Laboratoire d'Annecy-Le-Vieux de Phyisque des Particules

Thèse présentée à
l'Université Joseph Fourier de Grenoble
pour obtenir le titre de
Docteur en Sciences
Spécialité : Physique des Particules
par

Julien RAMONET

Etude de méthodes d'analyse en vue de détecter les ondes gravitationnelles émises par des pulsars avec l'interféromètre Virgo

Exemplaire remis aux rapporteurs

Sergio Fraca	rapporteur
Andrea Viceré	rapporteur

A la mémoire de Pierre Bretagnon, décédé en octobre 2002

Table des matières

Résumé **1**

Abstract **3**

Introduction **5**

1 Relativité générale et ondes gravitationnelles **7**

Introduction 7

1.1 La mécanique classique 7

1.2 La relativité restreinte 8

1.3 La relativité générale 10

1.3.1 Le principe d'équivalence 10

1.3.2 Interprétation géométrique de la gravitation 10

1.3.3 L'équation d'Einstein 12

1.4 Propagation des ondes gravitationnelles 13

1.4.1 Linéarisation de l'équation d'Einstein en champ faible dans le vide 13

1.4.2 Transformation de jauge 13

1.4.3 Solutions de l'équation d'ondes et jauge TT 14

1.4.4 Effets des ondes gravitationnelles 15

1.5 Emission d'ondes gravitationnelles 16

1.5.1 Linéarisation de l'équation d'Einstein en présence de matière 16

1.5.2 Résolution 16

1.6 Mise en évidence des ondes gravitationnelles 17

1.7 Sources d'ondes gravitationnelles 18

1.7.1 Les sources terrestres 19

1.7.2 Les coalescences binaires 19

1.7.3 Les sources impulsionnelles 21

1.7.4 Le fond stochastique 22

1.7.5 Les étoiles à neutrons 23

Conclusion 24

2 Détection des ondes gravitationnelles 25

Introduction 25

2.1 Les interféromètres terrestres 26

2.1.1 Principe 26

2.1.2 Fonctions de réponse d'un interféromètre 28

2.1.3 Sources de bruit 29

2.1.4 Courbe de sensibilité 34

2.1.5 Le système de synchronisation 35

2.2 Autres détecteurs 35

2.2.1 Les barres résonnantes 35

2.2.2 Les sphères 36

2.2.3 LISA 36

Conclusion 39

3 Le contrôle du système de sychronisation de Virgo 41

3.1 Le système GPS. 41

3.2 Organisation du système de sychronisation de Virgo 43

3.3 Précision requise sur le temps 43

3.3.1 Evénements impulsionnels 43

3.3.2 Signaux périodiques 44

3.4 Contrôle du système de sychronisation 45

3.4.1 Fonctionnement de la carte GPS 45

3.4.2 Horloge atomique 45

3.4.3 Contrôle de l'heure de début de frame 45

3.4.4 Dérive de l'horloge atomique 48

3.4.5 Contrôle de la carte GPS sur 1 an 50

3.4.6 Exemple de dysfonctionnement de l'horloge GPS 52

Conclusion 56

4 Propriétés des pulsars et motivations 57

4.1 Les pulsars 57

4.1.1 Structure d'une étoile à neutrons 57

4.1.2 Mécanismes d'émission d'ondes électromagnétiques . . 58

4.2 Mécanismes d'émission d'ondes gravitationnelles 59

4.2.1 Précession 59

4.2.2 Rotation d'une étoile liquide déformée 60

4.2.3 Instabilités triaxiales 60

4.2.4 Accrétion 61

4.3 Propriétés générales des pulsars répertoriés 61

4.3.1 Propriétés spatiales 61
4.3.2 Propriétés temporelles 63
4.4 Pulsars binaires 63
4.4.1 Excentricité 63
4.4.2 Fréquences et fréquences orbitales 64
4.4.3 Amplitude de l'effet Doppler orbital 65
4.5 Motivations de l'étude 65
Conclusion 67

5 Simulation du signal **69**
Introduction 69
5.1 SIESTA 69
5.1.1 Fonctionnement du programme 69
5.1.2 Le module MEpulsar 70
5.2 Le nouveau module MEbinaryPulsar 70
5.2.1 Description de l'orbite d'un système binaire 71
5.2.2 Utilisation de MEbinaryPulsar 76
5.3 Position de la Terre 78
5.3.1 Description 78
5.3.2 Comparaison avec les éphémérides du JPL 78
5.4 Générateur de nombres aléatoires 83
5.4.1 Présence de raies dans les diagrammes temps-fréquence 83
5.4.2 Nouveau générateur 83
Conclusion 84

6 Première méthode de détection des pulsars **87**
Introduction 87
6.1 Forme du signal 87
6.2 Filtrage optimal 88
6.2.1 Pulsars solitaires 88
6.2.2 Pulsars en système binaire 89
6.3 Simulation des données 89
6.3.1 Simulation du bruit 89
6.3.2 Simulation du signal 90
6.4 Transformée de Fourier du signal 91
6.5 Somme de transformées de Fourier 92
6.6 Diagrammes temps-fréquence 94
6.7 Projection du diagramme temps-fréquence 95
6.8 Extraction du signal 95
6.8.1 La transformée de Hough 96
6.8.2 Sélection 96

6.8.3 Ajustement des paramètres 98
6.8.4 Position du pulsar 100
6.8.5 Puissance de calcul 102
Conclusion 103

7 Deuxième méthode de détection des pulsars 105
Introduction 105
7.1 Principe théorique 105
7.2 L'histogramme de Hough 106
7.3 Performances de la méthode 107
7.4 Influence de la durée des données disponibles 109
7.5 Application aux données du run E4 110
7.5.1 Les prises de données techniques 110
7.5.2 Les données utilisées pour l'analyse 112
7.5.3 Bornes de l'analyse 114
7.5.4 Décalage de l'origine 117
7.5.5 Coupure des diagrammes temps-fréquence 118
7.5.6 Rejet des raies et des zones trop bruitées 121
7.5.7 Barres d'erreur 121
7.6 Résultats 121
7.6.1 T_{FFT} =350 s 122
7.6.2 T_{FFT} =800 s 122
Conclusion 122

Conclusion 133

Annexes 135

A La transformée de Fourier 137
Introduction 137
A.1 La transformée de Fourier continue 137
A.2 La transformée de Fourier discrète 137
A.3 Transformée de Fourier d'un bruit gaussien 138
A.3.1 Loi de densité de probabilité 138
A.3.2 Etude du spectre en amplitude 139
A.3.3 Incertitude sur le nombre de points sélectionnés 140
Conclusion 141

B Les transformées de Hough à 1 et 2 points 143
Introduction 143
B.1 Principe 143

B.2 La transformée de Hough simple 144
B.3 La transformée de Hough combinatoire 146
B.4 Comparaison des performances 147
B.4.1 Description de l'analyse 147
B.4.2 Résultats 150
Conclusion 152

C La transformée de Hough à 3 points **153**
Introduction 153
C.1 Réduction du nombre de paramètres 153
C.2 Cas où $f_1 \neq f_2$ 154
C.3 Cas où $f_1 = f_2 \neq f_3$ 155
C.4 Cas où $f_1 = f_2 = f_3$ 156
C.4.1 Premier groupe de solutions 156
C.4.2 Deuxième groupe de solutions 157
C.4.3 Troisième groupe de solutions 157
C.4.4 Quatrième groupe de solutions 158
Conclusion 158

D Fichier de simulation **159**

E Conversion secondes GPS / date **163**

Bibliographie **164**

Résumé

Les pulsars sont une des sources d'ondes gravitationnelles attendues pour les interféromètres terrestres. Dans la gamme de fréquences où la sensibilité sera suffisamment bonne pour espérer une détection – typiquement au-dessus de 10 Hz –, la majorité des pulsars appartient à un système binaire. La fréquence des ondes gravitationnelles émises par un pulsar en système binaire subit plusieurs effets Doppler : celui dû à la rotation de la Terre sur elle-même, celui dû à la révolution de la Terre autour du Soleil, et celui dû à l'orbite du pulsar autour de son compagnon.

Dans le cas des pulsars en système binaire, l'effet Doppler orbital est en général prépondérant, et il faut adapter les méthodes de recherche de pulsars simples. Cette thèse présente deux méthodes adaptées à la recherche de tels objets. Les pricipes de ces méthodes, les puissances de calcul nécessaires, et les performances sont détaillés.

Mots clés

Virgo
Système de timing
Ondes gravitationnelles
Pulsars
Systèmes binaires
Effet Doppler
Transformée de Fourier
Transformée de Hough

Abstract

Pulsars are one of the expected sources of gravitational waves for terrestrial interferometers. In the frequency range where the sensitivity should allow detections – typically above 10 Hz –, most of known pulsars belong to a binary system. The frequency of the gravitational waves emitted by a pulsar in a binary system is Doppler-shifted due to several motions : the daily and yearly revolutions of the Earth, and the motion around its companion.

In the case of pulsars in binary systems, the orbital Doppler effect is in general the prevalent one, and methods suited for the search of solitary pulsars must be adapted. This work presents two methodes dedicated to the search for such objects. The principles, computational requirements and performances of bith methods are detailed.

Key words

Virgo
Timing system
Gravitational waves
Pulsars
Binary systems
Doppler effect
Fourier transform
Hough transform

Introduction

La relativité générale d'Einstein a vu le jour dans les années 1910. Elle a permis de réconcilier la relativité restreinte de Poincaré et la gravitation de Newton, dans laquelle les forces se transmettaient à vitesse infinie. Elle nous donne une conception géométrique de la gravitation, dans laquelle les forces de gravité sont décrites par la structure même de l'espace-temps, par sa courbure. La relativité générale a expliqué certains phénomènes qui ne l'étaient pas jusqu'alors, tels que l'avance du périhélie de Mercure, qui avait été mesuré avec une grande précision. Elle a prédit des effets qui ont été observés par la suite, telles la courbure des rayons lumineux en présence de masse, l'expansion de l'Univers, ou l'existence de trous noirs, justement observés par la courbure de l'espace qu'ils induisent.

La relativité générale prédit également l'existence d'ondes de déformation de l'espace-temps, les ondes gravitationnelles. Elles se déplacent à la vitesse de la lumière, et déforment temporairement l'espace à l'endroit où elles passent. Elles sont produites par une accélération de masse qui ne possède pas de symétrie sphérique, et ont une amplitude infime. Elles n'ont pas encore été détectées. La seule preuve de leur existence est indirecte : en 1974, deux astronomes, R.A. Hulse et J.H. Taylor, découvrirent un pulsar en orbite autour d'un autre corps compact, ce qui leur permit de tester une grande variété d'effets relativistes. Une de leurs conclusions fût que la perte d'énergie du système est parfaitement décrite par l'émission d'ondes gravitationnelles telle que prédite par la relativité générale. L'existence des ondes gravitationnelles est la dernière grande prédiction de la relativité générale qui n'ait pas été vérifiée directement à ce jour.

Il nous est impossible de produire des ondes gravitationnelles détectables sur Terre. Il nous faut observer les phénomènes parmi les plus violents de l'Univers. Cependant, même ces ondes ont une amplitude extrêmement faible. Le passage d'une telle onde dans le Système Solaire modifie la distance de la Terre au Soleil d'une longueur égale au diamètre d'un atome. La quête pour la détection de ces ondes a commencé dans les années 60, avec la construction de détecteurs résonnants massifs, qui tentaient de détecter les ondes gravitationnelles autour de leur fréquence de résonnance. Fonctionnant d'abord à température ambiante, ils sont maintenant cryogéniques. Une nouvelle génération de détecteurs, envisagée dès les années 60, entre actuellement en service, il s'agit des détecteurs interférométriques sensibles sur de plus larges gammes de fréquences.

Virgo est l'une de ces expériences. C'est un interféromètre de Michelson recyclé avec des bras d'une longueur de 3 km, dans lesquels sont installées des cavités Fabry-Perot. Sa sensibilité lui permet d'envisager la détection de 3 types de sources : (1) les supernovæ, explosions d'étoiles arrivées en fin de vie, (2) les coalescences de systèmes binaires dont toute l'énergie potentielle a été perdue sous forme de rayonnement gravitationnel et (3) les pulsars, étoiles mortes en rotation rapide. La recherche des ondes gravitationnelles provenant de pulsars en système binaire fait l'objet de cette thèse.

Nous présenterons dans les deux premiers chapitres quelques rappels sur la théorie de la relativité générale, l'émission d'ondes gravitationnelles et le principe de fonctionnement d'un détecteur tel que Virgo. Nous verrons comment est réalisé et contrôlé le système de synchronisation de Virgo, qui permet une connaissance très précise du temps d'arrivée des signaux,ce qui est essentiel pour les expériences de recherche d'ondes gravitationnelles. Dans le chapitre 4, nous étudierons les propriétés des pulsars répertoriés, et les motivations de l'étude des ondes gravitationnelles émises par les pulsars en système binaire. Le chapitre 5 décrit le programme de simulation de l'expérience Virgo, en particulier les contributions que j'y ai apportées. Enfin, les chapitres 6 et 7 présenteront deux méthodes adaptées à la détection des ondes gravitationnelles émises pas les pulsars en système binaire.

Chapitre 1

Relativité générale et ondes gravitationnelles

Introduction

La relativité générale a boulversé notre conception de l'espace et du temps. Elle a permis d'expliquer de nombreux phénomènes incompris auparavant, tels que la précession du périhélie de Mercure. Elle a été testée à de nombreuses reprises, et n'a pas été mise en défaut jusqu'ici. Les ondes gravitationnelles prédites avant même la version finale de la relativité générale[1], sont l'une des dernières grandes prédictions qui n'ont pas été veŕifiées expérimentalement à ce jour.

Dans ce chapitre, nous verrons les apports successifs de la relativité restreinte et de la relativité générale par rapport à la mécanique classique, comment les ondes gravitationnelles apparaissent lorsque l'on linéarise l'équation d'Einstein, ainsi que les formules d'émission d'ondes gravitationnelles dans le formalisme quadrupolaire. Enfin, les différents types de sources attendus seront décrits.

1.1 La mécanique classique

La géométrie utilisée en mécanique classique est la géométrie euclidienne. Un élément de distance s'écrit, en coordonnées cartésiennes :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.1}$$

Pour passer d'un repère à un autre, animé d'une vitesse $\vec{v}$ constante par rapport au premier, on utilise la transformation de Galilée, qui laisse dl^2

invariant :

$$\begin{aligned} \vec{r'} &= \vec{r} - \vec{v}t \\ t' &= t \end{aligned} \tag{1.2}$$

d'où la loi de composition des vitesses :

$$\vec{V'} = \vec{V} - \vec{v} \tag{1.3}$$

La conception classique du temps est simple : il existe un temps absolu, indiqué par n'importe quelle horloge, quelles que soient ses positions, vitesses ou accélérations actuelles et antérieures. De plus, si deux événements sont perçus comme simultanés par un observateur, alors il en sera de même pour tout autre observateur. En d'autres termes, la vitesse de la lumière est considérée comme infinie.

Repères inertiels
La première loi de Newton stipule l'existence de *référentiels inertiels*, représentés par des repères dans lesquels une particule qui n'est soumise à aucune force a un mouvement de translation rectiligne uniforme. La mécanique de Newton ne permet pas de déterminer ce qu'est un repère inertiel, mais limite les relations entre deux d'entre eux à (1) une translation, (2) une rotation et (3) un déplacement relatif à vitesse constante.

1.2 La relativité restreinte

En 1887, Michelson et Morley mettent en défaut la loi d'additivité des vitesses de la mécanique newtonienne en mesurant la vitesse de la lumière. La mécanique newtonienne doit être revue. La relativité restreinte est basée sur deux postulats : dans tout repère inertiel, les lois de la physique sont les mêmes, c'est le *principe de relativité*, et la vitesse de la lumière dans le vide est une constantenotée c.

Plusieurs phénomènes découlent de ces deux hypothèses. Imaginons deux observateurs possèdant une vitesse relative. Si ils mesurent les dimensions d'un même objet, ils obtiendront le même résultat pour la longueur perpendiculaire au mouvement relatif, mais des résultats différents pour la longueur selon le mouvement relatif : l'observateur en mouvement par rapport à l'objet mesurera une distance plus courte que l'observateur fixe par rapport à l'objet. C'est la *contraction des longueurs*. De même, nos deux observateurs ne verront pas leur temps s'écouler à la même vitesse : chacun verra l'autre vieillir plus lentement[1]. C'est la *dilatation des durées*. Deux événements se produisant en 2 points A et B sont dits simultanés si ils sont vus au même moment par un observateur situé au milieu du segment [AB]. La relativité restreinte montre que deux événements simultanés pour un observateur ne le seront pas pour un autre.

La transformation de Lorentz

La transformation permet, connaissant les positions *et* le temps dans un repère $\mathcal{R}$, de calculer les positions *et* le temps dans un repère $\mathcal{R}'$, animé d'une vitesse $\vec{v}$ par rapport au premier. On peut supposer les axes de ces deux repères parallèles et la vitesse selon l'axe des x sans nuire à la généralité du problème. La transformation de Lorentz s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \qquad (1.4) \\ \text{où } \beta &= \frac{v}{c} \text{ et } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

L'espace-temps de Minkowski

Ainsi le temps n'est pas absolu, et il ne peut être séparé de l'espace. La géométrie euclidienne doit être abandonnée, au profit d'une géométrie à 4 dimensions, incluant le temps. Dans cette géométrie, l'invariant n'est pas le dl^2 de la mécanique classique (éq. 1.1), mais

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad (1.5)$$

invariant par transformation de Lorentz. On peut aussi écrire, en utilisant les règles de sommation d'Einstein (les lettres grecques prennent les valeurs de 0 à 3),

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu, \text{ où} \qquad (1.6) \\ dx_\mu &= \eta_{\mu\nu} dx^\nu \text{ et } \eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.7) \end{aligned}$$

[1] C'est le paradoxe des jumeaux de Langevin [2].

Le tenseur $\eta_{\mu\nu}$ est appelé *métrique plate*, car il décrit les espaces de Minkowski, dits *plats*. Cette notion sera élargie, dans le cadre de la relativité générale, à des espaces dits *courbes*. Le produit scalaire entre deux quadri-vecteurs **a** et **b** est un invariant de Lorentz, et s'écrit

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = \eta_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu} = -a^t b^t + \vec{a}.\vec{b} \tag{1.8}$$

1.3 La relativité générale

1.3.1 Le principe d'équivalence

Y-a-t'il un moyen, pour un observateur qui ne voit pas l'extérieur, de savoir si il est sur Terre (le champ gravitationnel de la Terre étant considéré comme constant dans le laboratoire, et égal à g=9.81 m.s^{-2}), ou si il se trouve dans une fusée soumise à une accélération égale à a=9.81 m.s^{-2} ? La réponse est non. En d'autres termes il y a égalité entre la masse grave m_g de $\vec{P} = m_g \times \vec{g}$ et la masse inertielle m_i de la relation fondamentale de la dynamique $\sum \vec{F} = m_i \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. C'est le *principe d'équivalence*, qui est une hypothèse fondamentale de la relativité générale. Cette égalité a été vérifié expérimentalement avec une précision de 10^{-13} [3]. Le projet spatial STEP en cours d'élaboration devrait atteindre une précision de l'ordre de 10^{-18} [4].

1.3.2 Interprétation géométrique de la gravitation

"La masse dit à l'espace-temps comment se courber, et l'espace-temps dit aux masses comment se déplacer", ainsi pourrait se résumer l'idée de base de la relativité générale. La métrique de l'espace-temps de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ décrit un espace plat, c'est-à-dire vide de masse. La relativité générale étend cette notion aux espaces courbes et à la métrique associée $g_{\mu\nu}$.

Considérons un observateur O_1 à l'avant d'une fusée de hauteur h et un observateur O_2 à l'arrière, cette fusée étant soumise à une accélération a, verticale et dirigée vers le haut [5] :

$$x_2(t) = \frac{1}{2} a t^2 \tag{1.9}$$

$$x_1(t) = x_2(t) + h, \tag{1.10}$$

comme le montre la figure 1.1.

O_1 envoie deux photons aux temps 0 et τ_1 en direction de O_2, qui les reçoit aux temps t et $t + \tau_2$. On suppose que $(v/c)^2 \ll 1$ et $ah/c^2 \ll 1$. La première condition nous assure d'être dans le régime classique, où l'on peut

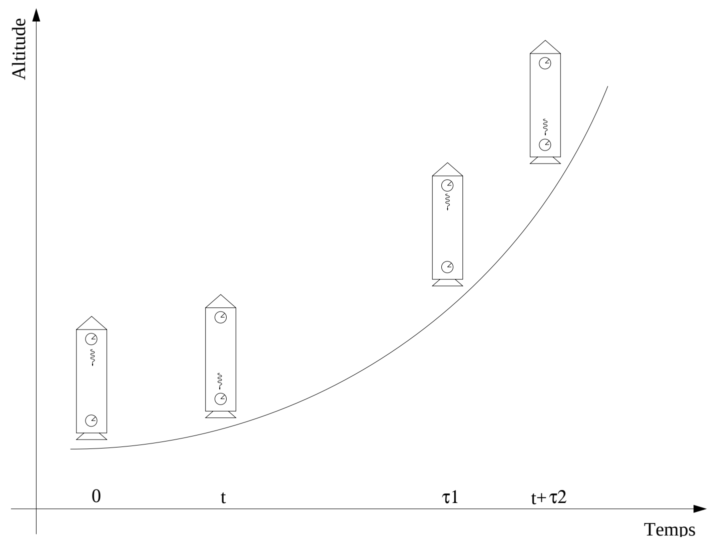


FIG. 1.1 – Position de la fusée aux moments des émissions et réceptions des deux photons.

négliger les effets de contraction des longueurs et de dilatation des durées, la deuxième nous assure que nous resterons dans ce régime tout au long du parcours des photons.

La distance parcourue par le premier photon est :

$$x_1(0) - x_2(t) = ct \tag{1.11}$$

La distance parcourue par le deuxième photon est :

$$x_1(\tau_1) - x_2(t+\tau_2) = c(t+\tau_2-\tau_1) \tag{1.12}$$

Après y avoir insérée l'équation du mouvement de la fusée et soustrait ces deux relations, on obtient

$$c(\tau_2-\tau_1) = -\frac{1}{2}a(\tau_2^2+2t\tau_2-\tau_1^2) \tag{1.13}$$

En utilisant les deux hypothèses, nous avons finalement

$$\tau_2 = \tau_1(1-\frac{ah}{c^2}) \tag{1.14}$$

Les deux horloges ne battent pas à la même fréquence lorsque la fusée est soumise à une accélération. D'après le principe d'équivalence, il se produira le même effet dans un champ de gravitation.

$$\tau_{z=0} = \tau_{z=h}(1 - \frac{gh}{c^2}) = \tau_{z=h}(1 - \frac{\Phi}{c^2}), \tag{1.15}$$

où Φ est le potentiel newtonien. En d'autres termes, une horloge près du sol bat moins vite qu'une horloge en altitude : l'espace-temps est *courbe*. Ce phénomène a été vérifié expérimentalement [6, 7].

La courbure de l'espace-temps

Dans le cas le plus général, la métrique, servant à décire l'espace-temps, s'écrit :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \tag{1.16}$$

A partir de cette métrique, on définit le symbole de Christoffel :

$$\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\tau} \left(\frac{\partial g_{\tau\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\tau}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\tau} \right), \tag{1.17}$$

le tenseur de Riemann :

$$R^\tau_{\mu\nu\lambda} = \frac{\partial \Gamma^\tau_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\tau_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\tau_{\nu\epsilon}\Gamma^\epsilon_{\lambda\mu} - \Gamma^\epsilon_{\nu\mu}\Gamma^\tau_{\epsilon\lambda} \tag{1.18}$$

ainsi que les tenseur et scalaire de Ricci :

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} \text{ et } R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{1.19}$$

1.3.3 L'équation d'Einstein

L'équation d'Einstein permet de calculer la courbure de l'espace-temps à partir de la distribution de matière. La courbure est décrite par les grandeurs $R^{\mu\nu}$ et R, la distribution de matière est décrite par le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, qui a les propriétés suivantes :

T^{00}	:	densité dénergie
$T^{i0} = T^{i0}$	:	densité de quantité de mouvement (ou flux d'énergie) dans la direction i. La conservation d'énergie entraîne $\frac{\partial T^{0i}}{\partial x^i} = 0$
$T^{ij} = T^{ji}$	:	tenseur des contraintes

La relation qui relie ces 3 grandeurs est l'équation d'Einstein :

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \equiv G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \tag{1.20}$$

1.4 Propagation des ondes gravitationnelles

1.4.1 Linéarisation de l'équation d'Einstein en champ faible dans le vide

Les équations d'Einstein sont non-linéaires, et elles n'ont pas été résolues à l'heure actuelle. Néanmoins, si le champ gravitationnel est faible, elles peuvent être linéarisées. On utilise le formalisme quadrupolaire, qui suppose que les sources d'ondes gravitationnelles sont petites devant les longueurs d'ondes émises (ou, de façon équivalente, que les vitesses sont très inférieures à c) et que la métrique peut s'écrire sous la forme :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{1.21}$$

où $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique de l'espace-temps plat, et $h_{\mu\nu}$ est traité comme une perturbation : $|h_{\mu\nu}| \ll |\eta_{\mu\nu}|$. Au premier ordre, on obtient :

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\eta^{\lambda\tau}\left(\frac{\partial h_{\mu\tau}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial h_{\tau\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\tau}}\right) && (1.22)\\
\delta R_{\mu\nu} &= \frac{\partial \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} && (1.23)\\
&= \frac{1}{2}\left(\Box h_{\mu\nu} + \frac{\partial h^{\lambda}_{\lambda}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h^{\lambda}_{\nu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h^{\lambda}_{\lambda}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}}\right), \text{où} && (1.24)\\
\Box &\equiv \eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} && (1.25)
\end{aligned}$$

1.4.2 Transformation de jauge

Les phénomènes physiques ne dépendent pas du système de coordonnées dans lesquels ils sont exprimés. Effectuons donc un changement de repère infinitésimal :

$$\tilde{X^{\mu}} = X^{\mu} - \epsilon^{\mu}(x), \tag{1.26}$$

où $\epsilon^{\mu}(x)$ est du même ordre de grandeur que $h_{\mu\nu}(x)$. Ainsi, dans ce nouveau repère, la perturbation de la métrique s'écrit :

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{\partial \epsilon_{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial \epsilon_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \tag{1.27}$$

Les fonctions $\epsilon^{\mu}(x^{\nu})$ étant arbitraires, on peut imposer :

$$\begin{aligned}
\Box\epsilon_{\mu} &= 0, \text{ ce qui entraîne} && (1.28)\\
\frac{\partial \tilde{h}^{\mu}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{h}^{\mu}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \text{ (jauge de Lorentz)} && (1.29)
\end{aligned}$$

On obtient finalement, dans le vide, l'équation d'onde suivante :

$$\delta \tilde{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Box \tilde{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{1.30}$$

1.4.3 Solutions de l'équation d'ondes et jauge TT

Les solutions à l'équation (1.30) sont des ondes planes monochromatiques se propageant à la vitese de la lumière, qui s'écrivent sous la forme :

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \gamma_{\mu\nu} e^{i\mathbf{k}.\mathbf{x}}, \tag{1.31}$$

où $\mathbf{k}$ est le quadri-vecteur d'onde. L'équation (1.30) entraîne que $\mathbf{k}$ est un quadri-vecteur du type lumière, et s'écrit $\mathbf{k} = (|\vec{k}|, \vec{k})$. Les coefficients $\gamma_{\mu\nu}$, définissant l'amplitude de l'onde, sont symétriques et donc au nombre de 10. Les 4 relations (1.29) réduisent le nombre de coefficients indépendants à 6.

La jauge transverse et de trace nulle

Les 4 conditions (1.29) n'épuisent pas les possibilités de changement de jauge. Il est possible de finalement réduire le nombre de composantes $\gamma_{\mu\nu}$ indépendantes à 2. On peut par exemple imposer :

$$h_{0i} = 0 \tag{1.32a}$$

$$h^{\mu}_{\mu} = 0 \tag{1.32b}$$

Ces conditions entraînent :

$$\gamma_{0i} = 0 \tag{1.33a}$$

$$k^j \gamma_{ij} = 0 \tag{1.33b}$$

Les relations (1.32b) et (1.33b) assurent respectivement que la matrice γ est de trace nulle et que les ondes gravitationnelles sont transverses (comme les ondes électromagnétiques), d'où le nom de jauge TT (*transverse-traceless*). Dans le cas d'une onde se propageant le long de l'axe z, dans le sens des z croissants, on peut écrire, sans perte de généralité :

$$h^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)} \tag{1.34}$$

ou $h^{TT} = (h_+ e_+ + h_\times e_\times) e^{i(kz-\omega t)}$ avec

$$e_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } e_\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

1.4.4 Effets des ondes gravitationnelles

Les matrices e_+ et $e_\times$ représentent les deux polarisations de l'onde gravitationnelle. Les deux axes de polarisations forment un angle de 45°. Lors du passage d'une onde, un intervalle s'écrit :

$$ds^2 = -c^2dt^2 + (1+h_+)dx^2 + (1-h_+)dy^2 + 2h_\times(dxdy) + dz^2 \tag{1.36}$$

Ainsi, la composante h_+ de l'onde modifie les distances entre 2 masses libres de :

$$\frac{dl_x}{l_x} = (\sqrt{1+h_+}-1) \simeq \frac{1}{2}h_+ \text{ selon la direction } x \tag{1.37}$$

$$\frac{dl_y}{l_y} = (\sqrt{1-h_+}-1) \simeq -\frac{1}{2}h_+ \text{ selon la direction } y \tag{1.38}$$

Les effets du passage d'une onde sur un ensemble de masses-test sont représentés sur la figure 1.2 (le principe d'équivalence entraîne qu'une particule isolée ne sent pas les effets d'une onde gravitationnelle).

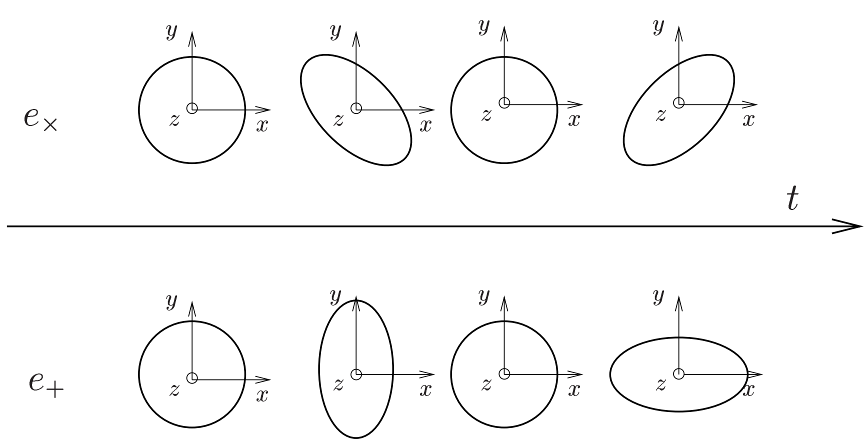


FIG. 1.2 – Déformation d'une distribution de masses libres réparties sur un anneau sous les effets des polarisations $\{h_+, h_\times\}$ d'une onde gravitationnelle (ces effets sont déphasés de $\pi/2$ dans le cas d'un signal provenant d'un pulsar.

1.5 Emission d'ondes gravitationnelles

1.5.1 Linéarisation de l'équation d'Einstein en présence de matière

On se place dans la jauge de Lorentz, et on introduit la grandeur suivante :

$$\overline{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \ (\ h \equiv h^{\gamma}_{\gamma}) \tag{1.39}$$

Ainsi, la relation (1.29) s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{h}^{\mu}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0, \tag{1.40}$$

et la courbure de Ricci $R_{\mu\nu}$ prend la forme simple suivante :

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} \tag{1.41}$$

L'équation d'Einstein (1.20), une fois linéarisée, s'écrit, au premier ordre,

$$\Box\overline{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} = -KT_{\mu\nu} \tag{1.42}$$

1.5.2 Résolution

Sous l'hypothèse que les dimensions de la source sont petites par rapport aux longueurs d'ondes des ondes émises, la métrique admet la solution suivante, dite "à potentiel retardé" :

$$\overline{h}_{\mu\nu}(t,\vec{x}) = \frac{4G}{c^4}\int_V \frac{T_{\mu\nu}(t - \frac{|\vec{x}-\vec{x'}|}{c}, \vec{x'})d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x'}|} \tag{1.43}$$

En intégrant à l'intérieur de l'espace occupé par la source, et en utilisant les théorèmes de Gauss et du Viriel [8], il vient :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \overline{h}_{\mu 0} & = & 0 \\ \overline{h}_{ij}(t,r) & = & \frac{2G}{c^4 r}.\left[\frac{d^2}{dt^2}q_{ij}(t-\frac{r}{c})\right], \text{ où} \end{array} \right. \tag{1.44}$$

$$q_{ij}(t) = \frac{1}{c^2}\int_V T^{00}(t,\vec{x})x_i x_j dx^3 \tag{1.45}$$

La jauge TT

Soit $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ le vecteur unité normal au front d'onde. On peut ainsi définir :

- le projecteur sur le plan normal à la direction de $\vec{n}$: $P_{ij} \equiv \delta_{ij} - n_i n_j$
- le projecteur transverse et sans trace $\mathcal{P}_{ijkl} = P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl}$
- la partie transverse et sans trace de la métrique $h_{ij}^{TT} = (\mathcal{P}h)_{ij} = \mathcal{P}_{ijkl}h_{kl}$

En se plaçant dans la jauge TT, on obtient :

$$\begin{cases} \overline{h}_{\mu 0}^{TT} & = & 0 \\ \overline{h}_{ij}^{TT}(t,r) & = & \frac{2G}{c^4 r}.\left[\frac{d^2}{dt^2}Q_{ij}^{TT}(t-\frac{r}{c})\right], \text{ où} \end{cases} \tag{1.46}$$

$Q_{ij}^{TT}(t)$ est le moment quadrupolaire transverse et sans trace de la source :

$$Q_{ij}^{TT}(t) = \mathcal{P}_{ijkl}q_{kl} \tag{1.47}$$

Luminosité gravitationnelle

Elle est définie comme la quantité d'énergie rayonnée sous forme d'ondes gravitationnelles par un système [8] :

$$L_{GW} = \left(\frac{dE}{dt}\right)_{GW} = \frac{G}{5c^5}\sum_{j,k}\left\langle \dddot{Q}_{jk}^2 \right\rangle, \tag{1.48}$$

où la moyenne se fait sur plusieurs périodes et Q_{ij} est le moment quadrupolaire réduit (sans trace) :

$$Q_{ij} = q_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}q_k^k \tag{1.49}$$

1.6 Mise en évidence des ondes gravitationnelles

L'existence des ondes gravitationnelles a été mise en évidence grâce à l'extraordinaire stabilité de la fréquence de rotation des pulsars. En 1974, Joseph Taylor et Russell Hulse ont découvert le signal radio à 17 du pulsar PSR1913+16, qui présentae un fort effet Doppler, rapidement attribué à la présence d'un compagnon [9]. La masse du pulsar est de 1.44 $M_\odot$, celle du compagnon est de 1.39 $M_\odot$ [10], et la période orbitale est d'environ 8 heures. Les deux objets sont compacts, et peuvent être considérés comme ponctuels car les effets de marée peuvent être négligés. Ce système constituait donc un laboratoire unique pour tester plusieurs effets relativistes, et en particulier l'émission d'ondes gravitationnelles. Les deux astronomes ont pu mesurer le ralentissement de la période de révolution des deux objets, et comparer les valeurs obtenues à celles prédites par la relativité générale. La figure

1.3 montre la comparaison entre mesures du ralentissement de la période orbitale du pulsar PSR1913+16 et la prédiction de la relativité générale. La précision obtenue à ce jour est de l'ordre de 0.3 % [5]. L'obtention de cette précision a nécessité la prise en compte des accélérations du pulsar et du Soleil au sein de la galaxie, ainsi que le mouvement propre du pulsar [11]. Les paramètres orbitaux et les mesures de ralentissement indiquent que les deux étoiles entreront en collision dans 300 millions d'années (*cf* 1.7.2). Ces résultats valurent le prix Nobel de physique à R.A. Hulse et J.H. Taylor en 1993 [12].

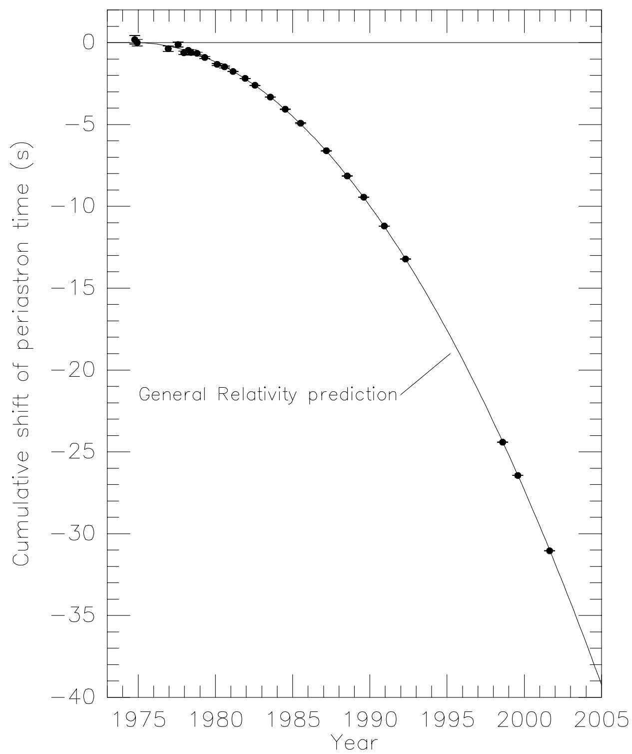


FIG. 1.3 – Ralentissement de la période orbitale du pulsar PSR1913+16, et comparaison avec la prédiction de la relativité générale [10, 5].

1.7 Sources d'ondes gravitationnelles

A ce jour, trois sources d'ondes gravitationnelles sont considérées comme prometteuses pour les détecteurs interfométriques terrestres : les coalescences d'étoiles binaires, les source impulsionnelles et les étoiles à neutrons. Une autre source possible est le fond stochastique, c'est-à-dire les ondes gravitationnelles émises au moment du big bang, mais la sensibilité actuelle des détecteurs semble insuffisante pour le détecter ou le contraindre de façon significative. Les sources terrestres sont quant à elles beaucoup trop faibles pour être jamais détectées.

1.7.1 Les sources terrestres

Imaginons deux masses de 490 tonnes chacune, reliées par une barre de 10 m de long. Imposons une rotation au système à une fréquence de 4.5 Hz, c'est-à-dire à la limite de la rupture de l'acier. La fréquence des ondes gravitationnelles émises est de 9 Hz, leur longueur d'onde est de 3.3×10^7 m et leur amplitude est de l'ordre de 10^{-42} [13, 14]. Les sources potentiellement détectables sont donc nécessairement d'origine astrophysique.

1.7.2 Les coalescences binaires

Deux corps compacts, tels que des trous noirs ou des étoiles à neutrons, en orbite l'une autour de l'autre rayonnent de l'énergie sous forme d'ondes gravitationnelles (voir chapitre 1.6) : leur orbite rétrécit, en même temps que leur vitesse augmente. Une fois toute l'énergie potentielle du système dissipée, les deux corps entrent en collision. Durant les quelques secondes avant le choc (phase de coalescence), la fréquence de rotation passe de quelques Hz à plusieurs centaines de Hz, et l'amplitude des ondes gravitationnelles émises devient détectable par des détecteurs terrestres, possiblement des interféromètres de première génération. On attend entre quelques événements et quelques dizaines d'événements par an dans un rayon de 200 Mpc.

Forme du signal

Toutes les formules présentées ici sont valables lorsque l'excentricité du système est nulle, restriction légitime car l'émission d'ondes gravitationnelles a tendance a circulariser les orbites [15]. On introduit les grandeurs suivantes :

$$M = M_1 + M_2, \text{ masse totale du système} \tag{1.50}$$

$$\mu = \frac{M_1.M_2}{M}, \text{ masse réduite du système} \tag{1.51}$$

Les amplitudes des ondes gravitationnelles reçues peuvent s'écrire sous la forme suivante [16] :

$$\begin{pmatrix} h_+ \\ h_\times \end{pmatrix} = A.\nu(t)^{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \frac{1+\cos^2 i}{2}.\cos 2\psi.\cos\phi(t) + \cos i.\sin 2\psi.\sin\phi(t) \\ -\frac{1+\cos^2 i}{2}.\sin 2\psi.\cos\phi(t) + \cos i.\cos 2\psi.\sin\phi(t) \end{pmatrix}, \tag{1.52}$$

où A est un paramètre d'amplitude du signal, dépendant à la fois des paramètres de l'orbite et de l'orientation du détecteur[2], i est l'inclinaison de l'orbite par rapport à la ligne de visée (voir figure 5.2), ψ est la polarisation de l'onde.

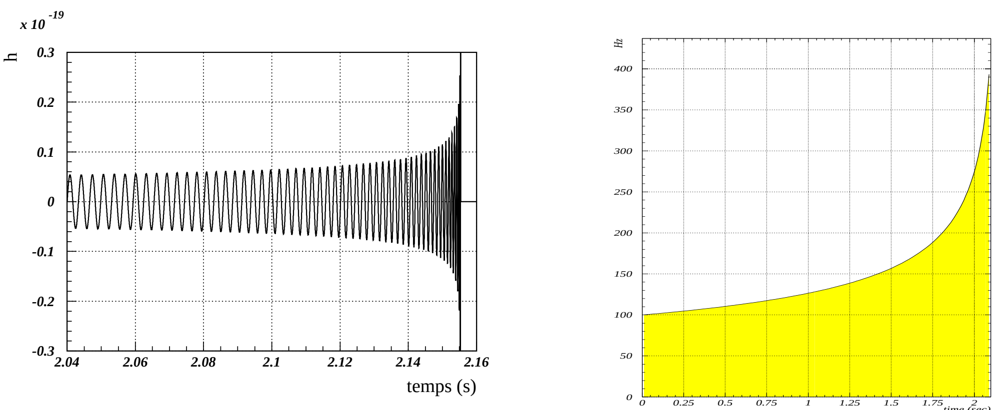
La fréquence $\nu(t)$ du système s'écrit, à l'ordre newtonien

$$\nu(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{5}{256}\frac{1}{\mu M^{\frac{2}{3}}}\frac{1}{t_o - t}\right)^{-\frac{3}{8}} \tag{1.53}$$

En première approximation, la durée d'un signal de coalescence est :

$$\delta \simeq 34\left(\frac{\mathcal{M}}{M_\odot}\right)^{-\frac{5}{3}}\left(\frac{\nu_i}{40\ \mathrm{Hz}}\right)^{-\frac{8}{3}}\ \mathrm{sec}, \tag{1.54}$$

où $\mathcal{M} \equiv \mu^{\frac{3}{5}}.M^{\frac{2}{5}}$, $M_\odot$ est la masse du Soleil, et ν_i la fréquence à partir de laquelle la coalescence est observée. La forme du signal reçu lors d'une coalescence de deux étoiles à neutrons est représentée sur la figure 1.4.



