormige sterrenstelsels worden wel gezien als een overgangsvorm tussen elliptische en spiraalvormige sterrenstelsels. Deze stelsels lijken op schijfvormig spiraalstelsels, maar hebben geen spiraalarmen. Ze worden aangeduid als type **S0**.

De **rotatiecurves** van spiraalstelsels tonen de rotatiesnelheid van de sterren als functie van hun afstand tot het centrum. Dit bevat informatie over de massaverdeling van het sterrenstelsel. Uit de wet van Kepler (Vgl. 1.1 op pagina 9) kunnen we de baansnelheid van een ster schatten als functie van zijn afstand tot het centrum r en de binnen deze afstand *omsloten massa* $M(r)$:

$$v_{\text{rot}} = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}. \quad (6.1)$$

Als we de omsloten massa $M(r)$ schatten op grond van de waargenomen helderheid, verwachten we dat de rotatiecurve afneemt met de afstand. We zien echter dat de curves vlakker zijn dan verwacht, of zelfs oplopen, met hogere snelheden aan de buitenranden van de stelsels (zie Fig. 6.5). Dit is een sterke aanwijzing voor het bestaan van **donkere materie** (zie H. 7.5).

³Ze zijn echter duidelijk groter, minder dicht en hierdoor lastiger waar te nemen dan bolhopen.



Figuur 6.5: De rotatiecurve van het nabije sterrenstelsel M33 (de Driehoeknevel). De rode punten geven de gemeten data met onzekerheid, de doorgetrokken rode lijn de beste fit. De blauwe lijnen tonen de bijdragen van de waargenomen sterren (streepjes) en gas (puntjeslijn). De (onzichtbare) halo moet de rest verklaren (zwarte puntstreeplijn).

Spiraalstelsels lopen sterk uiteen in lichtkracht, afmetingen, rotatiesnelheden en de vorm van hun rotatiecurves. Ondanks deze diversiteit geldt voor dit type stelsels de **Tully-Fisherrelatie**, een empirische correlatie tussen de intrinsieke helderheid van een spiraalvormig sterrenstelsel en zijn maximale rotatiesnelheid aan de buitenrand. De relatie blijkt strikter voor infrarood dan voor zichtbaar licht, en nog beter wanneer helderheid wordt omgerekend naar stellaire massa. De Tully-Fisherrelatie kan worden gebruikt om afstanden tot spiraalstelsels te meten tot meer dan 100 Mpc, door de rotatiesnelheid aan de buitenrand te meten uit de Dopplerverschuiving of -verbreding van spectraallijnen, de intrinsieke lichtkracht uit te rekenen, en die te vergelijken met de waargenomen flux (zie Vgl. 1.4 op pagina 10). Merk op dat **donkere materie**, hoewel niet direct waargenomen, een belangrijke rol speelt voor de rotatiesnelheid.

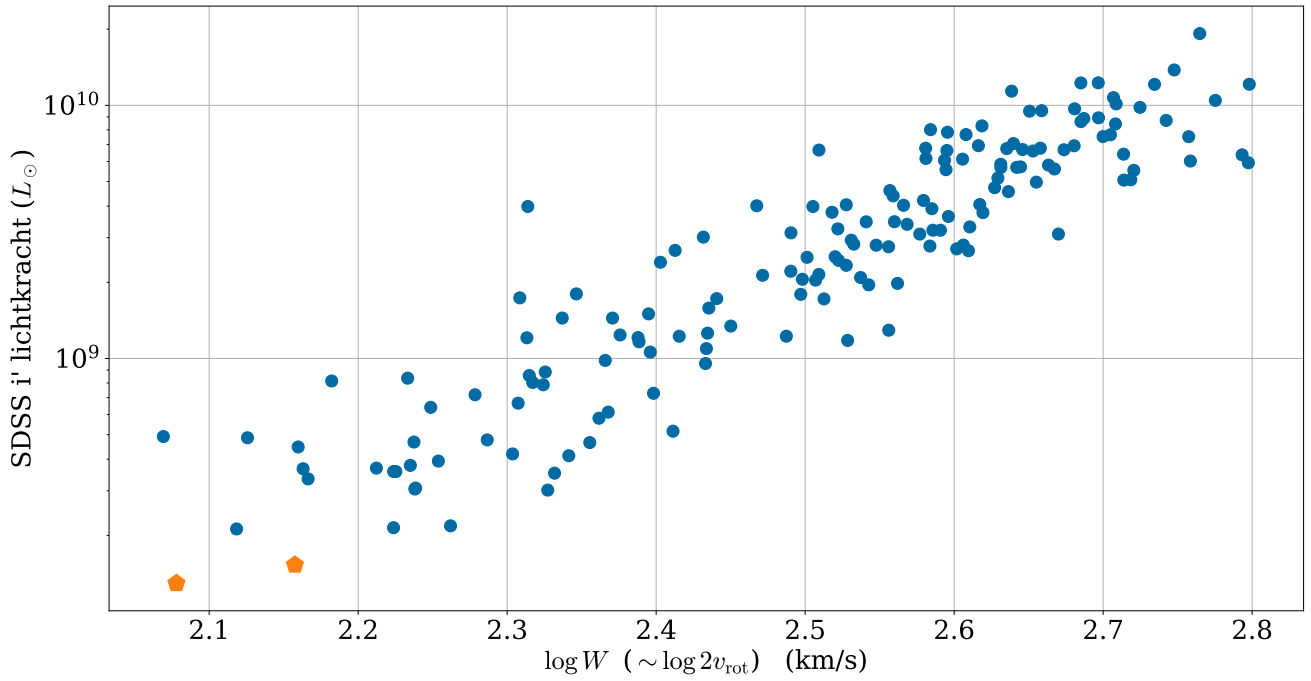
6.3.3 Onregelmatige sterrenstelsels

Onregelmatige sterrenstelsels (Irr, Ir, Im) zijn stelsels zonder duidelijke vorm of structuur. De onregelmatige vorm komt vaak door **interactie** met andere sterrenstelsels (zie H. 6.4.1). Twee van de satellietstelsels van het Melkwegstelsel, de **Grote (LMC)** en **Kleine Magelhaense Wolk (SMC)**, zijn onregelmatige sterrenstelsels. Hun uiterlijk wordt bepaald door hun interactie met elkaar en met de Melkweg. De twee stelsels zijn met het blote oog zichtbaar vanaf het zuidelijk halfrond.

6.4 Groepen en clusters van sterrenstelsels

Sterrenstelsels blijken voor te komen in **groepen** van enkele sterrenstelsels, **clusters** van vele sterrenstelsels en **superclusters** die groepen van clusters vormen. Op de allergrootste schaal ziet het heelal eruit als een soort schuim, met clusters op de grenzen tussen de bellen, superclusters waar grenzen elkaar treffen en veel relatief lege ruimte er tussenin (zie Fig. 6.7).

Groepen van sterrenstelsels bestaan uit enkele tot enkele tientallen sterrenstelsels. Ons Melkwegstelsel maakt deel uit van de **Locale Groep**, waartoe ook de **SMC**, **LMC**, **Andromedanevel (M31)** en de **Driehoeknevel (M33)** behoren, plus nog circa 80 dwergsterrenstelsels (zie Tabel 6.1). De afmeting van de Locale Groep bedraagt circa 3 Mpc, de massa ongeveer $2 - 4 \times 10^{12} M_{\odot}$. Sterrenstelsels in een groep



Figuur 6.6: Lichtkracht als functie van de breedte van spectraallijnen als gevolg van rotatie voor 164 sterrenstelsels uit infraroodwaarnemingen van het Sloan Digital Sky Survey (SDSS). Het verband tussen de twee grootheden wordt de Tully-Fisherrelatie genoemd. De twee afwijkende symbolen linksonder zijn de SMC (links) en de LMC (rechts).

bewegen onder invloed van elkaars zwaartekracht, waardoor ze niet uitdijen met het heelal. Door de geringe afstanden tussen de sterrenstelsels in een groep vinden vaak *interacties* plaats tussen de stelsels (zie H. 6.4.1).

Tabel 6.1: Basiseigenschappen van de bekendste sterrenstelsels in de Lokale Groep: het Melkwegstelsel, de Grote en Kleine Magelhaense Wolken (LMC/SMC), de Andromedanevel en de Driehoeknevel.

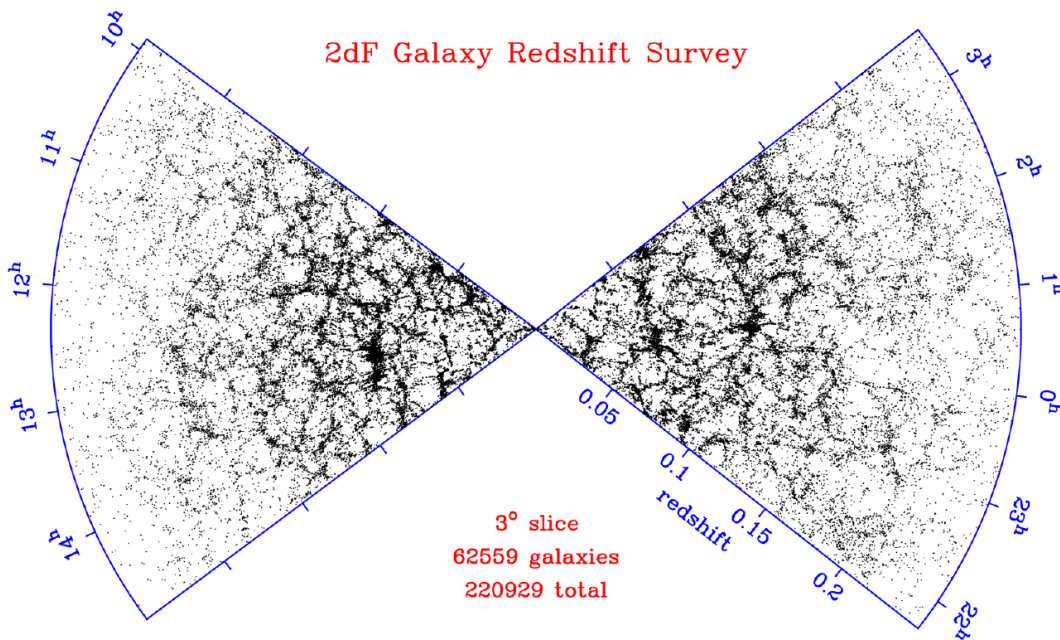
	Melkweg	LMC	SMC	Andromeda (M31)	Driehoek (M33)
Type	SBbc	Irr	Irr	Sb	Scd
Afstand (kpc)	—	50	62	765	970
Diameter (kpc)	$\sim 26 - 30$	~ 9.86	~ 5.78	~ 46.6	~ 18.7
Sterren (10^9)	$\sim 100 - 400$	~ 20	~ 3	~ 1000	~ 40
Lichtkracht ($L_\odot$)	$\sim 2 \times 10^{10}$	$\sim 2 \times 10^9$	$\sim 3 \times 10^8$	$\sim 2.6 \times 10^{10}$	$\sim 4 \times 10^9$
Stermassa ($M_\odot$)	$\sim 6 \times 10^{10}$	$\sim 1 \times 10^{10}$	$\sim 7 \times 10^8$	$\sim 1.5 \times 10^{11}$	$\sim 5 \times 10^9$
Totale massa ($M_\odot$)	$\sim 1.15 \times 10^{12}$	$\sim 1.4 \times 10^{11}$	$\sim 7 \times 10^9$	$\sim 1.3 - 1.7 \times 10^{12}$	$\sim 5 \times 10^{10}$
Massa SMBH ($M_\odot$)	$\sim 4.3 \times 10^6$	$\sim 6 \times 10^5$	geen?	$\sim 1.4 - 2.3 \times 10^8$	geen???

Een grotere groep noemen we een **cluster van sterrenstelsels**. Er is geen scherpe grens tussen groepen en clusters. De dichtstbijzijnde cluster is de **Virgocluster**, die op een afstand van circa 17 Mpc en met een diameter van ongeveer 2.2 Mpc een gebied van ongeveer 8° aan onze hemel inneemt. De Virgocluster bevat 1300–2000 sterrenstelsels en heeft een massa van circa $10^{15} M_\odot$. Het grote elliptische sterrenstelsel M87 is het grootste en bekendste lid van de cluster. De Virgocluster maakt zelf weer deel uit van de **Virgosupercluster**.

6.4.1 Interacties tussen sterrenstelsels

Anders dan sterren hebben sterrenstelsels onderlinge afstanden die niet zeer veel groter zijn dan hun afmetingen. Hierdoor vindt relatief vaker **interactie tussen sterrenstelsels** plaats.

Bij een **ontmoeting met hoge snelheid** smelten de twee (of meer) sterrenstelsels niet (direct) samen.



Figuur 6.7: Op grote schaal vormen de clusters van sterrenstelsels een schuimachtige structuur, met clusters in de bubbelranden, superclusters waar de bellen elkaar raken en veel lege ruimte in de bellen.

Wel leiden deze interacties tot een verhoogde *kinetische energie* van de sterren in de stelsels (de stelsels worden “warmer”), tot hernieuwde *stervorming*, en tot *getijdenstaarten* — stromen van gas en sterren tussen de sterrenstelsels. De energie hiervoor komt uit de beweging van de sterrenstelsels, die hierdoor geringer wordt, waardoor een volgende interactie en een *merger* waarschijnlijker worden. Interacties bij hoge snelheid vinden vaak plaats in clusters.

Interacties bij lage snelheid vinden eerder plaats in groepen. Wanneer een interactie de stelsels “op-warmt” verliezen de stelsels snelheid en kunnen ze **samensmelten**. Mogelijk vinden voor de uiteindelijke *merger* eerst hoge-snelheidsontmoetingen plaats. De **LMC** heeft al interacties met het **Melkwegstelsel** ondergaan, en smelt hier vermoedelijk over circa 2.4 Gyr mee samen. De **Andromedanevel** botst over ongeveer 3 Gyr met de Melkweg.

We denken dat de meeste grote sterrenstelsels een **supermassief zwart gat (SMBH)**, met een typische massa tussen 10^6 en $10^9 M_\odot$ in hun centrum herbergen. Wanneer twee van deze stelsels samensmelten zouden de SMBHs dat ook doen. De ruimtemissie LISA kan de **zwaartekrachtgolven** van de *inspirals* en *mergers* van deze zwarte gaten meten tot circa $10^8 M_\odot$ en tot de grens van het zichtbare heelal.

In de centra van clusters is de dichtheid hoog en smelten met name zware sterrenstelsels steeds meer samen, waarbij ze verder naar het centrum zakken. Hierbij ontstaan vermoedelijk grote elliptische sterrenstelsels. Het gevolg is een groot elliptisch stelsel in het centrum, en relatief weinig andere zware sterrenstelsels.

6.5 Het ontstaan van sterrenstelsels

De details van de **kosmische achtergrondstraling** (zie Hoofdstuk 7.4.1) tonen dat het heelal al op een leeftijd van ~ 400 kyr (minimale) structuur vertoonde op grote schaal.⁴ Zulke kleine verschillen in dichtheid kunnen groeien door **gravitationele instabiliteit**: een gebiedje met grotere dichtheid trekt meer massa aan, waardoor dit steeds verder groeit. Wanneer de dichtheid hoog genoeg wordt, ontkoppelt deze van de **Hubbleflow** (zie H. 7.3.1). Deze overdichtheden groeiden uiteindelijk, door accretie uit de omgeving of samensmelten met andere objecten, uit tot superclusters, clusters en groepen van sterrenstelsels, en op de kleinste schalen tot sterrenstelsels (en sterren en planeten). De waarneming van het sterrenstelsel JADES-GS-z14-0 met een roodverschuiving van $z \approx 14.3$ (zie H. 7.3.4) toont aan dat sterrenstelsels al bestonden toen het heelal circa 230 Myr oud was.

⁴Vermoedelijk was die structuur al aanwezig bij een leeftijd van $\sim 10^{-30}$ s.

Wanneer een gaswolk, waarvan de nettorotatie niet toevallig exact nul is, samentrekt en het impulsmoment behouden blijft, gaat deze wolk sneller roteren. Dit leidt tot schijven. Deze schijven verklaren de vorm van veel sterrenstelsels die we tegenwoordig waarnemen (zie H. [6.3.2](#)).⁵

⁵Planetenstelsels zijn vlak door dezelfde oorzaak.

Hoofdstuk 7

Kosmologie

7.1 De kosmische afstandsladder

Afstandmeting in de sterrenkunde is zowel cruciaal als notoir moeilijk. De meeste sterren zijn ook voor de grootste telescopen puntbronnen, en het is niet triviaal om te bepalen of het gaat om een heldere punt op grote afstand of een zwak puntje dichtbij. Er is geen methode die afstanden kan bepalen voor alle objecten in ons universum, van planeten in ons zonnestelsel, via sterren in de Melkweg tot de verst verwijderde sterrenstelsels. In plaats daarvan is er een scala aan methoden, die grotendeels bouwen op elkaars resultaten. Dit wordt wel de *kosmische afstandsladder* genoemd.

De verhoudingen tussen de verschillende afstanden in ons zonnestelsel kunnen worden afgeleid uit waargenomen baanperiodes en de wet van Kepler (zie Vgl. 1.1). Hiermee is de *absolute* schaal echter niet bepaald. Dat wordt gedaan aan de hand van **radarmetingen** tussen de Aarde en een tweede lichaam. Hierdoor is de **astronomische eenheid** (A.U.) bekend tot op enkele meters.

Met behulp van de **parallax** (zie Hoofdstuk 1.2) kunnen vervolgens afstanden naar de meest nabije sterren worden gemeten. De Gaia-satelliet, de opvolger van Hipparcos, meet op deze manier afstanden met een nauwkeurigheid van beter dan 10% tot op 5 kpc voor sterren helderder dan magnitude 12,¹ tot 4 kpc voor sterren van 15e magnitude en tot op circa 500 pc voor magnitude 20. Voor Gaia had de Hubble Space Telescope al een aantal parallaxen opgemeten, waaronder die van een aantal Cepheïden.

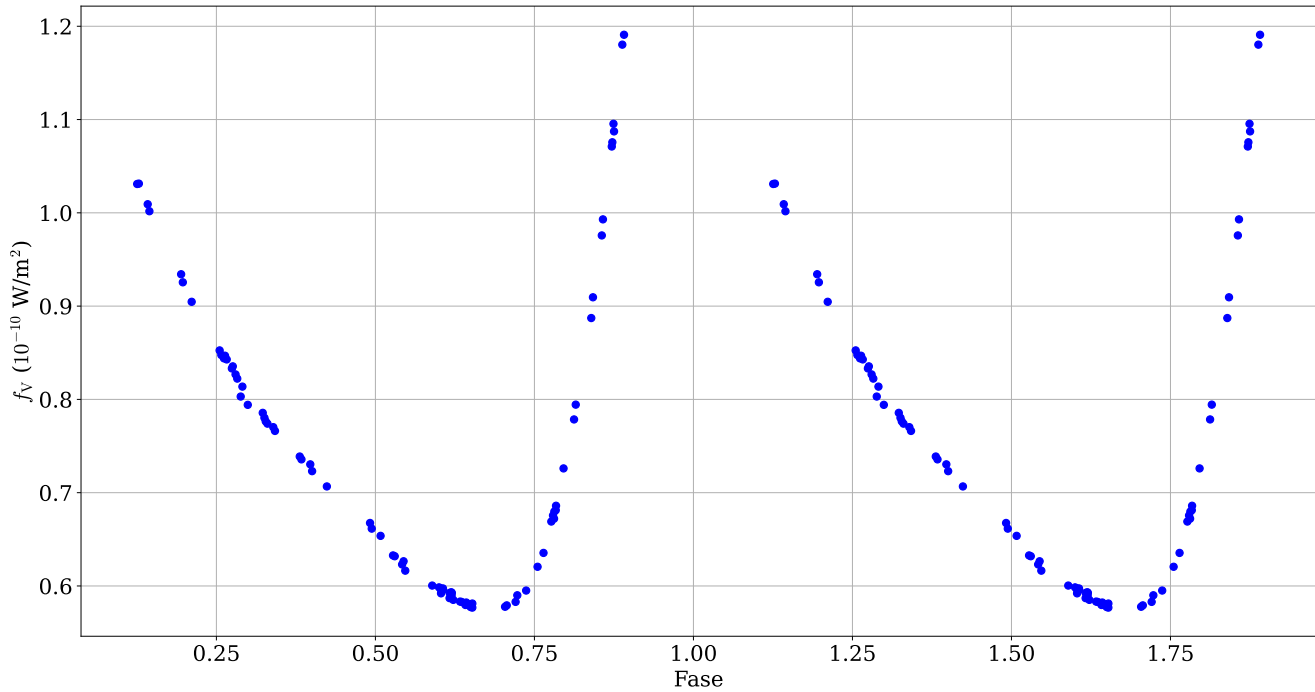
Van **eclipserende dubbelsterren** waarvoor van beide sterren het spectrum kan worden waargenomen, kan de helderheidsvariatie nauwkeurig worden gemodelleerd, waardoor de inclinatie van de dubbelsterbaan bepaald kan worden, alsmede de straal van beide sterren en de verhouding in oppervlaktetemperatuur. Uit deze gegevens, en uit de baanperiode en de wet van Kepler, kunnen de massa's nauwkeurig worden gemeten en kunnen de massa's, stralen en temperaturen worden gebruikt om de helderheid van de sterren af te leiden door vergelijking met gedetailleerde stermodellen. Zo kunnen afstanden tot 3 Mpc worden bepaald, waaronder de afstanden tot nabije sterrenstelsels als de Magelhaense Wolken en de Andromedanevel.

In ons Melkwegstelsel en deze sterrenstelsels komen zogenaamde **Cepheïden** voor, een klasse van veranderlijke sterren waarvan de lichtkracht gecorreleerd blijkt te zijn met hun pulsatieperiode (zie Fig. 7.1). De Cepheïden in een gegeven sterrenstelsel staan allemaal op ongeveer dezelfde afstand, waardoor hun periode-lichtkrachtrelatie geïkt kan worden. Die relatie kan voor Cepheïden in de Melkweg en de V-band geschreven als

$$L_V \approx 50.2 L_\odot \left(\frac{P}{\text{day}} \right)^{0.972}. \quad (7.1)$$

Klassieke Cepheïden zijn 4–20 keer zo zwaar als de Zon en kunnen tot 100 000 keer zo helder zijn, waardoor ze kunnen worden waargenomen tot op grote afstanden. Door pulsatieperiodes en schijnbare helderheden van individuele Cepheïden te meten kan de afstand tot hun gaststerrenstelsel tot op circa 30 Mpc worden bepaald. De Cepheïden vormen een typische sport op de afstandsladder: ze worden geïkt aan bijvoorbeeld

¹Sterren van magnitude 3 of minder zijn te helder voor Gaia!



Figuur 7.1: De flux van de ster δ Cephei, het prototype van de veranderlijke sterren de Cepheïden, zoals gemeten met Hipparcos. De pulsperiode is 5.36610 dagen en zeer nauwkeurig bekend.

parallaxen in ons Melkwegstelsel en aan eclipserende dubbelsterren die in hetzelfde sterrenstelsel staan (zie hierboven), en worden op hun beurt gebruikt (door onder andere Edwin Hubble) voor het bepalen van de Hubbleconstante hieronder.

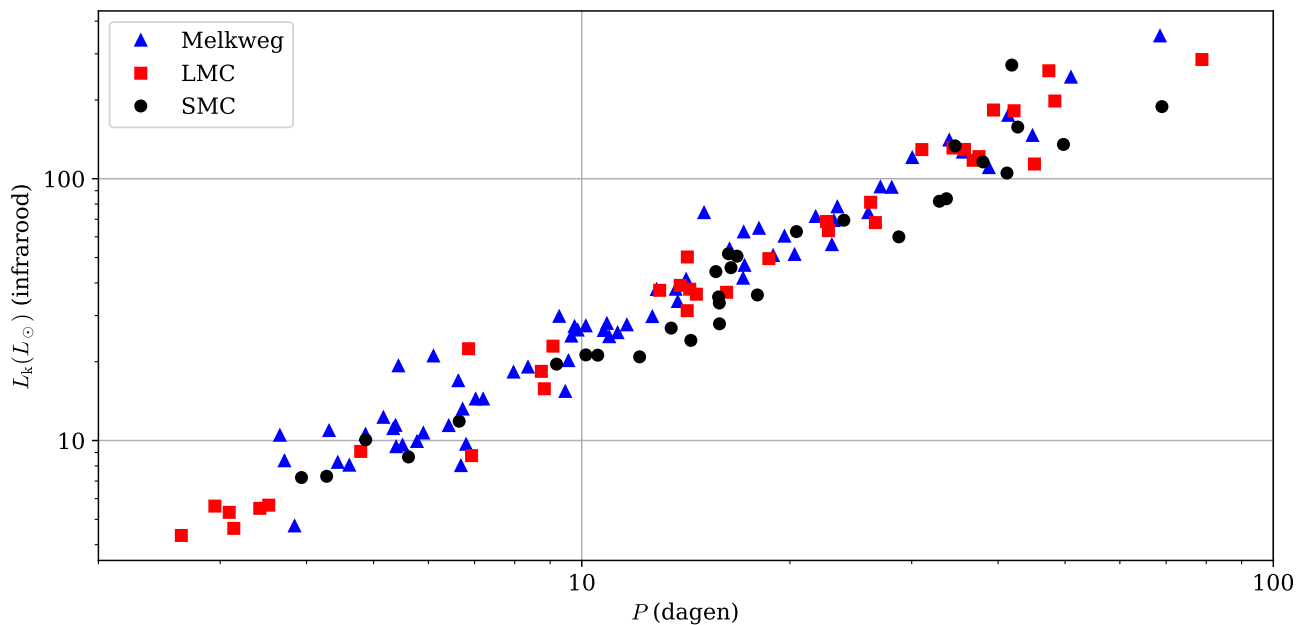
De **Tully-Fisherrelatie** is een empirisch verband tussen de intrinsieke helderheid van een spiraalsterrenstelsel en zijn maximale rotatiesnelheid aan de buitenrand, die kan worden gemeten uit de Dopplerverschuiving of -verbreding van spectraallijnen (zie H. 6.3.2 en Fig. 6.6 op p. 90). De Tully-Fisherrelatie kan worden gebruikt om afstanden te meten tot meer dan 100 Mpc.

Type-Ia-supernovae (SNIae) zijn accreterende witte dwergen, of twee samensmeltende witte dwergen, die de Chandrasekharlimiet overschrijden en ontploffen door gedegenereerde koolstoffusie (zie Hoofdstuk 3.5.1). Doordat de Chandrasekharlimiet bekend is kan de intrinsieke lichtkracht worden berekend.² De afstand kan worden bepaald met een nauwkeurigheid van circa 7% uit het verschil met de relatieve flux, tot op afstanden van meer dan een Gigaparsec. Figuur 7.3 toont een vrij strakke relatie tussen de afstand bepaald uit de helderheid van een supernova en die bepaald uit de kosmologische roodverschuiving. SNIae worden om deze reden ook wel **standaardkaarsen** genoemd.

De Laser Interferometer Space Antenna (LISA) is een ruimtemissie om zwaartekrachtgolven te detecteren die eind jaren 2030 gelanceerd moet worden. Met een armlengte van 2.5 miljoen kilometer is LISA gevoelig voor frequenties tussen 1 mHz en 1 Hz, en daarmee voor de *inspiral* en *merger* (zie Hoofdstuk 5.6) van **supermassieve zwarte gaten** (SMBHs) met massa's tussen 10^4 en $10^7 M_{\odot}$. Uit de waargenomen frequentie en frequentie-afgeleide kan de *chirp*massa (zie Vgl. 4.7) worden bepaald, waaruit, met inachtneming van de oriëntatie van de supermassieve dubbelster en de roodverschuiving, de afstand kan worden bepaald. Deze bronnen worden wel **standaardsirenen** genoemd.

Ten slotte wordt de **Hubbleflow** gebruikt om de afstanden te bepalen tot dicht bij de rand van het waarneembare heelal. Dit is gebaseerd op de uitdijning van het heelal, die een *kosmologische roodverschuiving* (Engels: *redshift*; z) veroorzaakt voor sterrenstelsels op grote afstand. Hoe groter de afstand, hoe groter

²In werkelijkheid varieert de absolute helderheid van SNIae doordat de Chandrasekharlimiet voor roterende witte dwergen hoger is dan voor niet-roterende, en doordat twee samensmeltende witte dwergen een massa kunnen hebben die hoger is dan de limiet. De absolute helderheid blijkt echter te correleren met de duur van de piek, waardoor de absolute helderheid kan worden geschat.



Figuur 7.2: Lichtkracht in de K_s -band versus pulsatieperiode voor waargenomen Cepheïden in de Melkweg en de Grote en Kleine Magellhaese Wolken (Engels: Large, Small Magellanic Clouds: LMC, SMC). De K -band ligt in het infrarood, waar absorptie door stof minder sterk is, maar ook een kleine fractie van het sterlicht uitgezonden wordt.

de roodverschuiving, en hoe sneller het sterrenstelsel van ons af lijkt te bewegen. Deze relatie wordt weergegeven als de *Hubbleconstante* H_0 , die circa 70 km/s per Mpc bedraagt.³ Uit een meting van de roodverschuiving van een sterrenstelsel kan dus zijn afstand worden bepaald. Voor nabije sterrenstelsels kan deze methode worden geïjkt, maar voor ver verwijderde stelsels is deze methode gebaseerd op modellen van de evolutie van het heelal, die we in Hoofdstuk 7.3 zullen bespreken.