Evolution temporelle de l'amplitude du signal. — Evolution temporelle de la fréquence du signal.

FIG. 1.4 – Signal reçu lors d'une coalescence de deux étoiles à neutrons ($m = 1.4M_\odot$), situées à 10 Mpc.

[2]Cette amplitude n'est importante que dans le cas d'une étude à plusieurs détecteurs.

Corrections post-newtoniennes

Plus on s'approche de la coalescence des 2 objets, et plus les corrections relativistes deviennent importantes : il faut donc pousser le développement post-newtonien à des ordres plus élevés, ou avoir recours à d'autres techniques, par exemple le calcul d'une matrice effective dans laquelle un seul corps se déplace (Effective One Body Approach).

Identification des objets et contraintes de modèles

La dernière phase de la coalescence – lorsque les 2 objets entrent en contact – dépend de la nature de ces objets (trous noirs ou étoiles à neutrons). L'étude de cette phase permettra de déterminer la nature des objets et, dans le cas des étoiles à neutrons, de contraindre certains modèles de structure stellaire.

1.7.3 Les sources impulsionnelles

Les supernovæ de type II sont dues à l'effondrement gravitationnel d'une étoile massive pour former une étoile à neutrons ou un trou noir[3]. Ces explosions peuvent être asymétriques — comme en témoigne une vitesse initiale moyenne de 450 km.s^{-1} mesurée pour une centaine de pulsars [17] —, ce qui entraîne l'émission d'ondes gravitationnelles. Le taux d'événements attendus est d'environ trois par siècle dans la galaxie. Pour obtenir un taux de quelques événements par an, il faut pourvoir détecter les supernovæ jusqu'à l'amas de la Vierge (qui a donné son nom à Virgo), situé à une distance de 10 Mpc. La détection sera possible pour les interféromètres de première génération si environ 1 % de l'énergie de la supernova est émise sous forme d'onde gravitationnelle.

Mais, paradoxalement, ce type de source, à l'origine du développement des détecteurs d'ondes gravitationnelles, est aussi le plus diificile à modéliser. Le cœur de l'étoile étant masqué par les couches extérieures pendant l'explosion, nous en sommes réduits à des suppositions quant aux mécanismes à l'œuvre. L'énergie libérée lors d'une supernova est de l'ordre de 0.15 $M_\odot c^2$. La fraction rayonnée sous forme d'ondes gravitationnelles n'est pas connue. Les signaux attendus ont une fréquence variant typiquement entre 100 Hz et 10 kHz, pour une durée de quelques millisecondes. Une impulsion d'ondes gravitationnelles en provenance d'une source située à une distance r de la Terre, d'énergie E, de fréquence prédominante f_{gw} et de durée τ aurait une amplitude de [18] :

$$h = 5 \times 10^{-22} \left(\frac{E}{10^{-3} M_\odot c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\tau}{1 \text{ ms}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{f_{gw}}{1 \text{ kHz}} \right)^{-1} \left(\frac{r}{15 \text{ Mpc}} \right)^{-1} \quad (1.55)$$

[3]Les supernovæ de type I, dues à l'explosion d'une naine blanche ayant dépassé la limite de Chandrasekhar ne produisent pas d'ondes gravitationnelles.

La comparaison des temps d'arrivée des neutrinos, des signaux électromagnétiques et gravitationnels d'une supernova permettrait de vérifier que la vitesse des ondes gravitationnelles est bien c, comme le prédit la relativité générale.

Différentes forme de signal prédites sont représentées sur la figure 1.5.

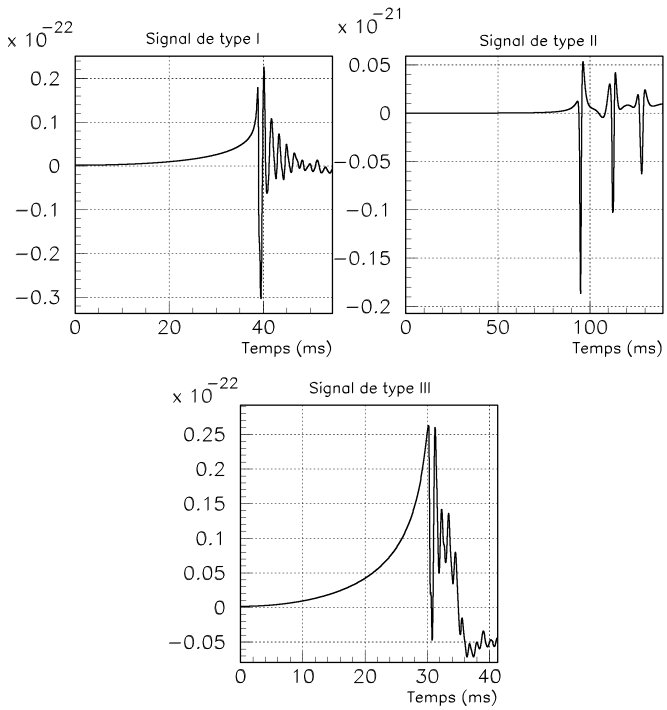


FIG. 1.5 – Formes d'ondes gravitationnelles émises lors d'une supernova, prédites par Zwerger et Müller [19].

1.7.4 Le fond stochastique

Les ondes électromagnétiques se sont découplées du plasma primordial lorsque l'univers avait 300000 ans, et sont aujourd'hui observables : c'est le fond de rayonnement cosmologique a 2.7 Kelvins. Les neutrinos se sont eux aussi découplés lorsque la température est devenue inférieure à 1 MeV. De même, on pense que les ondes gravitationnelles se sont découplées au bout d'un temps égal à 10^{-43} s, de l'ordre du temps de Planck : c'est le fond stochastique. Ces ondes peuvent être observables aujourd'hui, par des interféromètres de seconde ou troisième génération

Ces ondes, qui n'ont quasiment pas interagi depuis leur émission, permettent de remonter à l'époque où elles ont été émises, c'est-à-dire à l'ère de Planck, juste après la phase d'inflation : elles portent des informations sur l'état de l'Univers au moment de leur découplage. Ainsi, on obtiendrait l'image la plus précoce de l'Univers que l'on puisse imaginer aujourd'hui, image que l'on ne peut obtenir par aucun autre moyen, et des informations sur des échelles d'énergies totalement inaccessibles (de l'ordre de 10^{19} GeV).

Ce rayonnement fossile, supposé isotropique, stationnaire et non ploarisé, a une amplitude extrêmement faible, décrite par sa densité d'énergie Ω_s, que l'on peut relier à sa densité spectrale par les relations suivantes [20] :

$$\Omega_{fs} = \frac{4\pi^2}{3H_o^2}.f^3.S_{fs}(f), \tag{1.56}$$

où H_o est la constante de Hubble. On peut faire intervenir la densité critique de l'Univers $\rho_c = 3H_o^2/8\pi G$. On obtient alors

$$\Omega_{fs} = \frac{\pi}{2.G.\rho_c}.f^3.S_{fs}(f) \tag{1.57}$$

Pour pouvoir mettre ce fond stochastique en évidence, il est nécessaire de mettre en coïcidence plusieurs détecteurs.

1.7.5 Les étoiles à neutrons

Les étoiles à neutrons sont des corps extrêmement compacts – leur rayon est de l'ordre de 10 km, pour une masse de l'ordre de 1.4 $M_\odot$ – possédant une fréquence de rotation extrêmement stable.

Le signal a une amplitude plus faible que celui d'une coalescence ou d'une supernova, mais il présente l'avantage d'être toujours présent dans les données et quasi-monochromatique, ce qui permet une intégration du signal pendant plusieurs années. La fréquence de rotation des pulsars répertoriés se situe entre quelques Hertz et 1 kHz.

Les pulsars peuvent être solitaires ou appartenir à un système binaire, leur compagnon pouvant être une étoile sur sa séquence principale, une naine blanche, une autre étoile à neutrons ou un trou noir.

Plusieurs mécanismes d'emission d'ondes gravitationnelles sont proposés.

La détection du signal émis par les pulsars est le sujet de cette thèse. La structure d'une étoile à neutrons, les mécanismes d'émission et les propriétés des pulsars sont détaillés au chapitre 4.

Conclusion

Nous avons vu comment les équations de la relativité générale prédisent l'existence des ondes gravitationnelles, et comment elles permettent d'en prédire les amplitudes, moyennant un modèle de source. Les différents types de sources attendus ont également été décrits. A ceux-ci il faut rajouter les sources encore inconnues qui apparaissent lorsque un nouveau type d'observation voit le jour.

Les calculs concernant les amplitudes des ondes gravitationnelles émises par les étoiles à neutrons ne sont pas très optimistes. Cependant, ce ne sont que des calculs, basés sur des modèles de corps d'une densité supérieure à la matière nucléaire, qui n'ont pour l'instant pas pu être vérifiés. Il est également possible que d'autres mécanismes, qui n'ont pas encore été décrits ou même imaginés soient à l'œuvre.

Chapitre 2

Détection des ondes gravitationnelles

Introduction

La quête expérimentale pour la détection des ondes gravitationnelles a débuté dans les années 60. J. Weber en fut le pionnier [21]. Les premiers détecteurs envisagés furent les barres résonnantes. Weber annonça avoir détecté des ondes gravitationnelles en coïncidence entre 2 de ses détecteurs [22]. Cette annonce, bien que démentie par la suite, suscita un engouement pour la détection des ondes gravitationnelles, mais les technologies disponibles à cette époque restaient insuffisantes. Le bruit limitant la performance de ces détecteurs était d'origine thermique. C'est pourquoi, fonctionnant d'abord à température ambiante, les barres résonnantes furent ensuite refroidies à des températures cryogéniques. Elles n'ont pas fait de détection confirmée à ce jour. La troisième génération de détecteurs est constituée des grands interféromètres terrestres, comme Virgo [23], GEO600 [24], TAMA [25], AIGO [26] ou LIGO [27]. Ces détecteurs atteindront des sensibiltés qui devraient être suffisantes pour détecter des ondes gravitationnelles de façon directe. D'autres détecteurs sont prévus, tels que les sphères ou un interféromètre spatial, LISA [28]. D'autres méthodes de détection ont été envisagées [29, 30], mais elles ne seront pas développées ici. Nous nous concentrerons sur les caractéristiques des interféromètres terrestres, en particulier Virgo, et nous décrirons brièvement les caractéristques des barres, des sphères et de LISA.

2.1 Les interféromètres terrestres

Une nouvelle génération de détecteurs entre en service à l'heure actuelle, les interféromètres terrestres. Ces instruments devraient permettre les premières détections directes d'ondes gravitationnelles. Il existe plusieurs projets indépendants :

- Le projet américain LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory). Il est constitué de 3 interféromètres de Michelson. Deux d'entre eux sont situés à Hanford, l'un a des bras de 2 km, l'autre de 4 km. Le troisième interféromètre, situé à Livingstone, a des bras longs de 4 km.
- Le projet germano-britannique GEO600 , construit près de Hambourg. Les bras de l'interféromètre mesurent 600 mètres
- Le projet japonais TAMA, construit à Tokyo. Ses bras ont une longueur de 300 m, et il sert de prototype à un interféromètre de deuxième génération. A ce jour, il a quasiment atteint sa sensibilité de référence.
- Le projet australien AIGO, situé à proximité de Perth. Ce projet n'a pas encore reçu les crédits nécessaires. Il n'entrerait en service que dans quelques années, et il aurait des bras de 4 km. Il serait le seul détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles situé dans l'hémisphère Sud, et permettrait ainsi de compléter le réseau mondial.
- Le projet franco-italien Virgo, construit à Cascina, non loin de Pise,qui doit son nom à l'amas de galaxies de la Vierge situé à 15 Mpc.

Nous allons maintenant décrire en détail l'interféromètre Virgo.

2.1.1 Principe

L'action d'une onde gravitationnelle sur un anneau de masses de référence est représentée sur la figure 1.2. Un interféromètre de Michelson, qui mesure la différence de longueur entre ses 2 bras est un système adapté à une telle mesure. Les bras sont constitués par des masses de référence considérées comme étant en chute libre. L'effet d'une onde gravitationnelle est très faible, mais il est proportionnel à la longueur de l'objet considéré. On a donc intérêt à choisir des bras aussi longs que possible. Cependant, lorsqu'ils sont très éloignés, les miroirs de bout de bras ne sont plus parfaitement parralèlles, à cause de la rotondité de la Terre, ce qui induit un couplage entre les mouvements horizontaux et verticaux des miroirs. Ainsi, Virgo possède des bras d'une longueur de 3 km

Pour augmenter le déphasage entre les deux faisceaux, des cavités Fabry-Perot ont été installées à l'intérieur des bras. Lorsque ces cavités sont résonnantes, le déphasage provoqué par le mouvement des miroirs est augmenté d'un facteur $n = 2F/\pi$, où F est la finesse de la cavité, égale à 50. Ainsi, les bras de Virgo ont une longueur effective de 120 km environ.

Pour détecter une onde gravitationnelle, on maintient la différence de longueur entre les 2 bras à un nombre impair de demi-longueurs d'ondes, c'est-à-dire que l'interféromètre est sur la frange noire. Une différence de longueur entre les 2 bras, possiblement due au passage d'une onde gravitationnelle sur Terre, entraîne une variation de lumière en sortie de l'interféromètre. Dans cette configuration, la quasi-totalité de la lumière est renvoyée vers le laser. Un miroir de recyclage permet de réfléchir cette lumière, et d'augmenter la puissance lumineuse à l'intérieur de l'interféromètre. Un facteur de recyclage $R = 50$ a été choisi.

Les fluctuations de l'indice de l'air sur le trajet des faisceaux lumineux peuvent introduire des perturbations dans le signal. Pour cette raison, les rayons luminneux se propagent dans un vide très poussé.

Les miroirs sont suspendus, et soumis au bruit sismique du sol. Ce bruit sismique est atténué grâce à une chaîne de suspension très élaborée [31].

Le principe de Virgo est représenté sur la figure 2.1.

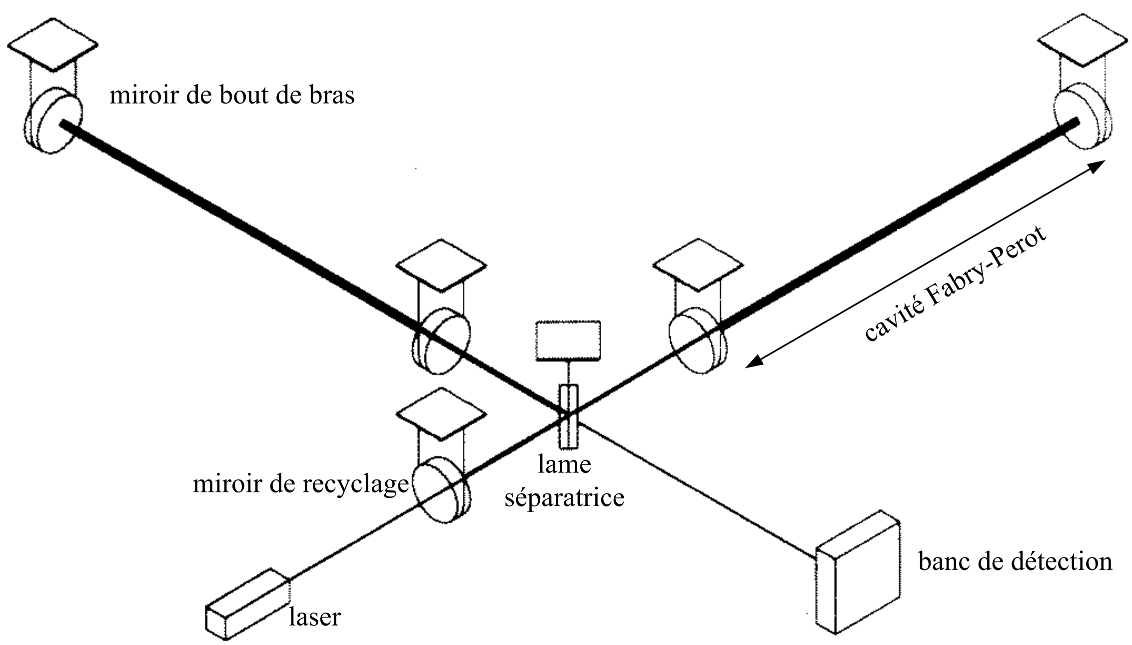


FIG. 2.1 – Schéma de principe de Virgo.

2.1.2 Fonctions de réponse d'un interféromètre

Contrairement à un téléscope "classique", une antenne interférométrique est omnidirectionnelle : elle détecte les ondes gravitationnelles quel que soit leur angle d'incidence sur le détecteur. Cependant, toutes les directions ne sont pas équivalentes, certaines sont mieux vues que d'autres. Une onde gravitationnelle de polarisation ψ, d'amplitudes h_+ et $h_\times$, provenant de la direction (θ, ϕ) provoquera une perturbation $h(t)$ [32] telle que :

$$
\begin{aligned}
h(t) &= F_+(\theta,\phi,\psi)h_+(t) + F_\times(\theta,\phi,\psi)h_\times(t), \text{ avec} && (2.1)\\
F_+(\theta,\phi,\psi) &= \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)\cos 2\phi\cos 2\psi - \cos\theta\sin 2\phi\sin 2\psi && (2.2)\\
F_\times(\theta,\phi,\psi) &= \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)\cos 2\phi\sin 2\psi + \cos\theta\sin 2\phi\cos 2\psi && (2.3)
\end{aligned}
$$

La sensibilité d'un interféromètre en fonction de la direction d'incidence d'une onde gravitationnelle non polarisée est représentée sur la figure 2.2 (les bras de l'interféromètre sont confondus avec les axes (Ox) et (Oy)). Cette fonction est maximale pour une onde arrivant perpendiculairement au plan du détecteur, et nulle lorsque la direction de propagation de l'onde coïncide avec une des bissectrices du plan (xy).

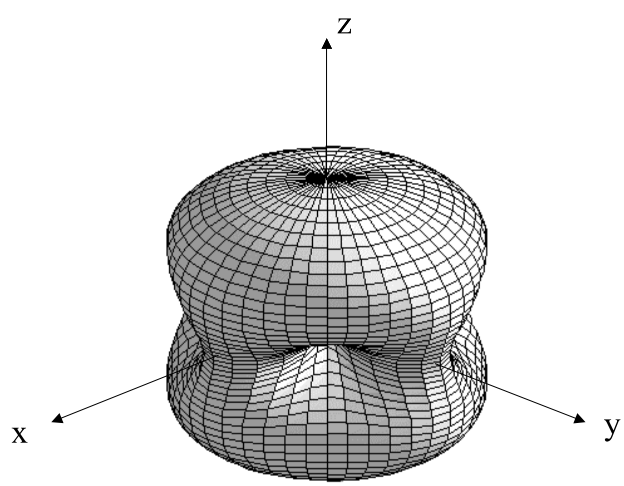


FIG. 2.2 – Sensibilité d'un interféromètre en fonction de la direction d'incidence d'une onde gravitationnelle non polarisée(les bras de l'interféromètre-sont confondus avec les axes (Ox) et (Oy)) [33].

2.1.3 Sources de bruit

Les effets des ondes gravitationnelles sont très faibles, et il faut réduire au maximum toutes les perturbations extérieures qui peuvent masquer le passage d'une onde gravitationnelle. Passons en revue les principales sources de bruit de Virgo.

A. Le bruit de photons

Détecter des ondes gravitationnelles consiste à mesurer la puissance lumineuse en sortie de l'interféromètre. Microscopiquement, cette puissance est donnée par le nombre de photons incidents, qui est une grandeur statistique obéissant à la loi de Poisson. Si L est la longueur des bras, P la puissance incidente du laser, λ sa longueur d'onde et R le facteur de recyclage des cavités Fabry-Perot , l'amplitude du bruit de photon est :

$$h_p(f) = \frac{1}{L}\frac{\pi}{2F}\sqrt{\frac{\hbar c\lambda}{2\pi RP}}, \text{ où} \tag{2.4}$$

$$f_{FP} = \frac{c}{4LF} \simeq 500 \text{ Hz}, \tag{2.5}$$

où f_{FP} est la fréquence de coupure des cavités Fabry-Pérot (F est leur finesse). Ainsi, ces cavités agissent comme un filtre passe-bas, et moyennent les effets des ondes gravitationnelles de haute fréquence sur le détecteur. Par ailleurs, on aura intérêt à choisir un laser aussi puissant que possible. Le bruit de photons limite la sensibilité de Virgo au dessus de 1 kHz.

B. Le bruit sismique

Le bruit sismique à la surface de la Terre a une densité spectrale [33]

$$\tilde{X}(f) = \begin{cases} 10^{-9}\ m/\sqrt{\text{Hz}} & \text{de 1 à 10 Hz} \\ 10^{-9}\left(\frac{10\text{Hz}}{f}\right)^2\ m/\sqrt{\text{Hz}} & \text{pour f> 10 Hz} \end{cases} \tag{2.6}$$

Le site d'implantation de Virgo a été choisi tel que le bruit sismique est faible : sa densité spectrale est de $10^{-9}\ m/\sqrt{\text{Hz}}/f^2$ entre 0.5 Hz et 3 kHz [34].

Il est donc nécessaire d'atténuer au maximum ce bruit sismique, et de le repousser vers les basses fréquences, afin d'étendre la bande passante du détecteur. Les miroirs de Virgo sont donc suspendus, grâce à un système complexe de suspensions. Ce système d'atténuation (voir figure 2.3) est constitué de 8 étages : 5 oscillateurs suspendus à un pendule inversé, ainsi qu'une marionnette et un couple miroir-masse de référence. Ces "superatténuateurs" permettent à Virgo d'avoir la meilleure sensibilité de tous les interféromètres terrestres à basse fréquence. Le bruit sismique limite la sensibilité de Virgo en dessous de 3 Hz.

Atténuation des mouvements horizontaux

La fonction de transfert d'un pendule, qui mesure la relation entre l'amplitude du mouvement du bas de la suspension et celle du haut de la suspension, est [35] :

$$T(f) = \frac{x_b(f)}{x_h(f)} = \frac{f_p^2(1 + i\phi(f))}{(f_p^2 - f^2) + if_p^2\phi(fw)} \tag{2.7}$$

La fréquence propre de l'élément est f_p. Elle est la plus basse possible. Pour Virgo, elle est inférieure à 0.6 Hz, ce qui lui confère une bonne sensibilité aux basses fréquences. Le terme imaginaire provient de la constante de rappel du pendule, et il décrit des forces dissipatives : ϕ est l'angle de pertes. La formule approchée (pour $f > 1$ Hz) décrivant la fonction de transfert de l'ensemble est :

$$T(f) \simeq \left(\frac{f_o^2}{f^2}\right)^{2N}, \tag{2.8}$$

où N est le nombre d'étages de la suspension. f_o est la fréquence propre de l'ensemble, moyenne géométrique des fréquences propres des differents étages.

Atténuation des mouvements verticaux

La longueur des bras n'est pas complètement négligeable devant la courbure de la Terre : les faces d'entrée et de sortie des cavités Fabry-Perot ne sont pas tout à fait parallèles. Ainsi, il existe un couplage entre le bruit sismique horizontal et le bruit sismique vertical, caractérisé par l'angle θ, angle entre deux miroirs séparés de 3 km. Pour atténuer ces mouvements verticaux, 6 masses intermédiaires ont été introduites. Elles sont fixées aux différents atténuateurs.

Bruit total

Le bruit sismique total est la combinaison des bruits horizontal et vertical, et s'écrit :

$$h_S(f) = \frac{\sqrt{4}}{L}\left(T_h(f)^2 + (\theta.T_v(f))^2\right)^{\frac{1}{2}}.\tilde{X}(f) \tag{2.9}$$

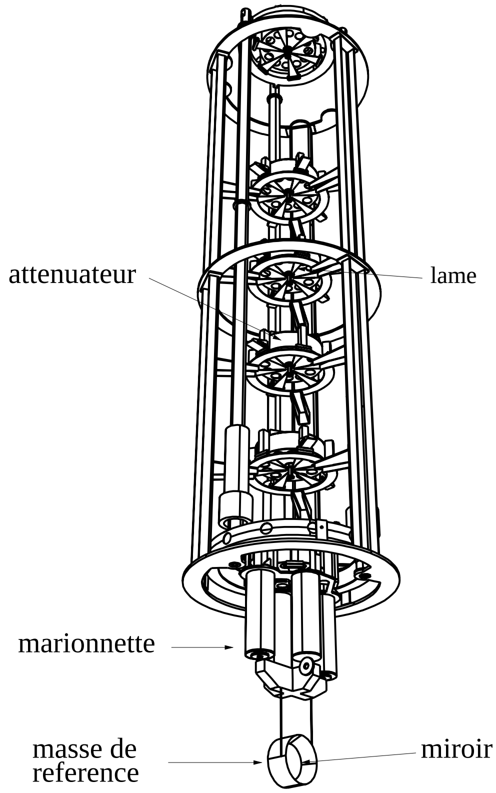


FIG. 2.3 – Super atténuateur de Virgo.

C. Le bruit thermique

Virgo opère à température ambiante, ce qui entraîne des vibrations des miroirs et des fils de suspensions de ces miroirs. Trois types de vibrations des miroirs peuvent être excités : le bruit pendulaire, les modes internes des miroirs, et les modes violon.

Le théorème de fluctuation-dissipation

Ce théorème, démontré en 1951 [36], relie les fluctuations d'un système, linéaire et à l'équilibre, à sa température T. On définit l'impédance de ce système comme le rapport entre la force $F(f)$ qu'il subit et sa vitesse $v(f)$: $Z(f) = F(f)/v(f)$. Ainsi, si $Re(Z(f))$ est la partie réelle de l'impédance du système, les forces thermiques ont une densité spectrale

$$\tilde{F}^2_{therm} = 4k_B T\, Re(Z(f)) \qquad (2.10)$$

Si la force subie par le système et sa position s'écrivent respectivement $F = F_o e^{i\omega t}$ et $x = x_o e^{i\omega t}$ (d'où $v = i\omega x$), la relation 2.10 entraîne

$$\tilde{x}^2_{therm} = \frac{k_B T}{\pi^2 f^2} \frac{Re(Z(f))}{|Z(f)|^2} \qquad (2.11)$$

Appliquons ces résultats à un oscillateur légèrement amorti. L'équation différentielle qui régit son mouvement est la suivante :

$$F = m\ddot{x} + \bar{k}x \qquad (2.12)$$

$$F = mi\omega v + ke^{i\phi(f)} \frac{v}{i\omega} \qquad (2.13)$$

En développant $e^{i\phi(f)}$ et en introduisant la grandeur habituelle $\omega_o^2 = k/m$, on obtient finalement

$$Z(f) = \frac{2\pi m f_o^2}{if} \left(1 - \left(\frac{f}{f_o} \right)^2 + i\phi(f) \right) \qquad (2.14)$$

La densité spectrale de bruit (2.11) thermique s'écrit donc :

$$\tilde{x}^2_{therm} = \frac{4k_B T}{(2\pi)^3 f.f_o^2} \frac{\phi(f)}{\left(\left(1 - \left(\frac{f}{f_o} \right)^2 \right)^2 + \phi(f)^2 \right)} \qquad (2.15)$$

Le facteur de qualité d'un oscillateur, qui dicte à la fois l'amplitude de la résonnance et la rapidité de la décroissance du spectre de part et d'autre de cette résonnance, peut être défini comme le rapport entre la fréquence de résonnance et la bande passante à -3 dB :

$$Q = \frac{f_o}{\Delta f} = \phi(f_o)^{-1} \qquad (2.16)$$

Le bruit pendulaire

Pour $f \gg f_o$, la formule (2.15) peut se simplifier en

$$\tilde{x}^2_{therm} = \frac{4k_B T (2\pi f_o)^2}{mQ(2\pi f)^5} \qquad (2.17)$$

Ce bruit pendulaire limite la sensibilité de Virgo entre quelques Hertz et quelques dizaines de Hertz.

Modes internes des miroirs

Un miroir possède des modes de vibration, qui sont excités si la température n'est pas nulle. Les fréquences de résonance des modes les plus bas sont :

$$f_{int} = \frac{1}{2}\frac{v_S}{d}, \tag{2.18}$$

où v_S est la vitesse longitudinale du son dans le miroir, et d son diamètre. Le facteur de qualité de ce type de modes peut en principe atteindre l'inverse de l'angle de perte ϕ. Il dépend du matériau employé pour le miroir. La silice a, outre d'excellentes propriétés optiques, un angle de perte $\phi < 10^{-6}$ à température ambiante. Il est important de repousser les résonnances à des fréquences aussi hautes que possible, mais le bruit interne du miroir impose également une limite à la sensibilité sur tout le spectre :

$$h(f) \simeq 1.7 \times 10^{-22}/\sqrt{Hz}\left(\frac{1\ \mathrm{kHz}}{f}\right)^2 \tag{2.19}$$

Ce bruit limite la sensibilité de Virgo entre quelques dizaines de Hz et quelques centaines de Hz.

Les modes violons

Les fils de suspension des miroirs peuvent eux aussi être excités, comme les cordes d'un violon, par une température non nulle. La fréquence des modes de vibration est donnée par la relation suivante [33] :

$$f_n = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{mg}{Nm_f l}}, \tag{2.20}$$

où l est la longueur d'un fil, m_f sa masse, N le nombre de fils, m la masse suspendue et g l'accélération de la pesanteur. Le nombre n est l'ordre de l'harmonique considérée. La fréquence du mode fondamental est environ 300 Hz. La densité totale du bruit thermique dû aux modes violons est obtenue en faisant la somme quadratique des bruits de chacun des modes (en pratique, le calcul n'inclut que les premiers modes), et en incluant un facteur 4 pour les 4 miroirs suspendus :

$$\tilde{x}^2_{violons}(f) = 4\frac{4k_BT}{(2\pi)^3 f}\frac{4Nm_f l}{mg}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(f)}{\left(\left(1-\left(\frac{f}{f_n}\right)^2\right)^2+\phi(f)^2\right)} \tag{2.21}$$

D. Le bruit newtonnien

Les fluctuations de la densité de la Terre autour de l'interféromètre ont un effet sur le détecteur, car ils créent un champ gravitationnel stochastique qui se superpose au champ statique moyen de la Terre. La contribution de cet effet s'exprime de la façon suivante dans le modèle choisi [35] :

$$h_N(f) \simeq \frac{3 \times 10^{-11}}{f^2} \tilde{X}^2(f) \tag{2.22}$$

2.1.4 Courbe de sensibilité

La figure 2.4 montre la somme quadratique des bruits que nous venons d'évoquer. Ainsi, la sensibilité théorique de Virgo est limitée par :

- le bruit sismique à tres basses fréquences ($f < 3$ Hz)
- le bruit thermique entre 3 Hz et 1 kHz
- le bruit de photons au-dessus de 1 kHz

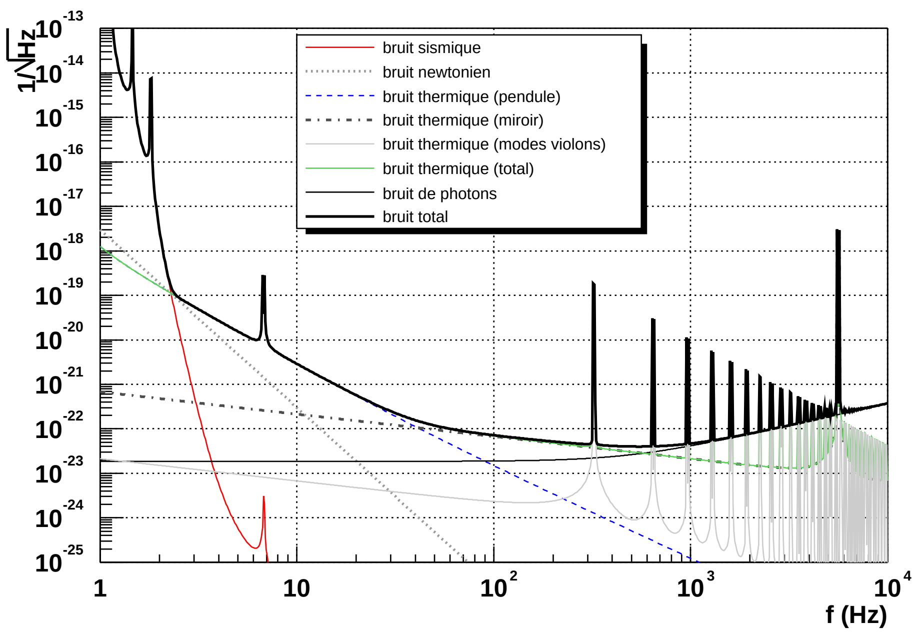


FIG. 2.4 – Courbe de sensibilité de Virgo

2.1.5 Le système de synchronisation

Afin de maintenir l'interféromètre sur la frange noire, il faut pouvoir contrôler ses différents éléments. Les signaux émis par ces éléments sont numérisés, puis centralisés. Il faut donc distribuer des horloges communes dans les différents bâtiments de l'interféromètre. De plus, pour pouvoir comparer et échanger des données entre détecteurs, il faut écrire l'heure à laquelle ces données ont été enregistrées.

Ces deux fonctions sont assurées par le système de synchronisation, qui sera abordé plus en détail dans le chapitre suivant.

2.2 Autres détecteurs

2.2.1 Les barres résonnantes

Ce type de détecteur est le premier à avoir vu le jour. C'est J.Weber, dans les années 60, qui construisit la première barre résonnante. Les barres actuelles sont cryogéniques. Les barres actuellement en opération sont : ALLEGRO [37] à Baton Rouge aux Etats-Unis, AURIGA [38] à Padova en Italie, EXPLORER [39] au CERN, NAUTILUS [40] à Rome en Italie et NIOBE [41] à Perth en Australie.

Principe

Une barre résonnante est composée d'un cylindre de métal qui oscille lorsqu'une onde gravitationnelle la traverse, d'un transducteur qui convertit ces oscillations mécaniques en un signal électrique, d'un amplificateur et d'un système d'enregistrement. Le transducteur est fixé à l'une des extrémités de la barre, et produit un signal proportionnel au déplacement de cette face par rapport à sa position d'équilibre. La barre se comporte comme un système infini d'oscillateurs de fréquences de résonnance [42]

$$f_k = (2k+1).\frac{v_S}{2L} \ (k \in \mathbb{N}), \tag{2.23}$$

v_S étant la vitesse du son dans le matériau (de l'ordre de 5 $km.s^{-1}$) et L la longueur de la barre. Ainsi, une barre longue de 2.5 m a une fréquence de résonnance autour du kHz. La sensibilité est la meilleure autour de cette résonnance, avec une valeur de l'ordre que quelques $10^{-22}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$, et une bande passante de quelques Hz. La figure 2.5 montre la courbe de sensibilité du détecteur EXPLORER.

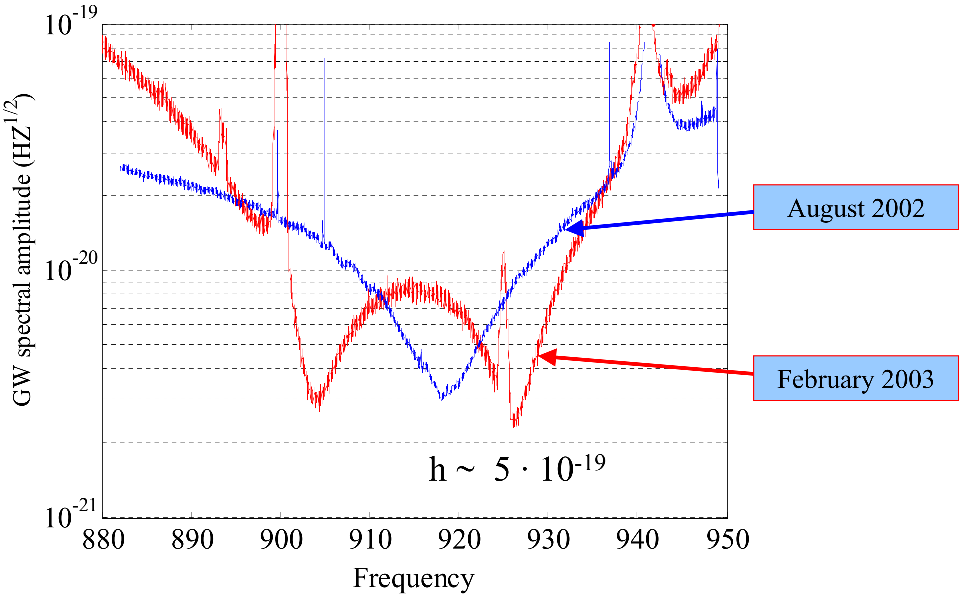


Fig. 2.5 – Courbe de sensibilité du détecteur EXPLORER [43].

2.2.2 Les sphères

Un nouveau type de détecteurs a récemment vu le jour. Il s'agit des sphères. La caractéristique principale de ce type de détecteurs est qu'ils sont omnidirectionnels, et qu'ils permettent de déterminer la position de la source, moyennant une certaine technique de déconvolution [44].

- MiniGRAIL [45], première sphère à avoir été développée, aux Pays-Bas.
- TIGA [46],
- SFERA [47],
- GRAVITON [48], projet brésilien.
- OMEGA [49],

La figure 2.6 montre la courbe de sensibilité que le détecteur miniGRAIL pourrait atteindre dans un futur proche.

La bande passante de ce type de détecteurs peut être élargie si on imbrique deux sphères l'une dans l'autre, comme le montre la figure 2.7 [51].

2.2.3 LISA

La phase de définition du projet LISA (pour Laser Interferometer Space Antenna) devrait débuter en mars 2004, pour un lancement prévu en 2011. Le détecteur est constitué de 3 modules, séparés de 5 millions de km et formant un triangle équilatéral incliné à 60^o par rapport à l'écliptique, dont le centre

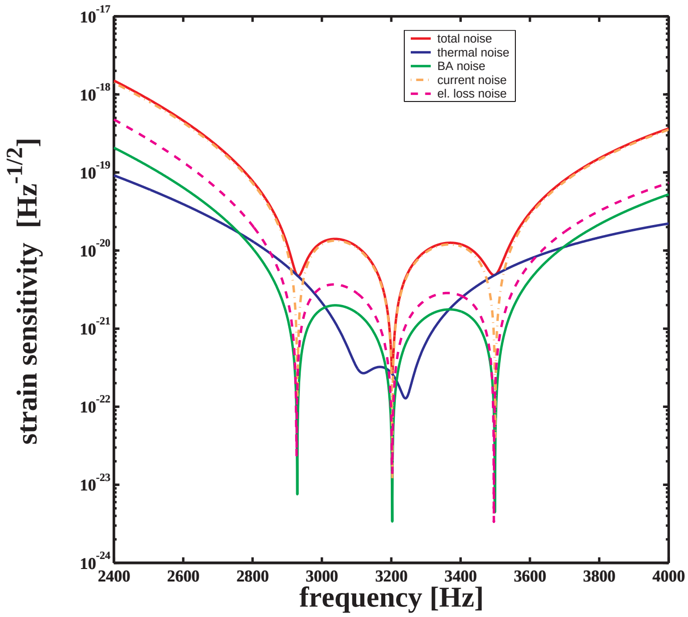


FIG. 2.6 – Courbe de sensibilité de miniGRAIL [50].

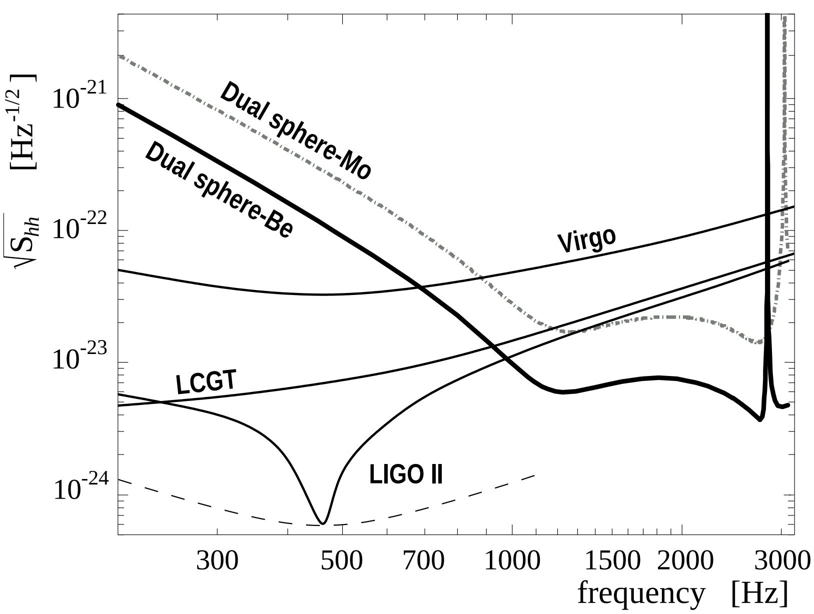


FIG. 2.7 – Courbe de sensibilité d'une sphère imbriquée dans une couronne sphérique [52].

suit une trajectoire semblable à celle de la Terre, à une distance angulaire de

20^o. Après le lancement, les 3 modules mettront un an à se mettre en place.

La bande de fréquence accessible à LISA va d'une fraction à quelques centaines de mHz, avec une sensibilité optimale de l'ordre de 10^{-23} à 5 mHz, comme le montre la figure 2.8. Les objectifs scientifiques concernent :

- les coalescences de trous noirs.

- de nombreux systèmes binaires galactiques.

- des tests de précision de la relativité générale en champ fort, grâce à l'étude de trous noirs en orbite autour de trous noirs massifs.