Tabel 7.1: Een overzicht van de sporten in de kosmische afstandscladder, beschreven in Hoofdstuk 7.1.

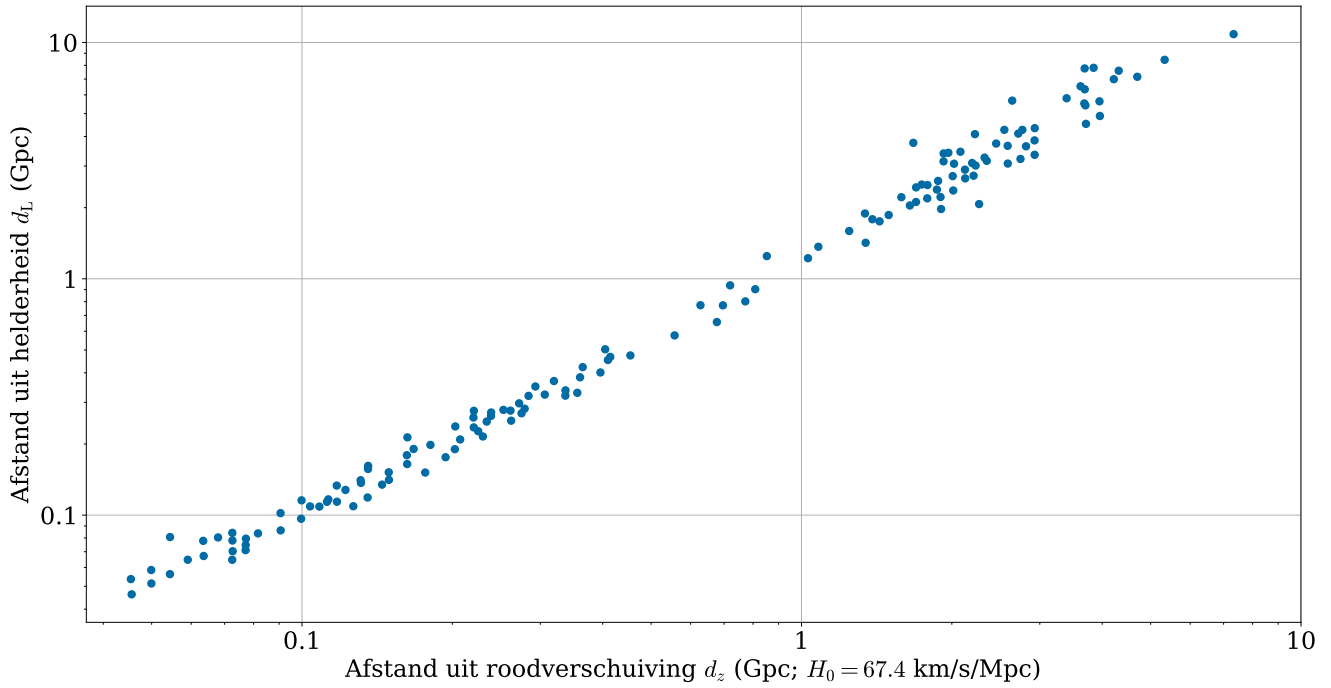
Methoden	Maximale afstand (Mpc)
Radar	10^{-10}
Parallax	0.005
Eclipserende dubbelsterren	3
Cepheïden	30
Tully-Fisherrelatie	>100
Type-Ia-supernovae	>1000
SMBH mergers	$>10^4$
Hubbleflow	$>10^4$

7.2 Een donkere hemel

Als je naar de nachthemel kijkt, vanaf een locatie waar (nog) niet veel lichtvervuiling is, is die hemel *donker*. Dat klinkt logisch, maar is het dat ook? Stel dat we ons in een oneindig groot, statisch en homogeen heelal bevinden. Het heelal is dan oneindig oud, en (op grote schaal) overal ongeveer hetzelfde. In het bijzonder zijn er overal ongeveer evenveel sterren. De sterddichtheid in onze buurt is $n_* \sim 10^9 \text{ Mpc}^{-3}$, en die geldt dan dus ook op afstanden die te groot zijn om die sterren (of zelfs hele sterrenstelsels) nog te kunnen detecteren.

We richten nu onze blik op een willekeurige plek aan de hemelbol en trekken een straal R om onze

³We zullen in Hoofdstuk 7.3 zien dat H_0 de waarde is die nu geldt, en dat deze waarde varieert over de evolutie van het heelal.



Figuur 7.3: Relatie tussen de afstand bepaald uit de helderheid versus de afstand bepaald uit de kosmologische roodverschuiving voor 147 type-Ia-supernovae. De aanname van een constante H_0 wordt boven 1 Gpc minder correct.

gezichtslijn. Dit levert een cilindrische koker met een nader te bepalen lengte ℓ . Voor het gemak kiezen we $R = R_\odot$ voor de straal van onze cilinder, *en* voor de straal van alle sterren. Daarnaast nemen we $L = L_\odot$ voor alle sterren. Deze waarden gelden natuurlijk niet voor iedere reus en witte dwerg, maar aangezien de Zon een vrij gemiddelde ster is, is de aanname niet verschrikkelijk slecht.

Hoeveel sterren bevinden zich nu in het volume van onze gezichtskoker? Dat is $\pi R^2 \ell$, het volume van onze koker, maal n_* het aantal sterren per volume-eenheid, dus

$$N = \pi R^2 \ell n_*.$$

Maar zodra er één ster zich precies aan het einde van onze koker bevindt, is onze gezichtslijn volledig geblokkeerd. Hetzelfde gebeurt wanneer bijvoorbeeld tien sterren dat ieder voor 10% doen. In al die gevallen is $N = 1$. We kunnen hieruit de lengte van onze koker berekenen voordat deze totaal wordt geblokkeerd:

$$\ell = \frac{N}{\pi R^2 n_*}.$$

Invullen van $N = 1$, $R = R_\odot$ en $n_* \sim 10^9 \text{ Mpc}^{-3}$ geeft $\ell \sim 10^{15} \text{ Gpc}$. Dat is een ontzettend grote afstand, behalve in een oneindig groot heelal. In dat geval zal onze gezichtslijn dus altijd ergens een stukje steroppervlak raken. En aangezien dit een willekeurige gezichtslijn was, geldt dit voor de hele nachthemel — in alle richtingen zouden we licht van een steroppervlak moeten zien.

Hoe helder zou de sterrenhemel dan moeten zijn? Wel, de astrofysische flux, gedefinieerd als het vermogen per oppervlak **per steradiaal** $F_{\text{af}} \equiv \frac{F}{\Omega}$, verandert niet met de afstand. Immers, wanneer de Zon tweemaal zo ver weg zou staan, wordt zij vier maal zo zwak, maar haar ruimtehoek Ω_q wordt ook vier maal zo klein. De *oppervlaktehelderheid* Σ van de hemel zou dus in alle richtingen net zo groot zijn als die van de Zon! We kunnen dit laten zien door de definitie van oppervlaktehelderheid uit te werken voor een ster op afstand $d \gg R$:

$$\Sigma \equiv F_{\text{af}} \equiv \frac{F}{\Omega} = \frac{L}{4\pi d^2} \left(\frac{\pi R^2}{d^2} \right)^{-1} = \frac{L}{4\pi^2 R^2} = \frac{L_\odot}{4\pi^2 R_\odot^2},$$

dus inderdaad onafhankelijk van d .⁴

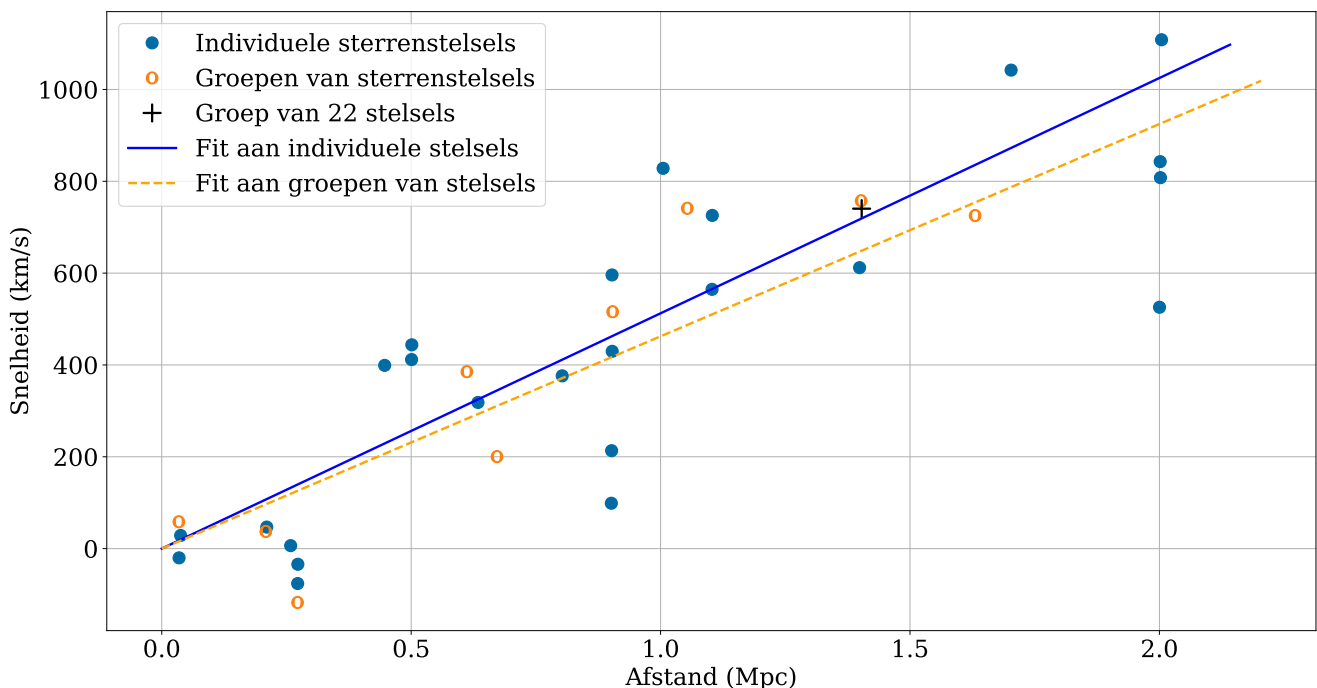
⁴Voor een zwarte straler zien we dat dit gelijk is aan $\frac{B}{\pi}$, de Planckfunctie per steradiaal.

We verwachten dus dat voor een oneindig groot, statisch, homogeen heelal de nachthemel zo helder zou zijn als het oppervlak van de Zon! Dit staat bekend als Olbers' paradox, uitgewerkt in zijn huidige vorm door de naamgever in 1823.⁵ Hoe komt het dat de nachthemel *niet* zo helder is als het oppervlak van de Zon? Ten minste één van de drie aannamen moet fout zijn. Misschien is het heelal niet oneindig groot. Maar onze huidige kennis is dat het heelal *zo* groot is, dat dit niet de beperkende factor is. De aanname van homogeniteit lijkt ook redelijk te kloppen. Het echte antwoord is dat het heelal niet statisch is, en in het bijzonder, *niet oneindig oud*. Het gevolg hiervan is dat licht van een zeer ver verwijderd sterrenstelsel langer nodig heeft om ons te bereiken dan het heelal oud is. Er is dus simpelweg *nog niet voldoende tijd* geweest om deze verre sterren te zien. De oorzaak van de donkere nachthemel is de eindige leeftijd van het heelal!

7.3 Een uitdijend heelal met materie

7.3.1 De wet van Hubble-Lemaître

In 1927 vond Georges Lemaître een lineaire relatie tussen de afstand en de roodverschuiving van sterrenstelsels, die hij uitdrukte als radiële snelheid.⁶ Hij bepaalde de ratio tussen die twee op 625 km/s/Mpc. In 1929 publiceerde Edwin Hubble zijn metingen van de snelheden van (groepen van) sterrenstelsels en hun afstanden uitgezet in een grafiek die gereproduceerd is in Figuur 7.4. Deze relatie staat nu bekend als de **wet van Hubble-Lemaître**. Hubbles waarde voor de ratio tussen die twee grootheden, nu de **Hubbleconstante** H_0 genoemd, is met circa 500 km/s/Mpc ruim zeven maal zo groot als moderne waarden. Lemaître en Hubble concludeerden desalniettemin terecht dat het **heelal** op grote schaal **uitdijt**. Het **kosmologisch principe** zegt dat het heelal op grote schaal **homogeen** en **isotroop** is en dat deze uitdijing dus overal in het heelal hetzelfde is.



Figuur 7.4: De afstanden en snelheden van individuele sterrenstelsels en groepen daarvan, zoals gepubliceerd door Edwin Hubble in 1929. Hubble vond hellingen voor de twee fits van 512 en 462 km/s Mpc⁻¹.

De wet van Hubble-Lemaître wordt vaak geschreven als (maar zie ook Vgl 7.19)

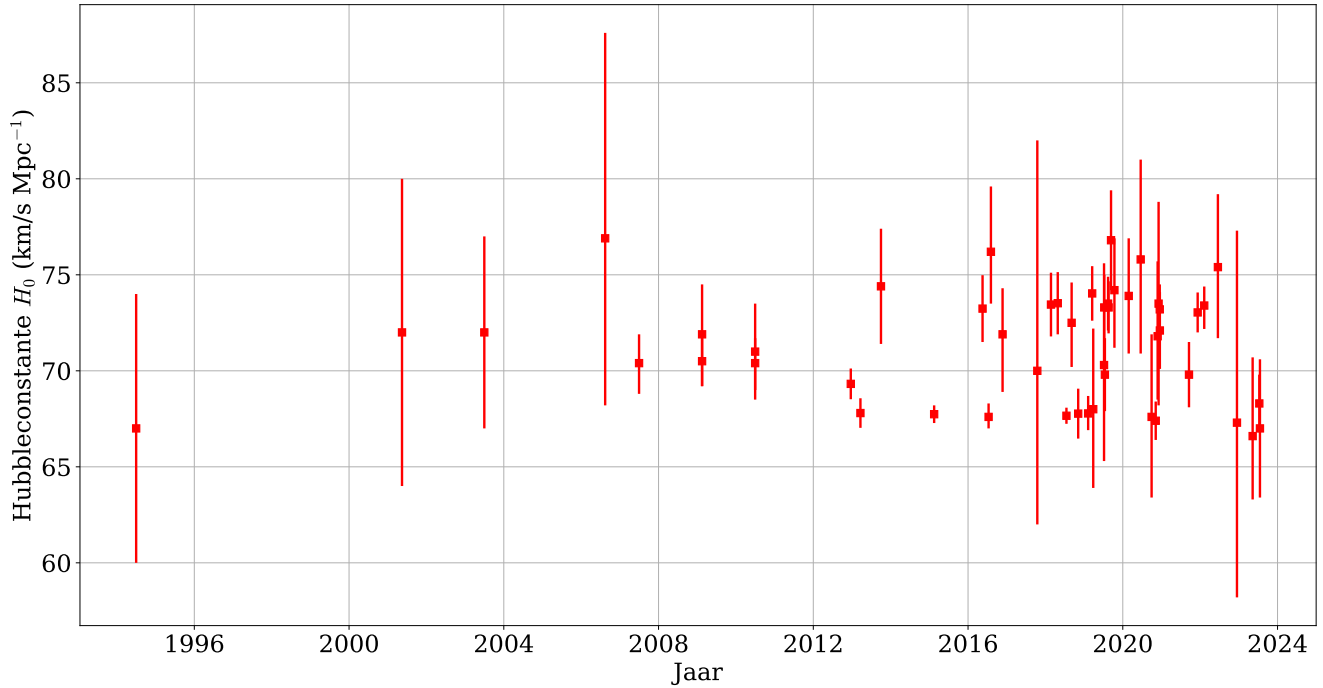
$$v = H_0 \cdot d, \quad (7.2)$$

waarbij v de snelheid van een sterrenstelsel is, meestal uitgedrukt in km/s, en d de afstand tot dat sterrenstelsel, vaak gemeten in megaparsec (Mpc). De Planckmissie bepaalde in 2015 de waarde op

⁵Meerdere mensen droegen daarvoor al bij aan de ontwikkeling van het idee, waaronder Kepler en Halley.

⁶We zullen hieronder zien dat *snelheid* een verkeerde interpretatie is van de gemeten *roodverschuiving*.

$H_0 \approx 67.4 \pm 0.5 \text{ km/s/Mpc}$. Een recente geschiedenis van de waarde van de Hubbleconstante is te vinden in Figuur 7.5.



Figuur 7.5: De gemeten waarden van de Hubbleconstante in de laatste paar decennia. Waarden gemeten voor 1994 zijn weggelaten om de figuur leesbaar te houden. De eerst gemeten waarden waren $625 \text{ km/s Mpc}^{-1}$ door Lemaître in 1927 en $500 \text{ km/s Mpc}^{-1}$ door Hubble in 1929. Merk op dat er sinds 2012 twee groepen van waarden zijn die elkaar uitsluiten. Waarden rond $\sim 73 \text{ km/s/Mpc}$ zijn bepaald via de kosmische afstandsladder (zie H. 7.1) en dus relatief nabije objecten in het “latere” heelal, de waarden rond 67.5 km/s/Mpc komen van metingen van de kosmische achtergrondstraling (zie H. 7.4.1) en dus direct van het vroege heelal. De oplossing van dit probleem is nog niet duidelijk.

De gangbare uitleg van deze waarnemingen is dat sterrenstelsels min of meer op hun plaats blijven⁷, terwijl het heelal isotroop uitdijt. Dit wordt de **Hubbleflow** genoemd. De ruimte tussen twee sterrenstelsels neemt hierbij toe, waardoor de golflengte van het licht dat door het heelal reist wordt opgerekt. We zien dit als een **kosmologische roodverschuiving** (zie H. 7.3.4).⁸ Als het heelal in grootte verdubbelt in een gegeven tijd, dan verdubbelt de afstand tussen iedere twee sterrenstelsels ook. Voor een stelsel dat tweemaal zo ver weg staat, is die toename tweemaal zo groot in dezelfde tijd, en dus vinden we een tweemaal zo grote roodverschuiving. Een bekende analogie is die van munten op een ballon. Wanneer de ballon wordt opgeblazen, wordt de afstand tussen de munten groter, en dit gebeurt sneller wanneer ze verder uit elkaar staan, zonder dat ze over het rubber bewegen. Het **kosmologisch principe** zegt dat dit geldt voor iedere willekeurige positie in het heelal.

Als we de onveranderlijke positie in het heelal (de plek op de ballon) aangeven met de *meebewegende* coördinaat r_s , en de relatieve **schaalfactor** die aangeeft hoe groot het heelal is op tijdstip t met $a(t)$, dan kunnen we de afstand tot r_s schrijven als

$$r(t) = r_s a(t). \quad (7.3)$$

Hierbij hebben we de afstand d vervangen door een algemenere radiële coördinaat $r(t)$. De schaafactor is gedefinieerd ten opzichte van de *huidige* grootte van het heelal. Vandaag de dag noemen we $t = t_0$, waar $a(t_0) \equiv 1$. De afgeleide van Vgl. 7.3 geeft

$$v(t) = r_s \dot{a}(t). \quad (7.4)$$

⁷ Al hebben ook sterrenstelsels (soms significante, met name voor nabije sterrenstelsels) eigen snelheden t.o.v. deze Hubbleflow, van typisch enkele honderden tot $\sim 1000 \text{ km/s}$.

⁸ Dit heeft hetzelfde effect als een roodverschuiving door radiële snelheden en het Dopplereffect, vandaar dat dit vaak als “snelheid” wordt geïnterpreteerd. Het mechanisme is echter fundamenteel anders!

Met behulp van Vgl. 7.3 en 7.4 kunnen we de wet van Hubble-Lemaître uit Vgl. 7.2 schrijven als

$$H(t) = \frac{v(t)}{r(t)} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (7.5)$$

Merk op dat we niet langer hebben aangenomen dat de Hubbleconstante constant is in de tijd; $H(t)$ wordt de **Hubbleparameter** genoemd. Voor $t = t_0$ is $H(t_0) \equiv H_0 = \dot{a}(t_0)$. We zullen hieronder de tijdsafhankelijkheid niet altijd expliciet weergeven, maar de “(t)” weglaten en vervangen dan “(t₀)” door het subscript “0”, bijvoorbeeld H voor $H(t)$ en H_0 voor $H(t_0)$.

7.3.2 Newtoniaanse uitdijing en de Friedmannvergelijking

In deze sectie zullen we een versimpelde (Newtoniaanse) mathematische beschrijving van de uitdijing van het heelal afleiden. Beschouw een heelal, homogeen gevuld met stofdeeltjes en massadichtheid ρ , dat uitdijt. Een concentrische schil om een willekeurig punt in dat heelal heeft straal r , massa m en dijt uit met snelheid v . De massa omsloten door de schil is $M(r)$. De verwachting is dat de zwaartekracht door de massa in dit heelal de uitdijing afremt. Als we aannemen dat de wet van Newton een goede beschrijving geeft van de zwaartekracht,⁹ dan wordt totale energie in de schil gegeven door

$$E \equiv E_{\text{kin}} + E_{\text{gr}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM(r)m}{r} \equiv -\frac{1}{2}mkc^2r_s^2,$$

waarin we k definiëren als een constante met dimensie m^{-2} . De massa binnen de schil $M(r) = \frac{4\pi}{3}r^3\rho$ is *constant*, ook in een uitdijend heelal.

We kunnen dan schrijven

$$v^2 - \frac{8\pi G}{3}r^2\rho = -kc^2r_s^2 = H^2r^2 - \frac{8\pi G}{3}r^2\rho, \quad (7.6)$$

waar we in de laatste stap de wet van Hubble-Lemaître uit Vgl. 7.5 hebben toegepast en de expliciete tijdsafhankelijkheid hebben laten vallen. Delen door r^2 en substitutie van Vgl. 7.3 geeft

$$H^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{-kc^2}{a^2}, \quad (7.7)$$

Vergelijking 7.7 staat bekend als de **Friedmannvergelijking** en beschrijft de uitdijing van een door materie gedomineerd heelal. Vandaag de dag, op $t = t_0$, geldt $a = 1$ en dus

$$H_0^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_0 = -kc^2. \quad (7.8)$$

We kunnen drie gevallen onderscheiden op basis van de constante k of totale energie in het heelal E :

1. $k > 0 \rightarrow E < 0$; $v < v_{\text{esc}}$: het heelal is **gesloten** en **begrensd**: de uitdijing zal ooit **stoppen en omkeren**;
2. $k < 0 \rightarrow E > 0$; $v > v_{\text{esc}}$: het heelal is **open** en **onbegrensd**: de uitdijing **gaat altijd door**;
3. $k = 0 \rightarrow E = 0$; $v = v_{\text{esc}}$: het heelal is **vlak** en **onbegrensd**: de uitdijing **remt asymptotisch af**.

Omdat het erop lijkt dat we in een (bijna-)vlak heelal leven,¹⁰ en omdat de wiskunde eenvoudiger is, zullen we ons hieronder richten op het derde geval.

⁹Hiermee negeren we de Algemene Relativiteitstheorie en de kosmologische constante/donkere energie, die nodig zijn voor een meer correcte beschrijving (zie H. 7.5). Onze Newtoniaanse kosmologie geeft echter een aardig eerste-orde idee van een uitdijend heelal.

¹⁰Ons heelal is mogelijk *exact* vlak en onbegrensd, of zoveel groter dan het deel dat we kunnen zien, dat het nauwelijks van vlak te onderscheiden is.

7.3.3 Een vlak heelal

De kritische dichtheid

We beschouwen nu het geval van een **vlak heelal**, dus waar $k = E = 0$, in wat meer detail. In dat geval beweegt iedere schil in het uitdijende heelal met de *ontsnappingsnelheid*. Dit betekent per definitie dat het heelal een *kritische dichtheid* heeft: $\rho = \rho_{\text{crit}}$. De Friedmannvergelijking in Vgl. 7.7 kan dan worden geschreven als

$$H^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho = 0, \quad (7.9)$$

zodat

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (7.10)$$

Met $H_0 \approx 67.4 \text{ km/s/Mpc}$ is de huidige kritische dichtheid van het heelal $\rho_{\text{crit}} \approx 8.5 \times 10^{-27} \text{ km/m}^3$, ofwel circa vijf waterstofatomen per kubieke meter. De werkelijke dichtheid wordt geschat op $\rho_{\text{B},0} \approx 4.1 \times 10^{-28} \text{ kg/m}^3 \approx 0.049 \rho_{\text{crit}}$, maar dit omvat alleen de *baryonische* materie (opgemaakt uit atomen), geen **donkere materie** (zie Fig. 6.5 op pagina 89) of **donkere energie** (zie H. 7.5).

De dichtheid wordt vaak gemeten als de *dichtheidparameter* Ω , die gedefinieerd is als

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}}; \quad \Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{\text{crit},0}}; \quad \Omega_{\text{b},0} \approx 0.049 \left(\frac{H_0}{67.4 \text{ km/s/Mpc}} \right)^2, \quad (7.11)$$

waarbij de laatste waarde geldt voor de huidige *baryonische* dichtheid. Merk op dat ρ en ρ_{crit} beide afnemen in een uitdijend heelal, zodat $\Omega = \Omega_0$ constant is.

De uitdijng van een materie-gedomineerd heelal

Om de uitdijng van een vlak, materie-gedomineerd heelal te beschrijven bedenken we ten eerste dat vanwege massabehoud geldt dat

$$a^3 \rho = a_0^3 \rho_0 \equiv \rho_0 \quad (7.12)$$

constant is. Hiermee, en met behulp van de wet van Hubble-Lemaître in Vgl. 7.5, kunnen we de Friedmannvergelijking uit Vgl. 7.9 schrijven als

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0}{a^3} = \frac{H_0^2}{a^3} \quad (7.13)$$

waar we in de laatste stap Vgl. 7.9 *opnieuw* hebben toegepast, maar nu voor $t = t_0$. Hieruit volgt dat $\dot{a}\sqrt{a} = H_0$, wat we links en rechts integreren, om te vinden dat

$$a(t) = \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3} \equiv \left(\frac{3}{2} \frac{t}{t_H} \right)^{2/3}. \quad (7.14)$$

In de laatste stap hebben we de **Hubbletijd** $t_H \equiv 1/H_0$ gedefinieerd. De evolutie van de schaalfactor als functie van de tijd is weergegeven in Figuur 7.6.

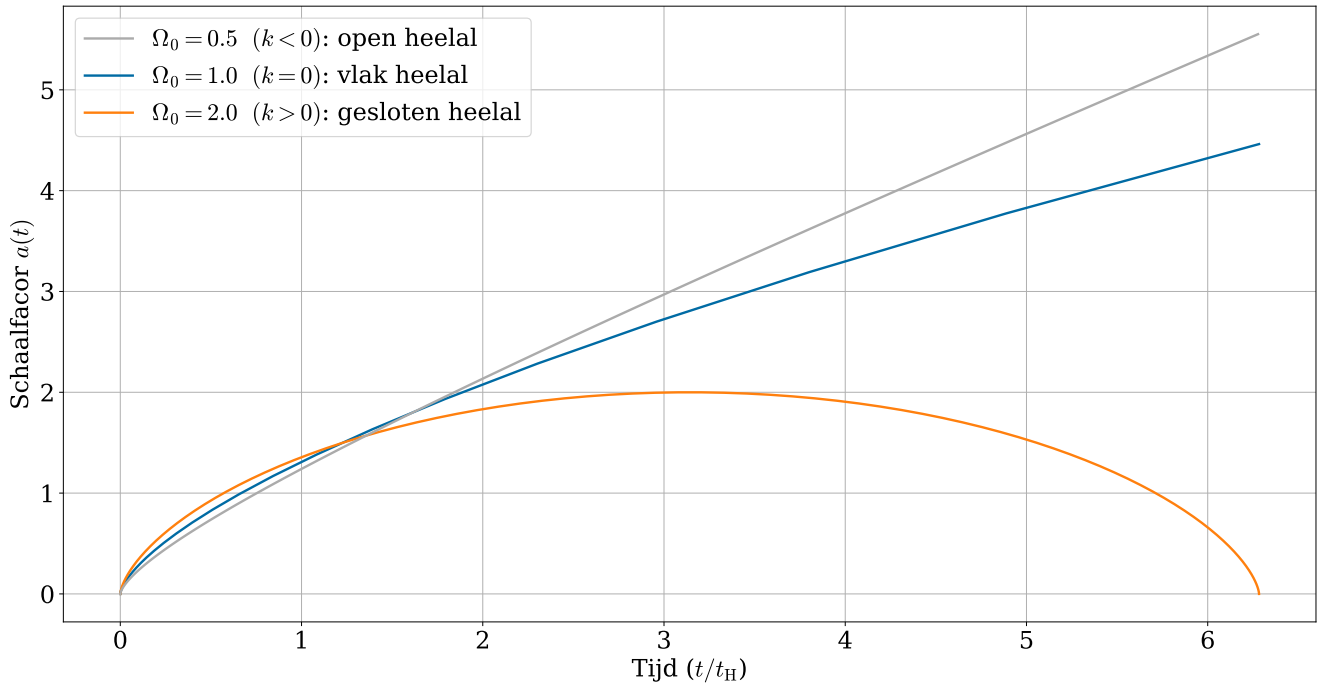
Voor het huidige heelal is $t = t_0$ en $a(t_0) \equiv 1$, zodat in ons model

$$t_0 = \frac{2}{3} t_H \quad (7.15)$$

de leeftijd is van een vlak, materie-gedomineerd heelal met Hubbleconstante $H_0 = 1/t_H$. Voor $H_0 \approx 67.4$ levert dit $t_H \approx 14.5 \text{ Gyr}$ en $t_0 \approx 9.7 \text{ Gyr}$, veel jonger dan de oudste sterren in bijvoorbeeld bolvormige sterhopen (zie Hoofdstuk 1.6.3).¹¹ Hoewel ons simpele modelletje een redelijke *kwalitatieve* beschrijving geeft van de uitdijng van het heelal, is een beter model nodig om dit soort precieze waarden te bepalen. Hier gaan we in Hoofdstuk 7.5 wat verder op in.