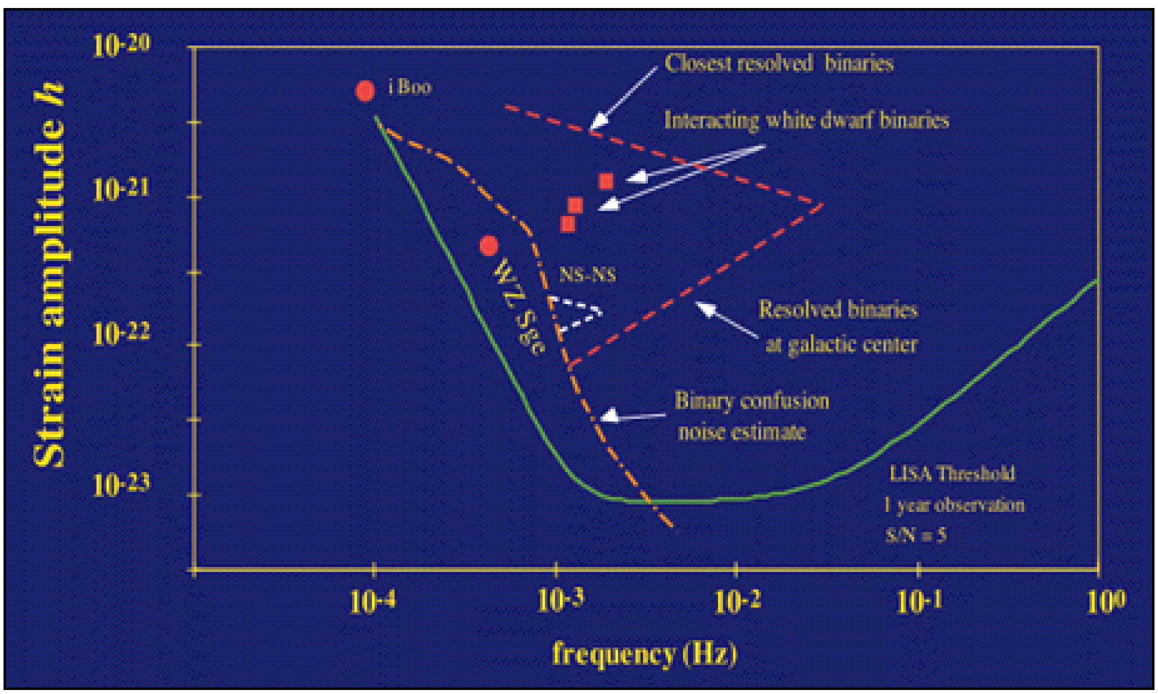


FIG. 2.8 – Courbe de sensibilité de LISA

Conclusion

Nous avons vu les différents types de détecteurs envisages depuis 40 ans pour détecter les ondes gravitationnelles de façon directe. Les techniques employées sont diverses. Les sensibilités, insuffisantes au départ, parviennent maintenant à des niveaux qui rendent possibles, voire probables, les premières détections. La largeur des bandes passantes des détcteurs interférométriques permet une vaste recherche des pulsars, dont les fréquences s'étendent de quelques Hz à environ 1 kHz.

En particulier, l'expérience LIGO a atteint une sensibilité qui permet de faire des mesures d'une précision encore jamais atteinte. L'expérience Virgo sera bientôt elle aussi opérationnelle : la mise au point de l'interféromètre complet va commencer, et on peut espérer avoir des données de physique dès le début de 2004.

Ces détecteurs formeront à terme un réseau mondial, qui permettra de confirmer les détections d'événements impulsifs, et de déterminer leur localisation. Ils doivent donc être synchronisés avec une grande précision. Les interféromètres sont ont des bandes passantes bien adaptées à la recherche d'ondes gravitationnelles émises par les pulsars, signaux qui doivent être suivis dans le temps sur de longues périodes, ce qui requiert une grande stabilité du système de synchronisation. Pour répondre à ces demandes, le système GPS (Global Positioning System) est utilisé, comme nous allons le voir au chapitre suivant.

Chapitre 3

Le contrôle du système de sychronisation de Virgo

Introduction

Connaître le temps avec une très grande précision est essentiel pour l'expérience Virgo, et ce pour 2 raisons :

- permettre de faire des coïncidences avec les autres détecteurs d'ondes gravitationnelles, tels que les autres interféromètres, les barres ou les sphères, et les autres détecteurs de rayons cosmiques, tels que les détecteurs de rayons X, de rayons γ, de neutrinos ou même de particules. On pourrait ainsi valider la détection du signal et reconstruire la direction de la source impulsionnelle.
- pouvoir suivre un signal périodique de faible amplitude dont la fréquence est très stable, pendant des temps de l'ordre de plusieurs mois.

Il fallait donc se doter d'un système fournissant une horloge tres précise, commune à toutes les experiences dédiées à la détection des ondes gravitationnelles. Le système GPS (Global Positioning System) répond à ces attentes. Dans ce chapitre, je présente l'architecture du système de sychronisation, synchronisé sur le système GPS, et qui distribue le temps aux divers éléments de Virgo, et en particulier le contrôle de l'heure de démarrage des frames, unités de base de stockage des données. La procédure de détermination du temps de début d'un frame et l'étude du fonctionnement des antennes GPS sont détaillés.

3.1 Le système GPS.

Au debut des annees 70, le gouvernement américain décidá de se doter d'un système global de positionnement, qui permettrait de repérer avec une bonne précision n'importe quel point situé sur la surface de la Terre ou à faible altitude, quelles que soient les conditions météorologiques. Un tel système offre également la possiblité de synchroniser des horloges partout dans le monde avec une grande précision. Le but premier de ce système était militaire, il a depuis beacoup évolué vers une utilisation civile. Le premier satellite a été lancé en 1978.

Le système est composé de trois segments [53] :

1. Le segment spatial. Il est constitué de 24 satellites en orbite circulaire autour de la Terre, à une altitde de 20200 km, avec une période de 12 heures environ. Les orbites sont réparties dans 6 plans inclinés de 55^o par rapport à l'équateur et séparés de 60^o.

2. Le segment de contrôle. Il est constitué de 5 stations de contrôle réparties dans le monde entier. La station principale est située à Colorado Springs : elle centralise les informations provenant des autres stations, qui suivent en permanence les satellites en vue. La mission de la station principale est de calculer les corrections pour chaque satellite et de les leur envoyer, par l'intermédiaire de 3 stations d'émission.

3. Les utilisateurs. Au départ, il y avait une distinction entre deux types d'utilisateurs : les militaires américains et leurs alliés, qui ont accès à la pleine précision du système (Precise Positioning System ou PPS), et les autres utilisateurs, qui n'ont accès qu'à une précision volontairement dégradée : c'est la disponibilité sélective (Standard Positioning System ou SPS). Depuis le 1^{er} mai 2000, tout utilisateur a accès à la pleine précision du système [54].

Les performances des systèmes militaire et civil sont données dans le tableau 3.1. Pour obtenir une telle précision, on doit tenir compte des effets relativistes dus à la différence de potentiel gravitationnel entre le sol et l'altitude de l'orbite des satellites.

Precision (95 % du temps)	PPS	SPS
Horizontale	22 m	100 m
Verticale	28 m	150 m
Temporelle	200 ns	340 ns

Tab. 3.1 – Performances du système GPS.

3.2 Organisation du système de sychronisation de Virgo

Le système de sychronisation est un système centralisé, piloté par le GPS. Son rôle est double : il permet de cadencer les boucles d'asservissement, et de fournir l'estampillage en temps au système d'acquisition des données, ce qui permet l'échange de données entre détecteurs et la poursuite de signaux périodiques sur de longues périodes. Son architecture est représentée sur la figure 3.1. Il fournit une 4 signaux, qui sont distribués par fibre optique dans les différents bâtiments :

1. un signal rapide (2.5 MHz), dérivé de l'horloge à 10 MHz fournie par la carte GPS.
2. un signal d'échantillonnage (20 kHz), utilisé pour numériser les signaux rapides.
3. un signal à 1 Hz, qui définit le découpage des données en frames.
4. un signal à 1/32768 Hz ($\simeq 30\mu$Hz), qui définit le découpage des runs (un run regroupe au plus 32768 frames).

3.3 Précision requise sur le temps

3.3.1 Evénements impulsionnels

La précision sur l'heure d'arrivée d'un événement impulsionnel dépend de la méthode de détection employée, ainsi que du rapport signal sur bruit. Elle est en général de l'ordre de 100 μs [55, 56], c'est-à-dire bien meilleure à la fluctuation de l'heure donnée par le système de sychronisation.

La validation d'événements impulsionnels implique que le signal soit vu par plusieurs détecteurs ayant des bruits non corrélés. De plus, les temps d'arivée d'un signal enregistrés par 3 détecteurs au moins permettent, par triangulation, de remonter à la direction de la source. La différence entre les temps d'arrivée du signal en 2 points de la surface de la Terre est au plus de 43 ms (au plus de 30 ms dans le cas de coïcidences Virgo-LIGO). Toute coïncidence avec un écart temporel supérieur à 30 ms peut donc être rejetée. La précision sur la direction reconstruite dépend de la qualité de l'étiquetage des données dans les détecteurs ayant détecté l'événement, et on aura intérêt à ce qu'elle soit aussi bonne que possible. En particulier, dans le cas de signaux arrivant perpendiculairement au plan formé par 3 détecteurs, la différence des temps d'arrivée est très faible, et une erreur sur ces temps peut être préjudiciable à la localisation de la source.

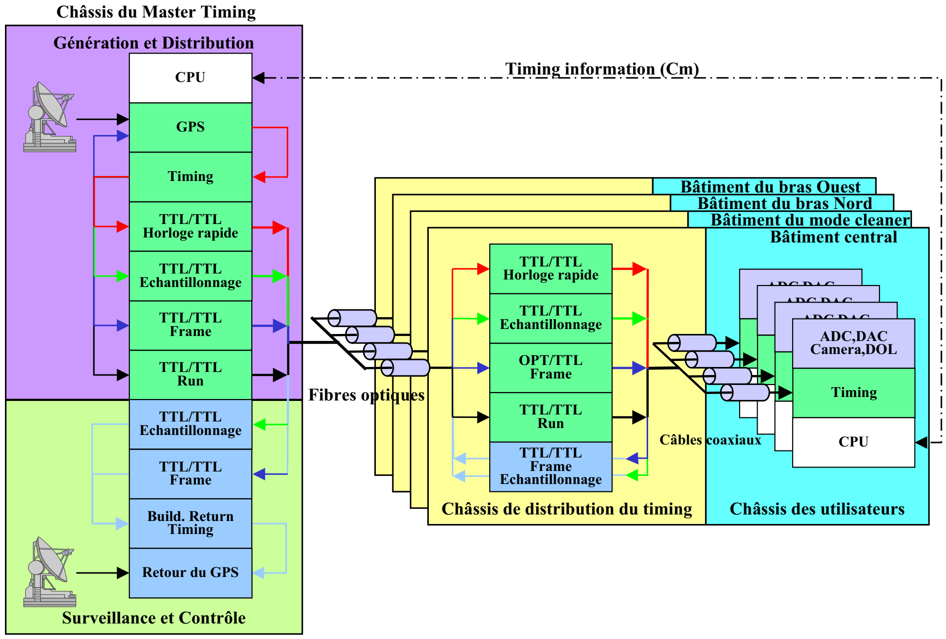


FIG. 3.1 – Organisation du système de sychronisation. (figure : Alain Masserot)

Il est donc important que les différentes expériences de détection des ondes gravitationnelles aient une référence de temps commune. Une différence de 10 μs entre les horloges de Virgo et de LIGO est considérée comme le but à atteindre pour les interféromètres de première génération [57]. La synchronisation entre les systèmes d'acquisition des données de Virgo et LIGO a été mesurée à quelques millisecondes près. Pour atteindre les 10 μs voulus, une solution pourrait être de déplacer une horloge atomique entre les sites [58].

3.3.2 Signaux périodiques

Les signaux périodiques attendus sont ceux des pulsars. Ces signaux ont une fréquence typiquement inférieure à 1 kHz. Pour pouvoir suivre un tel signal grâce à une méthode de filtrage optimal, le signal estimé doit rester cohérent avec le signal reçu. Si on impose que la différence de phase entre ces deux signaux soit inférieure à 1 %, pour une intégration durant 3 ans (10^8 s) d'un signal à 1 kHz, alors le temps doit être connu avec une précision de 10^{-6} s, précision offerte par le GPS.

3.4 Contrôle du système de sychronisation

3.4.1 Fonctionnement de la carte GPS

La carte GPS est munie d'un oscillateur local en quartz, d'une stabilité relative de 10^{-6} environ, c'est-à-dire bien inférieure aux spécifications de Virgo. Cependant, la fréquence de cet oscillateur et l'heure fournie par la carte sont corrigées en fonction des informations reçues du système GPS. On obtient ainsi, sur le long terme, une stabilité équivalente à celle des horloges au césium utilisées par le segment de dontrôle du système GPS. Lorsqu'une différence existe entre le temps donné par la carte GPS et les satellites, une correction de la fréquence est calculée, qui est appliquée progressivement, afin d'éviter des variations brutales. On peut donc avoir des déviations à court terme entre le temps GPS et le temps indiqué en sortie de la carte. Les spécifications de la carte précisent que cette différence est inférieure à 1 μs.

3.4.2 Horloge atomique

L'horloge qui sert à étiqueter les données est directement liée au système GPS. L'antenne GPS nous fournit l'information sur son état, ce qui permet de surveiller la qualité des informations temporelles fournies. Une horloge atomique a été installée, ce qui permet d'avoir un contrôle indépendant. Sur le long terme, sa précision relative (environ 10^{-11}) est inférieure à celle du GPS (environ 10^{-14}), mais elle a une meilleure précision sur le court terme, ce qui permet de détecter des fluctuations rapides de l'horloge calée sur le GPS, par exemple liées à un dysfonctionnement de celui-ci. L'horloge atomique fournit une impulsion par seconde, d'une durée de 400 ns. Le front montant de ce créneau est détecté par une bascule, ce qui déclenche très rapidement l'intégration d'un signal de référence dont l'amplitude est connue à 0.25 % près. Lorsque l'intégrale dépasse une certaine valeur, l'intégration cesse, et la sortie de l'intégrateur est remise à 0. La rampe est numérisée grâce à un ADC (Analog to Digital Converter), puis enregistré dans le frame. Son temps de début est ensuite ajusté. En utilisant cette technique, on obtient une précision bien meilleure sur le temps de début de la rampe que si on avait utilisée la rampe elle-même.

3.4.3 Contrôle de l'heure de début de frame

La carte GPS fournit, outre une horloge rapide à 10 MHz dont dérivent toutes les horloges de Virgo, une impulsion par seconde, d'une durée de 500 ms. Pour une plus grande précision sur l'heure d'arrivée de ce créneau, on réalise la même opération que pour l'horloge atomique. L'heure d'arrivée de ce signal dans le frame permet de surveiller le bon fonctionnement du système d'acquisition de données.

Deux types d'ADC sont utilisés dans Virgo, l'un comportant 4 voies, l'autre 16. Les ADC à 4 voies sont les plus performants. Ils sont utilisés pour la numérisation des signaux en provenance des photodiodes, qui sont des signaux capitaux pour Virgo. Le coût des ADC à 4 voies est trop important pour qu'ils soient utilisés pour tous les signaux à numériser.

ADC à 4 voies

La rampe obtenue précédemment (voir figure 3.2) est tout d'abord ajustée par une droite. Il apparaît que les résidus ont une forme quadratique, non aléatoire. On ajuste donc la rampe avec un polynôme d'ordre supérieur, jusqu'à obtenir des résidus satisfaisants. Le polynôme finalement utilisé est du 4$^{\text{ème}}$ ordre. Les résidus correspondants aux ajustements effectués avec des polynômes d'ordre croissant sont représentés sur la figure 3.3 (colonne de gauche). J'ai mis au point l'algorithme d'ajustement des rampes, qui minimise le χ^2, sur des données enregistrées au LAPP, avec un ADC à 4 voies.

Les distribution des temps de début des rampes de l'horloge atomique sont également représentées sur la figure 3.3 (colonne de droite). Comme on pouvait s'y attendre, on peut voir une diminution de la dispersion de ces valeurs avec l'augmentation du degré du polynôme ajusté.

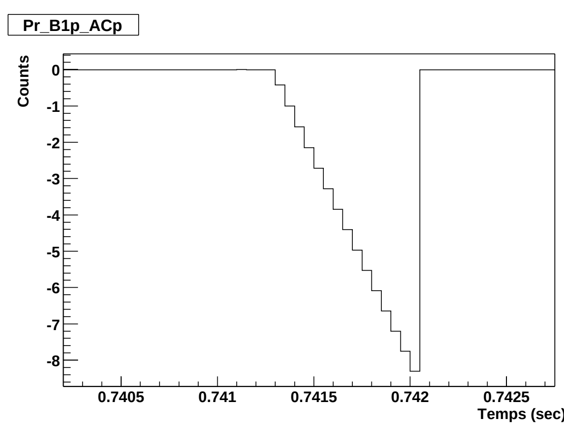


FIG. 3.2 – Forme d'une rampe, numérisée avec un ADC à 4 voies.

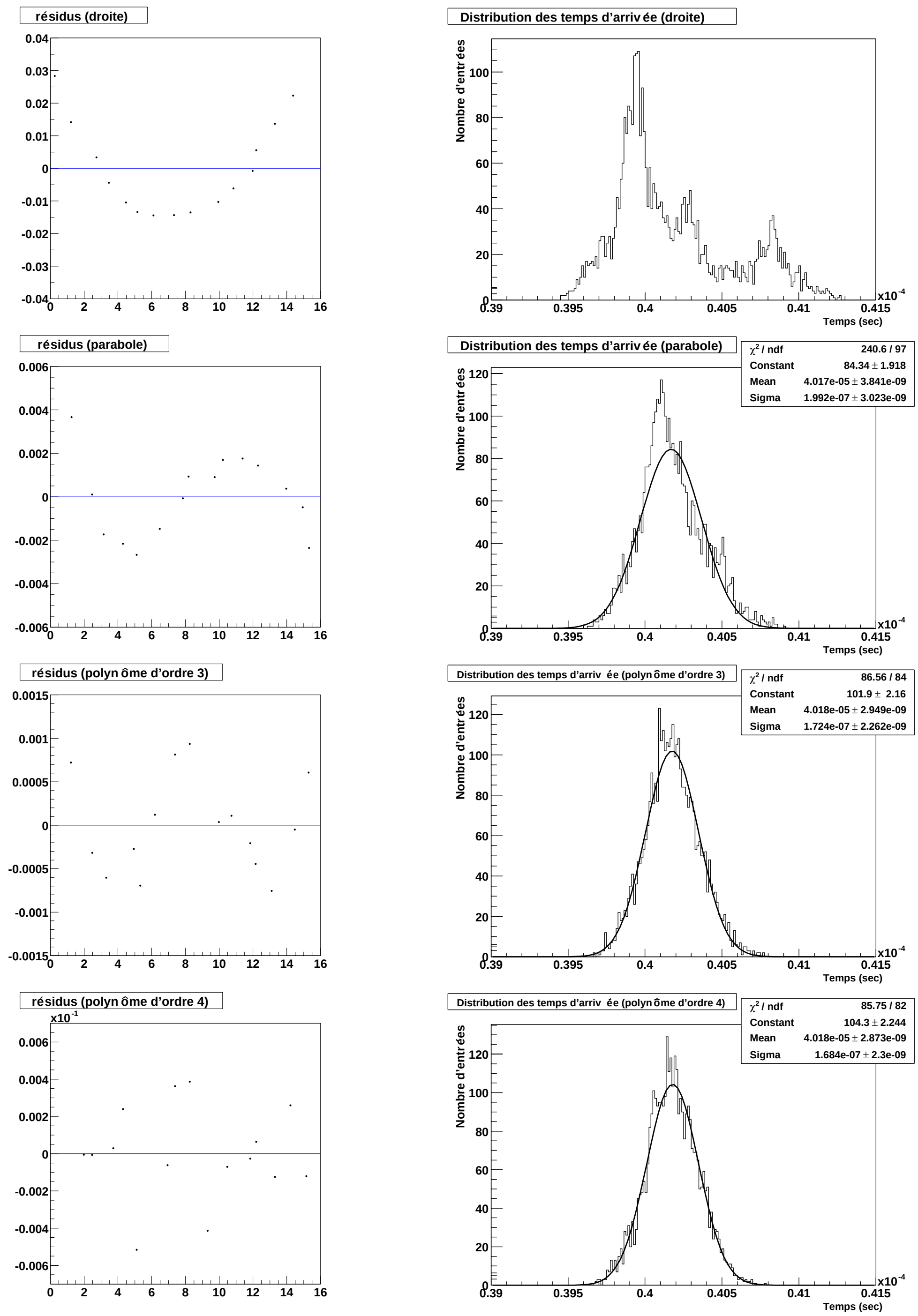


FIG. 3.3 – Résidus après ajustement par des fonctions pôlynomiales de différents ordres (colonne de gauche), et distribution des différences entre 2 temps d'arrivée consécutifs, selon le type d'ajustement réalisé (colonne de droite). La valeur moyenne représente une dérive entre l'horloge atomique et le quartz, qui n'était pas asservi sur le système GPS au moment des mesures.

ADC à 16 voies

Sur le site de Virgo, les ADC que nous avons utilisé comportent 16 voies. On peut voir sur la figure 3.4 que ces ADC introduisent un bruit systématique dans la numérisation des rampes. Les résidus correspondants aux ajustements effectués avec des polynômes d'ordre croissant sont représentés sur la figure 3.5. On peut voir que, quel que soit l'ordre du polynôme utilisé (inférieur à 4), les résidus gardent un caractère systématique.

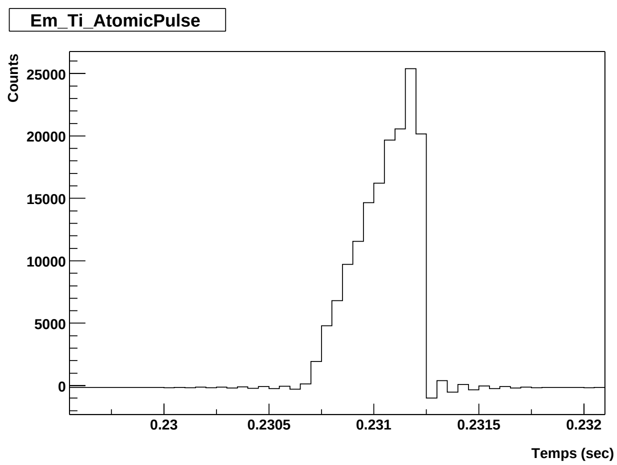


FIG. 3.4 – Forme d'une rampe, numérisée avec un ADC à 16 voies.

3.4.4 Dérive de l'horloge atomique

La figure 3.6 montre la variation de l'heure d'arrivée de la rampe de l'horloge atomique dans le frame. On peut voir une dérive linéaire de cette heure d'arrivée, à laquelle se superposent des effets de numérisation.

A mesure que l'horloge atomique dérive par rapport à l'horloge verrouillée sur le GPS, le temps de début de la rampe se décale par rapport au pas d'échantillonnage des ADC. Les valeurs des marches de la rampe issues de la numérisation vont donc varier avec le temps. Cette variation est périodique car, au bout d'un certain temps, l'horloge atomique a dérivée d'un temps égal à la période d'échantillonnage de l'ADC, soit 50 μs. On effectue un ajustement des points par une dérive constante à laquelle se superpose une sinusoïde :

$$f(t) = \alpha.x + \beta + \gamma.\sin(\omega t + \phi) \tag{3.1}$$

Le résultat de l'ajustement est le suivant :

$$f(t) = 3.37 \times 10^{-5}.t - 5.16 \times 10^{-6} + 8.71 \times 10^{-6}.\sin(4.19t + 0.87) \tag{3.2}$$

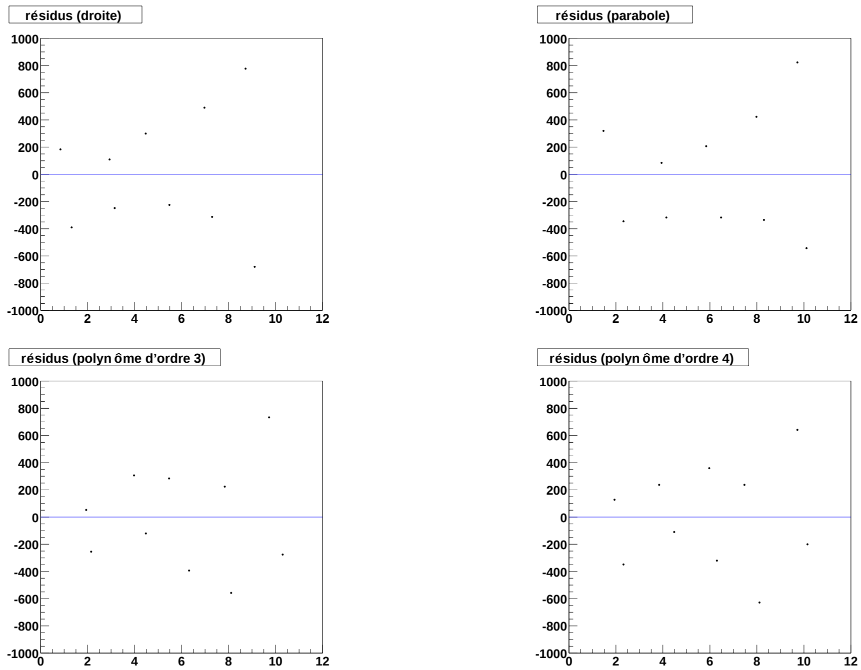


FIG. 3.5 – Résidus après ajustement par des fonctions pôlynomiales de différents ordres .

La dérive de l'horloge est donc de 3.37×10^{-5}s/jour=3.9×10^{-10} s/s, et la période de la sinusoïde est de 129 500 s $\simeq$ 50 $\mu s/3.9 \times 10^{-10}$. L'effet qui se superpose à la dérive linéaire est bien un bruit dû à la numérisation. La dérive de l'horloge atomique est supérieure aux spécifications. Ceci est dû à l'existence un offset réglable, qui n'a pas été mis à 0. La dérive enregistrée ici est néanmoins tout à fait acceptable pour faire des comparaisons entre l'heure donnée par la carte GPS et l'heure donnée par l'horloge atomique.

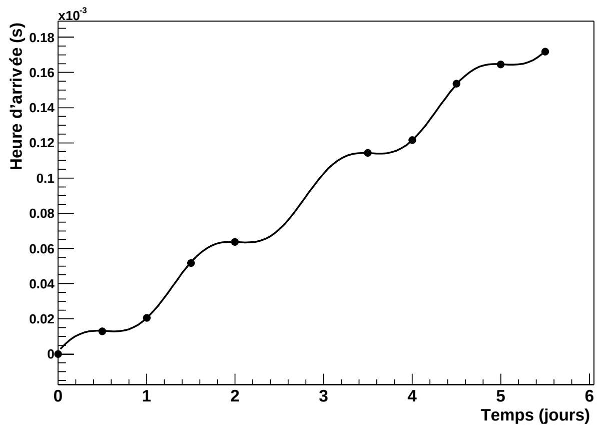


FIG. 3.6 – Dérive de l'horloge atomique par rapport au GPS (l'heure d'arrivée de la première rampe dans le frame est ramenée à 0).

3.4.5 Contrôle de la carte GPS sur 1 an

Un an de données issues du système de sychronisation, enregistrées entre juin 2002 et mai 2003, ont été étudiées. Les règles de conversion entre les secondes GPS et la date sont données en annexe E[1]. Les données exploitables représentent environ 75 % de cette période. Le tableau 3.3 donne la liste des informations de la carte GPS qui sont surveillées pendant la prise de données. Cette étude se concentre sur les informations envoyées par la 1[ère] antenne GPS, c'est-à-dire les bits 16 à 23. La passage d'un des bits 16,17,18,21,22 à 1 indique un mauvais fonctionnement de l'antenne, qui peut influer sur la qualité des données. Pendant une année, les bits 16,17,18,21 se sont allumés, comme le montre la figre 3.7. Au total, des messages d'erreur ont été reçus pendant 6848 secondes, qui se répartisssent comme suit :

No. du bit de Qc	Nombre de messages
16	1369
17	2998
18	6721
21	221

TAB. 3.2 – Messages reçus de la 1[ère] antenne GPS entre juin 2002 et mai 2003.

[1]On peut également utiliser la fonction FrStrGTime de la libraire Frame.

Elément concerné	No. du bit	Nom	Fonction
2ème antenne GPS	31	Gps2Packet4A	Position de l'antenne
	30	Gps2Failure	Problème majeur
	29	Gps2PosFix	Pas de corrections de la position
	28	Gps2Status	Statut du récepteur
	27	Gps2Packet41	Temps GPS
	26	Gps2FreqOff	Problème sur le temps
	25	Gps2TimeOff	Problème sur la fréquence
	24	Gps2Flywheel	Antenne non verrouillée sur le GPS
1ère antenne GPS	23	Gps1Packet4A	Position de l'antenne
	22	Gps1Failure	Problème majeur
	21	Gps1PosFix	Pas de corrections de la position
	20	Gps1Status	Statut du récepteur
	19	Gps1Packet41	Temps GPS
	18	Gps1FreqOff	Problème sur le temps
	17	Gps1TimeOff	Problème sur la fréquence
	16	Gps1Flywheel	Antenne non verrouillée sur le GPS
4ème bâtiment	15	masterEnd	
	14	bldgFrmErr4	Erreur de frame
	13	bldgSplErr4	Erreur d'échantillonnage
	12	bldgRttErr4	Mauvais temps de retour
3ème bâtiment	11	unused3	Inutilisé
	10	bldgFrmErr3	Erreur de frame
	9	bldgSplErr3	Erreur d'échantillonnage
	8	bldgRttErr3	Mauvais temps de retour
2ème bâtiment	7	unused2	Inutilisé
	6	bldgFrmErr2	Erreur de frame
	5	bldgSplErr2	Erreur d'échantillonnage
	4	bldgRttErr2	Mauvais temps de retour
1er bâtiment	3	unused1	Inutilisé
	2	bldgFrmErr1	Erreur de frame
	1	bldgSplErr1	Erreur d'échantillonnage
	0	bldgRttErr1	Mauvais temps de retour

TAB. 3.3 – Décomposition du message de qualité Qc.

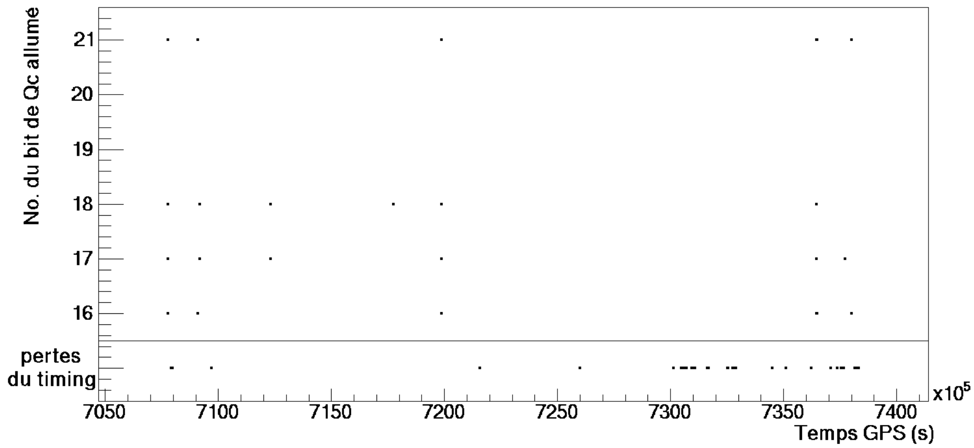


FIG. 3.7 – Incidents GPS et perte des données du système de sychronisation.

L'ensemble de ces messages d'erreurs se divise en 11 incidents GPS, dont les déroulements sont représentés sur les figure 3.8 et 3.9. Ces incidents présentent tous une structure différente, et il est difficile, en l'absence d'autres informations – telles que le nombre de satellites en vue de l'antenne –, de comprendre leur origine. Les durées de cet incidents sont variables : de quelques secondes à plus d'une heure. La durée cumulée de ces incidents est de l'ordre de 3 heures. Il paraît peu probable qu'un tel nombre d'incidents (11 incidents pour 8 mois de données efficaces) soit dû à des problèmes du système GPS lui-même.

On peut néanmoins remarquer que ces incidents ne sont vraisemblablement pas liés à la pertes de données en provenance du système de sychronisation.

3.4.6 Exemple de dysfonctionnement de l'horloge GPS

La carte reliée à l'antenne GPS donne en permanence son état. Le lundi 26 mai 2003 (temps GPS 738007951), elle a émis un message d'erreur, dit de "flywheeling", c'est-à-dire qu'elle n'était plus verrouillée sur le système GPS, et ce pendant 37 secondes. Elle a également envoyé le paquet "PosFix", indiquant qu'elle n'effectuait plus de corrections de position, en l'absence des données en provenance des satellites.

On peut effectivemenent remarquer sur la figure 3.10 que l'heure d'arrivée de la rampe émise par l'horloge atomique, indépendante du système GPS, se décale au moment où l'oscillateur en quartz ne reçoit plus les corrections du GPS. On peut également mesurer la progressivité de la correction appliquée à

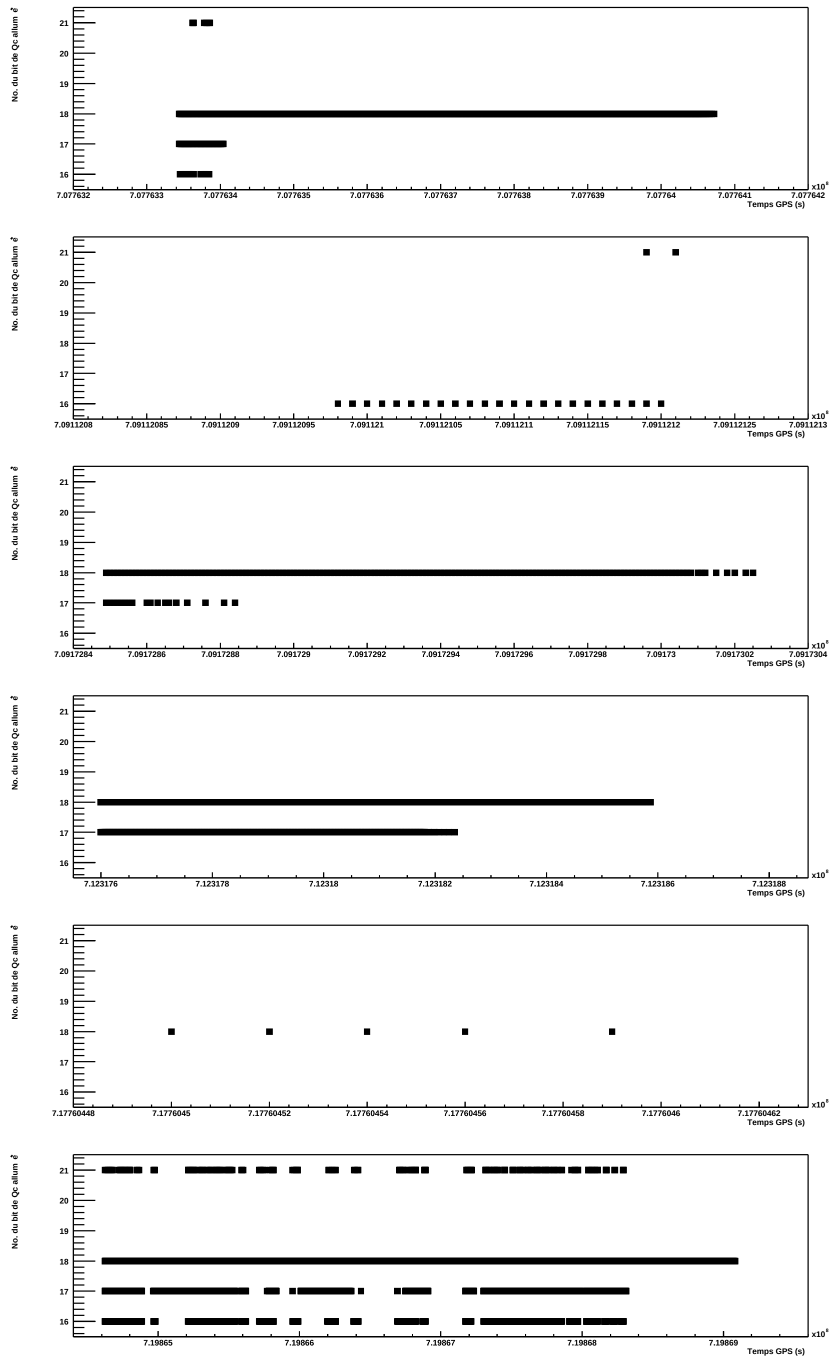


FIG. 3.8 – Déroulement des incidents GPS durant la période juin 2002 - mai 2003 (1).

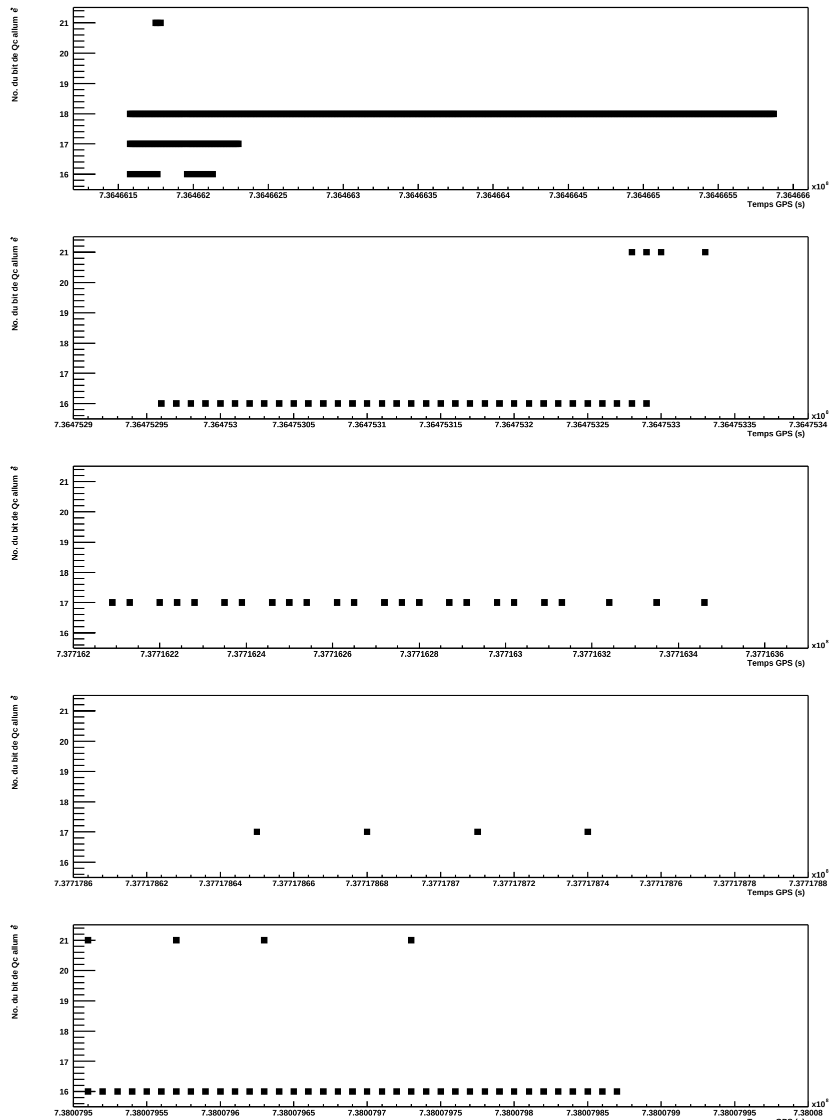


FIG. 3.9 – Déroulement des incidents GPS durant la période juin 2002 - mai 2003 (2).

l'horloge de la carte GPS : il faut en effet 1 minute pour que l'heure d'arrivée de la rampe revienne à son niveau antérieur, dont elle s'était écartée de quelques fractions de μs.

Il apparaît donc comme important d'avoir une horloge atomique, qui permet de contôler l'horloge qui estampille les frames. Il se peut en effet que cette horloge ne fonctionne pas normalement, même si la carte GPS n'envoie plus de message d'erreur après une période troublée. Les données prises pendant cette période devront être rejetées. Il est également possible que les informations temporelles issues de la carte GPS soient fausses sans que cela ne soit annoncé dans le mot de qualité Qc, auquel cas il est très important de pouvoir comparer avec l'horloge atomique.

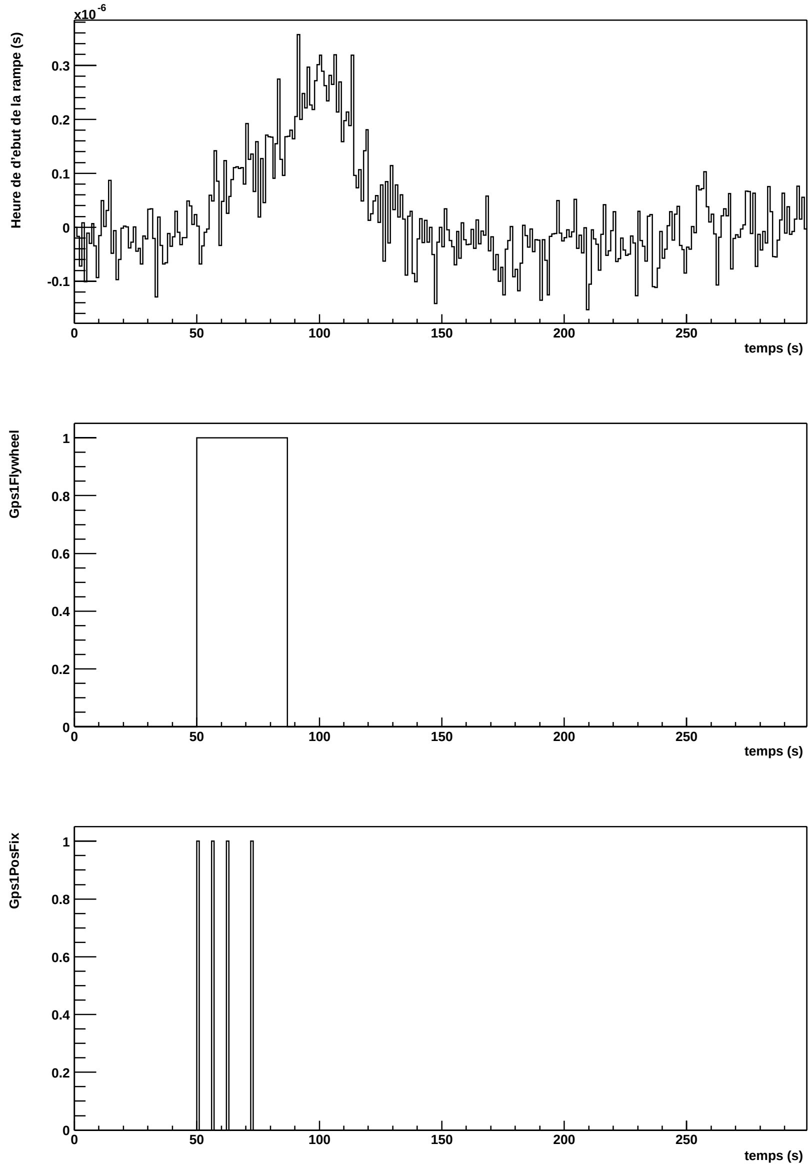


FIG. 3.10 – Exemple d'un dysfonctionnement de l'horloge GPS.

Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre l'importance du système de sychronisation de Virgo et son architecture, qui distribue les horloges dans tous les bâtiments de l'expérience, et qui écrit l'heure dans les données enregistrées. Ce système est en permanence relié au système GPS, ce qui permet d'avoir une excellente stabilité du temps sur le long terme, et d'avoir une horloge commune avec les autres expériences de recherche d'ondes gravitationnelles.

La surveillance du bon fonctionnement du système de sychronisation est essentiel, à la fois pour les signaux impulsionnels et pour les signaux périodiques. Celle-ci est assurée par le statut de la carte GPS, qui distribue les horloges, et par la présence d'une horloge atomique au rubidium, qui permet une vérification indépendante. Nous avons d'ailleurs vu que cette horloge a permis d'étiqueter comme 'suspectes' des données alors que le fonctionnement de la carte GPS était annoncé comme normal.

Chapitre 4

Propriétés des pulsars et motivations

Introduction

L'existence des étoiles à neutrons a été prédite par Landau [59], peu après la découverte du neutron en 1932. Baade et Zwicky ont proposé, en 1934 [60], que les étoiles à neutrons constituaient le dernier stade de l'évolution d'une étoile ayant explosé en supernova. Oppenheimer et Volkoff dérivèrent un modèle d'étoile à neutrons en 1939 [61]. Le premier pulsar fut découvert en 1967 [62], et Gold émit l'hypothèse que les pulsars sont des étoiles à neutrons en rotation[63].

Dans ce chapitre, je décris la structure d'une étoile à neutrons telle qu'on la conçoit aujourd'hui, quels sont certains des mécanismes possibles d'émission d'ondes gravitationnelles, ainsi que les propriétés des pulsars répertoriés et les motivations de notre étude.

4.1 Les pulsars

4.1.1 Structure d'une étoile à neutrons

Une étoile à neutrons est le résidu de l'explosion d'une étoile de masse initiale supérieure à 8 $M_\odot$ (masses solaires) [64] , ou de l'effondrement d'une naine blanche qui, ayant accrété de la matière d'un compagnon, dépasse la masse limite de Chandrasekhar, d'environ 1.4 $M_\odot$. Il reste alors un corps compact d'une masse de 1.4 $M_\odot$ au moins, pour un rayon de 10 km environ, soit une densité $\rho \sim 10^{15}$ g/cm^3, proche de la densité nucléaire[1].

[1] Des densités supérieures à 5×10^{15} g/cm^3 sont instables vis-à-vis de la gravité [65].

Selon les modèles actuels, une étoile à neutrons serait constituée de couche concentriques [66]. Les épaisseurs de ces couches dépendent des modèles. Recensons les, de l'extérieur vers l'intérieur. La *croûte extérieure* aurait une épaisseur de quelques centaines de mètres, et elle serait constituée d'un réseau cubique centré de noyaux atomiques baignant dans une "mer" uniforme d'électrons. La *croûte intérieure* aurait une densité supérieure, elle serait formée du même réseau de noyaux, mais un gaz de neutrons apparaîtrait à l'intérieur du cristal. Elle aurait une épaisseur de l'ordre du km. Aux densités encore plus élvées, l'étoile serait constituée d'une soupe homogène de protons, de neutrons et d'électrons, possiblement dans une phase supra-conductrice. L'existence d'un cœur est encore plus spéculative. Il serait constitué d'un condensat de pions, de kaons et/ou d'hypérons, ou de quarks. Un cristal de neutrons est également envisagé. La masse maximale d'une étoile à neutrons est de 2 à 3 $M_{\odot}$.

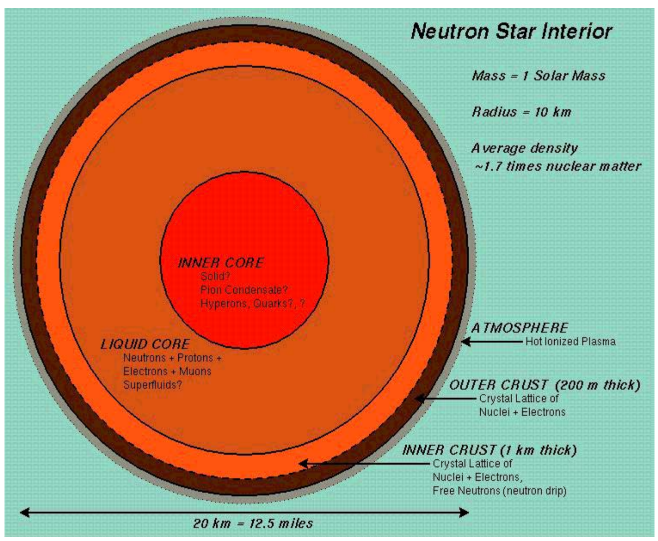


FIG. 4.1 – Structure d'une étoile à neutrons.

4.1.2 Mécanismes d'émission d'ondes électromagnétiques

Les pulsars possèdent des champ magnétiques très intenses, pouvant atteindre 10^12 T. Si ce champ n'est pas parfaitement aligné avec l'axe de rotation du pulsar, un champ électrique intense règne au voisinage de la surface de l'étoile. Ce champ est assez puissant pour arracher de la matière à l'étoile [67]. Ainsi, la magnétosphère d'une étoile à neutrons n'est pas vide. Ces particules arrachées sont accélérées par le champ magnétique, et émettent un rayonnement électromagnétique qui a la même forme que le faisceau d'un phare tournant, comme le montre la figure 4.2. C'est ce rayonnement intermittent qui est détecté sur Terre.

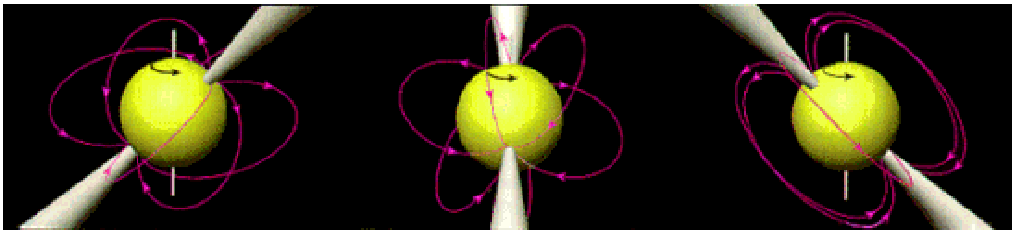


FIG. 4.2 – Forme du faisceau électromagnétique émis par un pulsar. (d'après [68])

4.2 Mécanismes d'émission d'ondes gravitationnelles

Comme le montre la relation (1.46), un corps dont le mouvement quadrupôlaire est nul ne rayonne pas d'ondes gravitationnelles, il est donc nécessaire qu'une étoile à neutrons présente un défaut de symétire par rapport à son axe de rotation. Ce défaut de symétrie peut avoir plusieurs origines.

4.2.1 Précession

Considérons une ellipsoïde rigide de moments d'inertie $I_1 = I_2 \neq I_3$ (forme de ballon de rugby). Si le moment angulaire $\vec{J}$ de l'étoile n'est pas aligné avec son moment d'inertie I_3, il y a précession de ce dernier, avec une vitesse $\Omega = J/I_1$. Si on appelle θ l'angle entre ces deux directions, et α l'angle entre la ligne de visée et la direction de $\vec{J}$ (pris égal à 0 quand $\vec{J}$ pointe vers l'observateur), alors l'amplitude des ondes gravitationnelles émises est [69] :

$$h_+ = h_o \sin\theta \left(\frac{\cos\theta \sin 2\alpha}{2} \cos\Omega t + \sin\theta (1 + \cos^2\alpha) \cos 2\Omega t \right) \quad (4.1)$$

$$h_\times = h_o \sin\theta \left(\cos\theta \sin\alpha \sin\Omega t + 2 \sin\theta \cos\alpha \sin 2\Omega t \right), \text{ où} \quad (4.2)$$

$$h_o = \frac{2G}{c^4} \frac{\epsilon I_1}{r} \Omega^2 \text{ et} \quad (4.3)$$

$$\epsilon = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \text{ est l'ellipticité du pulsar} \quad (4.4)$$

Il y a donc émission à 2 fréquences. La relation 4.3 peut se réécrire comme suit :

$$h_o = 1.05 \times 10^{-26} \left(\frac{I_1}{10^{38} \text{ kg m}^2} \right) \left(\frac{10 \text{ kpc}}{r} \right) \left(\frac{\nu}{100 \text{ Hz}} \right)^2 \left(\frac{\epsilon}{10^{-6}} \right) \tag{4.5}$$

4.2.2 Rotation d'une étoile liquide déformée

Les forts champs magnétiques présents à l'intérieur des étoiles à neutrons peuvent entraîner des déformations [70], si l'axe magnétique n'est pas aligné avec l'axe de rotation, phénomène supposé à l'origine du mécanisme d'émission des pulsars.

$$h_+ = h_o \sin\theta \left(\frac{\cos\theta \sin 2\alpha}{2} \cos\Omega t + \sin\theta \left(1 + \cos^2\theta\right) \cos 2\Omega t \right) \tag{4.6}$$

$$h_\times = h_o \sin\theta \left(\cos\theta \sin\alpha \sin\omega t - 2 \sin\theta \cos\alpha \sin 2\Omega t\right) \tag{4.7}$$

Ce sont, à des conventions près (voir discussion dans [70]), les mêmes formules que 4.1 et 4.2. Dans ces relations, l'angle θ mesure l'ecart entre la direction du champ magnétique et l'axe de la déformation. Mais l'amplitude s'exprime différemment :

$$h_o = 3\beta \frac{R^2 \dot{P}}{c r P \sin^2\alpha} \tag{4.8}$$

$$= 3.24 \times 10^{-30} \frac{\beta}{\sin^2\alpha} \left(\frac{R}{10 \text{ km}} \right)^2 \left(\frac{\text{kpc}}{r} \right) \left(\frac{1 \text{ ms}}{P} \right) \left(\frac{\dot{P}}{10^{-13}} \right) \tag{4.9}$$

β est un facteur sans dimension reliant le moment magnétique dipôlaire de l'étoile à son ellipticité. Il peut varier entre quelques unités et plusieurs milliers pour un intérieur supracondutceur. L'angle α peut être petit ; mais ces relations ne sont plus valables pour $\alpha < 10^{-2}$.

4.2.3 Instabilités triaxiales

Lorsque le rapport entre l'énergie cinétique de rotation et la valeur absolue du potentiel gravitationnel d'une étoile à neutrons dépasse un certain seuil, celle-ci peut spontanément rompre sa symétrie axiale, et évoluer d'un sphéroïde de MacLaurin (axisymétrique) vers un ellipsoïde triaxiale [71].

L'émission d'ondes gravitationnelles qui peut en résulter ne conserve pas le moment angulaire, mais conserve la circulation de fluide à l'équateur, et l'état final est un ellipsoïde de Jacobi - en rotation rigide autour de son plus petit axe dans un repère inertiel. Ce phénomène porte le nom d'*instabilité CFS* [72, 73]. Cette évolution serait plus probable chez les étoiles à neutrons jeunes, plus chaudes et moins visqueuses.

La viscosité du fluide entraîne une dissipation mécanique de l'énergie, tout en préservant le moment angulaire, et l'etat final est un ellipsoïde de Dedekind - qui possède une forme triaxiale fixe dans un repère inertiel, avec une circulation interne de fluide [74]. Cette évolution serait plus probable chez les étoiles à neutrons en accrétion.

4.2.4 Accrétion

Certaines étoiles à neutrons sont en orbite autour d'un compagnon. Si le compagnon dépasse de son lobe de Roche[2], il y a alors accrétion de matière, avec un taux $\dot{M}$. Dans le cas des étoiles à faible champ magnétique, le gain de moment angulaire dû à l'accrétion est supérieur aux pertes, et la vitesse angulaire augmente, jusqu'à atteindre un point d'instabitlité, où l'étoile acquiert une forme triaxale. La déformation ainsi induite entraîne une perte de moment angulaire par émission d'ondes gravitationnelles , qui vient contrebalancer l'accrétion [75, 76]. On obtient une amplitude

$$h = 2.2\times 10^{-27} \left(\frac{M}{1.4 M_\odot}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{R}{10 \text{ km}}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1 \text{ kHz}}{m\ \nu}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{10 \text{ kpc}}{r}\right) \left(\frac{\dot{M}}{10^{-8} M_\odot/\text{yr}}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.10}$$

où $m = l$ (mode f) sont les modes des harmoniques sphériques considéreés.

4.3 Propriétés générales des pulsars répertoriés

4.3.1 Propriétés spatiales

Position

La figure 4.3 montre la distribution dans le ciel des pulsars répertoriés dans le catalogue ATNF [77]. La projection employée préserve les rapports entre les surfaces, et transforme la sphère céleste en une ellipse (projection d'Hammer-Aitoff). Il apparaît que les pulsars répertoriés sont surtout situés dans le plan galactique, et que les pulsars binaires répertoriés sont répartis de façon plus aléatoire.

[2]Le lobe de Roche d'une étoile appartenant à un système binaire définit la région où l'attraction gravitationnelle prépondérante est due à cette étoile.

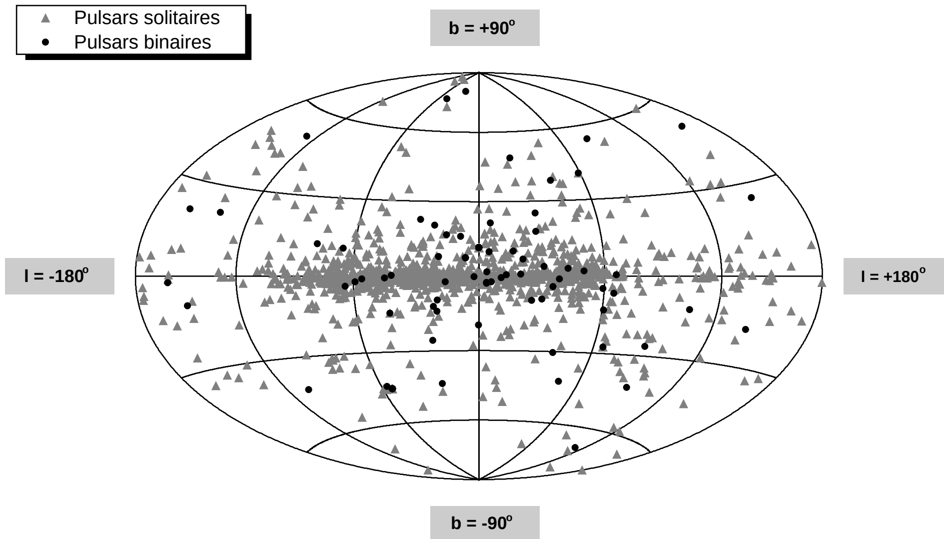


FIG. 4.3 – Répartition des pulsars répertoriés sur la voûte céleste (projection d'Hammer-Aitoff).

Distance

La figure 4.4 montre la distribution des distances des pulsars répertoriés ayant une fréquence de rotation supérieure à 5 Hz. Il apparaît que les distributions des distances des pulsars solitaires et des pulsars en système binaire sont sensib

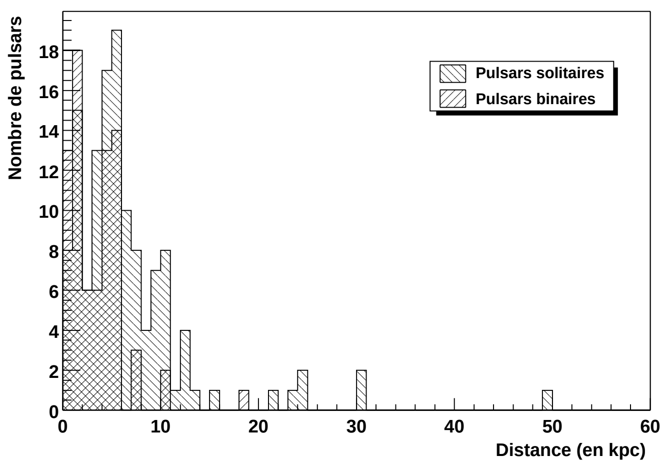
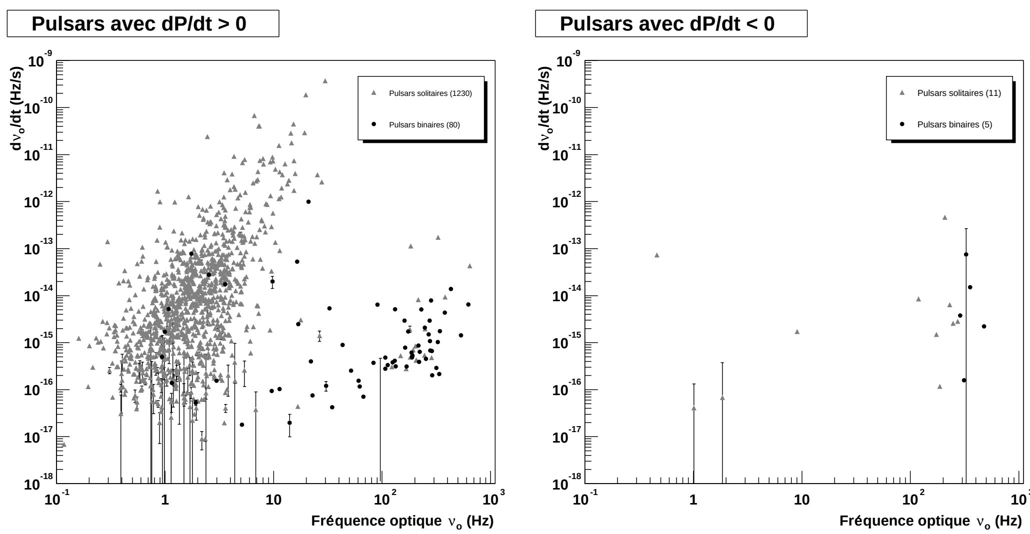


FIG. 4.4 – Distance Terre-pulsar pour les pulsars répertoriés dont la fréquence de rotation est supérieure à 5 Hz.

4.3.2 Propriétés temporelles

La figure 4.5 montre le ralentissement en fonction de la fréquence pour les pulsars répertoriés. Alors que la fréquence de la quasi-totalité des pulsars diminue, elle augmente pour quelques-uns d'entre eux. Pour les pulsars en système binaire, ceci peut être expliqué par de l'accrétion de matière s'échappant de leur compagnon, ce qui est une source possible d'ondes gravitationnelles. Pour les pulsars solitaires, deux causes sont possibles : (1) soit ils appartiennent à un système binaire qui n'a pas été résolu, (2) soit ces pulsars subissent une accélération gravitationnelle vers une zone de forte densité [78].



Pulsars ralentissant. Pulsars en accélération.

FIG. 4.5 – Propriétés temporelles des pulsars répertoriés.

4.4 Pulsars binaires

4.4.1 Excentricité

La figure 4.6 et le tableau 4.1 donnent la distribution des excentricités des orbites des pulsars en système binaire répertoriés. Il apparaît qu'une majorité d'entre eux possède une orbite quasi-circulaire.

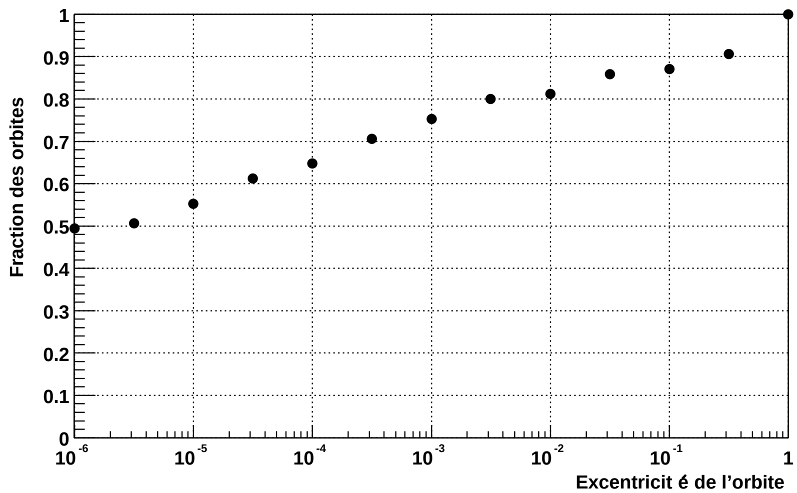


FIG. 4.6 – Fraction des orbites dont l'excentricité est inférieure à une certaine valeur.

Excentricité	Nombre de systèmes binaires
$e = 0$	39/85 (46 %)
$e < 10^{-6}$	42/85 (49 %)
$e < 10^{-5}$	47/85 (55 %)
$e < 10^{-4}$	55/85 (65 %)
$e < 10^{-3}$	64/85 (75 %)
$e < 10^{-2}$	69/85 (81 %)
$e < 10^{-1}$	74/85 (87 %)

TAB. 4.1 – Nombre de système binaires dont l'excentricité est inférieure à une certaine valeur.

4.4.2 Fréquences et fréquences orbitales

Fréquence du pulsar

La figure 4.7 montre la distribution de la fréquence des pulsars pour les pulsars en système binaire répertoriés dont l'excentricité est inférieure à 10^{-3}. On ne connaît pas à ce jour de pulsar binaire en rotation à plus de 622 Hz.

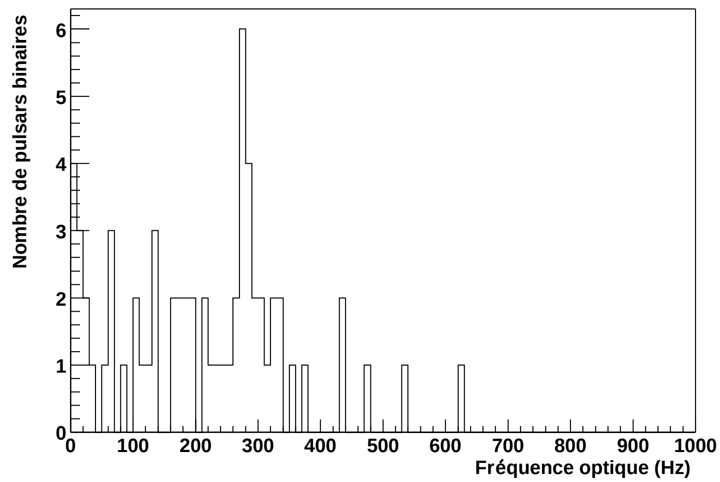


FIG. 4.7 – Distribution de la fréquence des pulsars pour les pulsars en système binaire répertoriés dont l'excentricité est inférieure à 10^{-3}.

Fréquence orbitale

La figure 4.8 montre la distribution de la fréquence orbitale pour les pulsars en système binaire répertoriés dont l'excentricité est inférieure à 10^{-3}. Il apparaît que cette quantité est inférieure à 2×10^{-4} Hz.

4.4.3 Amplitude de l'effet Doppler orbital

La figure 4.9 montre la distribution de l'amplitude de l'effet Doppler pour les pulsars en système binaire répertoriés dont l'excentricité est inférieure à 10^{-3}, grandeur qui s'exprime ainsi :

$$\Delta\nu = \frac{2\pi}{P_b}\frac{a_1 . \sin i}{c}\nu \qquad (4.11)$$

Il apparaît que cette quantité est inférieure à 0.04 Hz.

4.5 Motivations de l'étude

On peut diviser la courbe de sensibilité de Virgo (figure 2.4) en 3 domaines :

1. Un domaine très basses fréquences (en dessous de quelques Hz), où la sensibilité est limitée par le bruit sismique. Aucune détection n'est attendue dans cette plage de fréquences.

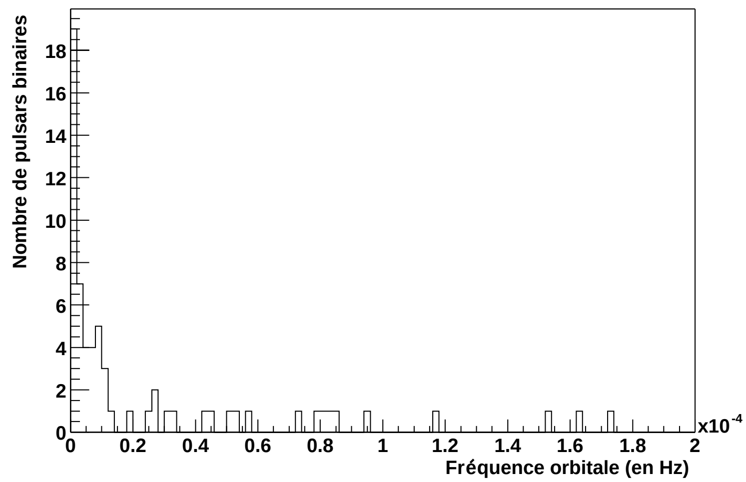


FIG. 4.8 – Distribution de la fréquence orbitale pour les pulsars en système binaire répertoriés dont l'excentricité est inférieure à 10^{-3}.

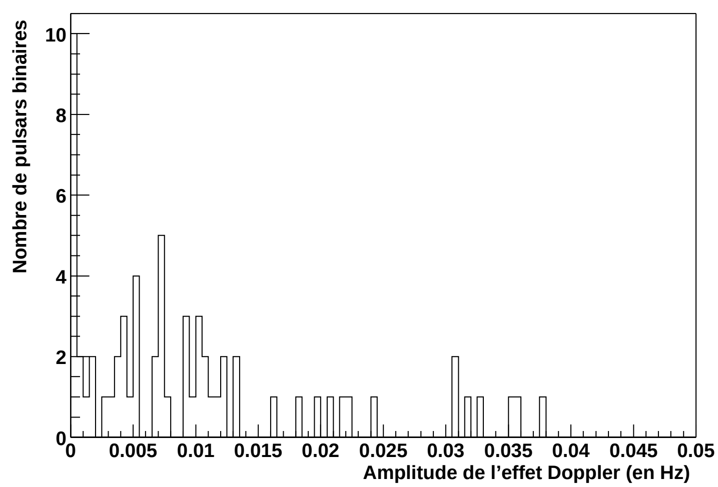


FIG. 4.9 – Distribution de l'amplitude de l'effet Doppler pour les pulsars en système binaire répertoriés dont l'excentricité est inférieure à 10^{-3}.

2. Un domaine basse fréquences (typiquement en dessous de 10 Hz), où le bruit du détecteur est dominé par le bruit thermique des suspensions.
3. La plage de fréquence allant de 10 Hz à 10 kHz, où la sensibilité est meilleure que $10^-21/\sqrt{\text{Hz}}$, et la détection de pulsars est envisagée.

A partir la figure 4.5, on peut noter que :

1. La fréquence optique de la grande majorité des pulsars répertoriés est inférieure à 10 Hz, c'est-à-dire en dehors de la zone où la sensibilité de Virgo sera suffisante pour permettre des détections.
2. Au-dessus de 5 Hz (il faudra alors rechercher l'émission d'ondes gravitationnelles à la fréquence double de la fréquence optique), 37 % des pulsars répertoriés appartiennent à un système binaire. Au-dessus de 10 Hz, 57 % des pulsars répertoriés appartiennent à un système binaire.

Les méthodes développées actuellement sont adaptées au pulsars solitaires, et ne tiennent pas compte des spécificités des pulsars binaires, qui constituent la majorité des pulsars accessibles à Virgo. Il est donc important de mettre au point des méthodes adaptées à la recherche de ce type d'objets.

Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre que plusieurs effets pouvaient être à l'origine d'une émission d'ondes gravitationnelles : la rotation d'une étoile déformée, la précession de son axe de rotation, ou encore des phénomènes d'accrétion. Les calculs ne sont pas très optimistes, mais il sont basés sur des modèles d'objets extrêmement complexes et assez mal connus. Les propriétés des pulsars répertoriés ont ensuite été détaillées, en particulier leur distribution en fréquence, et l'excentricité des orbites des pulsars en système binaire. Il apparaît ainsi que la majorité des orbites sont circulaires, entraînant un effet Doppler sinusoïdal (*cf* chapitre 5) et que, dans la bande de fréquence où la sensibilté de Virgo est suffisamment bonne, la majorité des pulsars appartiennent à un système binaire, d'où l'importance d'une telle étude. La simultaion du signal et la mise au point de méthodes de recherche adaptées à ces pulsars particuliers fait l'objet de cette thèse.

Chapitre 5

Simulation du signal

Introduction

Dans la phase de mise au point du détecteur Virgo, il est très important de pouvoir simuler le comportement de ses différents éléments, aussi bien du point de vue optique que mécanique. Afin de préparer l'analyse des données, il faut également pouvoir simuler le bruit de l'interféromètre, ainsi que les différentes sources d'ondes gravitationnelles prévues. En effet, la mise au point des méthodes de recherche des pulsars en système binaire utilise des données simulées, traitées comme si elles provenaient du détecteur. Ces méthodes pourront ensuite être appliquées à des données réelles. Si un signal a pu être détecté dans les données simulées, il pourra également être détecté dans les données réelles.

Dans l'expérience Virgo, cette fonction est assurée par le programme SIESTA (Simulation of Interferometric Experiment Sensitive To grAvitational waves) [79]. Ce chapitre est consacré à la desciption du fonctionnement de SIESTA, et de ma contribution à ce programme, qui a porté sur la mise un point d'un module de simulation pour les pulsars en système binaire, la mise à jour des éphémérides du mouvement de la Terre, et l'adaptation d'un nouveau générateur de nombres aléatoires.

5.1 SIESTA

5.1.1 Fonctionnement du programme

SIESTA est un assemblage de modules, écrits en langage `C` orienté objet, qui permettent de décrire le comportement des différents aspects du détecteur (optiques, mécaniques, électroniques) ainsi que les sources d'ondes gravitationnelles connues (coalescencs binaires, supernovæ et sources périodiques).

SIESTA est totalement intégré à l'ensemble des outils informatiques de Virgo. Il permet en particulier d'écrire des données ayant le même format que les données provenant du détecteur, et de mettre ainsi au point des algorithmes directement utilisables sur les données réelles.

Il fonctionne dans le domaine temporel, à partir de "fichiers de cartes". Ces fichiers de cartes, écrits par les utilisateurs, définissent le contenu de la simulation. Ce principe permet à chaque utilisateur d'écrire un fichier de carte répondant spécifiquement à son besoin. La construction d'un fichier de cartes est décrite dans [80].

Intéressons-nous maintenant aux modules `MEpulsar` et `MEbinaruPulsar`, permettant respectivement de simuler les ondes gravitationnelles émises par les pulsars solitaires et en système binaire.

5.1.2 Le module MEpulsar

Ce module a été mis au point par Xavier Grave [81]. Il permet la simulation du signal d'ondes gravitationnelles émises par des pulsars. Les paramètres d'entrée sont les suivants :

1. l'amplitude h du signal
2. la fréquence ν de rotation du pulsar
3. les coordonnées équatoriales (α, δ) du pulsar
4. la polarisation ψ de l'onde gravitationnelle
5. l'angle j entre l'axe de rotation du pulsar et la direction d'émission de l'onde
6. l'angle γ entre l'axe de rotation et l'axe de déformation du pulsar [70]

Ce sont les 7 premiers paramètres d'entrée de la fonction `MEbinaryPulsar`.

5.2 Le nouveau module MEbinaryPulsar

Conventions

Tout au long de cette thèse, les symboles utilisés sont les suivants :

c	:	vitesse de la lumière dans le vide ($299\,792\,458\ m.s^{-1}$)
G	:	constante gravitationnelle ($6.673 \times 10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$)
$a_1,\ a_2,\ a$	:	demi-grand axe des orbites du pulsar, du compagnon et relative
$m_1,\ m_2,\ M$	:	masse du pulsar, du compagnon et masse totale
i	:	angle d'inclinaison de l'orbite
		(angle entre le moment cinétique orbital et la ligne de visée)
e	:	excentricité de l'orbite du pulsar
$\omega,\ \dot{\omega}$	:	longitude et taux d'avancement du périastre
θ	:	anomalie vraie (angle de rotation du pulsar mesuré à partir du périastre)
r	$=$	$\dfrac{a_1(1-e^2)}{1+e.\cos\theta}$ distance entre le pulsar et le foyer O de l'ellipse
V_p	:	vitesse orbitale moyenne du pulsar
$\mathcal{M},\ E$	:	anomalies moyenne et excentrique
$P_b,\ \dot{P}_b$	:	période de l'orbite et sa dérivée temporelle
ν	:	fréquence de révolution de l'étoile à neutrons
τ	:	temps de passage au périastre
γ	:	point vernal (point de longitude 0^o) en coordonnées équatoriales
Ω	:	longitude du nœud ascendant

5.2.1 Description de l'orbite d'un système binaire

Paramètres képlériens

L'orbite d'un pulsar en système binaire a une forme elliptique, de même période que celle de son compagnon et que celle du mouvement relatif des deux objets. Deux schémas d'une telle orbite sont représentés sur les figures 5.1 et 5.2. Le *plan du ciel* est le plan perpendiculaire à la *ligne de visée* et contenant les foyers O et O' de l'ellipse. La *ligne des nœuds* est l'intersection entre le *plan orbital*, contenant l'orbite, et le plan du ciel. La trajectoire du pulsar coupe la ligne des nœuds aux points P_1 et P_2, respectivement nommés nœuds *ascendant* et *descendant* (le nœud ascendant est le point où le pulsar traverse le plan du ciel en venant du dessous). Le point où la distance entre le pulsar et O est la plus faible est le *périastre* P, le point opposé est l'*apoastre* (dans le cas de la Terre, ces points sont le *périhélie* et l'*aphélie*). Huit paramètres sont nécessaires pour décrire classiquement le système :

1. i, l'inclinaison du plan orbital par rapport au plan du ciel, qui est

également l'angle entre la ligne de visée et le moment orbital du système ($0 \leq i \leq \pi$). Le mouvement est dit *direct* ou *prograde* si $0 < i \leq \frac{\pi}{2}$, *rétrograde* si $\frac{\pi}{2} < i \leq \pi$ et *polaire* si $i = \frac{\pi}{2}$.

2. ω, l'argument du périastre, qui est l'angle entre la droite reliant les nœuds ascendant et descendant et la droite reliant le périastre et l'apoastre.

3. Ω, l'angle repérant le nœud ascendant par rapport au point vernal γ. Le point vernal est le point d'intersection entre le plan de l'écliptique (le plan de révolution de la Terre autour du Soleil) et l'équateur céleste (la projection de l'équateur sur la sphère céleste) quand le Soleil passe de l'hémisphère Sud à l'hémisphère Nord, à l'équinoxe de printemps [82]. La longitude de γ est 0^o : c'est le point de référence pour la mesure des longitudes en coordonnées écliptiques et des ascensions droites en coordonnées eqúatoriales. L'angle Ω appartient au plan du ciel : il n'a pas d'influence sur l'effet Doppler vu de la Terre (voir paragraphe 5.2.1).

Ces trois angles sont les *angles d'Euler* de l'orbite.

4. e, l'eccentricité ($0 \leq e < 1$ pour une orbite *liée*, 0 pour un cercle, 1 pour une parabole).

5. τ, le temps de passage au périastre.

Trois paramètres supplémentaires sont nécessaires à la description du système. Le choix de ces 3 paramètres est libre parmi les 5 suivants : la période orbitale P_b, les demi-grands axes a_1 et a_2 et les masses m_1 et m_2. Une fois ce choix effectué, les deux derniers paramètres sont obtenus grâce aux relations suivantes :

$$\frac{a_1}{m_2} = \frac{a_2}{m_1} = \frac{a}{M} \text{ (relation barycentrique)} \quad (5.1)$$

$$P_b^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \text{ (troisième loi de Kepler)} \quad (5.2)$$

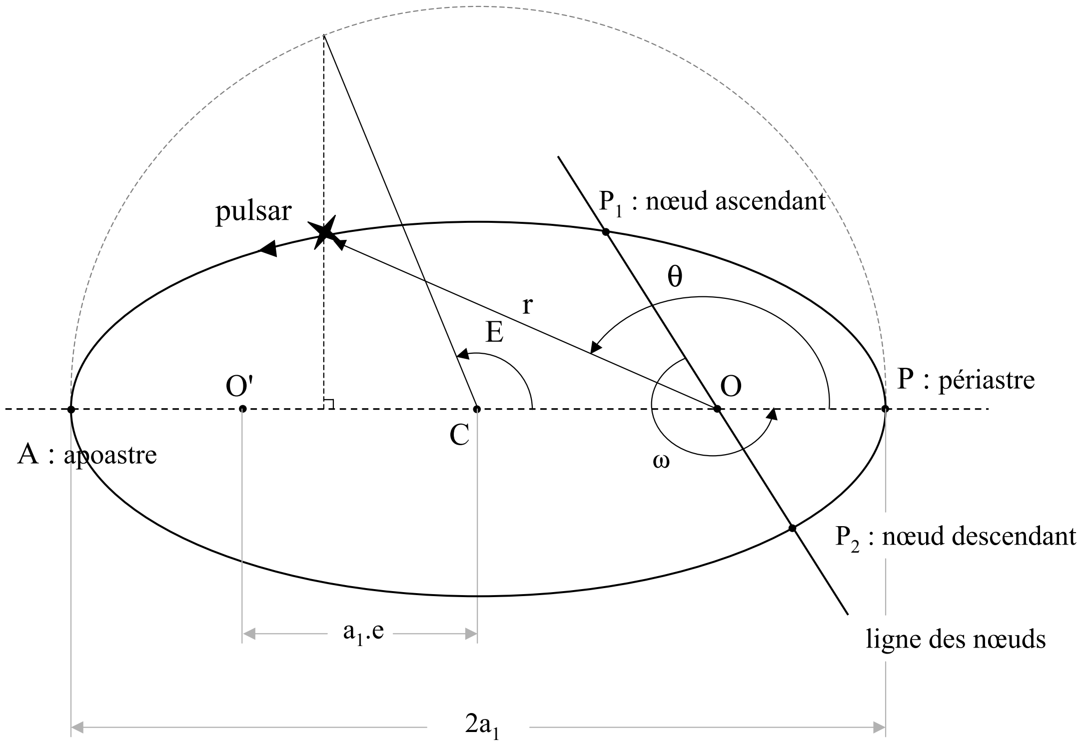


FIG. 5.1 – Eléments orbitaux d'un système binaire, dans le plan orbital.

Paramètres relativistes

Une description plus précise de l'orbite fait appel à des paramètres relativistes, parmi lesquels la diminution de la période et le taux d'ancement du périatre [83] :

$$\begin{aligned}\dot{P}_b &= -\frac{192\pi G^{\frac{5}{3}}}{5c^5}\left(\frac{2\pi}{P_b}\right)^{\frac{5}{3}} \times f(e) \times \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^{\frac{1}{3}}} \\ &= -2.2\times 10^{-14}\left(\frac{1d}{P_b}\right)^{\frac{5}{3}} \frac{\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right)}{(1-e^2)^{\frac{7}{2}}} \frac{\left(\frac{m_1}{M_\odot}\right)\left(\frac{m_2}{M_\odot}\right)}{\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{\frac{1}{3}}}\ s/s \qquad (5.3)\end{aligned}$$

$$\dot{\omega} = \frac{6\pi G m_2}{P_b c^2 a_1 (1-e^2)} = \frac{11.5\times 10^{-13}}{1-e^2}\left(\frac{a}{c}\right)^2\left(\frac{1d}{P_b}\right)^3 rad.s^{-1} \qquad (5.4)$$

Les périodes orbitales mesurées sur les pulsars binaires répertoriés sont en général supérieures à 2 heures, $f(e) < 10^3$ pour $e < 0.9$, et m_1 et m_2 sont de l'ordre de 1 $M_\odot$. Ainsi, $\dot{P}_b < 10^{-10} s/s$ et, pendant un an, $\delta P_b < 10^{-3} s \ll P_b$.

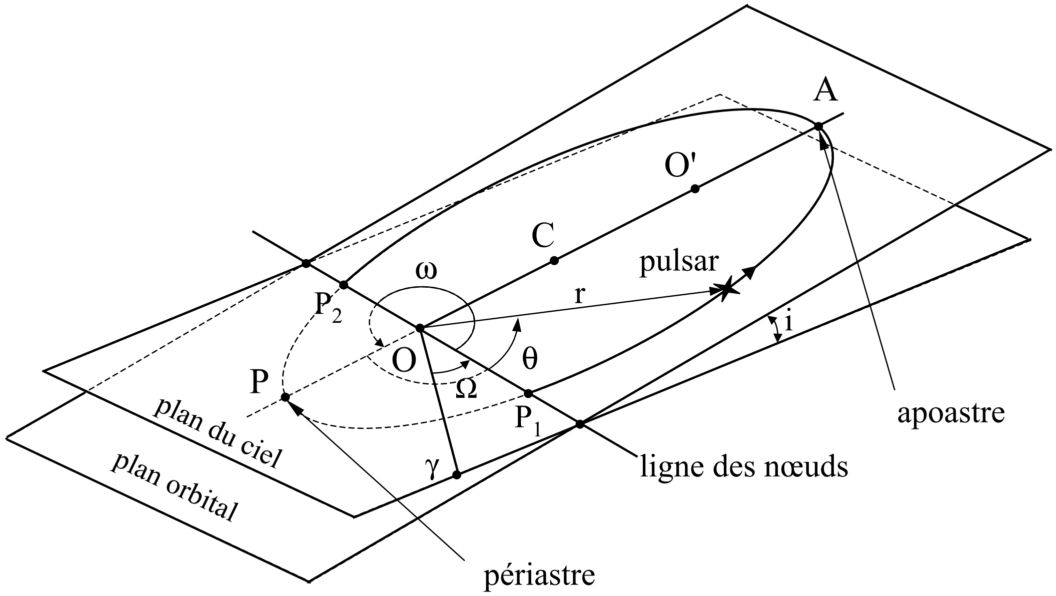


FIG. 5.2 – Eléments orbitaux d'un système binaire, dans l'espace.

Cet effet est négligeable pour notre étude, et seuls les effets de $\dot{\omega}$ seront pris en compte (*cf* paragraphe 5.2.1).

Effet Doppler orbital

Le mouvement orbital du pulsar entraîne un effet Doppler (on fait l'hypothèse que la vitesse du centre de masse du système binaire est constante par rapport au barycentre du Système Solaire). Celui-ci est obtenu en projetant la vitesse sur la ligne de visée, comme le montre la figure 5.3. Il s'exprime ainsi :

$$E - e.\sin E = 2\pi\left(\frac{t-\tau}{P_b}\right) = \mathcal{M} \tag{5.5}$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{E}{2}\right) \tag{5.6}$$

$$V_p = \frac{2\pi.a_1.\sin i}{P_b\sqrt{1-e^2}} \tag{5.7}$$

$$\omega = \omega_o + \dot{\omega}.P_b\frac{\theta}{2\pi} \tag{5.8}$$

$$V_r = V_p.\Big(\cos(\theta+\omega) + e.\cos\omega\Big), \tag{5.9}$$

où t est le temps auquel le signal est considéré. Le taux d'avancement du périastre est inclus car il peut prendre des valeurs importantes, comme c'est le cas pour PSR1913+16 [84]. L'équation (5.5) est connue sous le nom d'"équation de Kepler". Elle ne peut pas être résolue de façon exacte, mais plus d'une centaine de méthodes existe.

Une méthode itérative a été retenue pour la résolution de l'équation de Kepler. Une itération obéit à la relation suivante

$$E_{n+1} = \mathcal{M} + e.\sin E_n, \text{ avec } E_o = \mathcal{M} \tag{5.10}$$

Le nombre d'itérations dépend de l'excentricité e du système. Il est tel que la précision numérique sur la valeur de E d'une station de travail de type OSF1 est atteinte pour $e < 0.96$. Sur ce type de machine, la durée d'un appel à la fonction `MEbinaryPulsar` est de 0.11 μs.

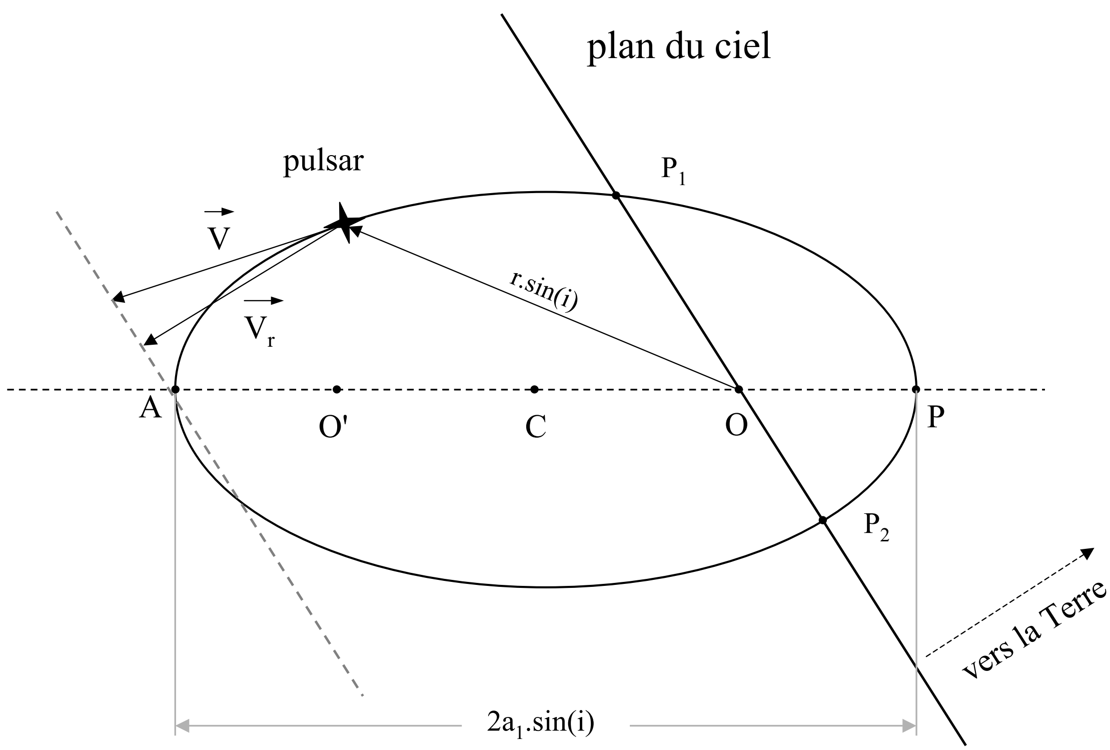


FIG. 5.3 – Eléments orbitaux d'un système binaire, projetés sur la ligne de visée.

5.2.2 Utilisation de MEbinaryPulsar

Ma première contribution à SIESTA a été l'écriture d'un module de simulation du signal émis par les pulsars en système binaire [85]. Il s'appelle `MEbinaryPulsar`, et est basé sur le module déjà existant `MEpulsar` [79].

L'ensemble des paramètres à fournir pour la simulation d'ondes gravitationnelles provenant d'un pulsar en système binaire est le suivant :
- l'amplitude h de l'onde gravitationnelle
- la fréquence ν de l'onde gravitationnelle
- l'ascension droite α et la déclinaison δ du pulsar (coordonées équatoriales J2000)
- la polarisation ψ de l'onde
- l'angle j entre les axes de rotation et de propagation de l'onde
- l'angle γ entre les axes de rotation et de déformation du pulsar

Ces paramètres sont communs aux 2 modules. Le nouveau module introduit les grandeurs suivantes, spécifiques aux pulsars binaires :
- la période orbitale P_b du pulsar
- le demi-grand axe projeté $a_1 \sin i$ de l'ellipse
- l'excentricité e de l'orbite
- la longitude ω_o du périastre
- le taux d'avancement $\dot{\omega}$ du périastre
- le temps de passage τ au périastre

Le taux d'avance du périastre est le seul effet relativiste à avoir été pris en compte. Pour le pulsar PSR1913+16 par exemple, on a $\dot{\omega} = 4.22^\circ$ / an [84]. Par contre, le ralentissement de la période, qui a permis de mettre en évidence l'existence des ondes gravitationnelles, n'a pas été implémenté. En effet, on a $\dot{P}_b \lesssim 10^{-17}$ s/s [10].

Vérification

La figure 5.4 montre la superposition de la courbe obtenue grâce à SIESTA et des mesures d'effet Doppler sur le pulsar PSR1913+16 [9]. Les 2 courbes sont en accord.

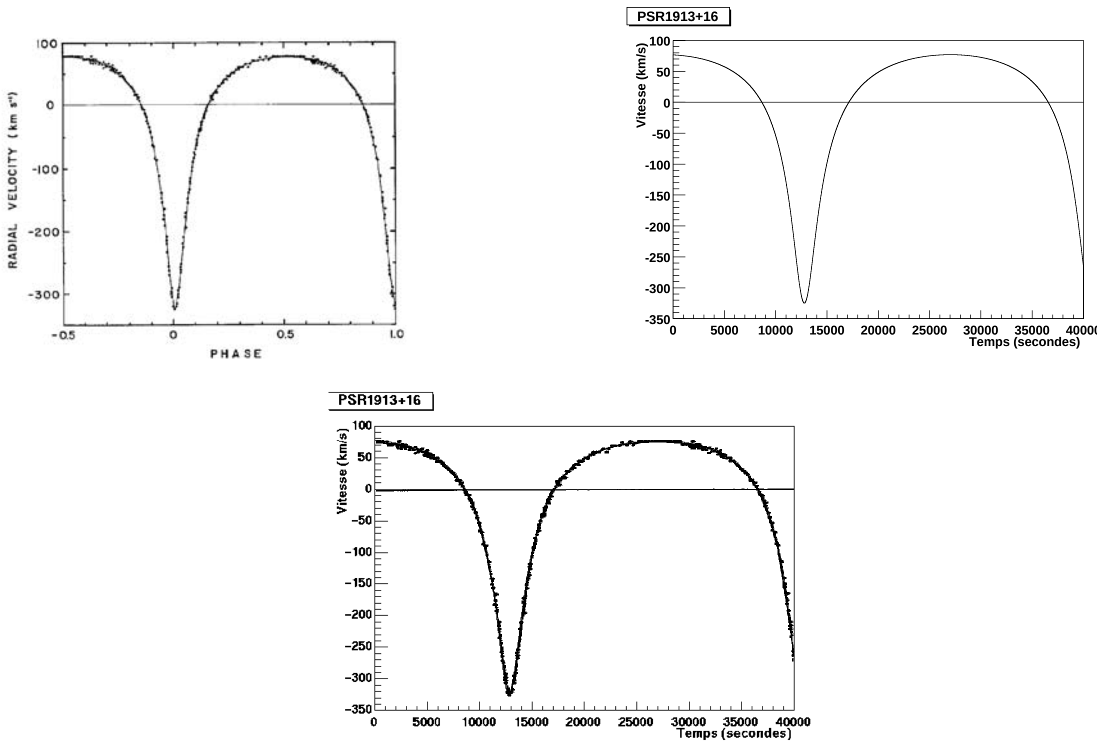


FIG. 5.4 – Vitesses orbitales de PSR1913+16 mesurée [9] et simulée grâce au module `MEbinaryPulsar`, et superposition des 2 courbes.

La figure 5.5 montre l'évolution de l'effet Doppler orbital du pulsar PSR 1913+16 entre 1976 et 2016. L'avance du périastre est de 4.2^o/an [84] : au bout d'environ 40 ans, le périastre tourne de 180^o, et l'effet Doppler orbital s'"inverse".

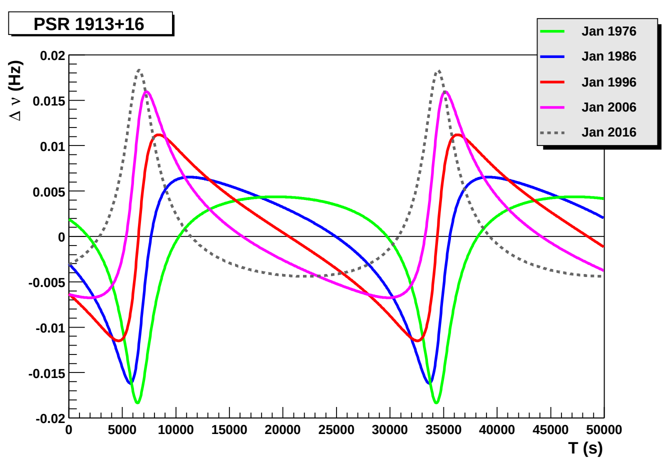


FIG. 5.5 – Evolution de l'effet Doppler orbital du pulasr PSR1913+16.

5.3 Position de la Terre

Dans la simulation du signal émis par un pulsar, il est essentiel de connaître la position de la Terre par rapport au barycentre du Système Solaire - la vitesse du système binaire est supposée constante par rapport au barycentre du Système Solaire - avec une précision de l'ordre de quelques kilomètres [86]. Les éphémérides, adaptées par Xavier Grave en 1994 à partir des routines mises au point pour la mission Hipparcos [87], sont obsolètes depuis le 1^{er} janvier 2000. Il fallait donc les actualiser. Ce chapitre est consacré à la description des nouvelles éphémérides incluses dans SIESTA, et à la comparaison avec celles de Jet Propulsion Laboratory (JPL).

5.3.1 Description

J'ai pris contact avec Pierre Bretagnon du Bureau des Longitudes (BDL), qui a mis au point un ensemble d'éphémérides pour la mission GAIA [88]. Il m'a transmis ses routines, que j'ai traduites du `FORTRAN 77` en `C`,et insérées dans SIESTA [89]. Leur précision annoncée est de 6 km (pour la position) et de 2 mm.s^{-1} (pour la vitesse) par rapport au barycentre du Système Solaire [90]. Le fichier de données est composé de 250 groupes de 3×12 (respectivement 3×18) coefficients pour les composantes (x,y,z) de la position (respectivement la vitesse), chaque groupe couvrant une période de 30 jours. Ce sont les coefficients des polynoômes de tchebychev utilisés pour interpoler les fonctions de position et de vitesse de la Terre. La période couverte s'étend ainsi du 1^{er} janvier 2000 à midi (Date Julienne 2451545) au 14 juillet 2020 à midi (Date Julienne 2459045). Le fichier de données a une taille de 330 kBytes, alors que les fichiers disponibles au JPL [91], permettant de connaître la position de toutes les planètes du Système Solaire, ont des tailles de l'ordre de 5 MBytes, beaucoup trop importante pour être que les fichiers soient inclus dans SIESTA. Néanmoins, ils peuvent servir de comparaison avec le programme utilisé.

5.3.2 Comparaison avec les éphémérides du JPL

Les éphémérides fournies par le JPL ont une précision annoncée inférieure à 25 m pour toutes les planètes du Système Solaire. Il paraît donc naturel de comparer les nouvelles éphémérides du BDL avec ces dernières. Sont comparées ici les composantes et valeurs absolues des position et vitesse de la Terre par rapport au barycentre du Système Solaire. Les figures suivantes contiennent un point par jour appartenant à la période considérée.

Position de la Terre par rapport au barycentre du Système Solaire

Les figures 5.6 et 5.7 montrent respectivement les comparaisons des composantes (x,y,z) de la position de la Terre par rapport au barycentre du Système Solaire et la comparaison de la différence absolue de position. La figure 5.8 montre la distribution de la différence absolue de position. La table 5.1 donne le pourcentage de valeurs inférieures à une certaine limite. Cette étude couvre la période 2002-2020.

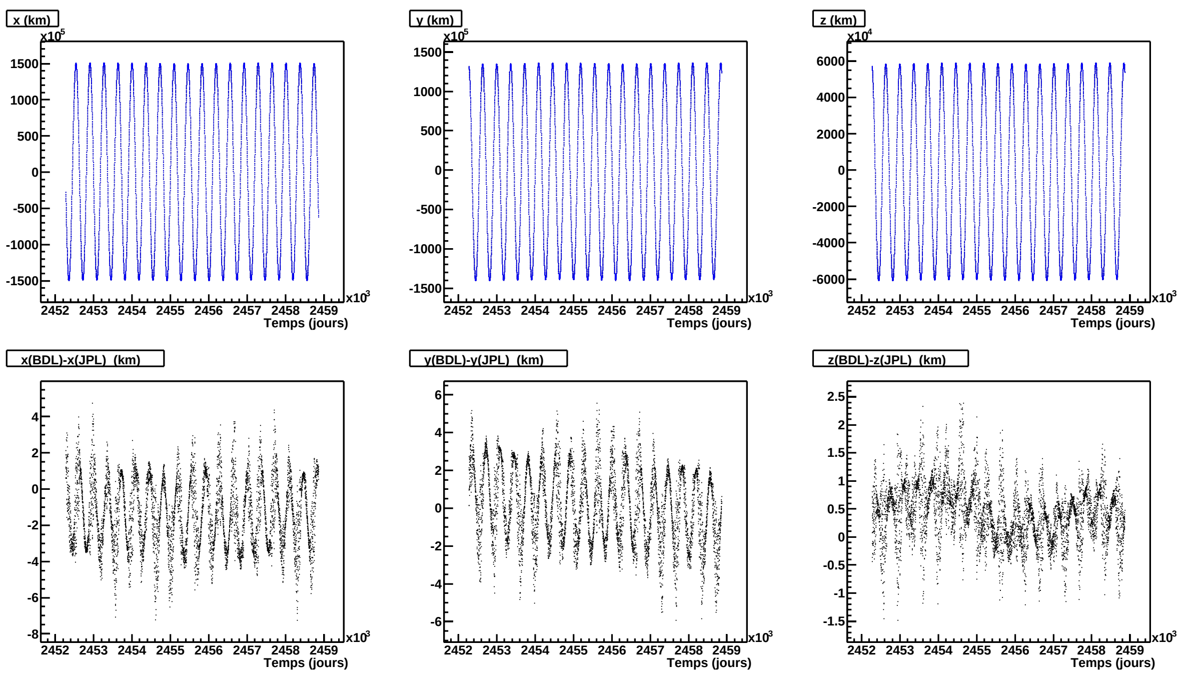


Fig. 5.6 – Superposition des composantes (x,y,z) de la position de la Terre par rapport au barycentre du Système Solaire en sortie des algorithmes du BDL et du JPL, pendant la période 2002-2020, et différences.

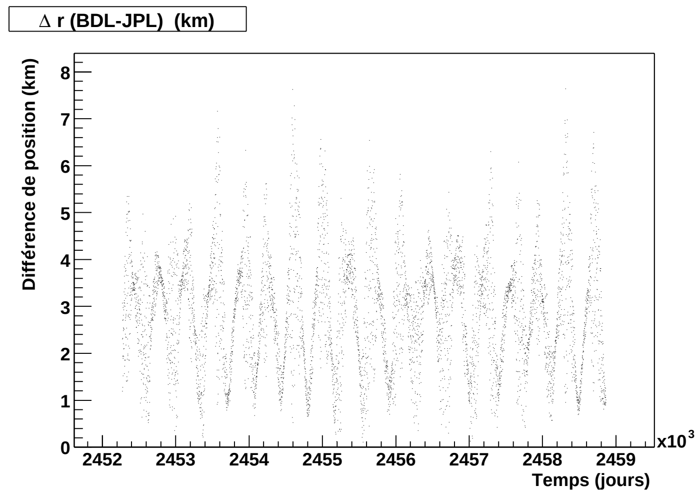


FIG. 5.7 – Différence absolue entre les positions de la Terre par rapport au barycentre du Système Solaire en sortie des algorithmes du BDL et du JPL, pendant la période 2002-2020.

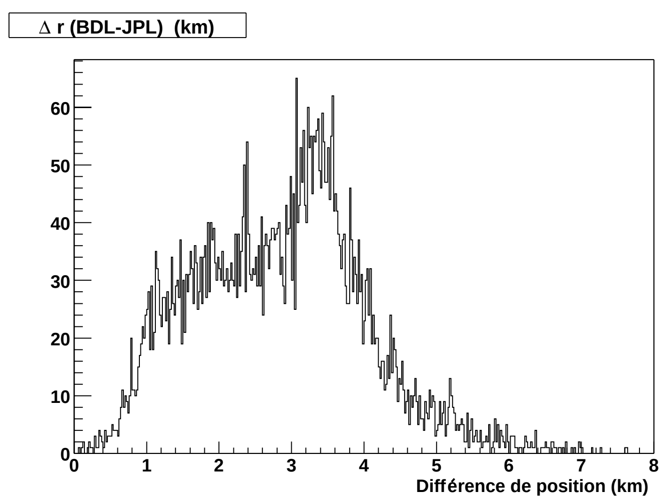


FIG. 5.8 – Distribution de la différence absolue entre les positions de la Terre par rapport au barycentre du Système Solaire en sortie des algorithmes du BDL et du JPL, pendant la période 2002-2020.

Limite pour Δr	Pourcentage de valeurs
$<$ 8 km	100 %
$<$ 7 km	99.9 %
$<$ 6 km	99.1 %
$<$ 5 km	98.9 %
$<$ 4 km	85.6 %

TAB. 5.1 – Pourcentage de valeurs de Δr en-dessous d'un certain seuil.

Vitesse de la Terre par rapport au braycentre du Système Solaire

Les figures 5.9 et 5.10 montrent respectivement les comparaisons des composantes (x,y,z) de la vitesse de la Terre par rapport au barycentre du Système Solaire et la comparaison de la différence absolue de vitesse. La figure 5.11 montre la distribution de la différence absolue de vitesse. La table 5.2 donne le pourcentage de valeurs inférieures à une certaine limite. Cette étude couvre la période 2002-2020.

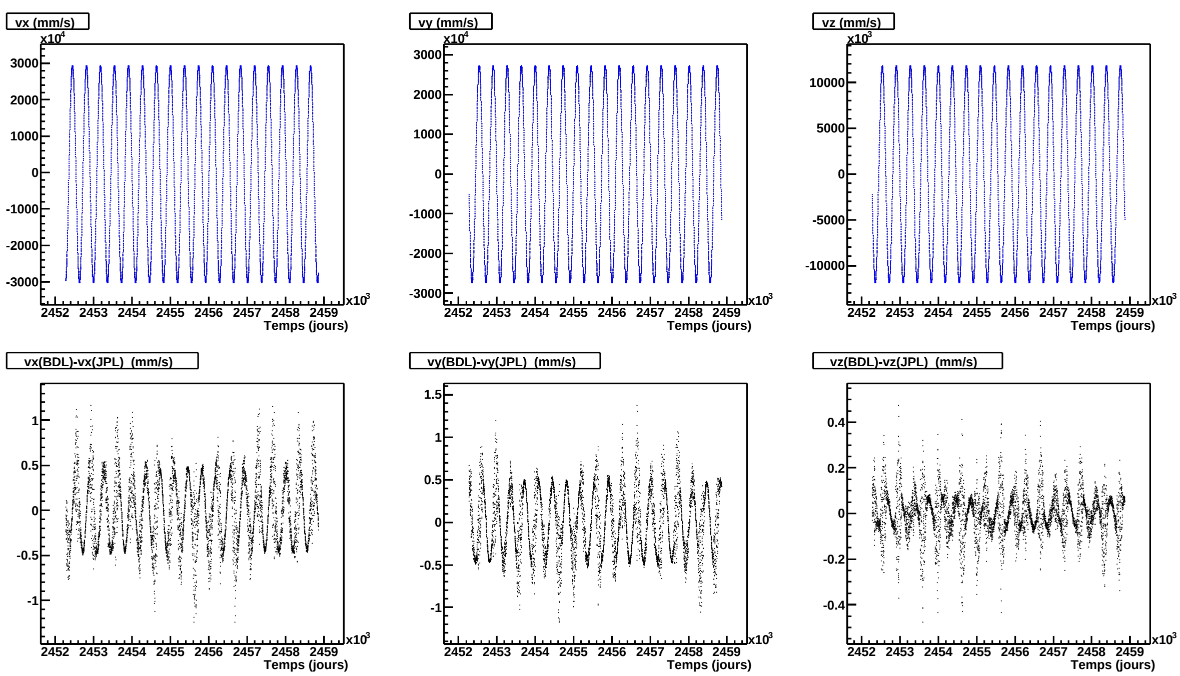


FIG. 5.9 – Superposition des composantes (x,y,z) de la vitesse de la Terre par rapport au barycentre du Système Solaire en sortie des algorithmes du BDL et du JPL, pendant la période 2002-2020, et différences.

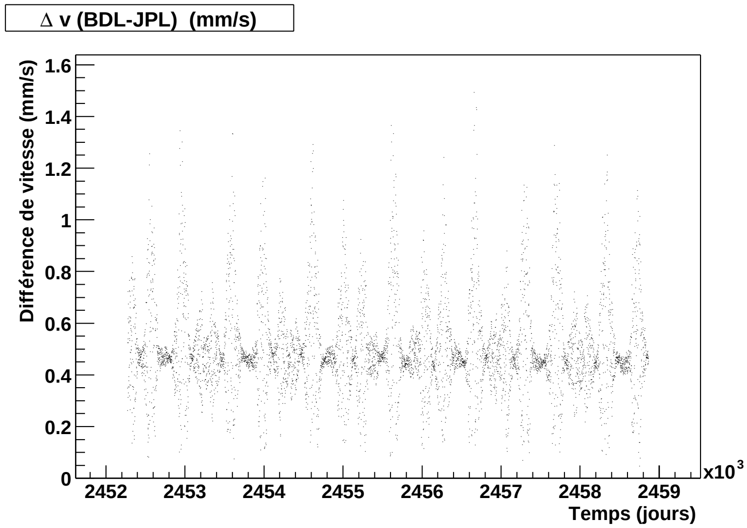


FIG. 5.10 – Différence absolue entre les vitesses de la Terre par rapport au barycentre du Système Solaire en sortie des algorithmes du BDL et du JPL, pendant la période 2002-2020.

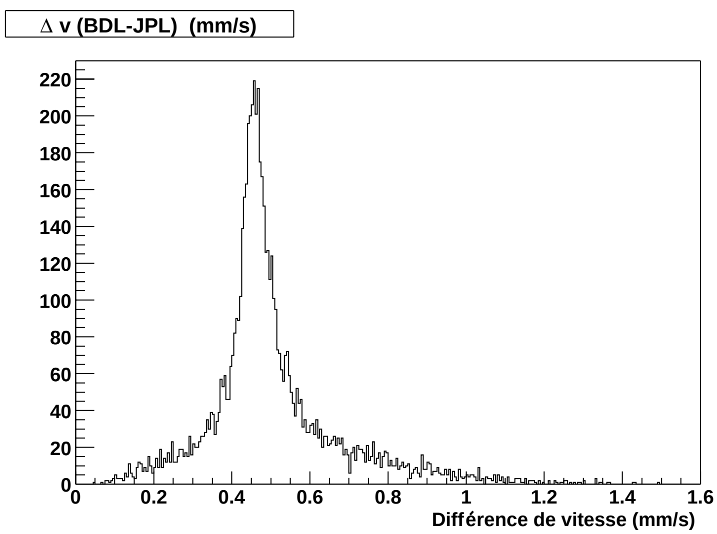


FIG. 5.11 – Distribution de la différence absolue entre les vitesses de la Terre par rapport au barycentre du Système Solaire en sortie des algorithmes du BDL et du JPL, pendant la période 2002-2020.

Limite pour Δv	Pourcentage de valeurs
< 1.6 mm.s^{-1}	100 %
< 1.2 mm.s^{-1}	99.6 %
< 1.0 mm.s^{-1}	98.1 %
< 0.8 mm.s^{-1}	93.4 %
< 0.6 mm.s^{-1}	81.1 %

TAB. 5.2 – Pourcentage de valeurs de Δv en-dessous d'un certain seuil.

5.4 Générateur de nombres aléatoires

Le bruit du détecteur est simulé grâce au module `FastDS` de SIESTA à 4 kHz. Il est ensuite rééchantillonné à 2 kHz après avoir été traité par un filtre anti-repliement, et filtré par un filtre passe-haut afin de réduire la dynamique du signal. On lit ces données grâce à VEGA [92] – VEGA est un environnement dédié à l'étude des données issues des détcteurs d'ondes gravitationnelles, basé sur l'environnement ROOT, dédié à l'étude des données issues des détcteurs du LHC, et développé au CERN –, et on calcule leur transformée de Fourier, avant de sélectionner les pics dépassant un certain seuil, et de les représenter dans un diagramme temps-fréquence.

5.4.1 Présence de raies dans les diagrammes temps-fréquence

Lorsque l'on représente le diagramme temps-fréquence et sa projection sur l'axe des fréquences, on peut voir que des raies sont présentes. Un exemple est donné sur la figure 5.12 (à gauche).

5.4.2 Nouveau générateur

Plusieurs phénomènes peuvent être la cause de la présence de raies. Tous les causes ont été envisagées. Finalement, il apparaît que les raies sont dues au générateur de nombres aléatoires. Ceci se reproduit lorsque l'on utilise le générateur de nombres aléatoires `TRandom` de ROOT. Ceci est sans doute dû à une période trop courte de ces générateurs. Cet effet n'avait pas été mis en évidence auparavant.

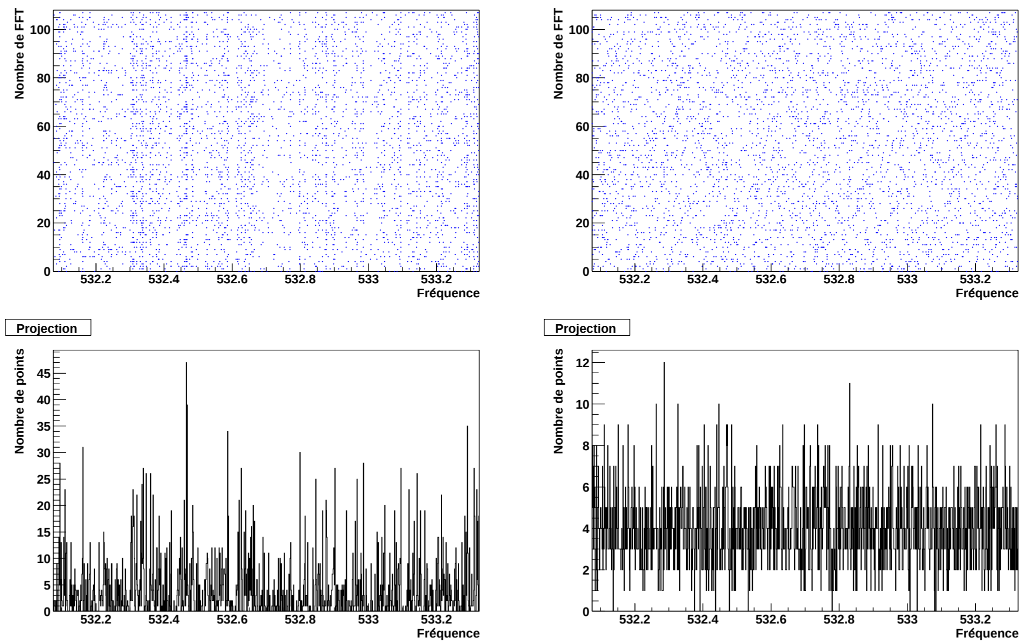


FIG. 5.12 – Diagrammes temps-fréquence générés avec l'ancien et le nouveau générateur de nombres aléatoires utilisés dans SIESTA, l'un comportant des raies, l'autre pas, et leur projection sur l'axe des fréquences.

Deux autres générateurs de nombres aléatoires sont disponibles dans ROOT, `TRandom2` et `TRandom3`. L'utilisation de l'un ou l'autre de ces générateurs entraîne la disparition des raies de la figure 5.12 (à droite). Le générateur `TRandom3`, plus rapide et avec un plus grande périodicité que `TRandom2`, a été choisi. Il est basé sur la méthode de Mersenne Twister [93], qui utilise un espace à 623 dimensions pour calculer un nombre aléatoire uniformément distribué entre 0 et 1, avec une périodicité de $2^{19937} - 1$.

Andrea Viceré et moi avons implémenté ce générateur, qui est maintenant utilisé dans SIESTA, à partir de la version v3r82.

Conclusion

Le principe du programme de simulation de Virgo et ses fonctionnalités ont été décrits, ainsi que les modules intéressant directement la mise au point des méthodes de détection des ondes gravitationnelles provenant des pulsars en système binaire.

La traduction d'une routine donnant la position et la vitesse de la Terre par rapport au barycentre du Système Solaire, avec des précisions meilleures que 6 km et 1.2 mm.s^{-1} 99 % du temps, ainsi que le remplacement du générateur de nombres aléatoires de SIESTA ont été présentés. L'écriture du module `MEbinaryPulsar` et les tests concluants réalisés sur le pulsar PSR1913+16 ont également été détaillés. Le module peut maintenant être utilisé pour simuler les ondes gravitationnelles émises par n'importe quel pulsar en système binaire, ce qui va nous permettre de mettre au point des méthodes de recherche adaptées à ce type d'objets.

Chapitre 6

Première méthode de détection des pulsars

Introduction

Chaque type de sources connues possède ses propres méthodes de détection. Le signal d'un pulsar, contrairement à celui d'une coalescence binaire ou à un signal impulsionnel, est présent en permanence. Sa fréquence est soumise à plusieurs effets Doppler, dus à la rotation de la Terre sur elle-même, à la révolution de la Terre autour du Soleil et, dans le cas des pulsars en système binaire, à la rotation du pulsar autour de son compagnon – les autres effets Doppler, dus par exemple au mouvement respectifs des galaxies, sont considérés comme constants. Ces effets Doppler doivent être pris en compte dans la mise au point de méthodes de détection, ce qui pose des probèmes de puissance de calcul. Nous verrons pourquoi une méthode optimale n'est pas utilisée ici, et quelle méthode nous avons développée.

6.1 Forme du signal

Le signal émis par un pulsar a une fréquence propre f_o, et sa variation est décrite par son développement de Taylor. De plus, il est soumis à un effet Doppler variable avec le temps, dû au mouvement $\vec{v}$ du détecteur par rapport au pulsar, et au mouvement $\vec{v'}$ du pulsar autour de son compagnon dans le cas des pulsars en système binaire. L'amplitude du signal vu par le détecteur a une valeur $h_o(t)$, qui varie avec une période de 24 heures, liée au mouvement journalier du détecteur.

Pulsars solitaires

Si $\vec{v}$ est la vitesse de la Terre par rapport au barycentre du Système Solaire, et $\vec{n}$ la direction du pulsar, le signal vu par le détecteur dans le cas des pulsars solitaires, s'exprime ainsi [94] :

$$h(t) = h_o(t).\sin\left(2\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}t^k}{k!}\left(1+\frac{\vec{v}.\vec{n}}{c}\right)t+\varphi\right) \tag{6.1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}t^k}{k!} = f_o + f' \times t + \frac{f''}{2} \times t^2 + ... \tag{6.2}$$

En pratique, les termes au-delà de f' seront négligés.

Pulsars en système binaire

On appelle $\vec{v'}$ la vitesse orbitale du pulsar. Dans le cas des pulsars en système binaire, le signal vu par le détecteur s'exprime ainsi :

$$h(t) = h_o(t).\sin\left(2\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}t^k}{k!}\left(1+\frac{\vec{v}.\vec{n}}{n}+\frac{\vec{v'}.\vec{n}}{n}\right)t+\varphi\right) \tag{6.3}$$

6.2 Filtrage optimal

6.2.1 Pulsars solitaires

La meilleure sensibilité possible pour la recherche de signaux périodiques est obtenue grâce à la technique de filtrage optimal. Pour utiliser cette technique, il faut pouvoir prédire exactement la forme $h(t)$ du signal au niveau du détecteur - nommons cette estimation $e(t)$. Au bout d'un temps d'observation t_{obs}, la sortie $s(t_{obs})$ d'un tel filtre est :

$$s(t_{obs}) = \int_0^{t_{obs}} e(t) \times h(t)\ dt \tag{6.4}$$

$$\text{Lorsque } e(t) = h(t), \text{ on obtient } s_{signal}(t_{obs}) = h_o.\frac{t_obs}{2} \tag{6.5}$$

En sortie d'un tel algorithme, la contribution du signal est donnée par sa variance :

$$\sigma^2 = S_n(\nu_o).\frac{t_{obs}}{2}, \tag{6.6}$$

où $S_n(\nu_o)$ est la variance du bruit à la fréquence considérée [95].

Cependant, un pulsar n'est pas simplement décrit par sa fréquence propre et sa phase. Il faut également tenir compte de la dérivée de sa fréquence propre et de sa position dans le ciel. Réaliser un filtrage optimal des données sur une période de plusieurs mois ou plusieurs années, en couvrant tout l'espace des paramètres, requiert une puissance de calcul irréaliste [96].

6.2.2 Pulsars en système binaire

Dans le cas des pulsars binaires, le nombre de paramètres utilisés pour décrire le signal augmente : il faut tenir compte de la période de l'orbite, de la longueur de son demi-axe projeté, de son excentricité, de la longitude de son périastre, et du temps de passage à ce périastre (*cf* chapitre 5.2.1), soit 5 paramètres supplémentaires. Une recherche aveugle couvrant tout l'espace des paramètres est donc totalement exclue.

Une recherche ciblée utilisant le filtrage optimale est cependant à l'étude [97, 98]. En supposant que les paramètres des pulsars recherchés sont connus avec une bonne précision – qui n'est pas encore atteinte –, il est possible de complètement démoduler le signal, c'est-à-dire le corriger de ses 3 effets Doppler, les 2 liés au mouvement de la Terre, et celui dû au mouvement orbital du pulsar. Les pics statistiquement significatifs du spectre de Fourier du signal sont ensuite recherchés. Une bonne connaissance des paramètres des pulsars répertoriés permettrait d'effectuer une recherche ciblée avec une puissance de calcul réaliste.

Pour des recherches aveugles, il faut recourir à d'autres techniques, sub-optimales mais pratiquement réalisables, que nous allons maintenant décrire.

6.3 Simulation des données

Les données nécessaires à la mise au point des méthodes ont été simulées avec SIESTA. Le bruit du détecteur et le signal du pulsar PSR0034-0534 ont été simulés séparément, afin de pouvoir ajuster l'amplitude du pulsar.

6.3.1 Simulation du bruit

Etant donné que la fréquence de la plupart des pulars répertoriés est inférieure à 1 kHz, le bruit a été simulé, dans le domaine temporel, avec une fréquence d'échantillonage de 4 kHz, puis rééchantillonnée à 2 kHz (pour des raison d'espace-mémoire), aprés avoir été traité à l'aide d'un filtre anti-repliement. Ainsi, 3 mois de bruit occupent un espace de 65 Go. Le spectre du bruit simulé est représenté sur la figure 6.1, dans le domaine temporel (en haut), et dans le domaine fréquentiel (en bas). Un filtre passe-haut a été appliqué afin de couper la résonnance des super-atténuateurs et de diminuer la dynamique du signal.

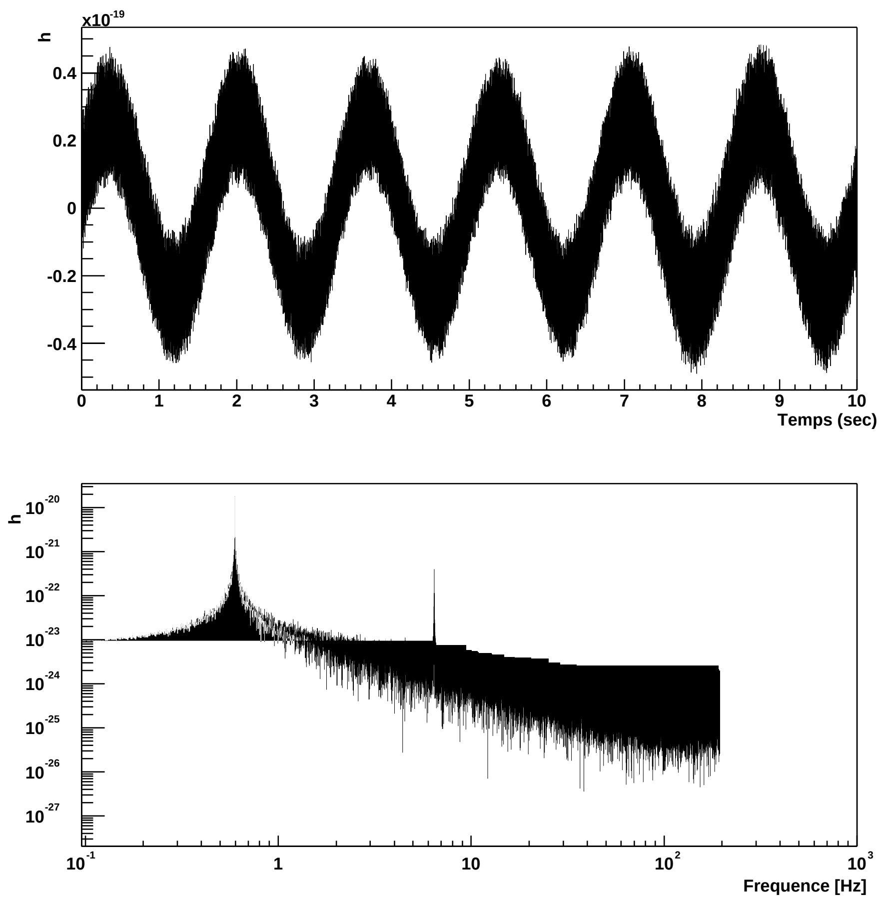


FIG. 6.1 – Représentations temporelle et spectrale du bruit simulé ($T_{FFT} = 800$ s)

6.3.2 Simulation du signal

Nous avons choisi de simuler le pulsar PSR0034-0534, en utilisant du module `MEbinaryPulsar`. Ce pulsar a les propriétés suivantes :

- $P = 1.88$ ms ($f = 532.71$ Hz)
- $e = 0$
- $P_b = 1.59$ jour (38 h)

- $a_1 \sin i/c = 1.44$ secondes lumière.

(pour la signification des symboles, *cf* 5.2).

Notre choix s'est porté sur ce pulsar pour les raisons suivantes : il a une excentricité nulle, c'est-à-dire que son orbite est circulaire et que l'effet Doppler orbital est sinusoïdal, il a une période de révolution courte par rapport à 1 an, et il a une vitesse orbitale importante, c'est-à-dire que son effet Doppler a une grande amplitude.

6.4 Transformée de Fourier du signal

En pratique, la transformée de Fourier est calculée en utilisant l'algorithme FFTW (Fastest Fourier Transform in the West [99]).

Le signal émis par les pulsars est toujours présent dans les données et, pour un signal parfaitement monochromatique, le rapport signal sur bruit augmente comme la racine carrée du temps de la transformée de Fourier. Il est donc naturel de vouloir réaliser des transformées de Fourier aussi longues que possible. Cependant, le choix de la durée d'intégration du signal est limité par 2 effets : d'une part l'effet Doppler du signal change avec le temps à cause des mouvements de la source et du detecteur, et d'autre part la largeur du pas en fréquence varie comme l'inverse du temps de la transformée de Fourier. Le signal attendu ayant une amplitude faible, on essaye de contenir toute sa puissance dans la même case en fréquence [66]. Pour un mouvement circulaire du détecteur par rapport à la source (de rayon R_o et de période T_o), on obtient un temps maximum d'intégration de :

$$T_{FFT}^{max} = \frac{T_o}{2\pi}.\sqrt{\frac{c}{R_o.\nu_g}} \tag{6.7}$$

L'effet Doppler dû au mouvement orbital d'un pulsar s'écrit [85] :

$$\delta\nu_g = \nu_g.\frac{V_o}{c}.\left(\cos(\theta+\omega) + e\cos(\omega)\right) \tag{6.8}$$

Nous avons donc

$$\frac{d\delta\nu_g}{dt} = -\nu_g.\frac{V_o}{c}.\dot{\theta}\sin(\theta+\omega), \tag{6.9}$$

les termes relativistes en $\dot{\omega}$ ayant été négligés. Pour une transformée de Fourier d'une durée T_{FFT}, nous obtenons donc

$$\Delta\delta\nu_g < \nu_g.\frac{V_o}{c}.\dot{\theta}.T_{FFT}^{max} < \Delta\nu_{FFT}^{max} = \frac{1}{T_{FFT}^{max}} \tag{6.10}$$

Ainsi, dans le cas des pulsars en système binaire, dont l'orbite peut ne pas être circulaire, on obtient :

$$T_{FFT}^{max} = (1-e).\frac{P_b}{2\pi}.\sqrt{\frac{c}{a_1.\sin i}\frac{1}{\nu_g}}, \tag{6.11}$$

où ν_g est la fréquence des ondes gravitationnelles émises par le pulsar. En insérant les paramètres orbitaux de la Terre et du pulsar PSR0034-0534 [77], on obtient les valeurs du tableau 6.1 (valables lorsque la fréquence des ondes gravitationnelles est égale à la fréquence de rotation du pulsar).

On a également reporté dans ce tableau la valeur de τ_{FFT}^{max} imposé par les mouvement circulaire du détecteur (le mouvement du détecteur peut être décomposé en une superposition de mouvements circulaires). Le temps d'intégration est clairement limité par le mouvement orbital du pulsar, nous utiliserons donc un temps de 800s pour l'étude de PSR0034-534.

Origine	T_{FFT}^{max}
Rotation de la Terre (latitude de Virgo)	4800 s
Révolution de la Terre autour du Soleil	9800 s
Orbite de PSR0034-0534	**800 s**
autres effets dans le Système Solaire	$>\ 10^5$ s

TAB. 6.1 – Limitations du temps d'intégration dues à différents effets Doppler [100].