Voor een open ($\Omega_0 < 1; k < 0; E > 0$) en een gesloten ($\Omega_0 > 1; k > 0; E < 0$) heelal zijn de uitdrukkingen iets complexer. De evolutie van een open, een gesloten en een vlak heelal wordt vergeleken in Figuur 7.6.

¹¹Onze simpele modelletje onderschat de huidige leeftijd van het heelal, o.a. doordat het heelal tegenwoordig *versneld* uitdijt. Met de waarde van H_0 na die versnelling overschatten we de vroegere uitdijng, waardoor we een kortere tijd vinden sinds het heelal begon uit te dijen. We zullen hieronder zien dat $t_0 \approx 13.787 \text{ Gyr}$ een betere waarde is.



Figuur 7.6: De evolutie van de schaafactor van het heelal $a(t)$ als functie van de tijd, uitgedrukt in eenheden van de Hubbletijd t_H , voor een open ($\Omega_0 = 0.5$), vlak ($\Omega_0 = 1$) en gesloten ($\Omega_0 = 2$) materie-gedomineerd heelal.

7.3.4 Roodverschuiving en terugkijktijd

De **kosmologische roodverschuiving** (Engels: *cosmological redshift*; z) ontstaat doordat het heelal uitdijt en daarmee de golflengte van licht toeneemt terwijl het naar de Aarde reist. Dit wordt gegeven door

$$z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{bron}}}{\lambda_{\text{bron}}} = \frac{a_{\text{obs}} - a_{\text{bron}}}{a_{\text{bron}}} \equiv \frac{a(t_0)}{a_{\text{bron}}} - 1 \equiv \frac{1}{a_{\text{bron}}} - 1. \quad (7.16)$$

Dit wordt vaak geschreven als

$$1 + z = \frac{1}{a(z)}. \quad (7.17)$$

De kosmologische roodverschuiving vertelt ons dus direct iets over de grootte van het heelal op het moment dat het licht werd uitgezonden!

Het meten van deze roodverschuiving wordt echter gecompliceerd door het feit dat sterrenstelsels eigen snelheden hebben van enkele 100 km/s tot ~ 1000 km/s ten opzichte van de Hubbleflow. Dit veroorzaakt de ongerelateerde Dopplerverschuiving:

$$z_{\text{Doppler}} \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{bron}}}{\lambda_{\text{bron}}} = \sqrt{\frac{1 + v_{\text{rad}}/c}{1 - v_{\text{rad}}/c}} - 1 \approx \frac{v_{\text{rad}}}{c}, \quad (7.18)$$

waarbij de laatste term geldt voor $v \ll c$, dus $z \ll 1$. Met name voor nabije sterrenstelsels, met lage kosmologische roodverschuiving, kan z_{Doppler} significant bijdragen aan de totale z . We zullen in het vervolg van dit hoofdstuk steeds z gebruiken voor de *kosmologische* roodverschuiving.

Voor $z \ll 1$ kan de wet van Hubble-Lemaître uit Vgl. 7.2 meer correct worden geschreven als functie van z in plaats van v .¹²

$$d \approx \frac{cz}{H_0}. \quad (7.19)$$

¹²We meten immers z , en v is een indirecte en verkeerde interpretatie als het de kosmologische roodverschuiving betreft.

Leeftijd, terugkijktijd en afstand

Voor een vlak, materie-ge domineerd heelal kunnen we Vergelijking 7.14 met behulp van Vgl. 7.15 omschrijven naar de leeftijd van het heelal toen het licht werd uitgezonden als functie van de roodverschuiving van het licht

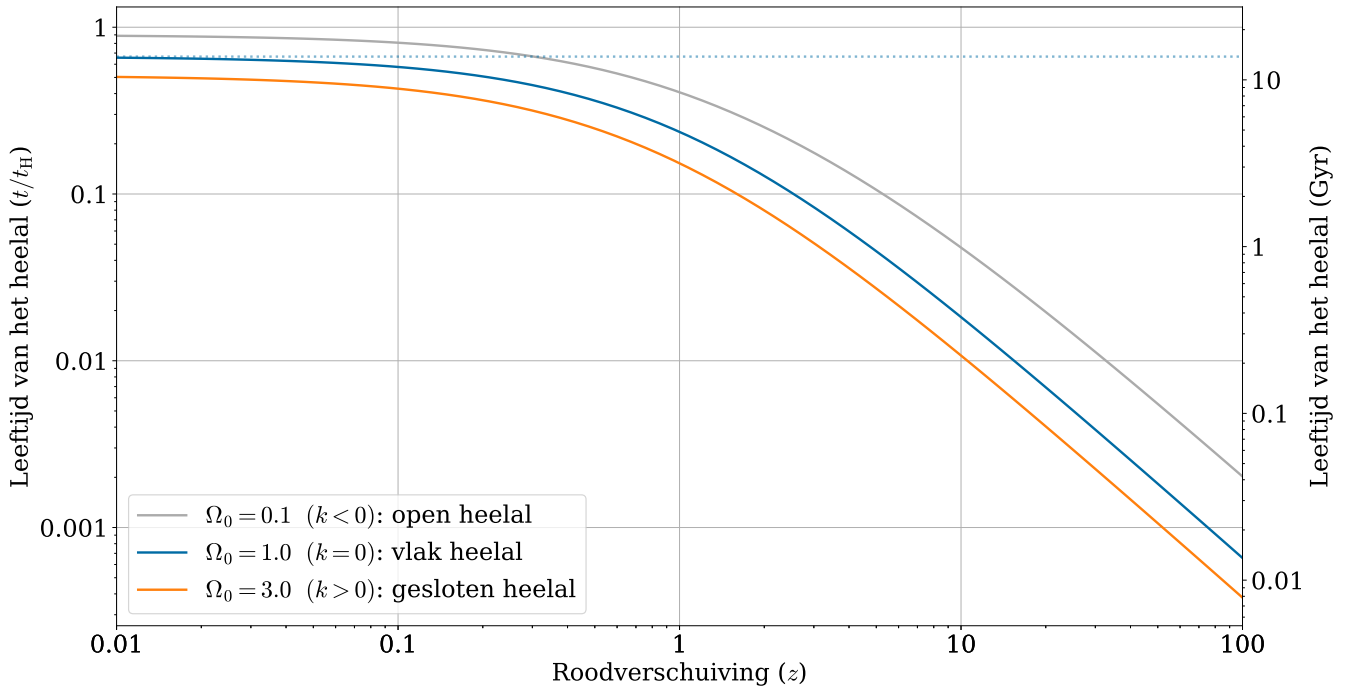
$$t(z) = t_0 \frac{1}{(1+z)^{3/2}}. \quad (7.20)$$

Figuur 7.7 toont deze relatie (in termen van t_H) voor een open, vlak en gesloten heelal. Hieruit kunnen we de **terugkijktijd** (*lookback time*) in een vlak heelal definiëren als de tijd die het licht van een bron onderweg geweest is om ons te bereiken

$$t_L \equiv t_0 - t(z) \equiv t_0 (1 - t_{\text{rel}}(z)), \quad (7.21)$$

waarin t_{rel} de *relatieve* leeftijd van het heelal is voor gegeven z . De **lichtafstand** (*luminosity distance*) wordt ten slotte gegeven door de afstand die het licht heeft afgelegd om ons te bereiken:¹³

$$d_L = c \cdot t_L = ct_0 \left(1 - \frac{1}{(1+z)^{3/2}} \right). \quad (7.22)$$



Figuur 7.7: De leeftijd van het heelal als functie van de roodverschuiving, uitgedrukt in eenheden van de Hubbletijd t_H (op de linker verticale as) en in Gyr (op de rechter as), voor een open ($\Omega_0 = 0.1$; $k < 0$), vlak ($\Omega_0 = 1$; $k = 0$) en gesloten ($\Omega_0 = 3$; $k > 0$) heelal. De schaal op de rechter as is zo gekozen dat het vlakke heelal 13.787 Gyr oud is bij $z = 0$ (stippellijn).

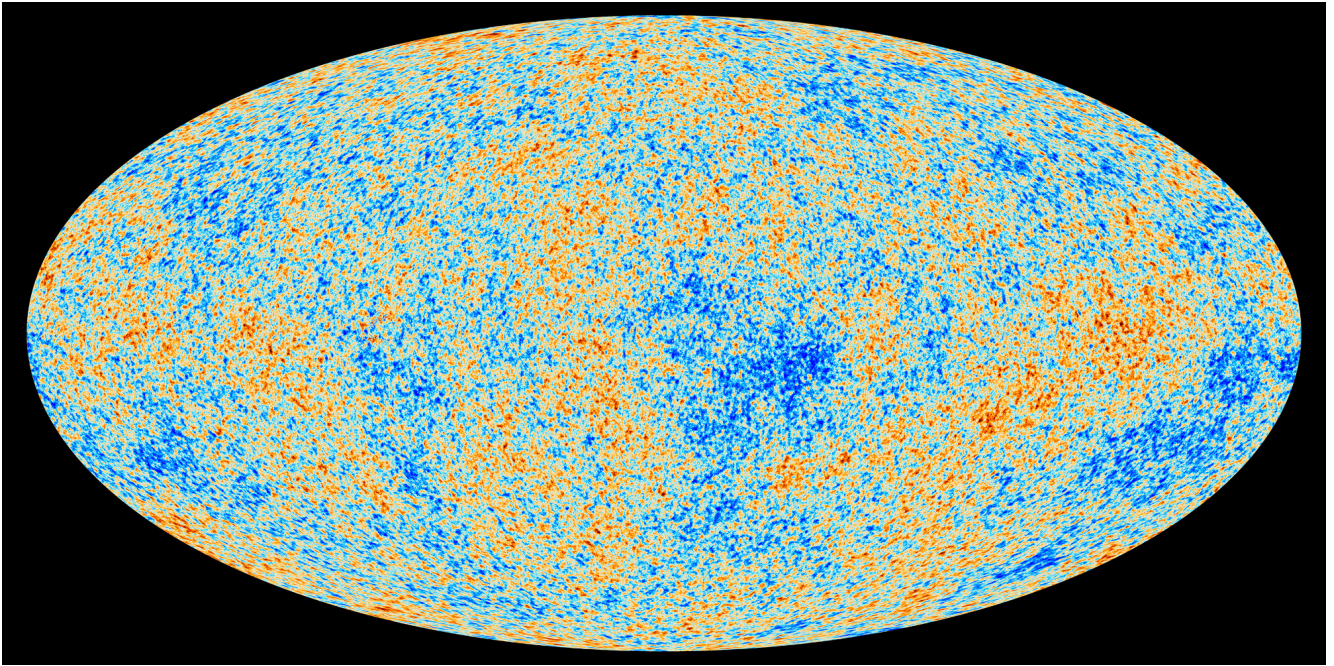
Als voorbeeldje bekijken we het sterrenstelsel **JADES-GS-z14-0**, dat in 2024 werd ontdekt met de James Webb-telescoop. Het heeft momenteel de hoogst gemeten roodverschuiving: $z \approx 14.3$. Met $H_0 \approx 67.4 \text{ km/s/Mpc}$ vinden we, voor een vlak universum, $t(z)/t_0 \approx 0.017$ zodat het heelal nog slechts 1.7% van zijn huidige leeftijd oud was toen het licht vertrok (Vgl. 7.20) en het licht dus 98.3% van de leeftijd van het heelal nodig heeft gehad om ons te bereiken ($t_L/t_0 \approx 0.983$ volgens Vgl. 7.21). Wanneer we $t_0 \approx 13.787 \text{ Gyr}$ gebruiken was het heelal circa 230 Myr oud toen het licht vertrok en was het licht 13.56 Gyr onderweg om hier te komen. De lichtafstand (Vgl. 7.22) is daarmee circa 13.56 Gly ofwel 4.16 Gpc. Ook is $a(z) = 0.065$ (Vgl. 7.17), dus het heelal had destijds circa 6.5% van zijn huidige lineaire omvang (en $\sim 3 \times 10^{-4}$ van het huidige volume).

¹³Dit is *niet* hetzelfde als de huidige *werkelijke* afstand, doordat de afgelegde weg na passage van de lichtstraal verder is uitgedijd(!)

7.4 Een heelal gedomineerd door straling

7.4.1 De kosmische achtergrondstraling

In 1931 voorspelde Lemaître dat een overblijfsel van het vroege heelal nog aanwezig zou kunnen zijn in de vorm van straling, en in 1934 toonde Tolman aan dat een uitdijend heelal de vorm van een **Planck-spectrum** behouden blijft, maar naar langere golflengten schuift. In 1948 lieten Alpher en Herman zien dat dit tegenwoordig *microgolfstraling* zou moeten zijn, met een effectieve temperatuur van 5 K. In 1965 ontdekten Penzias en Wilson bij toeval wat nu de **kosmische achtergrondstraling** (Engels: *cosmic microwave background*; **CMB**) wordt genoemd, waarvoor zij in 1978 de Nobelprijs ontvingen.