La figure 6.2 représente la quantité

$$\Xi = \frac{(1-e).P_b}{\sqrt{a_1.\sin i}} \tag{6.12}$$

pour les pulsars binaires répertoriés. Ainsi, $T_{FFT}^{max} = \Xi * \sqrt{c/\nu_g}$. Sur ce graphique, on a également porté les valeurs des quantités $T_o/\sqrt{R_o}$ pour la rotation de la Terre sur elle-même et sa révolution autour du Soleil. Il apparaît clairement que le temps de la transformée de Fourier est limitée par le mouvement orbital du pulsar pour la plupart des pulsars en système binaire.

6.5 Somme de transformées de Fourier

En sommant des transformées de Fourier, on peut faire baisser le niveau de bruit : le bruit de la somme de N transformée de Fourier est $\sqrt{N}$ plus petit

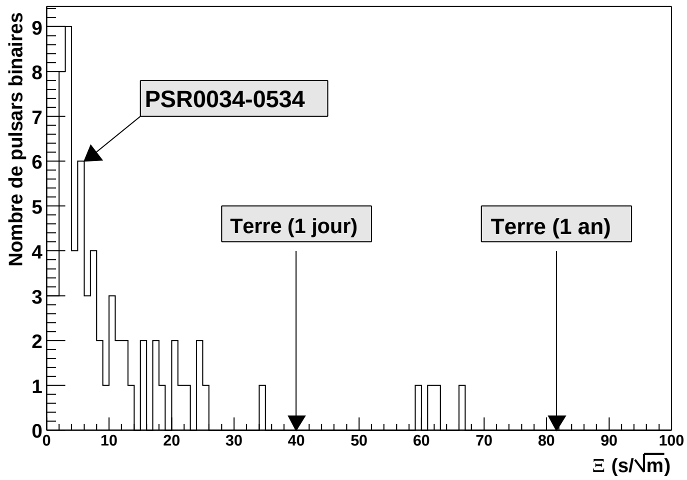


FIG. 6.2 – Valeur de $\Xi = (1-e).P_b/\sqrt{a_1.\sin i}$ pour les pulsars binaires détectés, et valeur de $T_o/\sqrt{R_o}$ pour la rotation de la Terre sur elle-même et sa révolution autour du Soleil.

que celui d'une seule transformée de Fourier. Que se passe-t-il si on somme les transformées de Fourier de 3 mois de données contenant le signal simulé du pulsar PSR0034-0534, avec une amplitude de 4.5×10^{-24} ? On obtient la figure 6.3.

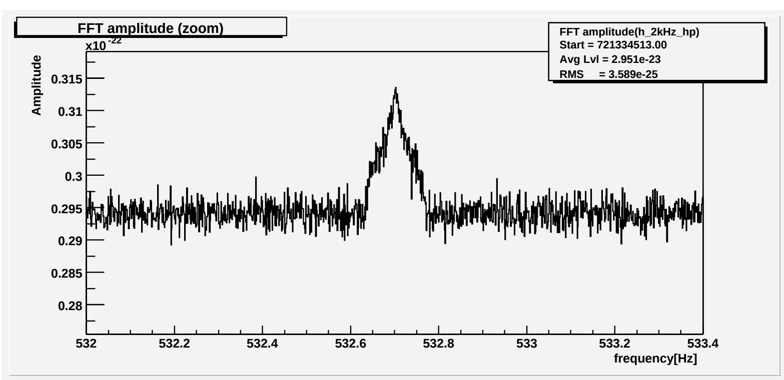


FIG. 6.3 – Somme de transformées de Fourier de 3 mois de données contenant le signal simulé du pulsar PSR0034-0534.

Le signal apparaît, mais il est très étalé, à cause des effets Doppler dus à la rotation de la Terre autour du Soleil et au mouvement du pulsar autour de son compagnon. Cette technique ne paraît pas adaptée à ce type du signal, et nous avons envisagé d'autres méthodes.

6.6 Diagrammes temps-fréquence

On réalise des transformées de Fourier, d'une durée adaptée (voir section précédente). Pour chaque transformée de Fourier, on sélectionne, dans la bande de fréquence étudiée, les pics d'une amplitude supérieure à $m + N.\Sigma$, où m et Σ sont la moyenne et l'écart-type, et N est un paramètre ajustable qui permet de choisir le nombre de points sélectionnés (voir le tableau A.1). La moyenne et l'écart-type sont calculés sur une bande de 1.25Hz. Ceci est possible car le bruit simulé a des variations lentes en dehors des raies qui y ont été incluses. Pour le niveau de coupure choisi, N=2, ce qui entraîne qu'un point de bruit a une probabilité de 3.74 % d'être sélectionné. Le nombre de points des diagrammes temps-fréquence ainsi construit est environ 37400, nombre adapté à notre étude (le principe et l'efficacité de la transformée de Hough sont décrits dans l'annexe B). Chaque pic sélectionné est reporté dans un diagramme temps-fréquence, portant en abscisse la fréquence considérée et en ordonnée le nombre de transformées de Fourier réalisées. Si le signal d'un pulsar est reçu avec une amplitude suffisante, alors le pic correspondant a une probabilité plus grande d'être sélectionné, et la variation de la fréquence du pulsar due à son effet Doppler apparaît. Un exemple est donné à la figure 6.4.

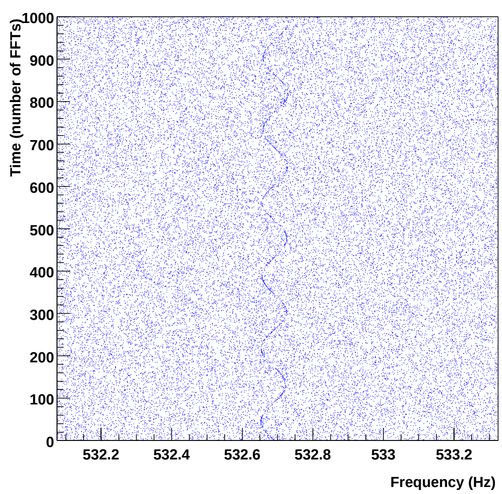


FIG. 6.4 – Diagramme temps-fréquence.

6.7 Projection du diagramme temps-fréquence

La figure 6.5 représente la projection du diagramme temps-fréquence de la figure 6.4. Il est possible, à partir de cette projection, de déterminer l'amplitude de l'effet Doppler orbital, et la fréquence du pulsar. Néanmoins, pour déterminer la phase et la fréquence orbitales, il faut utiliser le diagramme temps-fréquence initial.

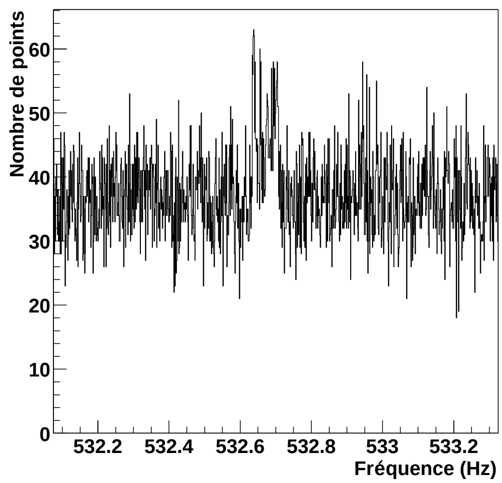


FIG. 6.5 – Projection du diagramme temps-fréquence précédent.

6.8 Extraction du signal

Le but est de suivre la courbe d'effet Doppler qui apparaît sur la figure 6.4. Le principe de l'analyse est le suivant : toute courbe continue peut être localement approximée par sa tangente au point considéré, et nous appliquons une transformée de Hough locale à 2 points pour trouver cette tangente. Cette méthode a une bonne efficacité de détection des segments tangents (voir annexe B). Ensuite, nous essayons de relier entre eux les segments tangents trouvés dans tout le diagramme temps-fréquence pour reconstruire la courbe de l'effet Doppler. Pour ce faire, nous appliquons des sélections à l'ensemble des segments trouvés.

6.8.1 La transformée de Hough

La transformée de Hough n'est pas appliquée sur l'ensemble du diagramme temps-fréquence. Dans un premier temps, celui-ci est découpé en carrés de 50 bins de côté. Ensuite, on applique la transformée de Hough à chacun de ces carrés, pour en extraire les 10 "meilleures" droites, qui correspondent aux 10 pics les plus importants de l'histogramme (ρ, θ). Deux carrés consécutifs sont séparés de 10 bins, il y a donc un recouvrement de 80 %, et il faut 95 translations pour couvrir en entier une ligne ou une colonne. Le nombre total de segments trouvés par les transformées de Hough est donc de $96 * 96 = 9216$ carrés $\times 10 = 92160$, comme le montre la figure 6.8-a.

6.8.2 Sélection

A partir de cet ensemble de segments, on essaie d'extraire la courbe de l'effet Doppler de notre pulsar. Pour ce faire, on applique 2 types de sélections.

Couples de traces

Lors de cette étape, on considère successivement tous les segments d'un carré de 50 bins de côté. On associe à ce segment tous les segments des carrés voisins, pour former des couples. Si un couple de segments ainsi formé appartient à la courbe de l'effet Doppler il existe un cercle osculateur à ces 2 segments, d'un rayon suffisant. On impose donc les conditions suivantes, représentées graphiquement sur la figure 6.6 :

$$\mathrm{OM} \ < d_1 \text{ and } |\ \mathrm{OA} - \mathrm{OB}\ | \ < d_2$$

Si on ne parvient pas à former de couple satisfaisant les conditions ci-dessus, le segment considéré est rejeté. Au contraire, si ce segment appartient à au moins un couple qui satisfait les conditions ci-dessus, il est conservé. On applique une deuxième étape de sélection à l'ensemble des segments conservés.

Triplets de traces

Lors de cette étape, on considère successivement tous les segments d'un carré de 50 bins de côté. On associe à ce segment tous les segments des carrés voisins, pour former des triplets. Si un triplet de segments appartient à la courbe de l'effet Doppler il existe une parabole osculatrice à ces 3 segments. On calcule les paramètres $(a,\ b,\ c)$ de l'unique parabole passant par les centres M_1, M_2 et M_3 des 3 segments, et on calcule la pente de la parabole en ces 3 points, qui est comparée à la pente de chaque segment, et on impose les conditions suivantes, représentées graphiquement sur la figure 6.7 :

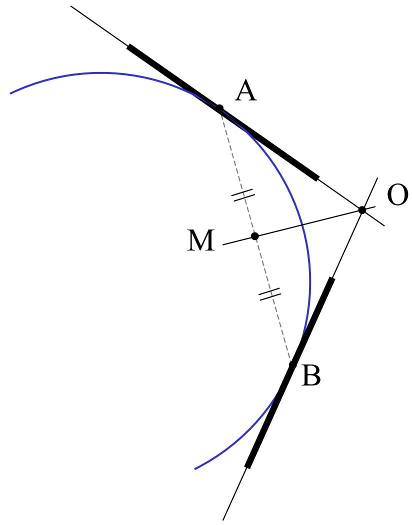


FIG. 6.6 – Distance OA, OB et OM auxquelles sont appliquées les coupures lors de la première étape.

$$|\theta_i| < \theta_{max} \ (i = \{1, 2, 3\}) \text{ and } \Omega^2 = \sum_{i=1}^{3} \theta_i^2 < \Omega_{max}^2$$

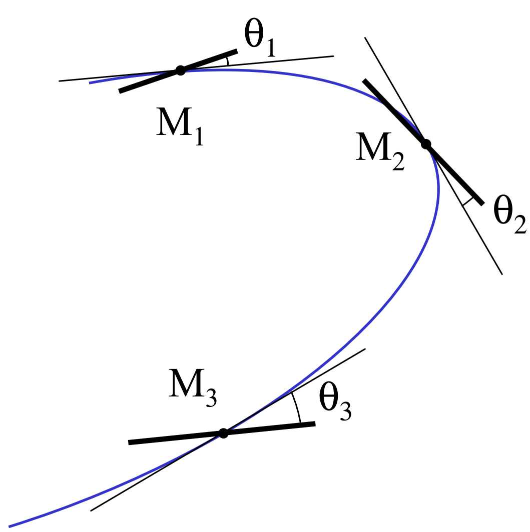


FIG. 6.7 – Angles θ_1, θ_2 et θ_3 auxquels sont appliqués les coupures lors de la deuxième étape.

Si on ne parvient pas à former de triplet satisfaisant les conditions ci-dessus, le segment considéré est rejeté. Au contraire, si ce segment appartient à au moins un triplet qui satisfait les conditions ci-dessus, il est conservé.

Résultats des sélections

La figure 6.8 montre les résultats des différentes étapes de sélection. On applique les critères du cercle osculateur aux 92160 segments de départ (6.8-a). Il reste 23631 segments (6.8-b), auxquels on applique les critères de la parabole osculatrice. 5852 segments passent cette étape (6.8-c). Lors de cette sélection, on brise certains couples de droites qui avaient survécu à la sélection des cercles. C'est pourquoi on applique la sélection des cercles une nouvelle fois, à laquelle 2910 segments survivent (6.8-d). De même, l'application des critères sur les paraboles sélectionne les 1546 segments finaux (6.8-e). Une fois ces sélections faites, on remonte aux points composant les segments finaux. Ces points sont représentés sur la figure 6.8-f.

6.8.3 Ajustement des paramètres

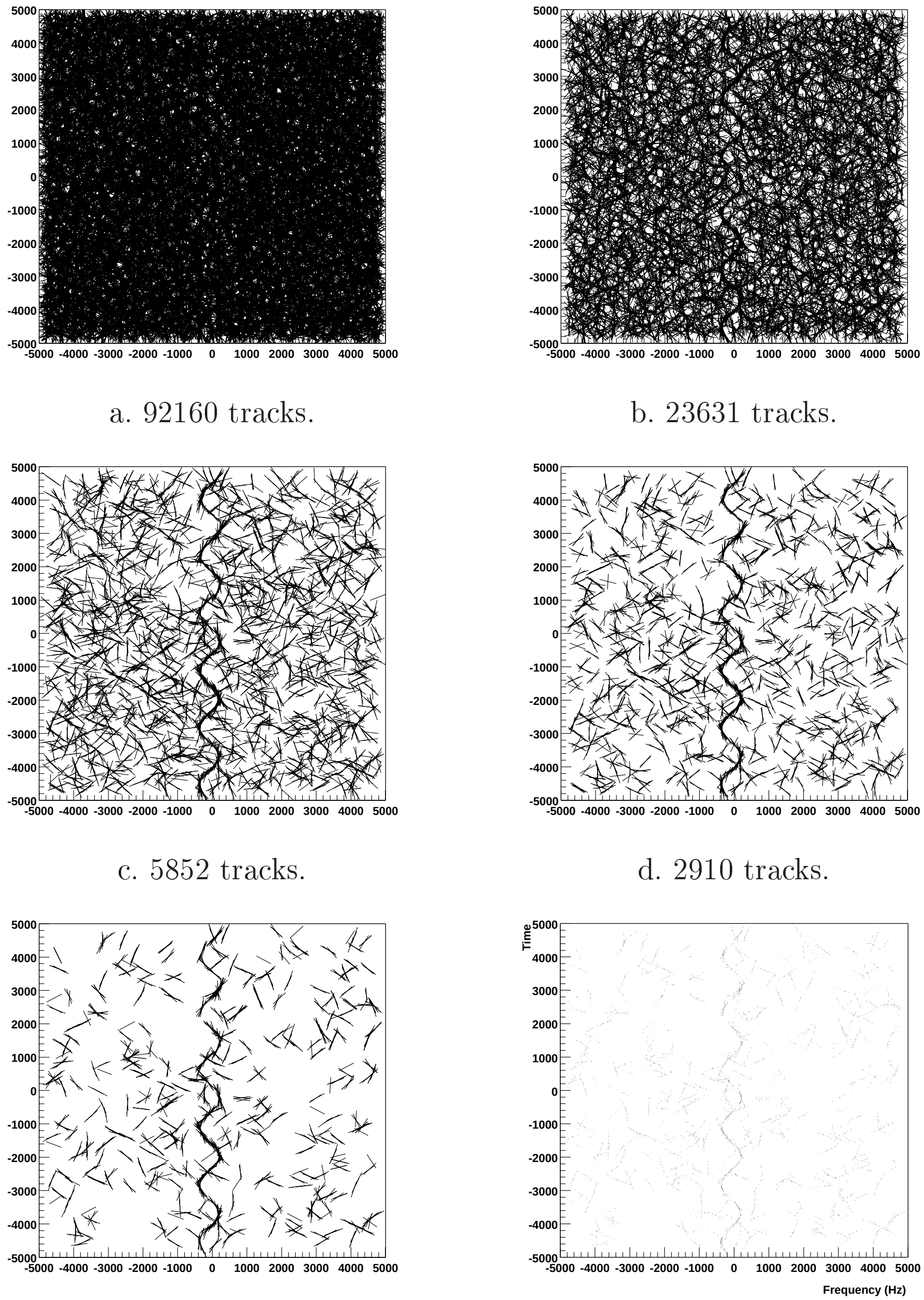
On projette les points sélectionnés sur l'axe des fréquences (voir figure 6.9), et on ajuste l'histogramme à une dimension ainsi obtenu à l'aide de la fonction de densité d'une sinusoïde, qui s'écrit de la façon suivante :

$$g(y) = n + \frac{u}{\sqrt{1 - \left(\frac{y-v}{w}\right)^2}}, \; y \in [v - w, v + w] \tag{6.15}$$

Cette fonction est représentée sur la figure 6.10 La valeur de v nous donne la fréquence du pulsar telle qu'elle est mesurée de la Terre au moment du diagramme temps-fréquence, et la valeur de w (la largeur de la fonction de densité) donne la valeur de la vitesse orbitale projetée du pulsar :

$$V_p = c.\frac{v}{w} = \frac{2\pi.a_1.\sin i}{P_b} \tag{6.16}$$

Une fois l'amplitude de la sinusoïde et sa fréquence déterminées, les points trop éloignés de cette sinusoïde sont rejetés. On procède comme suit : les points en dehors de la bande de fréquence $[v - w, v + w]$ sont éliminés, ainsi que les points n'ayant pas de proche voisin : pour chaque point considéré, on imagine un carré de 5 bins de côté, centré sur celui-ci. Si le carré ne contient que le point central, ce dernier est rejeté. La phase approximative de la sinusoïde est déterminée grâce à une intercorrélation.



a. 92160 tracks. b. 23631 tracks.

c. 5852 tracks. d. 2910 tracks.

e. 1546 tracks. e. Points.

Fig. 6.8 – Segments sélectionnés par les différentes étapes de sélection et points finaux.

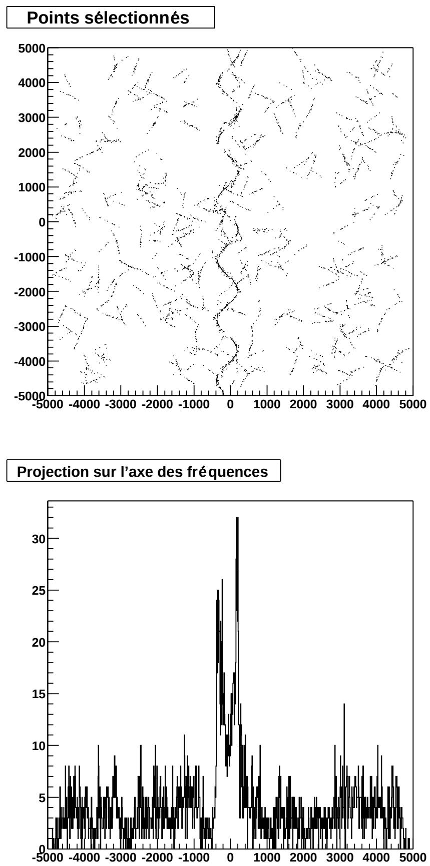


FIG. 6.9 – Points sélectionnés et projection sur l'axe des fréquences.

On réalise un ajustement grâce à `MINUIT` – le programme d'ajustement mis au point au CERN [101] –, à partir des points restants et des 3 valeurs déja déterminées.

6.8.4 Position du pulsar

Cette procédure est appliquée aux 8 diagrammes temps-fréquence. La valeur centrale des 8 sinusoïdes nous donnent la fréquence du pulsar vue de la Terre au cours du temps. Cette fréquence apparente ne subit que l'effet Doppler dû à la révolution de la Terre autour du Soleil. Ces valeurs peuvent être ajustées à l'aide d'une fonction sinusoïdale, dont on peut extraire la position du pulsar en coordonnées écliptiques. La vitesse du pulsar projetée

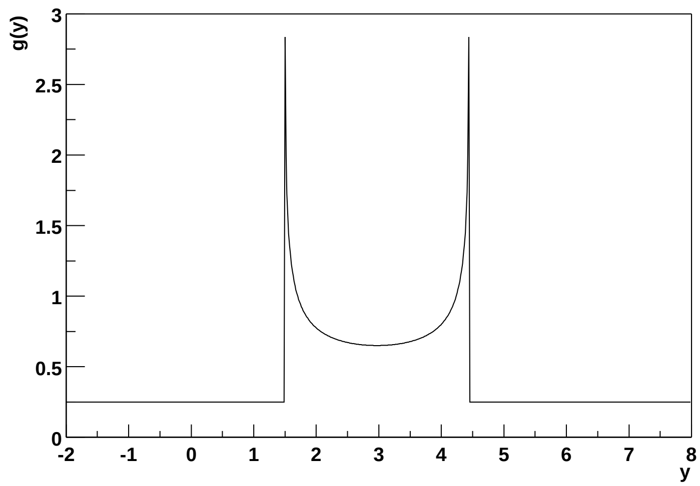


FIG. 6.10 – Allure de $g(y)$, avec $n = 0.25,\ u = 0.4,\ v = 3$ and $w = 1.5$.

sur la ligne de visée, s'exprime de la façon suivante (*cf* figure 6.11) :

$$v_{proj} = v_o.\cos\beta.\sin\left(\omega(t - T_o) - \lambda\right) \tag{6.17}$$

La valeur de ω est imposée, et égale à $\frac{2\pi}{1\text{ year}}$. La comparaison de l'amplitude de la sinusoïde ajustée et de la vitesse de la Terre (30 km.s^{-1}) nous donne la valeur de $\cos\beta$ (soit 2 valeurs de la latitude β), et la phase nous donne la valeur de la longitude λ.

Conversion en coordonnées équatoriales

Pour convertir les coordonnées éclitptiques (λ, β) en coordonnées équatoriales $(\alpha,\ \delta)$, on utilise les formules suivantes [102] :

$$\begin{aligned} \sin\delta &= \sin\beta.\cos\epsilon + \cos\beta.\sin\epsilon.\sin\lambda & (6.18)\\ \cos\lambda.\cos\beta &= \cos\alpha.\cos\delta, & (6.19) \end{aligned}$$

où $\epsilon = 23^o26'$ est l'angle d'inclinaison de l'écliptique, l'angle entre le *plan équatorial* et le *plan écliptique*[1].

Résultats de l'ajustement

On ajuste la formule (6.17) aux valeurs de fréquence extraites des 8 diagrammes temps-fréquence (voir la figure 6.12). La date du 1^{er} point est le 2

[1]Le point vernal γ est commun aux deux systèmes de coordonnées.

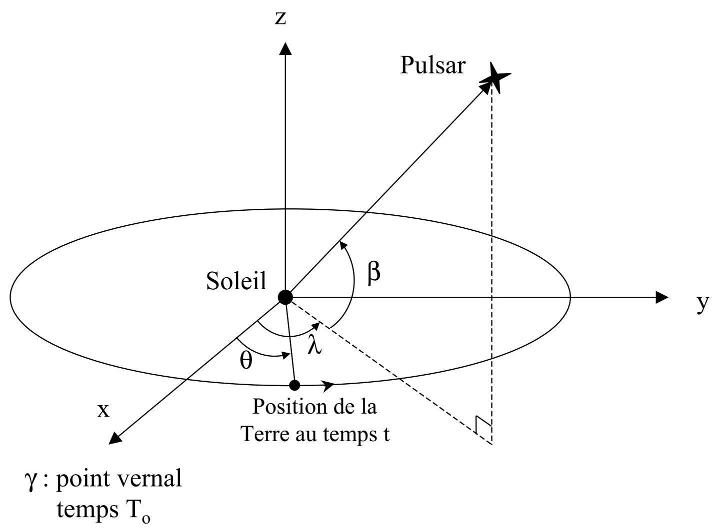


FIG. 6.11 – Position d'un pulsar en coordonnées écliptiques et position de la Terre par rapport au point vernal.

Février, et T_o est le 21 Septembre (le Soleil, vu de la Terre, est aligné avec le point vernal le 21 Mars ; la Terre, vue du Soleil, est donc alignée avec le point vernal 6 mois plus tard). L'ajustement retourne les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} f_o &= 532.70 \text{ Hz} \\ \cos\beta &= 1 \text{ donc } \beta = 0 \\ \lambda &= -0.16 \text{ rad} \end{aligned}$$

Les coordonnées équatoriales du pulsar sont donc ($\alpha = 0.147, \delta = -0.064$), les coordonnées réelles du pulsar étant ($\alpha = 0.150, \delta = -0.097$). La fréquence réelle du pulsar est 532.71 Hz.

6.8.5 Puissance de calcul

Cette étude a été menée sur une station alpha XP1000, dotée d'un processeur cadencé à 667 MHz. Le temps de calcul nécessaire pour le traitement d'un diagramme temps-fréquence, couvrant une période d'environ 10 jours et une gamme de fréquences large de 1.25 Hz est de 4h. La figure 6.13 montre la répartition du temps de calcul pendant les différentes étapes de la méthode. Les temps d'ajustement sont négligeables. La majeure partie du temps sert à effectuer la sélection des triplets de traces, comme le montre la figure 6.13. La puissance de calcul nécessaire pour réaliser une analyse et "temps réel"

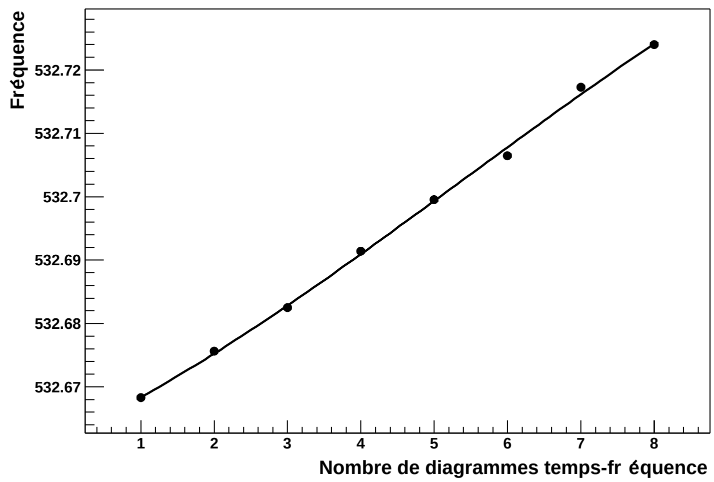


FIG. 6.12 – Résultats de l'ajustement.

– c'est-à-dire analyser 3 mois de données sur un spectre allant de 10 Hz à 1 kHz en 3 mois – est de l'ordre de 15 stations de travail de performances comparable à celle utilisée. Mais cette puissance de calcul devra être réévaluée si la méthode est modifiée, en particulier si on impose un fenêtrage et un recouvrement entre les transformées de Fourier successives, ou si les critères sur les cercles ou sur les paraboles sont modifiés.

Conclusion

Ce chapitre décrit une première méthode de détection des ondes gravitationnelles émises pas les pulsars en système binaire. Le pulsar PSR0034-0534 a été simulé, avec une amplitude de $h = 4.5 \times 10^{-24}$, et ajouté à un bruit d'écart type $2.3 \times 10^{-23}\sqrt{\mathrm{Hz}}$. Il a été détecté par cet algorithme. Les paramètres de ce pulsar, à savoir (1) sa fréquence intrinsèque, (2) sa position dans le ciel, ainsi que ses (3) période, (4) vitesse et (5) phase orbitales ont pu être déterminés. Les valeurs sont en bon accord avec les valeurs simulées. Les performances de la méthodes peuvent être améliorées : en particulier, la transformée de Hough peut être raffinée [103].

Aucune hypothèse n'est faite *a priori* sur la forme du signal. Cette méthode peut donc s'appliquer quelle que soit l'excentricité de l'orbite du système binaire.

Cependant, la faiblesse majeure de cette méthode tient au fait qu'elle s'appuie sur une transformée de Hough "locale". Il faut être en mesure de

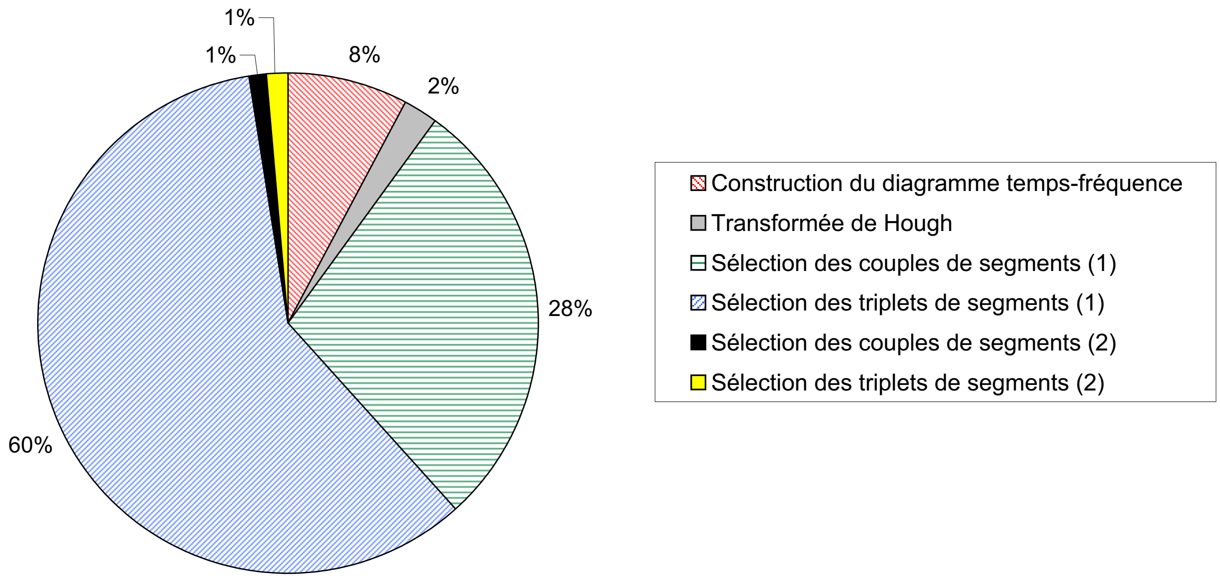


FIG. 6.13 – Répartition du temps de calcul pendant les différentes étapes de la méthode.

trouver la plupart des segments tangents à la courbe d'effet Doppler du pulsar, dans le cas contraire les points sélectionnés par les coupures ne pourront être ajustés. La probabilité de découverte d'un pulsar ne dépend donc que peu de la durée des données disponibles.

Cet algorithme peut être la première étape d'une recherche hiérarchique. La deuxième étape pourrait être un filtrage optimal autour des valeurs retournées par cette méthode.

Chapitre 7

Deuxième méthode de détection des pulsars

Introduction

La méthode présentée au chapitre précédent est basée sur une transformée de Hough locale, ce qui limite ses performances, et ne lui permet pas de tirer parti de l'ensemble des données disponibles. Dans ce chapitre, nous présentons une autre méthode, toujours basée sur la transfomée de Hough. Mais, cette fois, cette transformée n'est plus locale, on peut associer tous les points d'un diagramme temps-fréquence pendant la transformée de Hough. La recherche se bornera donc aux pulsars en système binaire ayant une orbite d'excentricité voisine de 0. Elle se base sur une transformée de Hough à 3 points, qui recherche directement des sinusoïdes dans des diagrammes temps-fréquence binaires.

7.1 Principe théorique

Comme pour la méthode précédente, on commence par construire des diagrammes temps-fréquence. Si le signal d'un pulsar en système binaire ayant une orbite d'excentricité voisine de 0 est présent avec une amplitude suffisante, il y aura des points de signal dans le diagramme temps-fréquence, qui seront répartis sur une sinusoïde. Le problème est donc de chercher une sinusoïde.

L'équation d'une sinusoïde est la suivante :

$$f = f_o + a.\sin\left(2\pi\nu.t + \varphi\right) \tag{7.1}$$

Les paramètres à déterminer sont au nombre de 4 : la fréquence f_o pulsar au moment du diagramme temps-fréquence, l'amplitude de l'effet Doppler orbital a (lié à la vitesse orbitale du pulsar), la fréquence orbitale ν du pulsar et sa phase orbitale φ.

Une transformée de Hough à 4 points étant difficile à réaliser – tant du point de vue du temps de calcul, qui croît comme C_N^4, que du point de vue de la gestion de la mémoire –, on impose f_o, et on réalise une transformée de Hough à 3 points. Celle-ci transforme les sinusoïdes de fréquence centrale f_o en points dans l'histogramme de Hough à 3 dimensions (a, ν, φ).

Pour la valeur de f_o choisie, et pour chacun des triplets de points formés, nous devons résoudre le système suivant (où $t_1 < t_2 < t_3$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = f_o + a.\sin(\omega t_1 + \varphi) \\ f_2 = f_o + a.\sin(\omega t_2 + \varphi) \\ f_3 = f_o + a.\sin(\omega t_3 + \varphi), \end{array} \right. \tag{7.2}$$

système non linéaire qui nous donnera plusieurs triplets de solutions (a, ω, φ). Lorsque f_1, f_2 et f_3 ne sont pas égaux, la façon de procéder est la suivante : on fait varier a entre a_{min}=max$(|f_1 - f_0|, |f_2 - f_0|, |f_3 - f_0|)$ et a_{max}. Pour chacune de ces valeurs de a, on résoud les 2 premières équations du système (7.2), qui nous donnent les valeurs de ω et de φ qui sont solutions. On injecte ensuite les valeurs de ω et φ trouvées dans la relation suivante :

$$r(a) = f_3 - f_o - a.\sin(\omega t_3 + \varphi), \tag{7.3}$$

Si $r(a) = 0$, alors la relation (7.3) est équivalente à la troisième relation du système (7.2). On cherche ensuite les zéros de $r(a)$ par dichotomie. Ces valeurs de a font partie des triplets de solutions du système (7.2). On résoud à nouveau le système (7.2), pour la valeur de a que l'on vient de déterminer. La case de l'histogramme de Hough à 3 dimensions correspondant à la solution trouvée est alors incrémentée. Le nombre de solutions trouvées est donc proportionnel au nombre de triplets que l'on peut former avec les N points du diagramme temps-fréquence, soit $C_n^3 = n(n-1)(n-2)/6$.

Le calcul est détaillé à l'annexe C.1. Les cas où f_1, f_2 et f_3 sont égaux requièrent un traitement particulier, également détaillé en annexe.

7.2 L'histogramme de Hough

Pour chaque triplet de points pouvant être formé avec les points sélectionnés, on obtient des triplets de solutions $(a,\ \nu,\ \varphi)$. On incrémente, pour chacun d'eux, la case correspondante de l'histogramme de Hough à 3 dimensions.

L'étape suivante consiste à déterminer les paramètres du pic maximum : ses coordonnées $(a,\ \nu,\ \varphi)$, son amplitude ainsi que ses écarts-type dans les 3 directions. On repère tout d'abord la case dont l'amplitude est la plus grande. Puis on détermine les largeurs σ_x, σ_y et σ_z du pic. Ensuite, on compte le nombre de points présents dans 3 ellipsoïdes centrés sur le pic, et de taille variable. La première a comme demi-axes $1.5\ \times \sigma_x$, $1.5\ \times \sigma_y$ et $1.5\ \times \sigma_z$, et nous donne le nombre de points total du pic. La deuxième a comme demi-axes $4\ \times \sigma_x$, $4\ \times \sigma_y$ et $4\ \times \sigma_z$, et la troisième $6\ \times \sigma_x$, $6\ \times \sigma_y$ et $6\ \times \sigma_z$. Ces tailles ont été arbitrairement choisies, et elles peuvent être optimisées. La différence des contenus de ces deux ellipsoïdes nous donne le niveau moyen de bruit, qui est soustrait au nombre de points dans le pic. Cette information est sauvée sur disque pour chaque valeur de f_o.

A la fin de l'analyse, on trace la hauteur du pic maximum en fonction de la valeur de f_o. Un exemple est donné sur la figure 7.2.

7.3 Performances de la méthode

Nombre de cases de l'histogramme de Hough

Le nombre de divisions des axes de l'histogramme de Hough est un paramètre à ajuster dans notre étude. Nous avons choisi d'effectuer le même découpage pour les 3 axes a, ν et φ. Un maillage trop grossier peut induire un recouvrement entre le signal et le bruit dans l'histogramme, et il limite la précision des paramètres de sinusoïdes détectées. A l'inverse, un maillage trop fin crée un histogramme très volumineux, et peut induire une dilution du signal entre plusieurs cases voisines.

La figure 7.1 représente le diagramme temps-fréquence sur lequel a été testée l'influence du nombre de divisions des axes, et la figure 7.2 montre les résultats obtenus. Enfin, la figure 7.3 donne le temps de calcul nécessaire au traitement de 100 valeurs de f_o consécutives.

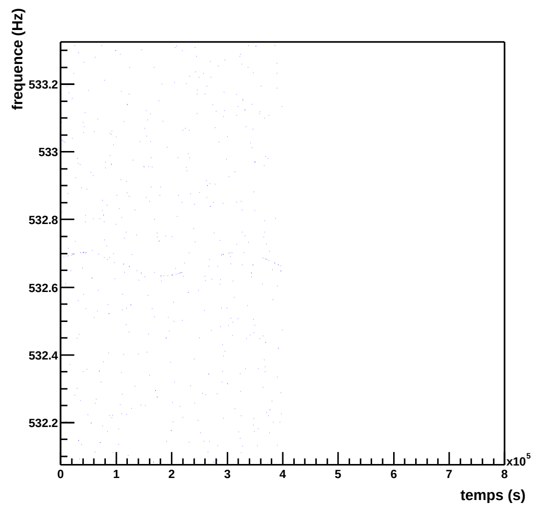


FIG. 7.1 – Points sur lesquels a été testé l'effet du nombre de cases de l'histogramme de Hough.

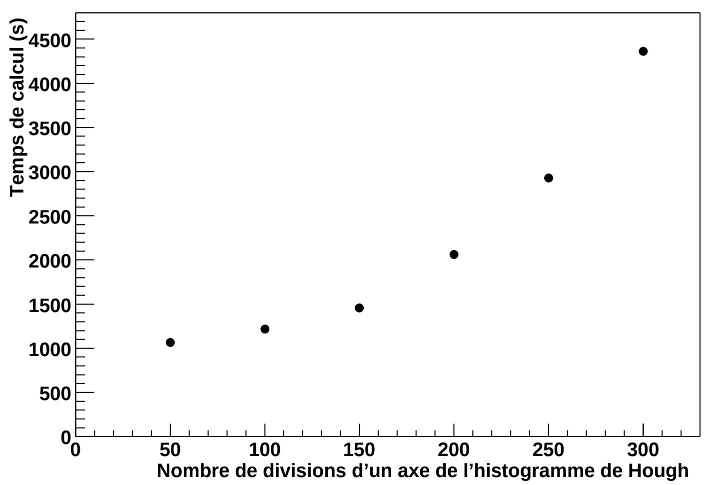
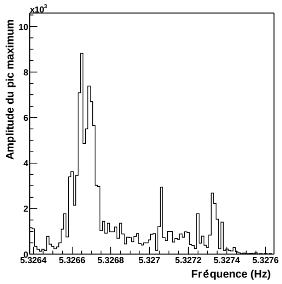
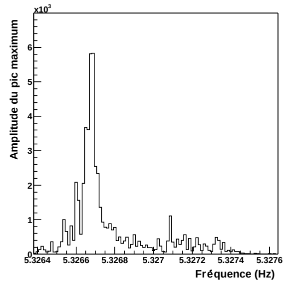


FIG. 7.3 – Temps de calcul pour 100 valeurs successives de f_o en fonction du nombre de divisions des axes de l'histogramme de Hough.

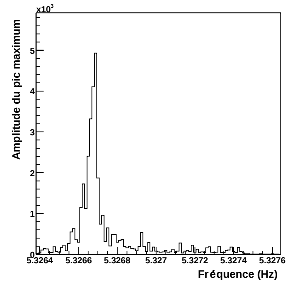
Nous avons découpé les 3 axes de l'histogramme de Hough en 200, ce qui nous donne le meilleur rapport signal sur bruit.



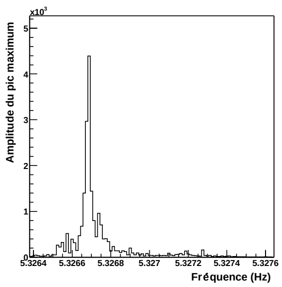
50 bins.



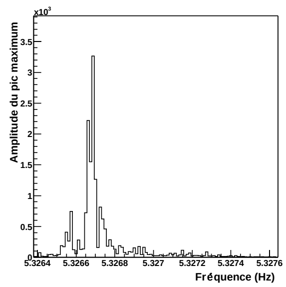
100 bins.



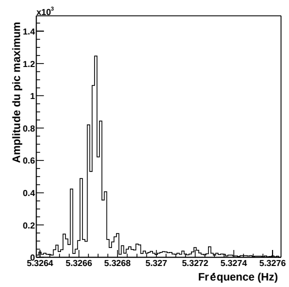
150 bins.



200 bins.



250 bins.



300 bins.

FIG. 7.2 – Amplitude des pics maximaux en fonction de la fréquence, pour plusieurs divisions des axes de l'histogramme de Hough.

7.4 Influence de la durée des données disponibles

Intéressons-nous maintenant à l'effet de la durée de données diponibles sur les performances de la méthode.

La figure 7.4 montre la variation de la hauteur du pic maximum et la variation de la valeur moyenne du bruit en fontion de la longueur des données disponibles. La hauteur du pic maximum a été ajustée par la fonction $constante \times C_n^3$, et la valeur moyenne du bruit par une fonction n^2. Le signal croît plus vite que le bruit, et le rapport signal sur bruit est donc une fonction croissante de la longueur des données.

La figure 7.5 montre les résultats en fonction de la longueur de données étudiées, pour du bruit simulé contenant le signal du pulsar PSR0034-0534, lorsque l'effet Doppler dû au mouvement de la Terre est pris en compte. Le rapport signal sur bruit s'améliore bien avec la longueur des données étudiées.