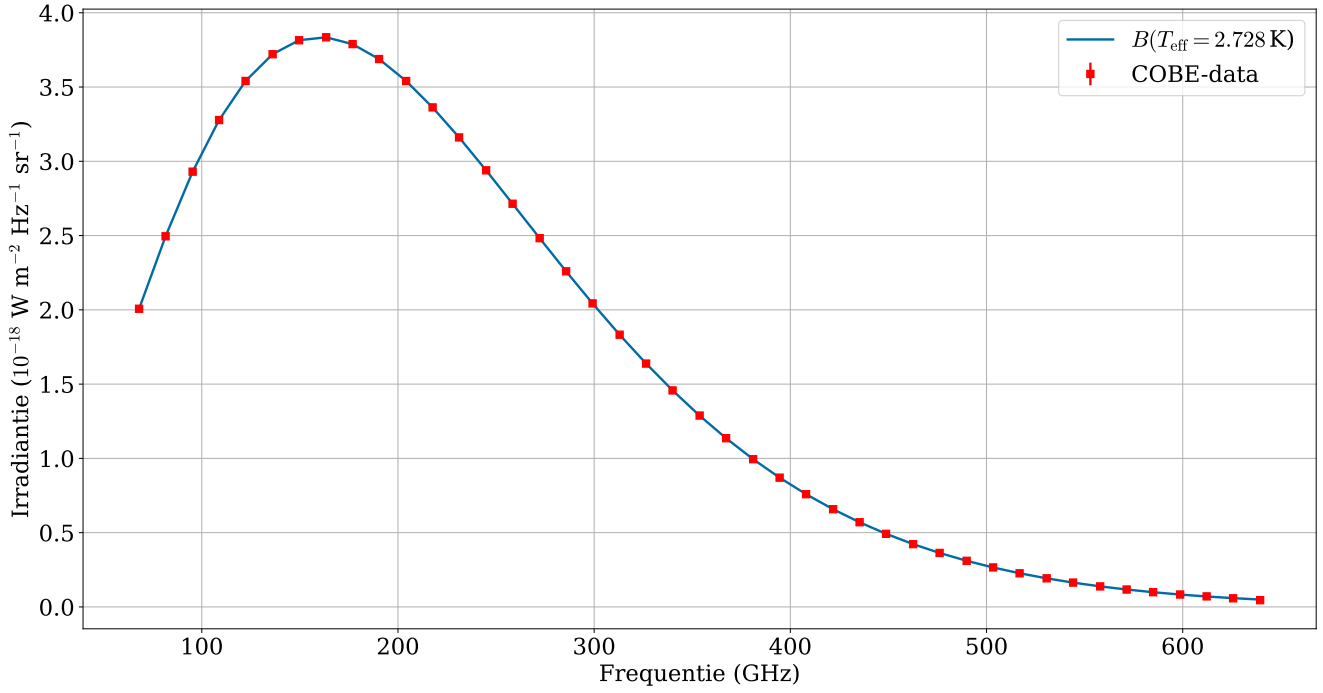
Figuur 7.8: Een hemelkaart van de kosmische achtergrondstraling gemaakt tussen 2009 en 2013 door de Europese Plancksatelliet. De kaart toont de afwijkingen van de gemiddelde temperatuur: (iets) hogere temperaturen zijn rood, iets lagere blauw. De relatieve variaties bedragen circa 10^{-5} (!) Er is gecorrigeerd voor Dopplerverschuivingen door de bewegingen van de Aarde en de Zon.

De CMB is nauwkeurig in kaart gebracht door de COBE- (1989), WMAP- (2001) en Planckmissies (2009), zoals bijvoorbeeld getoond in Figuur 7.8. De kaart toont minuscule temperatuurvariaties ($\sim 10^{-5}$) van het moment dat het heelal 377.7 ± 3.2 kyr oud was ($z \approx 1100$). De straling ontkoppelde toen van de materie, doordat de temperatuur van het heelal onder de ~ 3000 K daalde, waardoor protonen elektronen konden invangen en neutrale waterstofatomen vormen, zodat de straling vrijelijk door het heelal kon bewegen. Vermoedelijk ontstonden de temperatuurfluctuaties al in de eerste 10^{-30} s van het heelal. Uit de metingen blijkt dat het heelal circa $t_0 \approx 13.787 \pm 0.020$ Gyr oud is en dat de Hubbleconstante 67.4 ± 0.5 km/s/Mpc bedraagt. Eerder had WMAP al bepaald dat de huidige temperatuur van de CMB $T = 2.72548 \pm 0.00057$ K is, circa de helft van de schatting van 1948. De metingen tonen dat het spectrum tot op grote nauwkeurigheid inderdaad de Planckfunctie volgt, zoals voorspeld in 1934 (zie Figuur 7.9).

7.4.2 Straling in een uitdijend heelal

Als het heelal tegenwoordig gevuld is met achtergrondstraling¹⁴ en de totale hoeveelheid stralingsenergie in het heelal constant is, ligt het voor de hand dat de temperatuur van die straling vroeger hoger was, toen het heelal beduidend kleiner was dan nu. De huidige lage temperatuur is dan een gevolg van de uitdijning van het heelal. Om hier iets over te kunnen zeggen combineren we de definities van de Planckfunctie in

¹⁴Van iedere 400 fotonen in het heelal zijn er 399 uit de CMB!



Figuur 7.9: Het spectrum van de kosmische achtergrondstraling, gemaakt door de COBE-satelliet, vergeleken met dat van een Planckse straler met een temperatuur van 2.728 K. Merk op dat de foutenbalken klein en hierdoor onzichtbaar zijn.

Vgl. 1.15 en Vgl. 1.16 en van de stralingsenergiedichtheid van Vgl. 2.4 tot

$$u_{\lambda} d\lambda = \frac{4}{c} B_{\lambda} d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda. \quad (7.23)$$

Behoud van stralingsenergie betekent dat de integraal over Vgl. 7.23 voor alle golflengten constant is, en dus Vgl. 7.23 zelf.

Wanneer het heelal uitdijt met de schaalfactor a neemt de *deeltjes*dichtheid van fotonen af met a^{-3} door het groeiende volume waarin zij zich bevinden, en energie per foton met a^{-1} doordat ieder van die fotonen een lagere energie krijgt doordat zijn golflengte toeneemt met a (kosmologische roodverschuiving). In totaal neemt de stralingsenergiedichtheid dus af met de vierde macht van de schaalfactor a ; we kunnen dit schrijven als $u(a) = u_0 \cdot a^{-4}$. Voor de λ 's in Vgl. 7.23 geldt dat $\lambda(a) = \lambda_0 \cdot a$ en $d\lambda(a) = d\lambda_0 \cdot a$. We kunnen derhalve de huidige stralingsdichtheid (met label 0) gelijkstellen aan de dichtheid voor een schaalfactor a vermenigvuldigd met a^4 :

$$\begin{aligned} u_0 d\lambda_0 &= u(T_0, \lambda_0) d\lambda_0 = \frac{8\pi hc}{\lambda_0^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda_0 kT_0} - 1} d\lambda_0 \\ &= a^4 u(a) d\lambda(a) = a^4 u(T(a), \lambda(a)) d\lambda(a) = a^4 \frac{8\pi hc}{\lambda(a)^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda(a) kT(a)} - 1} d\lambda(a) \\ &= a^4 \frac{8\pi hc}{(\lambda_0 a)^5} \frac{1}{e^{hc/(\lambda_0 a) kT(a)} - 1} (d\lambda_0 a) = \frac{8\pi hc}{\lambda_0^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda_0 k(T(a)a)} - 1} d\lambda_0. \end{aligned}$$

Al deze factoren a vallen tegen elkaar weg, behalve die in de e-macht, waardoor moet gelden dat de stralingstemperatuur voor een gegeven schaalfactor a kan worden uitgedrukt in termen van de huidige temperatuur $T_0 \approx 2.725$ K als

$$T(a) = \frac{T_0}{a}. \quad (7.24)$$

We zien dus dat het heelal tweemaal zo heet was toen het in diameter half zo groot was als nu!

Voor een zeer kleine schaalfactor verwachten we dat de stralingsdichtheid de materiedichtheid domineerde. Om te vinden wanneer dat het geval was, schrijven we de stralingsdichtheid als een equivalente massadichtheid. Voor het converteren van energie naar massa delen we Vgl. 2.4 door het kwadraat van de lichtsnelheid, en de equivalente dichtheid wordt gegeven door

$$\rho_{\text{rad}}(a) = \frac{u(a)}{c^2} = \frac{4\sigma}{c^3} T(a)^4 = \frac{4\sigma T_0^4}{c^3 a^4}. \quad (7.25)$$

Dit stellen we gelijk aan de dichtheid voor materie uit Vgl. 7.12, en halen uit Vgl. 7.9 dat $\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$, zodat we voor een vlak heelal kunnen schrijven

$$\rho_{\text{rad}} = \rho_{\text{mass}} \rightarrow \frac{4\sigma T_0^4}{c^3 a^4} = \frac{\rho_0}{a^3} \rightarrow a = \frac{4\sigma T_0^4}{c^3 \rho_0} = \frac{32\pi G \sigma T_0^4}{3c^3 H_0^2}. \quad (7.26)$$

Voor $H_0 \approx 67.4 \text{ km/s/Mpc}$ en $T_0 \approx 2.725 \text{ K}$ vinden we een schaalfactor $a \sim 5 \times 10^{-5}$ waarop de transitie van een straling-gedomineerd heelal naar een materie-gedomineerd heelal plaatsvond. De roodverschuiving hiervoor is $z \sim 2 \times 10^4$ (Vgl. 7.17) en het heelal had toen een temperatuur van circa $T \sim 5 \times 10^4 \text{ K}$ (Vgl. 7.24). De leeftijd van het heelal was ongeveer een fractie $t_{\text{rel}} \sim 4 \times 10^{-7}$ van de huidige leeftijd (Vgl. 7.20); voor de moderne waarde van $t_0 \approx 13.787 \text{ Gyr}$ is dat nog geen 6 kyr!¹⁵

7.4.3 Uitdijing van een straling-gedomineerd heelal

Om de expansie van een vlak heelal te beschrijven wanneer dit gedomineerd wordt door straling, gebruiken we niet de Hubbleconstante zoals voor materie, maar de wortel van het linker deel van de Friedmannvergelijking in Vgl. 7.13, waarin we $\frac{\rho_0}{a^3}$ vervangen door het derde lid van Vgl. 7.25 (dus ρ_{mass} vervangen door ρ_{rad}), zodat

$$\frac{\dot{a}}{a} = \left(\frac{32\pi G}{3c^3} \sigma T(a)^4 \right)^{1/2}.$$

De logaritmische afgeleide (zie voetnoot 3 op pagina 58) van Vgl. 7.24 geeft $\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{T}}{T}$, zodat

$$\begin{aligned} -\frac{\dot{T}}{T} &= \left(\frac{32\pi G \sigma}{3c^3} \right)^{1/2} T^2 \rightarrow \int_{\infty}^T -\frac{1}{T'^3} dT' = \int_0^t \left(\frac{32\pi G \sigma}{3c^3} \right)^{1/2} dt' \rightarrow \\ T(t) &= \left(\frac{3c^3}{128\pi G \sigma} \right)^{1/4} t^{-1/2}, \end{aligned} \quad (7.27)$$

wat de temperatuur in ons heelal geeft als functie van de tijd. Combineren met Vgl. 7.24 geeft tenslotte de uitdijing in een straling-gedomineerd heelal:

$$a(t) = \left(\frac{128\pi G}{3c^3} \sigma T_0^4 \right)^{1/4} t^{1/2}. \quad (7.28)$$

We zien dus dat na een eerste expansie met $a \propto t^{1/2}$ in de stralingsfase, het heelal wat minder snel wordt afgeremd in die uitdijing in de materie-gedomineerde fase, waar volgens Vgl. 7.14 $a \propto t^{2/3}$ geldt.

In het jonge heelal kon korte tijd “voorwereldlijke” kernfusie plaatsvinden, nadat de temperatuur voldoende was gedaald om gevormde kernen niet direct uiteen te doen slaan door γ -fotonen, maar nog hoog genoeg om de Coulombbarrière te overwinnen. Volgens onze beste modellen ligt die temperatuur rond de 10^9 K . Hierbij werd uit waterstof helium en een beetje lithium geproduceerd. Vergelijking 7.27 omdraaien geeft een leeftijd van circa 230 s! De roodverschuiving was op dat moment $z \sim 3 \times 10^8$, en het heelal was toen ook die factor kleiner dan tegenwoordig ($a \sim 3 \times 10^{-9}$).

¹⁵In Hoofdstuk 7.6 zullen we zien dat 47 kyr een nauwkeuriger waarde is; de orde van grootte van onze schatting klopt echter!

7.5 Het Λ CDM-model

Op dit moment is het beste model van het ontstaan en de evolutie van ons heelal het zogenaamde Λ CDM-model. Dit heeft als belangrijkste ingrediënten:

1. de **kosmologische constante** Λ (Lambda), meestal geïnterpreteerd als uiting van **donkere energie**,
2. koude **donkere materie**, *cold dark matter* (CDM),
3. (“gewone”) **baryonische materie**, en
4. de **Algemene Relativiteitstheorie** als correcte beschrijving van zwaartekracht op grote schaal.

De parameters van dit model volgen uit de Planckmetingen die we eerder al kort bespraken. Het heelal is circa $t_0 = 13.787 \pm 0.020$ Gyr oud en de Hubbleconstante bedraagt $H_0 = 67.4 \pm 0.5$ km/s/Mpc. De dichtheden van baryonen (“normale” materie) Ω_b , koude donkere materie Ω_c en donkere energie Ω_Λ bedragen respectievelijk $\Omega_b = 0.0486 \pm 0.0010$, $\Omega_c = 0.2589 \pm 0.0057$ en $\Omega_\Lambda = 0.6911 \pm 0.0062$. Dit betekent dat we van nog geen 5% van de inhoud van het heelal weten wat het is, en dat we van 84% van de materie niet weten waaruit het bestaat!

De reden dat dit model toch vrij algemeen wordt geaccepteerd is dat het vier opmerkelijke eigenschappen van ons heelal (redelijk) goed kan verklaren:

1. het bestaan en de structuur van de **kosmische achtergrondstraling**,
2. de **structuur van het heelal** op grote schaal in clusters van sterrenstelsels,
3. de waargenomen abundanties van **waterstof, helium en lithium**, en
4. de **versnelde uitdijning** van het heelal.

Het meest mysterieuze ingrediënt van het Λ CDM-model is de **kosmologische constante** Λ . De constante werd oorspronkelijk in 1917 (voordat bekend werd dat het heelal uitdijt) bedacht door Einstein om een statisch heelal mogelijk te maken en na de ontdekking van de Wet van Hubble-Lemaître verworpen als “zijn grootste fout”. Pas in 1998 werd aan de hand van waarnemingen van Type-Ia supernovae (SNIae; zie Hoofdstuk 3.5.1) langzaam duidelijk dat het heelal *versneld* uitdijt, in plaats van vertraagd. Een positieve Λ maakt dit mogelijk (en een negatieve Λ een statisch heelal) en wordt meestal geïnterpreteerd als een positieve “vacuümenergie”, die **donkere energie** wordt genoemd. Op dit moment is onduidelijk wat deze donkere energie is of hoe deze tot stand is gekomen. De kosmologische constante kan worden meegenomen in de uitdijning van het heelal door bijvoorbeeld $\Lambda/3$ op te tellen aan de rechter kant van de Friedmannvergelijking in Vgl. 7.7.

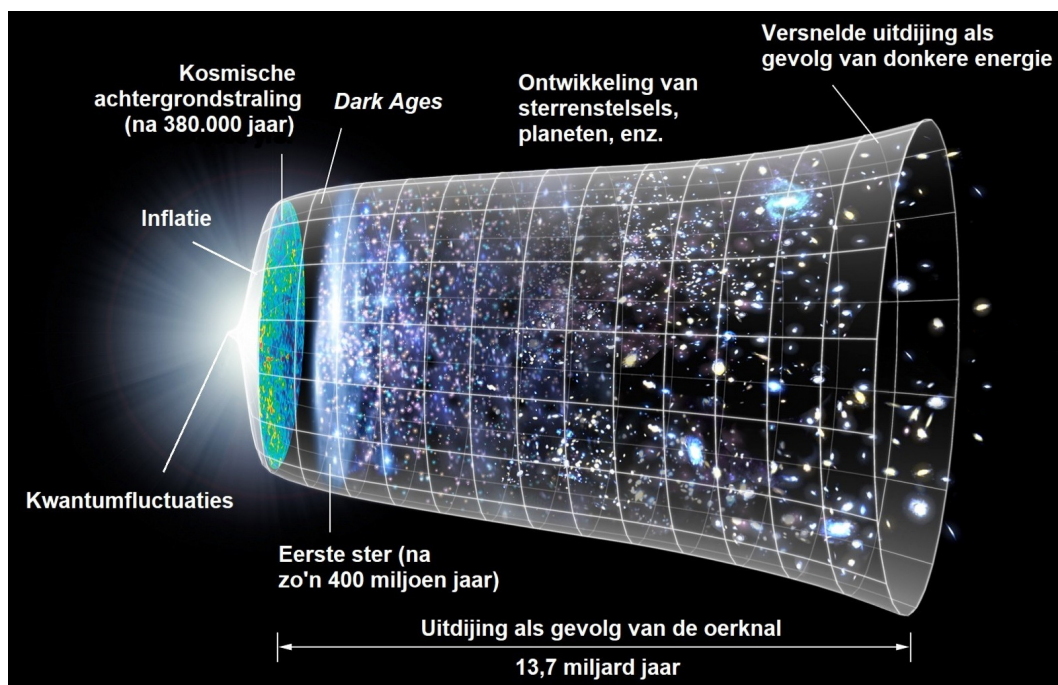
Een tweede mysterieus ingrediënt van het model is de **koude donkere materie** (CDM). Al meer dan een eeuw wordt hierover gespeculeerd, onder andere door Kelvin, Poincaré, Kapteyn en Oort in het kader van bewegingen van sterren in de buurt van de Zon. In 1933 concludeerde Zwicky dat de Coma cluster 400 keer meer massa moest bevatten dan zichtbaar was, maar zijn conclusie was vertekend door de toenmalige hoge waarden van de Hubbleconstante. Onder de bekendste voorbeelden van donkere materie vallen de **rotatiecurves** van sterrenstelsels, waar sterren aan de buitenrand sneller om het centrum draaien dan verwacht voor een Keplerbaan en de zichtbare materie (zie Fig. 6.5 op pagina 89). Ook de bewegingen van sterrenstelsels in clusters en de metingen van de achtergrondstraling duiden op het bestaan van donkere materie.

Donkere materie interageert niet met licht, en met gewone (baryonische) materie alleen via zwaartekracht. Hypothesen voor de verklaring van CDM omvatten onbekende elementaire deeltjes (zoals WIMPs of axionen), zwarte gaten overgebleven van de Oerknal en aanpassingen aan de Algemene Relativiteitstheorie voor grote afstanden.

Het Λ CDM-model vergt een complexere beschrijving van het heelal dan alleen bijdragen van materie (zoals we in Hoofdstuk 7.3 hebben beschouwd) of straling (Hoofdstuk 7.4). In de vergelijkingen hierboven worden de enkelvoudige dichtheid ρ of Ω dan vervangen door meerdere termen. De integralen hebben ook

geen analytische oplossingen, en de mate van detail die nodig is om een goede beschrijving te geven gaat te ver voor dit dictaat. Aardige maar ruwe resultaten kunnen desalniettemin worden behaald door onze simpele modelletjes te gebruiken, maar met de waarden voor de Hubbleconstante of de leeftijd van het heelal zoals bepaald door bijvoorbeeld de Planckmissie ($t_0 \approx 13.787$ Gyr), zoals we hierboven al zagen.

7.6 Een korte geschiedenis van het heelal



Figuur 7.10: Schematische representatie van de geschiedenis van het heelal.

Hier volgt een korte en onvolledige opsomming van gebeurtenissen in het jonge heelal.¹⁶

- $t < 10^{-43}$ s: het heelal is jonger dan de **Plancktijd**; de wetten van de fysica kunnen geen (goede) beschrijving geven.
- $t \sim 10^{-36}$ – 10^{-32} s: **inflatie**: het heelal expandeert exponentieel met een factor van circa 10^{26} .
- $t \sim 10^{-12}$ – 10^{-5} s: het heelal koelt voldoende af om **quarks** te vormen, maar is nog te heet om die te laten samensmelten tot protonen en neutronen.
- $t \sim 10^{-5}$ – 1 s: het heelal koelt verder af en **protonen** en **neutronen** kunnen ontstaan.
- $t \sim 10$ – 10^3 s: **nucleosynthese**: de elementen ^4He en in mindere mate ^2H , ^3He en een heel klein beetje ^7Li ontstaan (net als wat radioactieve isotopen die vervallen naar bovengenoemde).
- $t \sim 10$ s– 370 kyr: het heelal bestaat uit een **plasma** van atoomkernen, elektronen en fotonen. De **fotonen** worden verstrooid aan de vrije elektronen en het heelal is **ondoorzichtig**.
- $t \sim 47$ kyr: het heelal maakt de overgang van **straling-gedomineerd** naar **materie-gedomineerd**.
- $t \sim 18$ – 380 kyr: doordat de temperatuur verder daalt kunnen atoomkernen **elektronen** invangen. Dit staat bekend als “recombinatie”, hoewel dit de eerste keer is dat dit gebeurt. Het heelal wordt hierdoor gedurende ~ 100 kyr steeds transparanter. Fotonen kunnen uiteindelijk vrij bewegen en deze fotonen vormen tegenwoordig, sterk roodverschoven, de **kosmische achtergrondstraling**.
- $t \sim 370$ kyr– 150 Myr (~ 1 Gyr): de **dark ages** van het heelal. Recombinatie is voorbij en er zijn nog geen sterren, dus geen lichtbronnen. Circa 3 Myr na de recombinatie is de achtergrondstraling

¹⁶Deze sectie is gebaseerd op https://en.wikipedia.org/wiki/Chronology_of_the_universe.

roodverschoven naar het infrarood en is het dus *optisch donker*.

- $t \sim 200\text{--}400$ Myr: de eerste **sterren** en **sterrenstelsels** vormen zich in clusters. Er wordt weer licht geproduceerd.
- $t \sim 200$ Myr–1 Gyr: **re-ionisatie**: de UV-straling van de eerste sterren ioniseert gaswolken in het heelal. De verst waargenomen objecten stammen uit deze tijd.
- $t \sim 1$ Gyr: het heelal ziet er al aardig uit zoals tegenwoordig, alleen wat kleiner.
- $t \sim 9.219$ Gyr: het **zonnestelsel** ontstaat.
- $t \sim 9.8$ Gyr: het heelal **begint versneld uit te dijen**. De materiedichtheid komt onder de donkere-energiedichtheid. Het heelal maakt de overgang van **materie-gedomineerd** naar **Λ -gedomineerd**.
- $t \sim 13.787$ Gyr: tentamen sterrenkunde.

Index

- μ as, 11
- μ as, 116
- A.U., 9
- absorptiedoorsnede, 32
- absorptielijnen, 15
- abundantie, 17, 18, 37
- accretieschijf, 65
- accretor, 59
- adiabatisch, 28
- afbuigpunt, 23
- afstand, 9, 22, 93
- afterglow, 83
- AGB, 40, 43
- algemene gaswet, 30, 31
- Algemene Relativiteitstheorie, 51, 67, 106
- Algol-systemen, 64
- amplitude-spectrale dichtheid, 78, 80
- AM CVn-sterren, 65
- Andromedanevel, 86, 89–91
- antennepatroon, 73
- ASD, 78, 80, 81
- astronomische eenheid, 9, 11, 93
- asymptotische reuzentak, 40, 43, 57, 62
- baanafstand, 56
- baanenergie, 57
- baanimpulsmoment, 58
- baanperiode, 56
- balkspiraalstelsel, 85, 88
- baryonische materie, 106
- BBH, 65, 71, 72, 74, 82
- bindingsenergie van atoomkernen, 34
- bindingsenergie van een ster, 35
- blue loop, 43
- BNS, 65, 71, 74, 82
- bolhoop, *zie* bolvormige sterhoop
- bolometrische flux, 12, 15
- bolometrische lichtkracht, 12
- bolvormige sterhoop, 22–24, 86
- boogminuut, 9, 116
- boogseconde, 11, 116
- bruine dwerg, 51
- bulge, 85, 88
- case-A/B/C materie-overdracht, 57
- cataclysmische variabelen, 64
- Cepheïden, 86, 93
- CFD, 22
- Chandrasekharlimiet, 66, 94
- Chandrasekhar massa, 44, 49, 51, 52
- chirp, 73, 74, 79
- chirpmassa, 54, 72, 74, 94
- cluster, 22, 45
- cluster van sterrenstelsels, 90
- CMB, 103
- CMD, 22
- CNO-cyclus, 33
- CO-WD, 43, 48
- CO-witte dwerg, 52
- common envelope, 61, 64, 66
- compacte dubbelsterren, 58, 71
- conservatieve materie-overdracht, 59
- contactdubbelster, 59
- convectie, 28, 37, 39, 43
- convectieve kern, 43
- convectieve mantel, 37, 39
- convectiezone, 37
- core-collapse supernova, 44
- core-collapse-supernova, 52
- CSPN, 40
- d'Alembertiaan, 68
- dark fringe, 76
- De Donder-ijking, 68
- degeneratie, 31, 39, 48, 50
- detached binary, 59
- dichtheid, 25
- dichtheidparameter, 100
- dikke schijf, 85
- donkere energie, 106
- donkere materie, 35, 88, 89, 106
- donor, 59
- Dopplerverschuiving, 16, 20, 87, 101
- Driehoeknevel, 86, 89, 90
- druk, 25, 29, 31
- Dubbele witte dwergen, 65
- dubbellijnig spectrum, 20
- dubbelster, 20, 53
- dunne schijf, 85
- dynamische tijdschaal, 36, 60, 61
- eclipserende dubbelster, 20, 93
- effectieve temperatuur, 10, 27

- eigenbeweging, 12
- Einsteinensor, 67
- Einsteinvergelijking, 67, 68
- electronvolt, 10, 116
- elliptisch sterrenstelsel, 87
- energie-impulstensor, 67, 70
- energiedichtheid, 35
- energieproductie, 25
- energietransport, 27
- equipartitiebeginsel, 30
- eV, 10
- evolutiemodel, 37
- evolutiespoor, 39, 43, 45

- flux, 10, 11, 15, 17, 27, 42, 94
- fluxdichtheid, 15
- fotometrie, 13
- fotometrische band, 12
- fotonsfeer, 51
- Fouriertransformatie, 79
- Fraunhofer spectrum, 16
- frequentiedomein, 79
- Friedmannvergelijking, 100
- fusieschil, 39, 44

- gammaflits, 64, 65, 82
- gasdruk, 29, 41
- GB, 22
- gedegenererde materie, *zie* degeneratie
- gereduceerde massa, 54
- gesloten heelal, 99
- giant branch, 22
- golflengte, 11
- golfvergelijking, 68
- golfvorm, 73
- graad, 116
- granulen, 29
- gravitatiegolven, 58, 68
- gravitatiestraling, 68
- gravitationele instabiliteit, 91
- GRB, *zie* gammaflits
- groep van sterrenstelsels, 89
- Grote Magelhaense Wolk, 89
- GWs, 68

- halo, 85, 86
- HB, 22, 40, 43
- He-WD, 48
- heelal, 9, 94, 95, 97
- Heisenberg, 32
- helderheidsklasse, 17, 22
- helium-witte dwerg, 51
- heliumflits, 32, 40
- heliumfusie, 40
- heliumster, 43, 64

- Hertzsprung gap, 23, 39
- Hertzsprung-Russelldiagram, 21, 39, 45, 46
- Hertzsprungscheiding, 60
- HG, 23, 39
- hoeknelheid, 54, 69, 71, 72
- hoofdreeks, 10, 17, 22, 37, 39, 40, 43, 56
- horizon, 81
- horizontale tak, 22, 40, 43
- HRD, *zie* Hertzsprung-Russelldiagram
- Hubbleconstante, 95, 97, 99
- Hubbleflow, 87, 91, 94, 98, 101
- Hubbleparameter, 99
- Hubbletijd, 100
- hydrostatisch evenwicht, 37, 41

- ideaal gas, 30
- ideale-gaswet, 30, 31
- ijzer-nikkelkern, 52
- impulsmoment, 58
- innermost stable circular orbit, 74
- inspiral, 74, 75
- instabiele materie-overdracht, 60, 61
- interactie tussen sterrenstelsels, 90
- interacties (sterrenstelsels), 90
- interferentie, 76
- interferometrie, 12
- ionisatiegraad, 17
- ISCO, 51, 74
- isochroon, 23, 45

- Keplerbaan, 35, 53, 67, 68
- kernfusie, 10, 32, 105
- kilonova, 65, 83
- Kleine Magelhaense Wolk, 89
- kleur, 14
- kleur-fluxdiagram, 22, 46
- kleur-magnitudediagram, 22
- kosmische achtergrondstraling, 85, 91, 103, 106
- kosmologisch principe, 97, 98
- kosmologische constante, 106
- kosmologische roodverschuiving, 87, 97, 101, 104
- Krabnevel, 46
- Krabpulsar, 50
- kritische dichtheid (heelal), 100
- kwadratenwet, 10

- Lagrangepunt, 54
- leeftijd, 23
- lensvormig sterrenstelsel, 88
- lichtafstand, 102
- lichtkracht, 10, 11, 25, 40
- LISA, 91
- LMC, 89–91
- Locale Groep, 89
- logaritmische afgeleide, 58