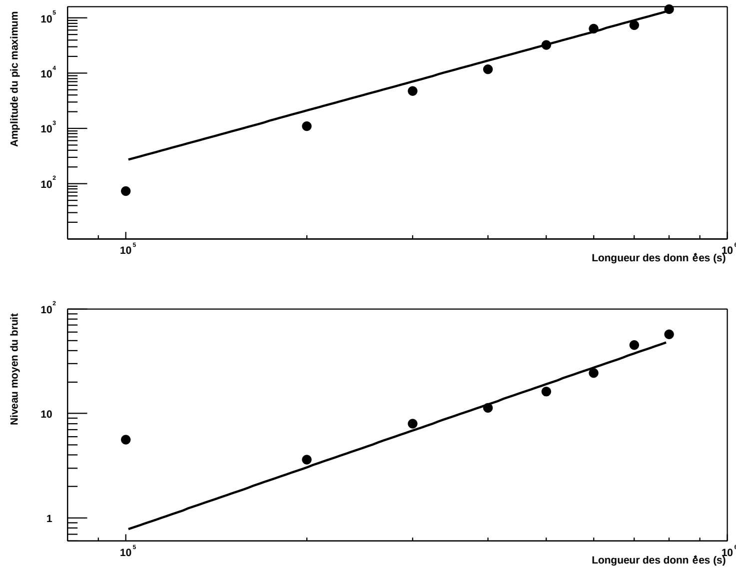


FIG. 7.4 – Variation de la hauteur du pic maximum et la variation de la valeur moyenne du bruit en fontion de la longueur des données disponibles.

7.5 Application aux données du run E4

7.5.1 Les prises de données techniques

Une des étapes du dévloppement de Virgo a été la phase de commisioning. Elle a commencé en mars 2001, pour se terminer en juillet 2002. Durant cette période, le détecteur fonctionnait avec des bras de 6 m seulement, mais l'ensemble du système mécanique, du système d'acquisition des données et du sytème de contrôle était opérationnel. Cette phase, qui a permis de mieux comprendre et d'ajuster le comportement de Virgo, a été ponctuée de prises de données techniques, les "runs". Lors de ces runs, le détecteur fonctionnait jour et nuit, avec le minimum d'interventions humaines. Les données enregistrées étaient ensuite examinées afin d'apporter au détecteur les corrections et les améliorations qui s'imposent.

Le dernier de ces 5 runs technique, E4, a eu lieu du 12 au 15 juillet 2002 (les données sont disponibles entre les temps GPS 710517600 et 710789717). La courbe de sensibilité du détecteur pendant ce run est donnée sur la figure 7.6 [104].

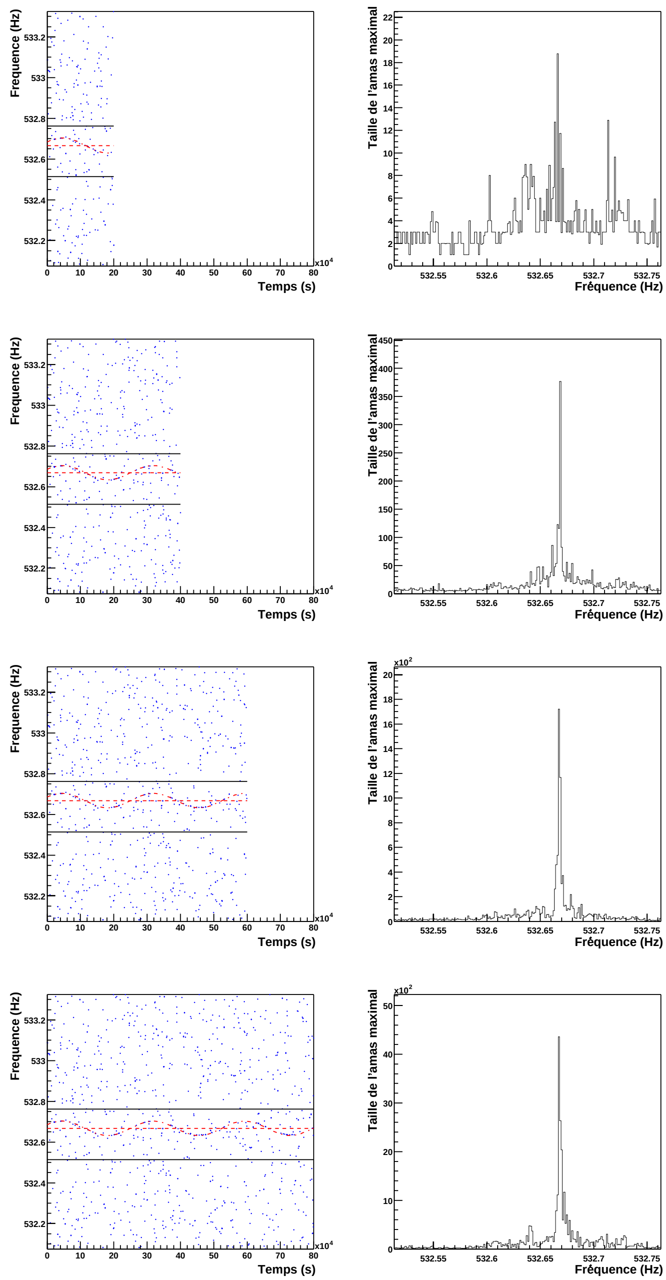


FIG. 7.5 – Influence de la longueur des données sur les performances de la méthode, testée sur le pulsar PSR0034-0534, avec effet Doppler dû au mouvement de la Terre.

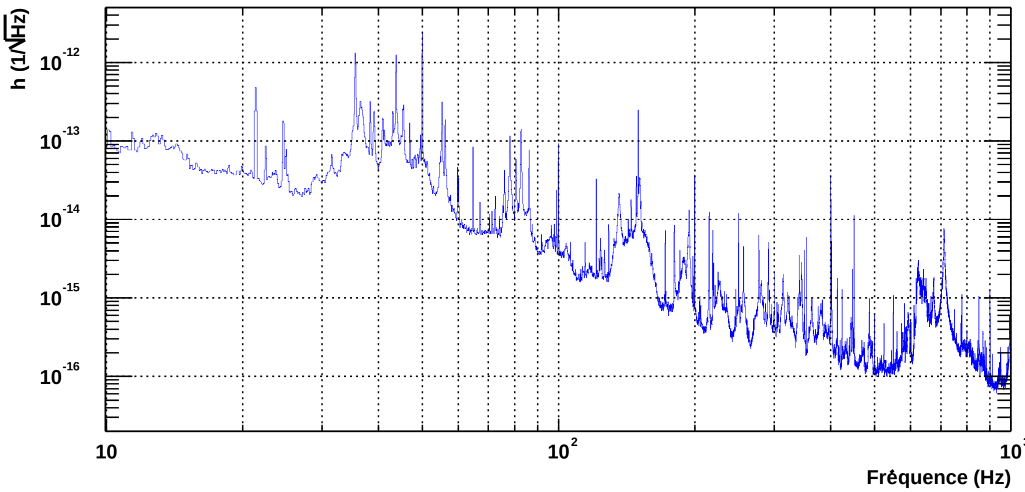


FIG. 7.6 – Courbe de sensibilité de Virgo pendant le run E4.

7.5.2 Les données utilisées pour l'analyse

Reconstruction des données

Les données sortant du détecteur ne sont pas directement utilisables pour des études de physique. Il faut d'abord les corriger des effets instrumentaux [104]. Pour cela, une bonne connaissance du détecteur est indispensable.

L'interféromètre n'est pas toujours en fonctionnement normal, et la qualité des données varie avec le temps. Sur les 3 jours de données, nous avons sélectionné 4 périodes pendant lesquelles les données semblent de qualité suffisante. Elles sont répertoriées dans le tableau 7.1. La durée totale de données utilisées est de 32 h environ, soit 44 % du temps du run E4.

Date de début	Date de fin	Durée
710557143 (13/07, 00:59:03)	710585943 (13/07, 08:59:03)	8h
710607543 (13/07, 14:59:03)	710625543 (13/07, 19:59:03)	5h
710654343 (14/07, 03:59:03)	710678343 (14/07, 10:39:03)	6h40
710708343 (14/07, 18:59:03)	710751543 (15/07, 06:59:03)	12h

TAB. 7.1 – Temps de début et de fin des périodes de données utilisées pour l'analyse.

Pulsars simulés

Pour cette analyse, tous les pulsars en système binaire répertoriés ayant une orbite d'excentricité inférieure à 10^{-3}, et pour lesquels l'ensemble des informations nécessaires est disponible, ont éte simulés. Deux pulsars supplémentaires ont été inclus :

- PSR1915+1606, le pulsar qui a amené la mise en évidence de l'existence des ondes gravitationnelles, dont l'orbite a une excentricité égale à 0.617.
- PSR0024-7204H, un pulsar dont la rotation s'accélère. Son orbite a une excentricité égale à 0.07.

Le fichier de cartes utilisé pour la simulation avec SIESTA est donné à l'annexe D. Les fréquences des pulsars simulées ont été décalées de 1 Hz – donc 2 Hz pour l'émission à la fréquence double – par rapport à celles des vrais pulsars.

Addition des signaux

Le format de sortie des données simulée par SIESTA est le même que celui des données prises lors du run E4. Nous avons donc pu facilement ajouter ces 2 signaux, afin de construire les diagrammes temps-fréquence nécessaires à notre analyse. Le spectre 10 Hz - 1 kHz a été découpé en bandes de 5 Hz. Dans chacune de ces bandes, l'amplitude du signal (si un pulsar est présent dans cette bande de fréquences) est ajustée à la main, afin d'avoir une sinusoïde visible à l'œil dans le diagramme temps-fréquence correspondant, sans que le signal ne soit trop fort.

Cela peut de révéler difficile, car le niveau du bruit varie au cours du run E4, et il peut y avoir plusieurs pulsars dans une bande de 5 Hz. Il faut alors trouver un compromis, certains pulsars pouvant avoir une forte amplitude, d'autres une faible, comme le montre la figure 7.7.

Les fréquences des ondes gravitationnelles simulées sont soumises à l'effet Doppler dû à la rotation de la terre autour du Soleil, et la fréquence peut être un peu différente de la fréquence intrinsèque du pulsar.

Le figure 7.8 représente le spectre des données du run E4, pour le bruit seul intégré pendant 1 seconde (courbe bleue), et pour le bruit et le signal simulé intégré pendant 800 secondes (courbe rouge), par bandes de fréquences de 100 Hz. Sont aussi représentés sur ce graphique les pulsars inclus dans la simulation (les lignes brisées représentent les fréquences des pulsars, les lignes en pointillé les fréquences doubles).

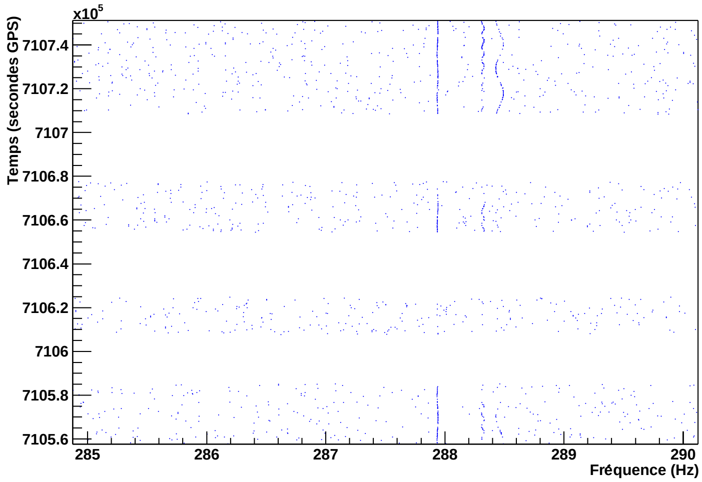


FIG. 7.7 – Un exemple de diagramme temps-fréquence où il a fallu trouver un compromis pour l'amplitude, et où la variation du niveau de bruit avec le temps apparaît.

Un sursaut dans les données

La figure 7.9 montre l'allure des données autour du temps GPS 710625213. On peut y remarquer un fort sursaut su signal (il s'élève environ 4 ordres de grandeur au-dessus des données prises quelques secondes avant). Ce sursaut n'a pas créé de perturbation dans les diagrammes temps-fréquence, la raison étant que le spectre de Fourier est très régulier, comme le montre la figure 7.10 autour de 200 Hz, alors que l'on sélectionne les pics. Ceci est dû au fait que le sursaut domine la transformée de Fourier (la transformée de Fourier d'un pic de Dirac a un spectre plat).

7.5.3 Bornes de l'analyse

Une étude des paramètres des pulsars répertoriés permet de restreindre le domaine de l'analyse pour f_o, a et ν, φ étant compris entre 0 et 2 π.

Fréquence du pulsar

La figure 4.7 montre la distribution de la fréquence des pulsars pour les pulsars en système binaire répertoriés dont l'excentricité est inférieure à 10^{-3}. Ils ont tous une fréquence de rotation inférieure à 622 Hz. En tenant compte de l'émission d'ondes gravitationnelles à la fréquence double, nous obtenons

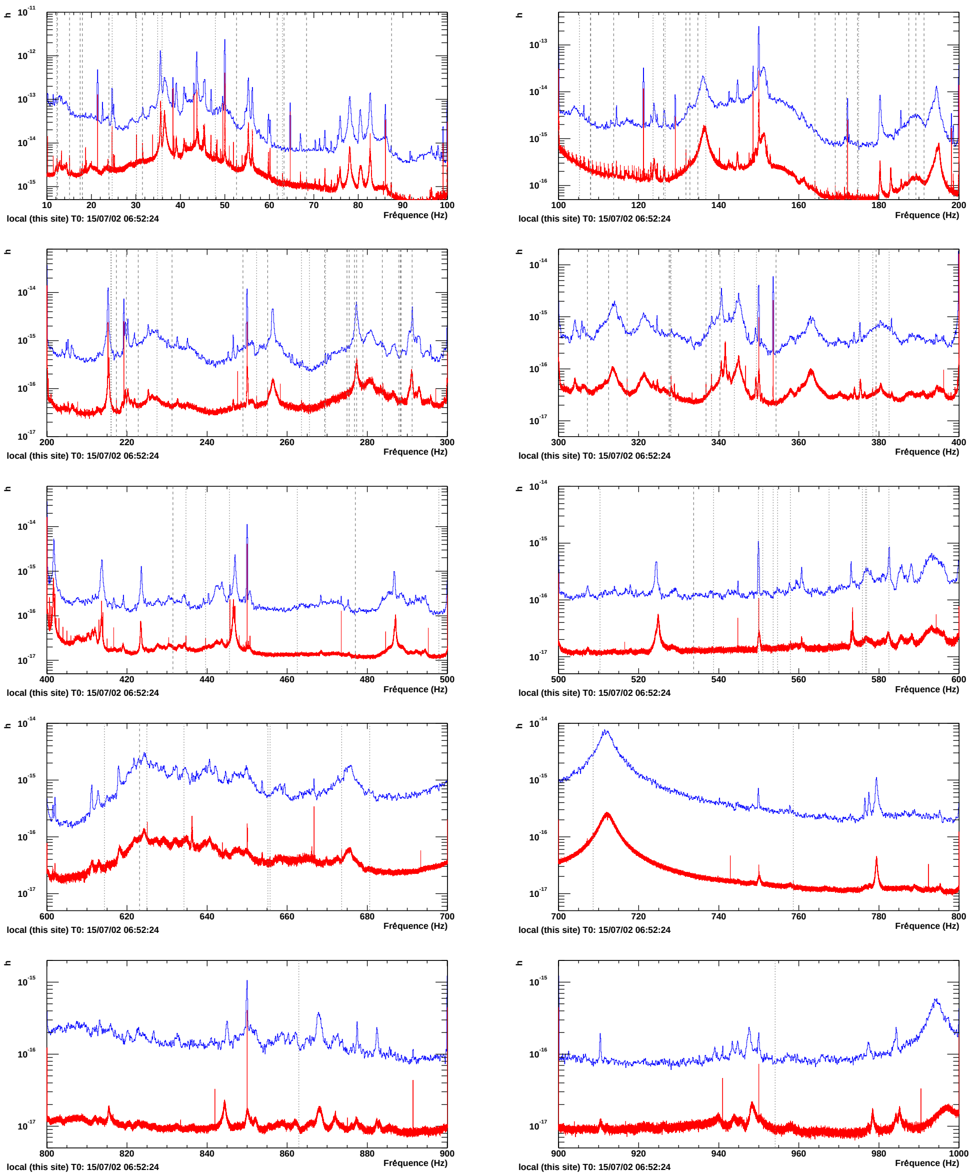


FIG. 7.8 – Spectre des données du run E4, pour le bruit seul intégré pendant 1 seconde (courbe bleue), et pour le bruit et le signal simulé intégré pendant 800 secondes (courbe rouge), et pulsars inclus dans la simulation (les lignes brisées représentent les fréquences des pulsars, les lignes en pointillé les fréquences doubles).

une limite à 1250 Hz environ. Nous avons choisi de nous limiter à la bande de fréquences situées entre 10 Hertz et 1 kHz.

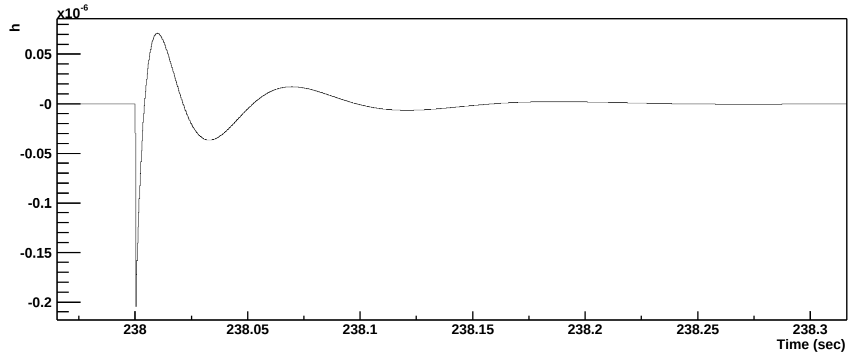


FIG. 7.9 – Sursaut dans les données autour du temps GPS 710625213.

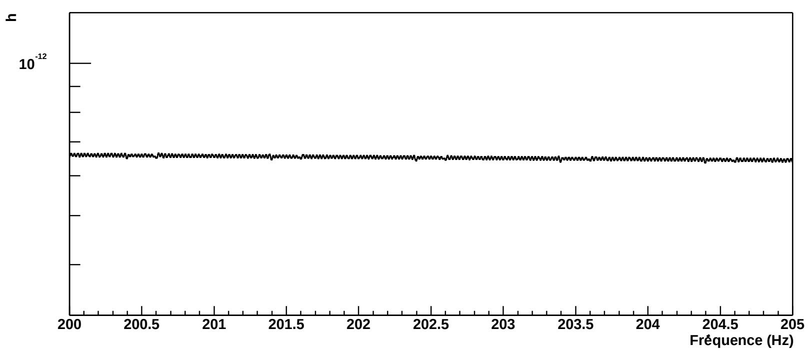


FIG. 7.10 – Transformée de Fourier des données autour du sursaut.

Fréquence orbitale

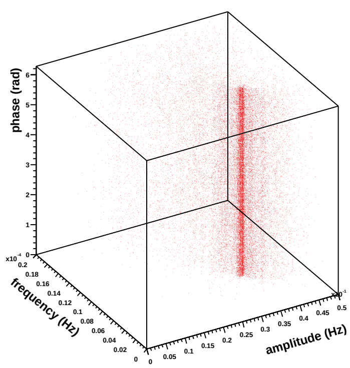
La figure 4.8 montre la distribution de la fréquence orbitale pour les pulsars en système binaire répertoriés dont l'excentricité est inférieure à 10^{-3}. Après avoir testé la vitesse de calcul pour des coupures à 2×10^{-4} Hz, 10^{-4} Hz et 2×10^{-5} Hz (voir section 7.5.5), nous avons retenu une coupure à 10^{-4} Hz, qui diminue sensiblement le temps de calcul, tout en conservant la majeure partie des pulsars en système binaire répertoriés.

Amplitude de l'effet Doppler

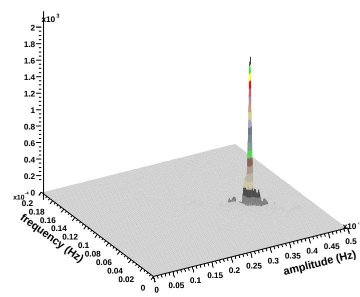
La figure 4.9 montre la distribution de l'amplitude de l'effet Doppler pour les pulsars en système binaire répertoriés dont l'excentricité est inférieure à 10^{-3}. Cette amplitude est dans tous les cas inférieure à 0.04 Hz. Nous avons choisi de limiter l'amplitude de l'effet Doppler orbital des pulsars en système binaire recherchés à 0.05 Hz.

7.5.4 Décalage de l'origine

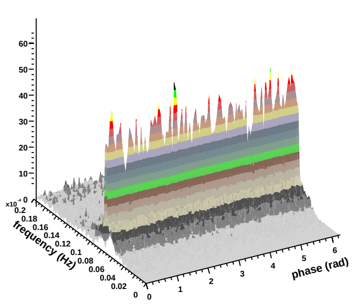
Les données prises par Virgo sont estampillées avec le temps GPS. Pour le run E4, le temps est de l'ordre de 7×10^8 s. Si ce temps est utilisé pour la recherche de la sinusoïde, on obtient l'histogramme de Hough et ses projections représentés sur la figure 7.11. On voit que la phase du signal est indéfinie.



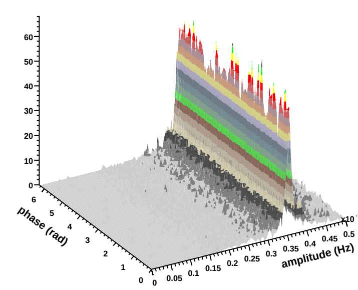
Histogramme de Hough.



Projection sur le plan (a, ν).



Projection sur le plan (φ, ν).



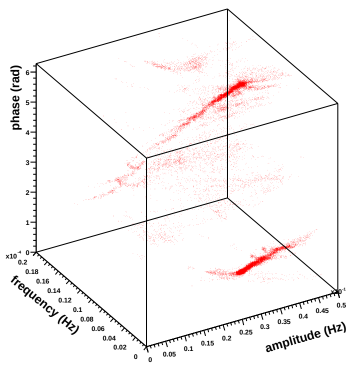
Projection sur le plan (a, φ).

FIG. 7.11 – Histogramme de Hough et ses projection lorsque le temps GPS est utilisé dans la recherche de la sinusoïde.

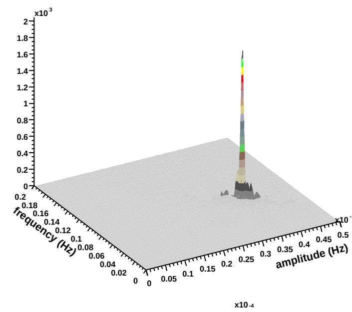
La raison en est la suivante : 2 triplets de points appartenant à la même sinusoïde peuvent donner des valeurs de ω un peu différentes (de l'ordre de quelques ‰). Or le calcul de φ fait intervenir ωt (*cf* annexe C.2). Si $\omega \sim 10^{-5}$,

$$\Delta\varphi \sim 10^{-3} \times 10^{-5} \times 10^{9} = O(10), \tag{7.4}$$

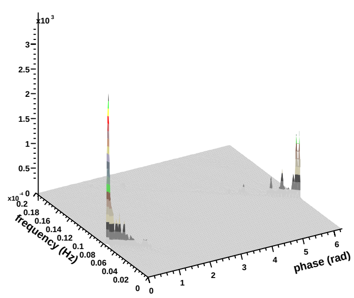
ce qui représente une incertitude beaucoup trop grande : la valeur de φ est complètement indéterminée, d'où le rideau que l'on peut voir sur la figure 7.11-a. Lorsque l'on ramène les temps à l'origine, on obtient les résultats de la figure 7.12. La phase retournée par l'algorithme doit être réajustée en tenant compte de l'amplitude du décalage et de la fréquence de la sinusoïde reconstruite.



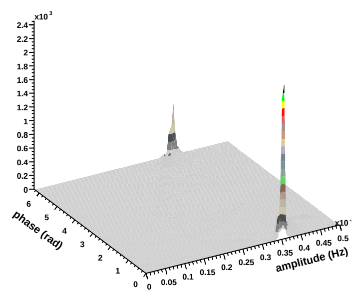
Histogramme de Hough.



Projection sur le plan (a, ν).



Projection sur le plan (φ, ν).



Projection sur le plan (a, φ).

FIG. 7.12 – Histogramme de Hough et ses projection lorsque les points sont ramenés à l'origine.

7.5.5 Coupure des diagrammes temps-fréquence

A présent, les diagrammes temps-fréquence sont construits à partir des données réelles – auquelles on a ajouté des pulsars simulés–, dont le spectre présente de nombreuses irrégularités (voir figure 7.6). On ne peut plus, comme avec les données simulées, calculer la moyenne et l'écart-type du bruit sur des bandes de 1 Hz. Ils sont calculés localement : pour chaque valeur du spectre de Fourier, on tient compte de 50 valeurs de part et d'autre, soit un total de 100 bins. La valeur elle-même est exclue. Cette valeur de 100 bins permet de conserver les propriétés statistiques du spectre de Fourier, tout en suivant ses variations locales.

La probabilité pour qu'un pic ne contenant que du bruit dépasse la valeur $X = m + \alpha.\Sigma$, où m est la moyenne du bruit, Σ son écart-type et α le paramètre de coupure ajustable est :

$$P(bruit > X) = e^{-\frac{(m+\alpha.\Sigma)^2}{2\Sigma^2}} \tag{7.5}$$

La probabilité pour qu'un pic contenant du bruit et une amplitude $s.\Sigma$ de signal dépasse cette même valeur X est :

$$P(bruit + signal > X) = P(bruit > X - signal) = e^{-\frac{(m+(\alpha-s).\Sigma)^2}{2\sigma^2}} \tag{7.6}$$

Le rapport des probabilités est le suivant :

$$\rho(s) = e^{-s\left(\frac{s}{2}-\sqrt{\frac{\pi}{4-\pi}}-\alpha\right)} \tag{7.7}$$

La fonction ρ est une fonction croissante de α. Ainsi, plus le niveau de coupure α est haut, plus on a de chance de sélectionner un point de signal par rapport à un point de bruit.

Cependant, le nombre d'entrées correspondant à une sinusoïde comportant N points est égal à C_N^3, et c'est cet effet qui se révele prépondérant dans l'efficacité de la recherche. Nous avons appliqué l'algorithme à différents diagrammes temps-fréquence, construits avec le même bruit et la même quantité de signal, mais pour lesquels la hauteur de coupure des pics diffère. Les niveaux de coupures utilisés donnaient à un point de bruit une probabilité entre 1‰_o et 1.2‰ d'être sélectionné, par pas de 1‰_o. Les résultats sont donnés sur la figure 7.13.

Le rapport signal sur bruit augmente avec le nombre de points sélectionnés, et on aura intérêt à traiter des diagrammes temps-fréquence avec le plus grand nombre de points possible. Cependant, la puissance de calcul disponible va limiter ce nombre de points. La figure 7.14 montre l'augmentation du temps de calcul avec le nombre de points. Le temps de calcul est bien proportionnel à C_N^3. Ces tests ont été réalisés au Centre de Calcul de l'IN2P3 à Lyon.

La coupure sur la fréquence orbitale choisie est de 10^{-4} Hz. Etant donnée la puissance de calcul raisonnablement disponible, et le nombre d'opérations à réaliser, nous avons choisi de conserver 1‰ des points du diagramme temps-fréquence, c'està-dire qu'un pic dans le spectre d'amplitude des transformées

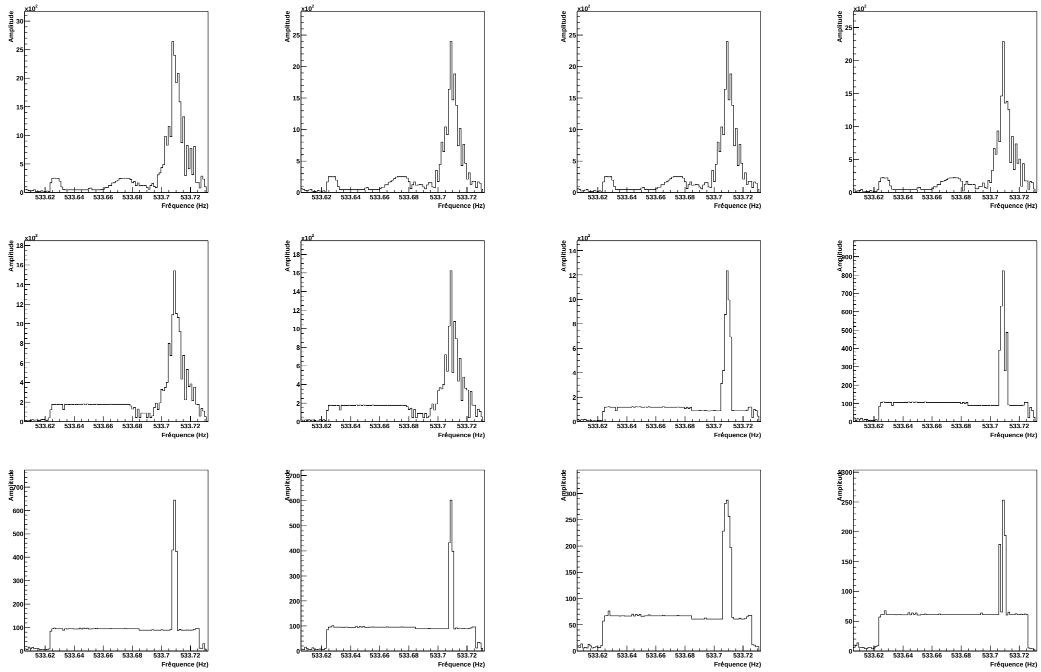


FIG. 7.13 – Résultats de l'algorithme sur des diagrammes temps-fréquence ne différant que par la hauteur de sélection des points. Le nombre de points gardé varie de $1.2{}^{o}\!/_{oo}$ (en haut à gauche) à $1{}^{o}\!/_{ooo}$ (en bas à droite).

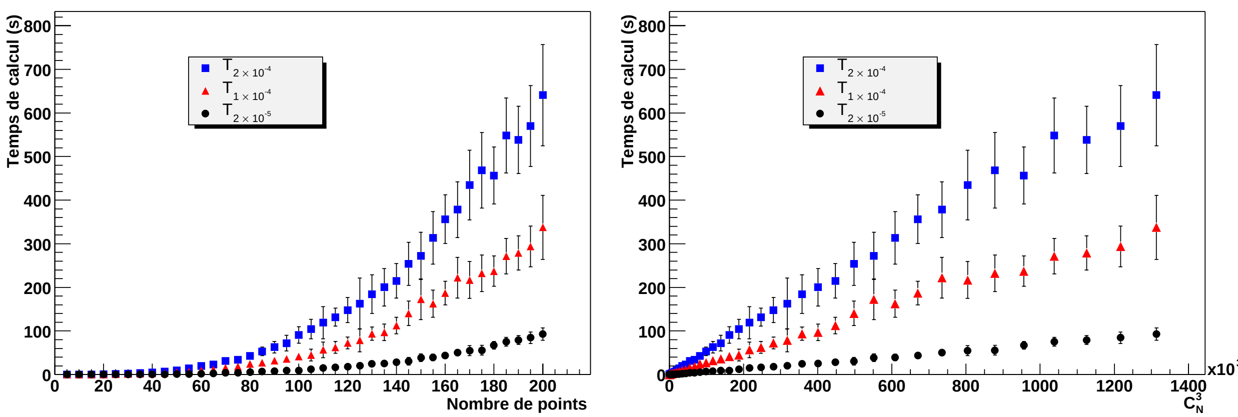


FIG. 7.14 – Temps de calcul nécessaire en fonction du nombre du nombre de points traités N, et en fonction de C_N^3. On voit que le temps de calcul croît bien comme C_N^3.

de Fourier est sélectionné si sa hauteur est supérieure à $m + 3.76\Sigma$, où m et Σ sont respectivement la moyenne et la variance de l'amplitude de la transformée de Fourier.

7.5.6 Rejet des raies et des zones trop bruitées

Certaines raies sont présentes dans le spectre du run E4. Elles peuvent comporter un grand nombre de points, ce qui ralentit singulièrement notre analyse. On effectue la projection de diagrammes temps-fréquence, et on compte le nombre de points dans la colonne. Si ce nombre est supérieur à 40, toute la colonne est remise à 0. Cette opération peut supprimer le signal de certains pulsars, si leur période orbitale est trop longue, si l'amplitude de l'effet Doppler orbital est trop faible, ou si l'amplitude du signal est trop importante. Nous verrons que cela s'est produit pendant l'analyse.

Pour la même raison, on limite le nombre de point sélectionnés autour d'une fréquence f_o à 300. Si il a plus de points, la bande n'est pas traitée, et on passe à la suivante. Il y a donc un trou dans le résultat. On se protège ainsi des zones trop bruitées.

Dans les 2 cas, les raies ou les zones qui n'ont pas été traitées sont répertoriées.

7.5.7 Barres d'erreur

Si n est le nombre de points sélectionnés dans un diagramme temps-fréquence, alors l'erreur sur ce nombre de points est $\sqrt{n}$ (voir annexe A.3.3). On suppose que tous les triplets de points appartenant à une sinusoïde donnent une solution dans l'amas reconstruit (voir section 7.2). Si m est le nombre de points appartenant à la sinusoïde, alors l'amplitude du pic est $A = C_m^3$. L'erreur sur A est σ_A, telle que :

$$\sigma_A^2 = \left(\frac{\partial C_m^3}{\partial m}\right)^2 \times \sqrt{m}^2 \qquad (7.8)$$

$$\sigma_A^2 = m.\left(\frac{m^2}{2} - m + \frac{1}{3}\right) \qquad (7.9)$$

7.6 Résultats

Nous avons effectué 2 analyses, l'une avec des transformées de Fourier de 350 s, l'autre avec des transformées de Fourier de 800 s.

Voyons successivement les 2 résultats.

7.6.1 T_{FFT} =350 s

Ce temps est adapté à la recherche des 5 pulsars en système binaire-répertoriés dont la fréquence de rotation augmente. La figure 7.15 montre, pour une bande de fréquence de 100 Hz, la moyenne de toues les transformées de Fourier utilisées pour construire les diagrammes temps-fréquence, la projection des diagrammes temps-fréquence, et le résultat de l'analyse. Les fréquences de rotation des pulsars inclus dans la simulation sont représentées par une ligne brisée (rouge), les fréquences cdoubles par une ligne pointillée (bleue). La figure 7.16 montre un élargissement autour de la bande 401-402 Hz. Les bandes bleues représentent les valeurs de f_o qui n'ont pas été traitées car elles contenaient trop de points.

Intérsseons-nous maintenant aux 5 pulsars en système binairerépertoriés dont la fréquence de rotation augmente : J0023-7203J, J0024-7204H, J0024-7204I, J0024-7204S et J1807-2459.

Les pulsars J0023-7203J, J0024-7204H et J0024-7204S ont respectivement des fréquences intrinsèques de 476.05 Hz, 311.49 Hz et 353.31 Hz (il a donc été simulés à 477.05 Hz, 312.49 Hz et 354.31 Hz). Ces pulsars ont été détectés par notre algorithme, avec un très bon rapport signal sur bruit. Les résultats sont donnés sur les figure 7.17, 7.18 et 7.19.

Pour les pulsars J0024-7204I et J1807-2459, le signal ajouté avait une forte amplitude, et les colonnes contenant le signal ont été remises à 0. Ceci a été expliqué auparavant (voir section 7.7 et figure 7.5.2).

7.6.2 T_{FFT} =800 s

La figre 7.23 montre le résultat de l'analyse pour le pulsar PSR0034-0534, pulsar qui a été utilisé pour mettre au point la première méthode.

Le diagramme temps-fréquence traité est représenté sur la figure 7.22. PSR0034-0534 a une période orbitale de 1.6 jour, et on peut voir qu'il manque une fraction significative de l'orbite (cet effet est également visible sur la figure 7.23 au milieu). Il a été détecté par cette méthode, mais ne l'aurait pas été par la précedente. On a, là encore, un très bon rapport signa sur bruit.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit une méthode dédiée à la recherche des pulsar en système binaire, basée sur une transformée de Hough à 3 points. Celle-ci ne s'applique qu'aux pulsars ayant une orbite circulaire, et donc un effet Doppler orbital sinusoïdal. Les détails mathématiques et le temps de calcul ont été présentés.

Cette méthode ne perd pas son efficacité si les données sont fractionnées, ce qui sera certainement le cas des données réelles. On peut aussi l'appliquer à la recherche de pulsars en système binaire ne parcourant qu'une fraction de leur orbite pendant la durée de l'analyse. Il n'est pas nécessaire d'avoir au moins une orbite comme c'était le cas pour la première méthode présentée.

Cette méthode a été testée sur les données de la dernière prise de données techniques (E4) de Virgo. Tous les pulsar en système binaire répertoriés ayant une orbite avec une excentricité inférieure à 10^{-3} ont été simulés, avec une fréquence décalée de 1 Hz. Ils ont été ajoutés au bruit du détecteur. La méthode a été testée dans cet environnement difficile, et elle a montré une bonne robustesse. Nous avons en particulier regardé les résultats pour les 5 pulsars en système binaire dont la fréquence de rotation augmente.

Il reste de nombreux détails à étudier, et de paramètres à ajuster, mais cette méthode semble prometteuse pour la recherche des pulsars en système binaire.

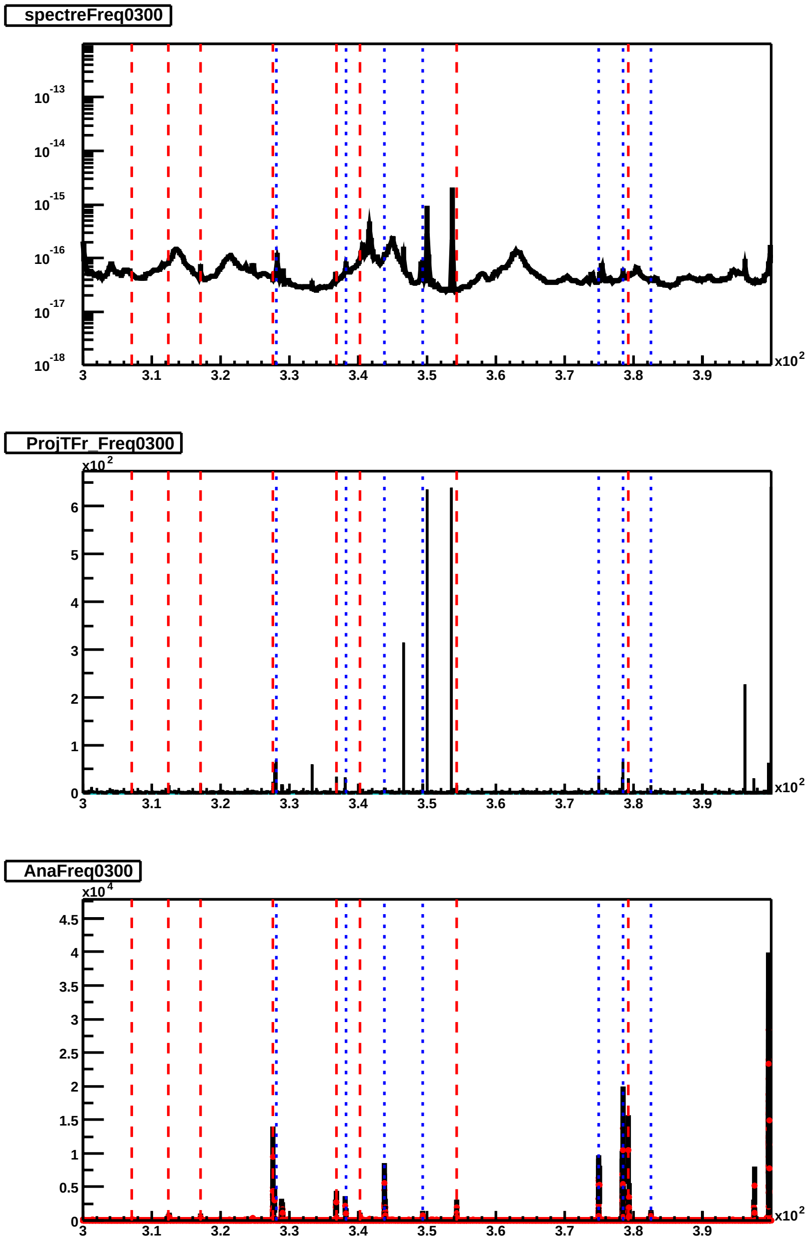


FIG. 7.15 – Moyenne des transformées de Fourier (en haut), projection des diagrammes temps-fréquence (au milieu), et résultat de l'analyse (en bas) pour la bande de fréquences 300 Hz-400 Hz. Les fréquences de rotation des pulsars inclus dans la simulation sont représentées par une ligne brisée (rouge), les fréquences cdoubles par une ligne pointillée (bleue).

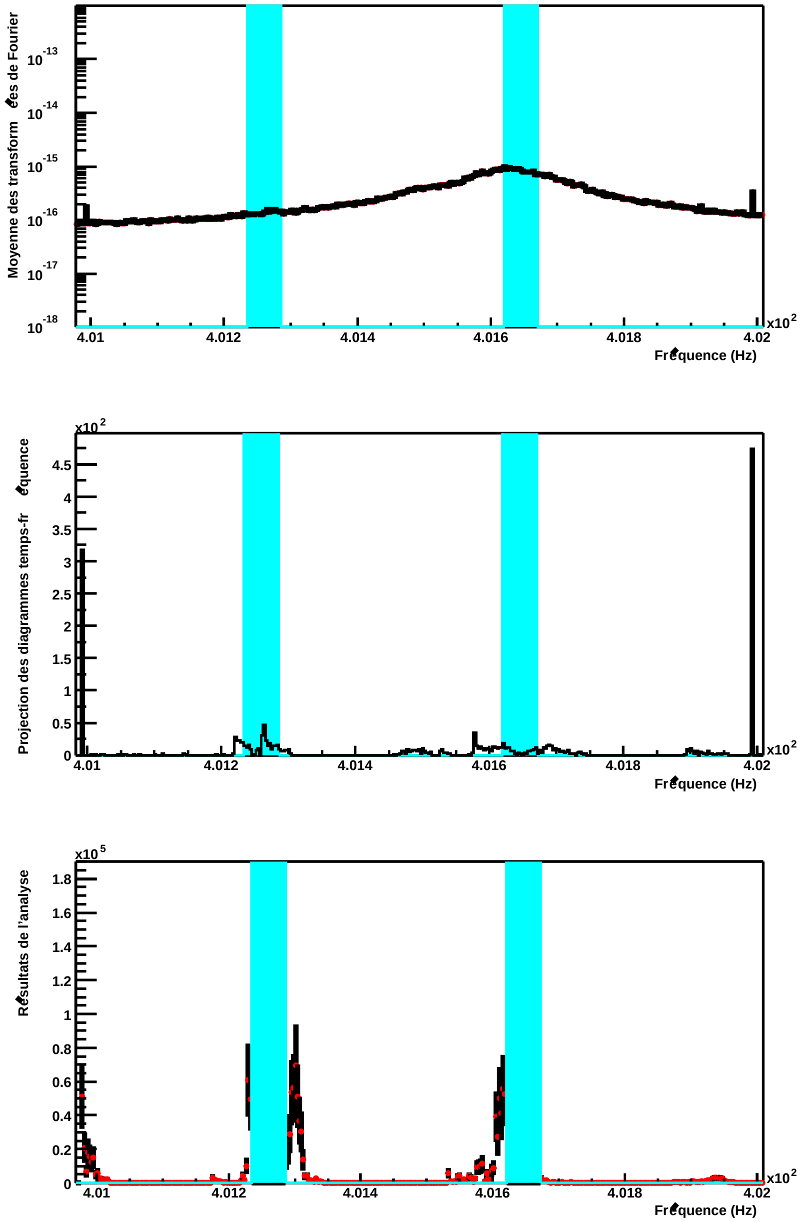


FIG. 7.16 – Zoom sur la bande 401 Hz-402 Hz. On peut voir des bandes bleues aux fréquences pour lesquelles la transformée de Hough n'a pas été réalisés, et que la raie juste avant 402 Hz a été éliminée.