- Lorenz-ijking, 68
 magnetische remming, 64
 magnitude, 12
 main sequence, 22
 mas, 11, 116
 massa, 25
 massa-lichtkrachtrelatie, 20
 massa-straalrelatie, 20
 massaquadrupoolmoment, 70
 materie-overdracht, 54, 56
 Maxwell-Boltzmannverdeling, 30
 meervoudige ster, 53
 megaparsec, 97
 Melkweg, 85
 Melkwegstelsel, 22, 24, 85, 89, 91
 merger, 75
 metaalarm, 23
 metalen, 17
 metalliciteit, 86
 metrische tensor, 68
 Michelson-interferometer, 75, 78
 microboogseconde, 116
 microgolfstraling, 103
 milliboogseconde, 116
 Minkowskitensor, 67, 68
 Mira, 41
 mixing, 43
 monochromatische flux, 12, 15
 monochromatische lichtkracht, 12
 Mpc, 97
 MS, 22, 37

 nanometer, 11
 natuurlijke eenheden, 71, 73
 neutronenster, 44, 46, 47, 50, 52, 64, 65, 71, 75, 85
 nm, 11
 nova-uitbarsting, 65
 NSBH, 65, 71, 74
 nucleaire tijdschaal, 36, 37, 60

 Oerknal, 9, 18
 Olbers' paradox, 97
 ONe(Mg)-WD, 43
 ONe(Mg)-witte dwerg, 52
 ontsnappingssnelheid, 51
 onzekerheidsprincipe, 32
 opaciteit, 25, 27, 29, 32, 41
 open heelal, 99
 open sterhopen, 22

 parallax, 11, 21, 44, 93
 parsec, 11
 Pauli, 32
 pc, 11

 Planckfunctie, 14, 103
 Planckspectrum, 10, 15, 103
 planeet, 51
 planetaire nevel, 18, 40, 46, 64
 planeten, 9
 Poissonstatistiek, 77
 polarisaties, 69
 proton-protoncyclus, 33
 PSD, 81
 pulsar, 50, 71

 quadrupoolstraling, 71

 röntgendubbelster, 65
 röntgenstraling, 65
 radiostraling, 85
 range, 81
 referentiester, 9
 relativistische degeneratie, 49
 reuzensterren, 61
 reuzentak, 22, 44, 56
 RGB, 40, 44
 ringdown, 75
 Ringnevel, 41
 Roche-lobe overflow, 59
 Rochelob, 54, 56, 61
 Rochepotentiaal, 54
 rode superreus, 44
 rode-reuzentak, 39, 43, 60
 roodverschuiving, 98, 101
 rotatiecurve, 88, 106
 ruimtehoek, 116
 ruimtetijd, 67

 schaalfactor, 98, 104
 schijnbare diameter, 9
 Schwarzschildcriterium, 28
 Schwarzschildstraal, 51, 75
 semidetached, 59
 shot noise, 77
 signaal-ruisverhouding, 77, 81
 Sirius, 12
 SMBH, 85, 91
 SMC, 89, 90
 snelheidsdispersie, 86, 87
 SNR, 77, 81
 Speciale Relativiteitstheorie, 67
 spectraallijn, 15, 86
 spectraaltype, 12, 17
 spectroscopische dubbelster, 20
 spectrum, 13, 14, 20
 spiraalarm, 85, 88
 spiraalstelsel, 88
 stenvorkdiagram, 87
 ster, 9

- steradialen, 116
- sterhoop, 22
- sterrenstelsel, 9, 86, 90, 101, 102, 106
- sterrenwind, 40, 43, 58
- strain, 72, 73, 75, 78
- stralingsdichtheid, 27
- stralingsdruk, 31, 41, 78
- stralingstransport, 27
- stralingszone, 37
- structuurmodel, 37
- subdwerg, 64
- subreus, 39, 60
- supermassief zwart gat, 85, 87, 91
- supernova, 18, 46, 64, 94, 106
- supernovarestant, 46, 50

- TAMS, 39, 41, 43
- Taylorreeks, 79
- temperatuur, 13, 17, 25
- temperatuursgradiënt, 27, 43
- tensor, 67, 70
- terugkijktijd, 102
- thermisch evenwicht, 61
- thermische tijdschaal, 36, 60
- thick disc, 86
- thin disc, 85
- tijdschalen, 36
- toestandsvergelijking, 25, 29
- traagheidsmoment, 70
- transverse, spoorloze ijking, 68
- TT-ijking, 68, 71
- Tully-Fisherrelatie, 89, 94
- type-Ia-supernova, 49, 66
- type-II-supernova, 44, 48, 52

- UBVRI-systeem, 14
- uienschilstructuur, 44
- uitdijning van het heelal, 87, 99
- uitsluitingsprincipe, 32
- ultracompacte dubbelsterren, 65

- verschuivingswet van Wien, 15
- vierkante graden, 116
- Virgo cluster, 87
- viriaaltheorema, 35, 58, 61
- vlak heelal, 99, 100
- vrije weglengte, 27
- vrije-valtijdschaal, 36

- waterstoffusie, 10, 33
- waterstofschildfusie, 39, 43
- wet van Hubble-Lemaître, 97, 99, 100
- wet van Kepler, 9, 53
- wet van Stefan-Boltzmann, 10, 15
- witte dwerg, 22, 32, 46, 48, 52, 64, 85

- Wolf-Rayetster, 44

- X-ray binaries, 65

- ZAMS, 37, 39, 41
- Zon, 9, 17, 22, 39, 52, 85
- zone of avoidance, 86
- zonneconstante, 10
- zonnestelsel, 9
- zwaartekrachtgolfdetector, 78
- zwaartekrachtgolven, 65, 68, 91
- zwaartekrachtstraling, 65, 68
- zwaartekrachtwet van Gauss, 68
- zwaartekrachtwet van Newton, 67
- zwart gat, 44, 51, 52, 64, 65, 74, 85, 106
- zwarte straler, 10, 14

Verantwoording van figuren

1.4	Verbunt, F., <i>Het leven van sterren</i> , Epsilon uitgave 59 (2019), Fig.3.6	16
1.6	Verbunt, F., <i>Het leven van sterren</i> , Epsilon uitgave 59 (2019), Fig.3.9	18
1.8	Verbunt, F., <i>Het leven van sterren</i> , Epsilon uitgave 59 (2019), Fig.3.12	19
1.11	Links: Shawn Nielsen: https://visibledark.ca/m45-the-pleiades-star-cluster/ ; Rechts: Hubble, NASA: https://science.nasa.gov/asset/hubble/double-cluster-ngc-1850-second-brightest-star-cluster-in-the-large-magellanic-cloud/	22
1.13	Bron data: Piotto et al. (2002): https://cdsarc.cds.unistra.fr/viz-bin/cat/J/A+A/391/945	24
2.4	Dutch Open Telescope movies, https://robrutten.nl/dot/dotweb/dot-albums/movies/album.html	29
2.5	Verbunt, F., <i>Het leven van sterren</i> , Epsilon uitgave 59 (2019), Fig.6.4	30
2.7	Doctor C, Mediawiki: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Proton-proton_reaction_chain.svg	33
4.3	Gemaakt m.b.v. de software <i>BinSim</i> van Rob Hynes.	55
4.9	Gemaakt m.b.v. de software <i>BinSim</i> van Rob Hynes.	65
4.10	Aangepast van Maxted et al., MNRAS, 332, 745 11, 82, 83 (2002)	66
5.8	Abbott et al (2017): https://iopscience.iop.org/article/10.3847/2041-8213/aa91c9	83
6.1	Brunier, La Silla/ESO (2009): https://www.eso.org/public/images/eso0932a/	85
6.2	Oort et al., MNRAS 118, 379 (1958): https://academic.oup.com/mnras/article/118/4/379/2603939	86
6.3	Aangepast van links: NASA/JPL-Caltech; rechts: ESA; lay-out: ESA/ATG medialab (2016): https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2016/09/Anatomy_of_the_Milky_Way	87
6.4	Aangepast van Wikipedia, user Cosmogoblin: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Hubble_Tuning_Fork_diagram.svg	88
6.5	Bron data: Corbelli & Salucci MNRAS 311, 441 (2000): https://academic.oup.com/mnras/article/311/2/441/965167 , Fig. 6.	89
6.6	Bron data: Corbelli & Salucci MNRAS 311, 441 (2000): https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0004-6256/141/2/69 , Fig. 1.	90
6.7	The 2dF Galaxy Redshift Survey: http://www.2dfgrs.net/	91
7.2	Bron data: Gieren et al, A&A 620, A99 (2018)	95
7.3	Bron data: Kirshner, PNAS 101 (1) 8-13 (2003)	96
7.5	Bron data: https://en.wikipedia.org/wiki/Hubble%27s_law	98
7.8	ESA: https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Cosmic_Microwave_Background_CMB_radiation	103
7.10	NASA/WMAP Science Team https://map.gsfc.nasa.gov/media/060915/	107

Figuren die niet zijn opgenomen in deze lijst of waarvan alleen de databron is vermeld heb ik zelf gemaakt.

Verantwoording van tabellen

1.1	Verbunt, F., <i>Het leven van sterren</i> , Epsilon uitgave 59 (2019), Tabel 3.1	12
1.3	Verbunt, F., <i>Het leven van sterren</i> , Epsilon uitgave 59 (2019), Tabel 3.3	13
1.4	Bron data: Carlos Rodrigo, Filter Profile Service: https://svo2.cab.inta-csic.es/theory/fps/	14
1.5	Bron data: Wikipedia: Stellar classification ; Van der Sluys, proefschrift (2006).	17
1.6	Verbunt, F., <i>Het leven van sterren</i> , Epsilon uitgave 59 (2019), Tabel 4.1	19
1.7	Bron data: Verbunt, F., <i>Het leven van sterren</i> , Epsilon uitgave 59 (2019)	23
6.1	Wikipedia	90
7.1	Caroll & Ostlie, <i>An introduction to modern astrophysics</i> , 2nd Ed, Table 27.1	95

Tabellen die niet zijn opgenomen in deze lijst of waarvan alleen de databron wordt vermeld heb ik zelf samengesteld.

Dankwoord

Dank aan Frank Verbunt en Ilya Mandel voor hun hulp bij het maken van dit dictaat. Bijzondere dank aan Frank Verbunt voor het beschikbaar stellen van code en data om een aantal figuren te maken. Dank aan Nikhef voor het beschikbaar maken van tijd en tools. Dank aan mijn vrouw voor haar geduld tijdens de weekenden waarin ik moest typen.

Dank aan de makers van GNU/Linux, emacs en L^AT_EX dat ik niet met de sh*t van Micro\$oft hoefde te werken — dat heeft me een hoop tijd en frustratie bespaard, zorgt ervoor dat ik verzekerd ben van toegang tot mijn eigen data en is ook nog eens goed voor de internationale rechtsorde.

De vrije, onafhankelijke en gratis open-sourcesoftware in de volgende (incomplete) lijst heeft geholpen dit dictaat tot stand te brengen: Gentoo Linux, Grub, de Linux kernel, KDE/Plasma, Bash, GNU emacs, Orgmode, T_EX Live, gfortran, PGPlot, Python, Numpy, Pandas, Matplotlib, Git, GitLab, GNU Units, Apache server, rsync, rdiff-backup.

Constanten

De belangrijkste natuur- en sterrenkundige constanten. Doordat metingen steeds beter worden, worden de waarden regelmatig nauwkeuriger. Het *National Institute of Standards and Technology* in Maryland, V.S., houdt dit bij, en geeft de betreffende informatie op de website physics.nist.gov/cuu/Constants. De lichtsnelheid heeft zijn waarde per definitie; de andere natuurconstanten hebben een meetfout. De sterrenkundige grootheden zijn ook gedefinieerd (omdat ze in de loop van de tijd variëren) en te vinden in Sectie K van de (online) *Astronomical Almanac* (asa.hmnao.com/SecK/Constants.html). De constanten zijn in Python beschikbaar via het package `astroconst`.

Natuurkundige constanten, december 2007

constante	symbool	waarde
lichtsnelheid	c	$2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
zwaartekrachts-constante	G	$6.67428(67) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
constante van Planck	h	$6.62606896(33) \times 10^{-34} \text{ J s}$
constante van Boltzmann	k	$1.3806504(24) \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
atomaire massa-eenheid	amu	$1.660538782(83) \times 10^{-27} \text{ kg}$
electron-massa	m_e	$9.10938215(45) \times 10^{-31} \text{ kg} \simeq 0.00054858 \text{ amu}$
proton-massa	m_p	$1.672621637(83) \times 10^{-27} \text{ kg} \simeq 1.00727647 \text{ amu}$
neutron-massa	m_n	$1.674927211(84) \times 10^{-27} \text{ kg} \simeq 1.00866492 \text{ amu}$

Sterrenkundige constanten

uit de *Astronomical Almanac* voor 2011, online

constante	symbool	waarde
zonsmassa	$GM_\odot$	$1.32712441 \times 10^{20} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
zonsmassa	$M_\odot$	$1.9884 \times 10^{30} \text{ kg}$
zonsstraal	$R_\odot$	$6.96 \times 10^8 \text{ m}$
astronomische eenheid	A.U.	$499.00478384 \text{ s} = 1.495978707 \times 10^{11} \text{ m}$
Juliaans jaar	yr	$365.25 \times 86400 \text{ s}$
		niet officieel:
zonslichtkracht	$L_\odot$	$\simeq 3.85 \times 10^{26} \text{ J s}^{-1}$
visuele zonslichtkracht	$L_{V\odot}$	$\simeq 5.6 \times 10^{23} \text{ J s}^{-1} \text{ nm}^{-1}$

Afgeleide constanten

constante	symbool	waarde
constante van Stefan-Boltzmann	σ	$5.670400(40) \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
electronvolt	eV	$1.602176487(40) \times 10^{-19} \text{ J}$
parsec	pc	$\simeq 3.086 \times 10^{16} \text{ m}$
effectieve temperatuur van de Zon	$T_{\text{eff},\odot}$	$\simeq 5780 \text{ K}$

Notatie voor hoeken: een cirkel wordt verdeeld in 360 graden ($^\circ$), elke graad in 60 boogminuten ($'$), en elke boogminuut in 60 boogseconden ($''$). 2π radialen corresponderen met $360 \times 60 \times 60$ boogseconden, dus $1'' \simeq 4.848 \times 10^{-6}$ radialen. $0.001''$ is een *milliboogseconde* (*milliarcsecond*; mas); $10^{-6}''$ is een *microboogseconde* (μas). De totale ruimtehoek van een bol bevat 4π steradianen (ster of sr), wat overeenkomt met circa 41 253 vierkante graden.