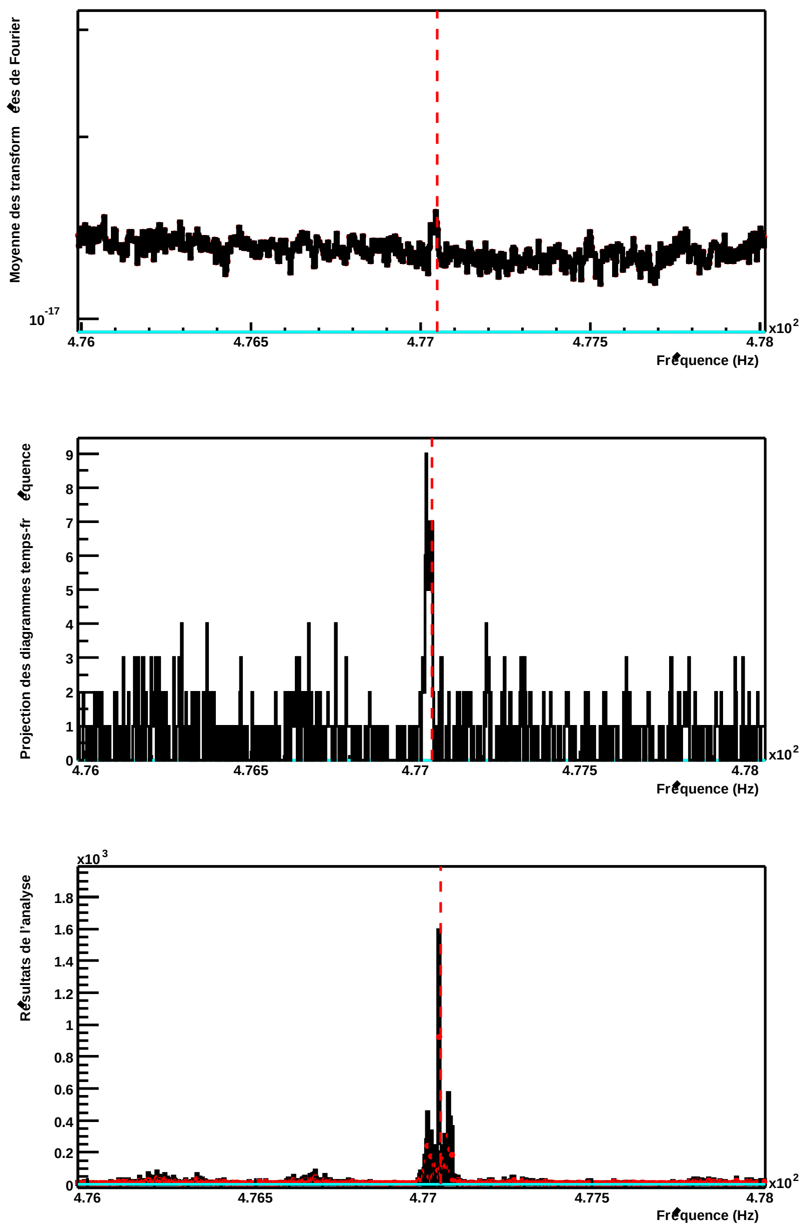


Fig. 7.17 – Résultats de l'analyse pour le pulsar J0023-7203.

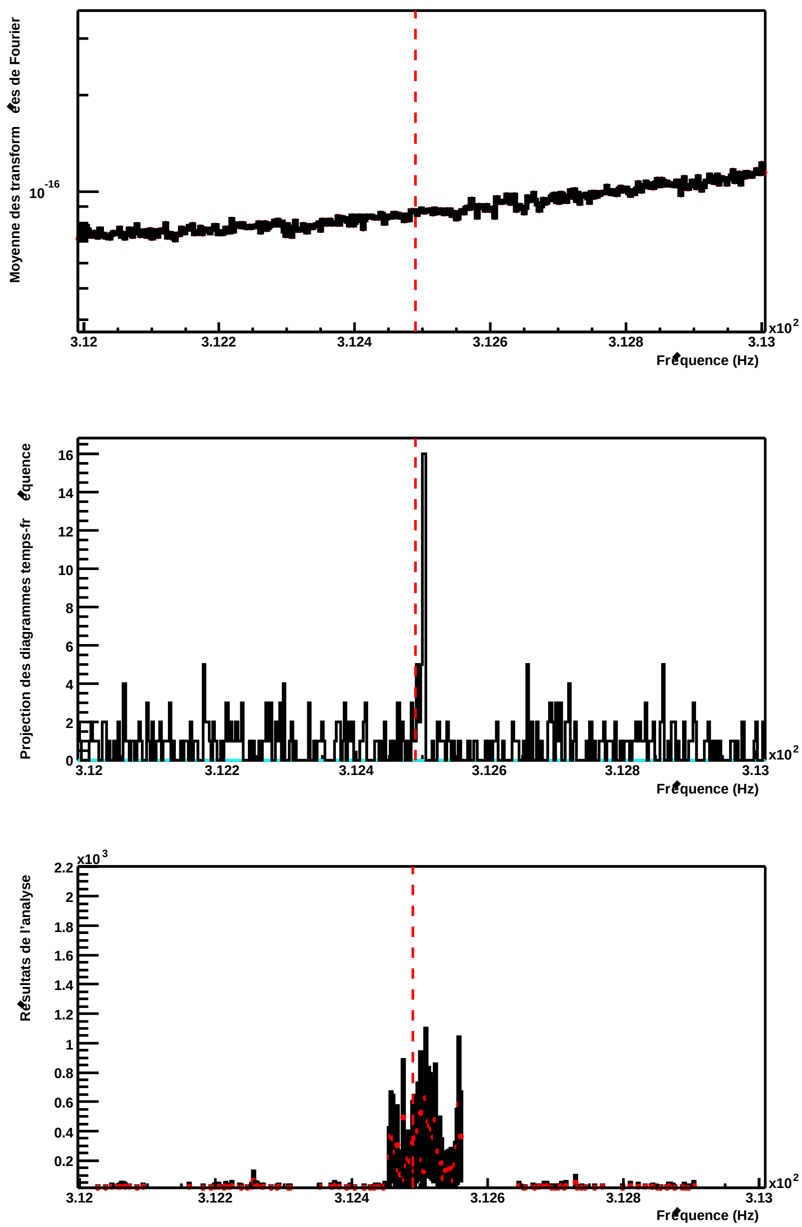


FIG. 7.18 – Résultats de l'analyse pour le pulsar J0024-7204H.

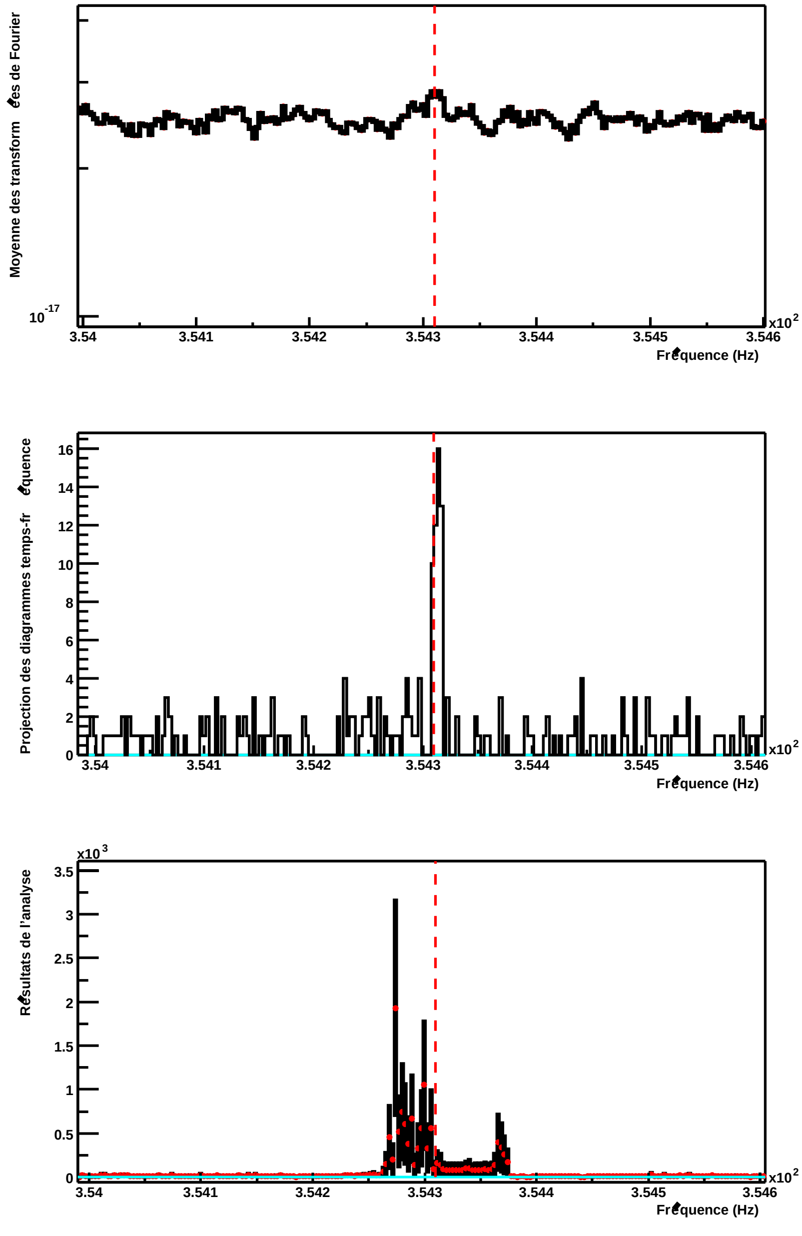


FIG. 7.19 – Résultats de l'analyse pour le pulsar J0024-7204S.

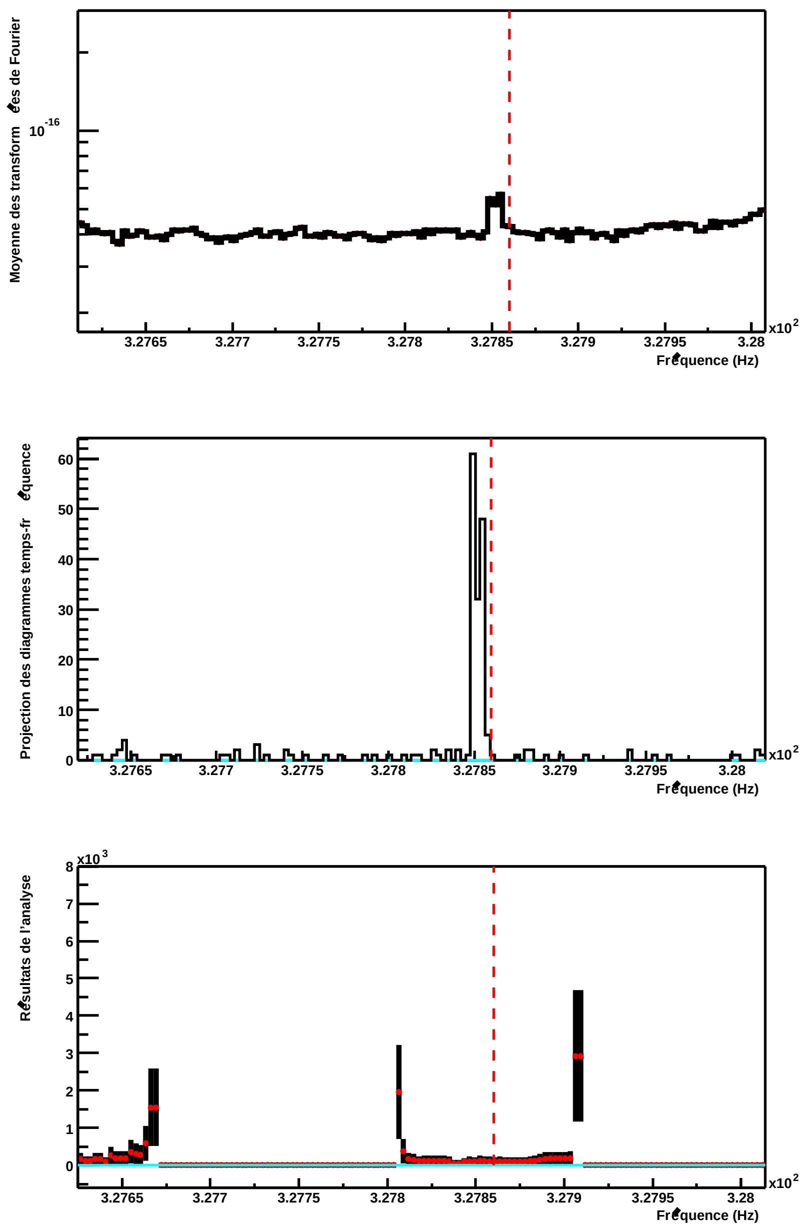


FIG. 7.20 – Résultats de l'analyse pour le pulsar J1807-2459.

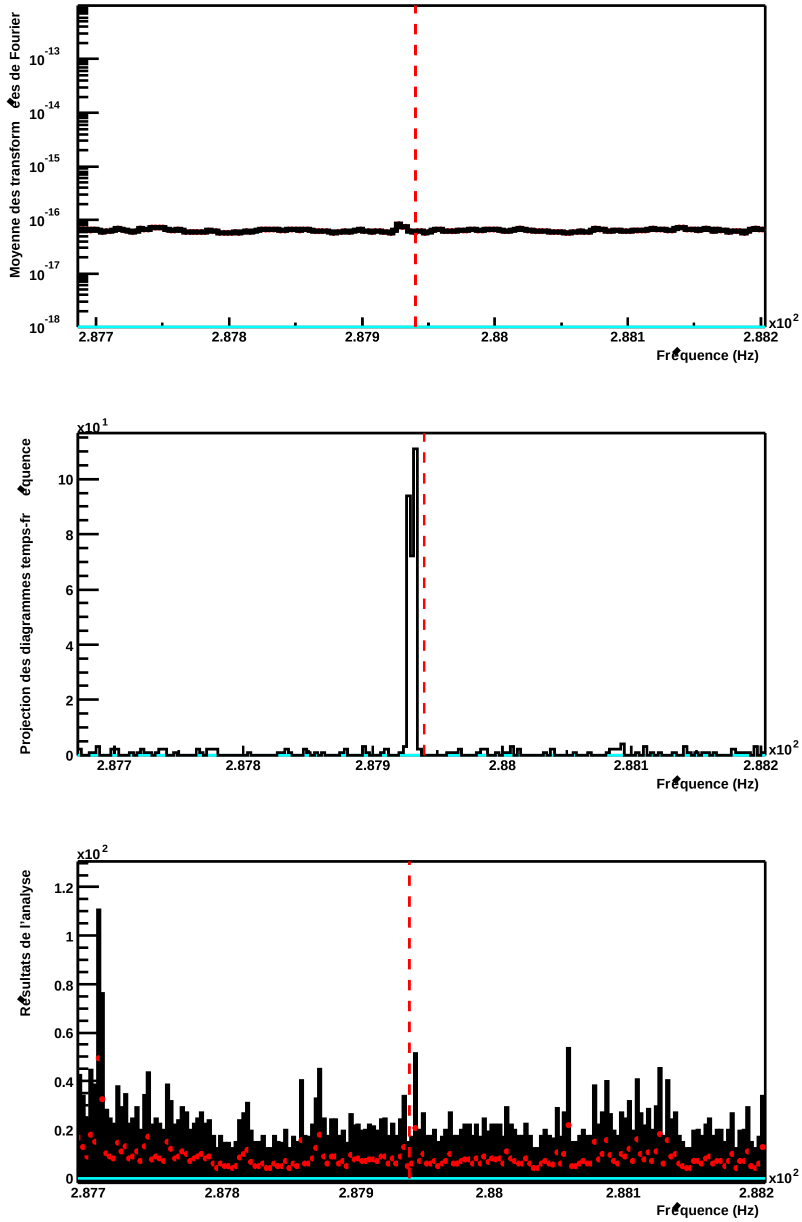


Fig. 7.21 – Résultats de l'analyse pour le pulsar J0024-7204I.

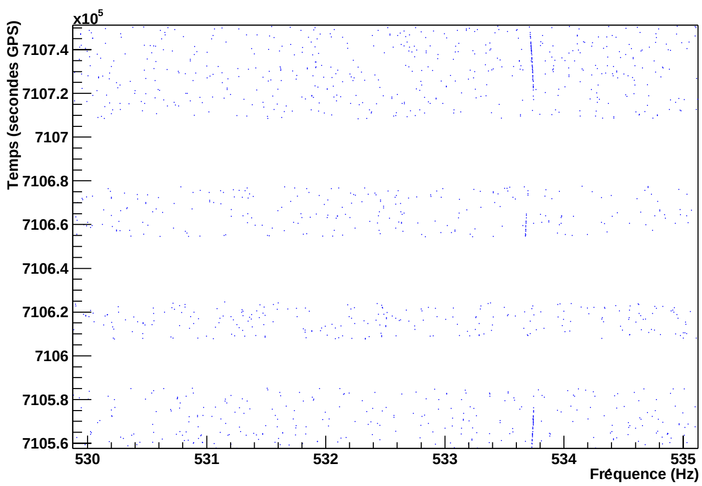


FIG. 7.22 – Diagramme temps-fréquence couvrant les fréquences entre 530 et 535 Hz.

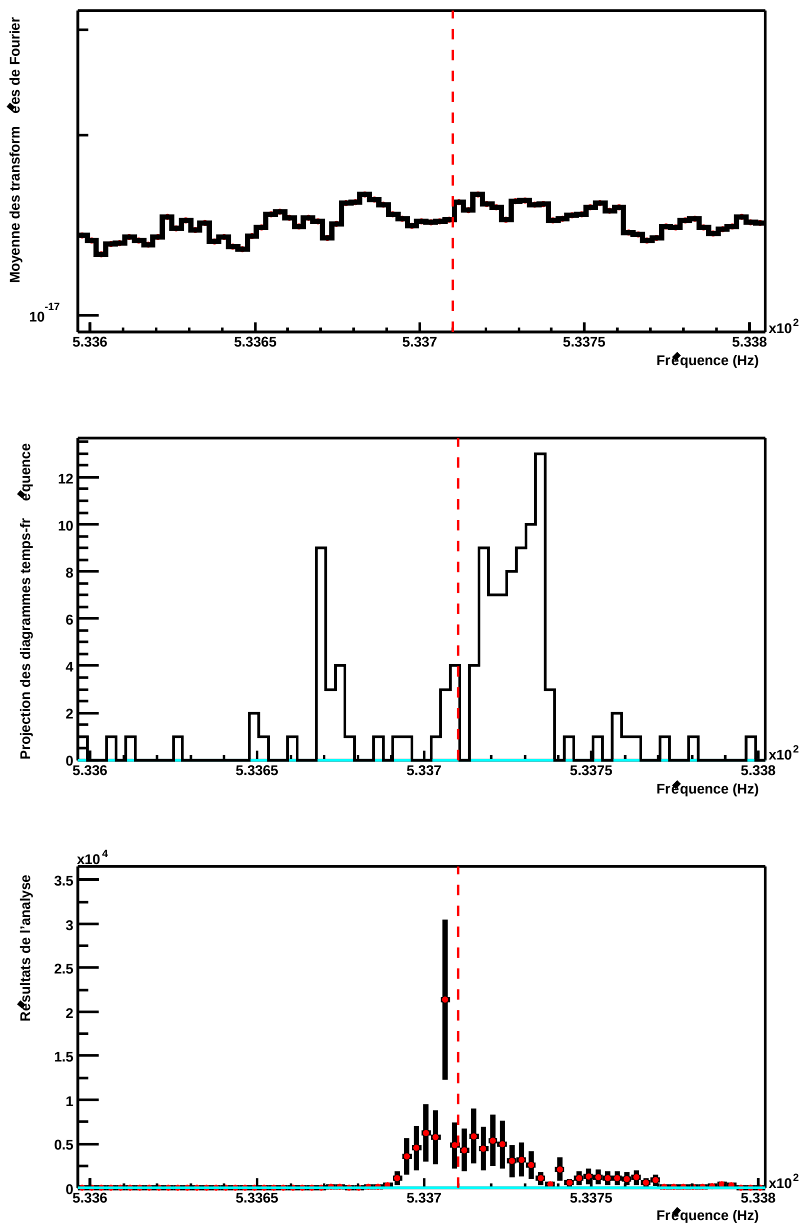


Fig. 7.23 – Résultats de l'analyse pour le pulsar J0034-0534.

Conclusion

Nous avons vu dans cette thèse le contrôle de l'heure de début des frames, unité de base des données prises par les détecteurs interférométriques d'ondes gravitationnelles. Ce contrôle est essentiel pour pouvoir assurer une horloge commune à plusieurs détecteurs dont les bruits ne sont pas corrélés, et permettre de confirmer les détections d'événements impulsifs, mais également pour pouvoir suivre sur plusieurs mois, voire plusieurs années, les signaux périodiques et continus, tels que ceux des pulsars.

Nous avons décrit l'importance d'avoir un logiciel de simulation fidèle du détecteur et des sources d'ondes gravitationnelles, ainsi que les apports et les améliorations qui y ont été faits.

L'étude des propriétes des pulsars répertoriés, et en particulier leur distribution fréquentielle, a montré l'intérêt de la recherche d'ondes gravitationnelles émises par les pulsars en système binaire, qui constituent la majorité des pulsars accessibles à un détecteur comme Virgo. Deux méthodes adaptées à l'étude de tels objets ont été présentées. Les deux s'appuient sur la consruction de diagrammes temps-fréquence, dans lesquels le signal recherché est la superposition de 2 sinusoïdes, dues aux mouvement de la Terre autour du Soleil et du pulsar lui-même.

La première méthode repose sur une transformée de Hough locale à 2 points, qui recherche les droites tangentes à la courbe de l'effet Doppler. Cet aspect local est une limite à la sensibilité que l'on peut atteindre. Cependant, aucune hypothèse n'est faite sur la forme du signal avant la détermination des paramètres du pulsar, si bien que cette méthode peut être appliquée à tous les systèmes binaires.

La deuxième méthode repose sur une transformée de Hough à 3 points, qui recherche la sinuoïde due à l'effet Doppler orbital. Cette méthode est plus performante, et elle donne directement les paramètres du pulsar détecté, mais elle requiert une puissance de calcul supérieure à la première. De plus, cette méthode est réservée à des systèmes binaires d'excentricité faible – typiquement inférieure à 10^{-3} – qui ont un effet Doppler sinusoïdal en fonction du temps. Cette méthode a été testée sur les données enregistrées lors du dernier run technique E4 de l'interféromètre de Virgo.

Annexes

Annexe A

La transformée de Fourier

Introduction

La transformée de Fourier est un des outils de base de la recherche de pulsars. Nous détaillons ici certaines ce ses propriétés, en particulier l'influence du fenêtrage et la transformée de Fourier d'un bruit gaussien.

A.1 La transformée de Fourier continue

Sa définition mathématique est :

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t).e^{-i2\pi ft} \tag{A.1}$$

La transformée de Fourier est une fonction complexe. On étudie en général son amplitude et sa phase, définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{H(\omega).H^{*}(\omega)} && \text{(A.2)} \\ \phi(\omega) &= Arctan\left(\frac{Im(H(\omega))}{Re(H(\omega))}\right) && \text{(A.3)} \end{aligned}$$

A.2 La transformée de Fourier discrète

Lorsque les signaux traités sont discontinus, on utilise la transformée de Fourier discrète, dont la définition est la suivante :

$$H_k = \sum_{j=0}^{N-1} h_j.e^{-\frac{i2\pi jk}{N}} \tag{A.4}$$

En pratique, elle est calculée en utilisant l'algorithme FFTW (Fastest Fourier Transform in the West [99]), qui permet de ramener le nombre d'opérations de N^2 à $O(N.ln(N))$.

A.3 Transformée de Fourier d'un bruit gaussien

A.3.1 Loi de densité de probabilité

La transformée de Fourier d'un bruit correspond a une marche au hasard dans le plan complexe du résultat de cette transformation, comme le montre la figure A.1. Les propriétés statistiques d'une marche au hasard à N pas sont les suivantes [105] :

$$\begin{aligned} \overline{r_k.\sin(\alpha_k)} &= 0 \\ \overline{r_k^2.\sin^2(\alpha_k)} &= \overline{r_k^2}.\overline{\sin^2(\alpha_k)} = \frac{1}{2}\overline{r_k^2} \end{aligned}$$

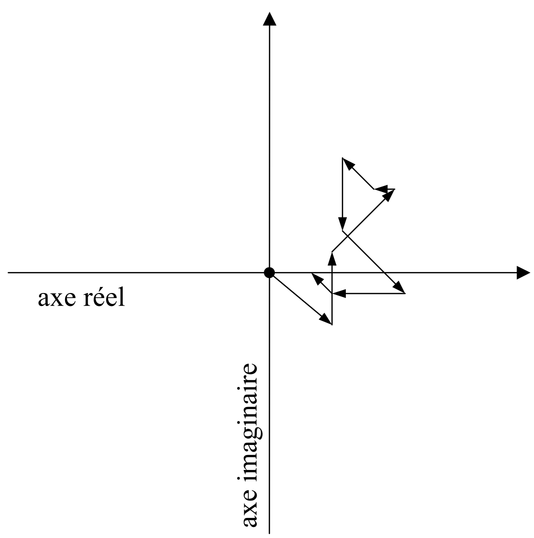


FIG. A.1 – Représentation vectorielle de la transformée de Fourier d'un bruit dans le plan complexe.

Pour un grand nombre de points, on applique le théorème central-limite. Ainsi, la distribution des distances parcourues est une gausienne centré autour de 0 et de variance

$$\sigma^2 = \frac{N}{2}.\overline{r_k^2}$$

La probabilité que l'extrêmité du vecteur somme soit comprise entre x et $x + dx$ et entre y et $y + dy$ est :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x, y).dxdy &= \gamma\ e^{-\frac{x^2}{N.r_k^2}}.dx \times e^{-\frac{y^2}{N.r_k^2}}.dy \\ &= \gamma\ e^{-\frac{x^2+y^2}{N.r_k^2}}.dxdy, \end{aligned}$$

où γ est un facteur de normalisation. On peut identifier $x^2 + y^2$ à $|H_k|^2$. En posant

$$\begin{aligned} R^2 &= x^2 + y^2, \text{ on obtient} \\ \mathcal{P}(R)dR &= \gamma\ e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}.2\pi R dR \end{aligned}$$

En posant $P = R^2$, on obtient :

$$\mathcal{P}(P)dP = \gamma\ e^{-\frac{P}{2\sigma^2}}\pi dP$$

Après normalisation, nous avons donc les densités de probabilités suivantes :

$$\mathcal{P}(R) = \frac{1}{2\sigma^2}.R.e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}} \tag{A.7}$$

$$\mathcal{P}(P) = \frac{1}{2\sigma^2}.e^{-\frac{P}{2\sigma^2}} \tag{A.8}$$

A.3.2 Etude du spectre en amplitude

La loi (A.7) décrit la distribution des amplitudes de la FFT d'un bruit gaussien dont l'écart type (distribution en temps) est σ. Etudions cette fonction. Par commodité, nous la réécrivons sous la forme suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma^2}.x.e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{A.9}$$

Elle est représentée sur la figure A.2.

Ses 2 premiers moments sont :

$$E(x) = m = \int_0^\infty x f(x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.\sigma = 1.256\ \sigma \tag{A.10}$$

$$E(x^2) = \int_0^\infty x^2 f(x).dx = 2\sigma^2 \tag{A.11}$$

$$\text{d'où } \Sigma = \sqrt{\frac{4-\pi}{2}}.\sigma = 0.657\ \sigma \tag{A.12}$$

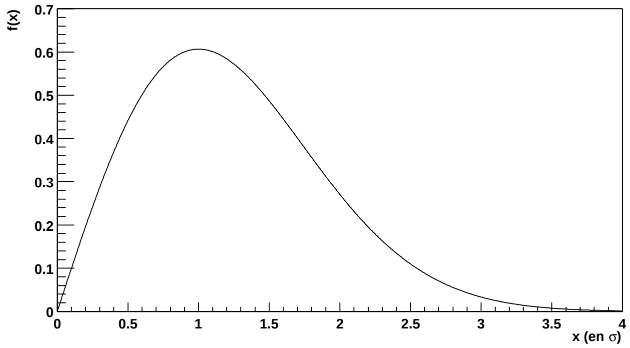


FIG. A.2 – Représentation graphique de $f(x)$.

La probabilité pour qu'une valeur soit supérieure à X est :

$$P(x > X) = \int_X^\infty f(x).dx = e^{-\frac{X^2}{2\sigma^2}}, \text{ ainsi} \tag{A.13}$$

$$P(x > m + \alpha\Sigma) = e^{-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\alpha}{2}\sqrt{\pi(4-\pi)}\right)} \tag{A.14}$$

X	P(x>X) (%)
$m - 1.91\ \Sigma = 0$	100
m	45.6
$m +\ \Sigma$	16.2
$m + 2\ \Sigma$	3.74
$m + 2.5\ \Sigma$	1.53
$m + 3\ \Sigma$	0.56
$m + 4\ \Sigma$	$5.5\ \times 10^{-2}$

TAB. A.1 – Probabilité pour qu'une grandeur x suivant la loi (A.7) soit supérieure à une valeur X.

A.3.3 Incertitude sur le nombre de points sélectionnés

On sélectionne les n pics dont l'amplitude dépasse la valeur X. Quelle est l'incertitude sur le nombre n de pics sélectionnés ?

Le tirage que nous effectuons suit la loi binomiale, avec une probabilité $p = e^{-\frac{X^2}{2\sigma^2}}$ que le popint soit sélectionné, et $q = 1 - p$ qu'il ne le soit pas, avec $p + q = 1$.

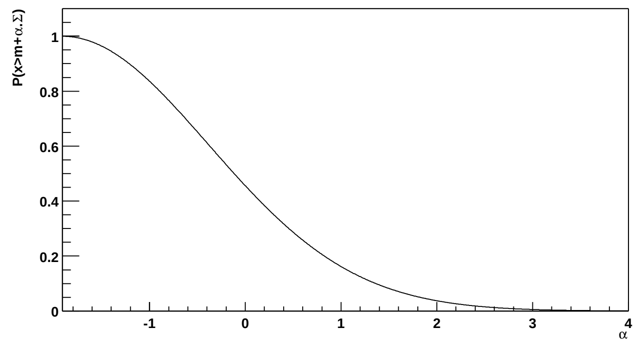


FIG. A.3 – Probabilité pour qu'une grandeur x suivant la loi (A.7) soit supérieure à une valeur X.

Les deux premiers moments de cette distribution sont :

$$\alpha_1 = p \times 1 + q \times 0 = p \tag{A.15}$$

$$\alpha_2 = p \times 1^2 + q \times 0^2 = p \tag{A.16}$$

L'écart-type de cette distribution est :

$$\sigma^2 = \alpha_1 - \alpha_2^2 = p.q \tag{A.17}$$

Pour N essais, on obtient ainsi :

$$n = N \times p \tag{A.18}$$

$$\sigma_n = \sqrt{N}.\sqrt{p.q} = \sqrt{\frac{n(N-n)}{N}} \tag{A.19}$$

Si $n \ll N$, alors $\sigma_n \simeq \sqrt{n}$

Conclusion

Dans cette annexe, nous avons décrit le comportement de la transformée de Fourier d'un bruit gaussien dans le domaine temporel, et en particulier la fonction de densité de probabilité de l'amplitude des pics du spectre. Nous avons également calculé le nombre de points sélectionné en fonction du seuil de coupure imposé, et l'incertitude sur ce nombre de points.

Annexe B

Les transformées de Hough à 1 et 2 points

Introduction

Cette transformation, très utilisée en traitement d'images, est apparue dans les années 60 [106]. Elle consiste à passer de l'espace physique à l'espace des paramètres. On peut l'appliquer à une grande variété d'objets. Nous nous intéresserons ici à la transformée de Hough appliquée à la recherche de droites dans des diagrammes temps-fréquence binaires, c'est-à-dire ne contenant que des 0 et des 1. Nous étudierons plusieurs implémentations possibles de la transformée de Hough, et en particulier leur performance dans le contexte de recherche de pulsars en système binaire [107].

B.1 Principe

Une droite est définie de façon unique par 2 paramètres : par exemple son angle d'inclinaison θ et sa distance au centre du repère ρ, définis sur la figure B.1. Il y a bijectivité entre l'espace (x, y) et l'espace (ρ, θ).

On pourrait également utiliser la pente et l'ordonnée à l'origine d'une droite pour la décrire. L'avantage des paramtètres (ρ, θ) est que la variation de θ est bornée à l'intervalle $[0; 2\pi]$, et celle de ρ limitée par la taille du domaine de points considéré.

Remarque :

Dans la méthode décrite, l'axe x correspond à la fréquence, et l'axe y au temps. Dans la recherche des droites, nous interdisons les droites horizontales, correspondant à des variations infiniment rapides de fréquence, et donc non physiques.

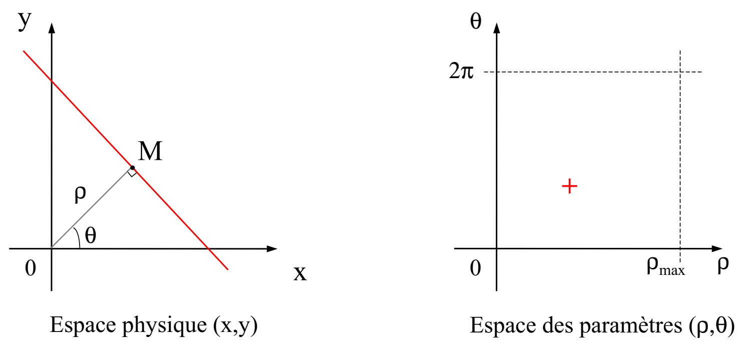


FIG. B.1 – Descritption biunivoque d'une droite par son inclinaison θ et sa distance au centre du repère ρ.

B.2 La transformée de Hough simple

Sur la figure B.2, traçons une droite passant par le point P, repéré par (x, y) en coordonées cartésiennes, et (R, α) en coordonnées polaires. Le point M est le point de la droite le plus proche du centre du repère, il a pour coordonnées (ρ, θ). La droite considérée est décrite de façon unique par ρ et θ. Relions ces quantités à x et y :

$$R = \frac{\rho}{\cos(\theta - \alpha)}, \text{ d'où} \rho = x.\cos(\theta) + y.\sin(\theta) \tag{B.1}$$

$$\text{et } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.cos\left(\theta - signe(y).\text{Arccos}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right) \tag{B.2}$$

On obtient ainsi le lieu, dans le plan de Hough (ρ, θ), de toutes les droites passant par P.

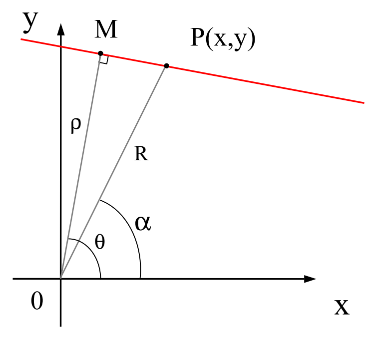


FIG. B.2 – Exemple de droite passant par P.

Réalisation pratique

On considère successivement tous les points de l'histogramme à 2 dimensions (x, y). On remplit l'histogramme de Hough (à 2 dimensions, de dimensions nbin$_\rho$, entre 0 et ρ_{max}, et nbin$_\theta$, entre 0 et 2π) de la façon suivante : pour chacune des nbin$_\theta$ valeurs de θ, on calcule la valeur de ρ associée. D'après la relation (B.2), la moitié des valeurs de θ considérées donnera une valeur de ρ négative. Ceci est dû au fait que les droites de paramètres (ρ, θ) et $(-\rho, \theta+\pi)$ sont physiquement les mêmes. Ceci est valable pour tous les points (x, y), on peut donc rejeter ces valeurs négatives sans changer le rapport signal-sur-bruit.

Une fois la valeur de ρ associée à la valeur de θ calculée, on incrémente la case (ρ, θ) correspondante dans l'histogramme de Hough. Pour chaque point (x, y), il y aura nbin$_\theta/2$ entrées dans l'histogramme de Hough. Si une droite est présente dans l'ensemble des points, alors la case (ρ, θ) décrivant cette droite est incrémentée plus souvent que les autres et un pic apparaît. Si m est le nombre de points dans la droite, la hauteur théorique du pic associé à la droite est m.

La figure B.3 montre la transformée d'un diagramme contenant uniquement deux points. A chacun de ces points est associé une demi-sinusoïde dans l'espace de Hough (la courbe (1) est en deux parties). Ces deux courbes se coupent au point correspondant à la droite qui relie nos deux points de départ. Tout point supplémentaire pris sur la droite aurait une courbe de Hough qui passerait par ce point d'intersection.

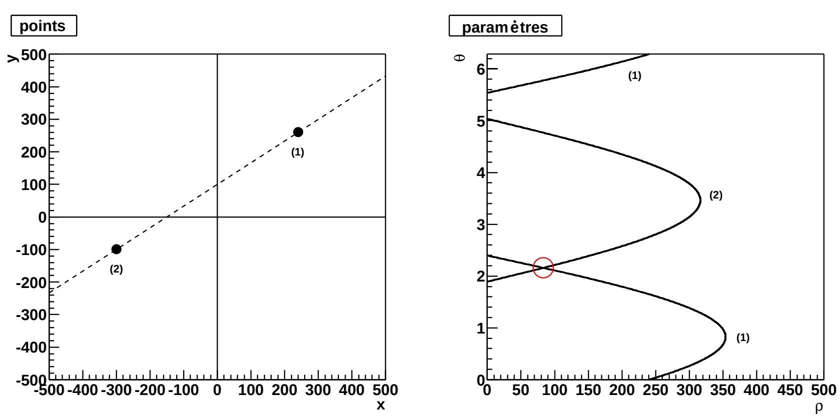


FIG. B.3 – Transformée de Hough à 1 point. Les courbes correspondant à chacun des deux points se coupent et nous donnent les paramètres de la droite.

B.3 La transformée de Hough combinatoire

Dans cette technique, plutôt que de traiter les points séparément, on traite tous les couples de points : deux points distincts définissent une droite et une seule. On impose que les 2 points considérés aient des ordonnées y_1 et y_2 différentes. La droite passant par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) obéit aux équations suivantes :

$$\rho_0 = x_1.\cos(\theta_0) + y_1.\sin(\theta_0) \quad \text{(B.3a)}$$

$$\rho_0 = x_2.\cos(\theta_0) + y_2.\sin(\theta_0), \quad \text{(B.3b)}$$

d'où l'on tire

$$\theta_0 = \arctan\left(\frac{x_2 - x_1}{y_1 - y_2}\right), \quad \text{(B.4)}$$

et ρ_0 de l'une des 2 équations (B.3).

Réalisation pratique

On range les N points à la suite les uns des autres, et on couple chaque point avec tous ceux qui le suivent dans la liste. Pour chacun de ces C_N^2 couples, on incrémente la case de l'histogramme (ρ, θ) correspondant à la droite reliant les deux points. Il n'y a donc qu'une seule entrée dans l'histogramme de Hough à chaque tour. Si une droite comporte m points, la hauteur théorique du pic dans l'histogramme de hough est C_m^2.

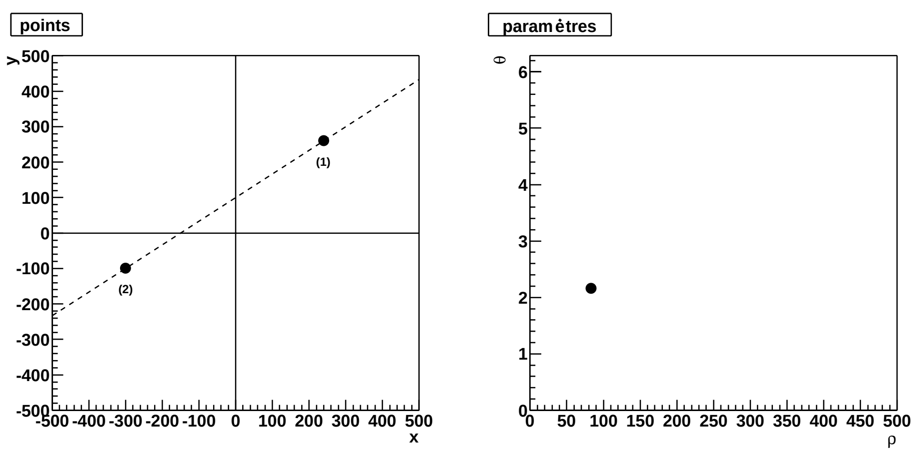


FIG. B.4 – Transformée de Hough à 2 point. La droite à laquelle appartiennent les 2 points est représentée par un point dans l'histogramme (ρ, θ).

B.4 Comparaison des performances

Mathématiquement – ce qui correspond à des histogrammes (x, y) et (ρ, θ) comportant un nombre infini de cases –, il est possible de relier les résultas de la transformée de Hough à 2 point à ceux de la transformée de Hough à 1 points. Si on nomme H^1_{ij} les entrées de l'histogramme de Hough calculées en considérant les points 1 par 1 et H^2_{ij} les entrées de l'histogramme de Hough calculées en considérant les points 2 par 2, on a la relation [103] :

$$H^2_{ij} = C^2_{H^1_{ij}} = \frac{H^1_{ij}(H^1_{ij} - 1)}{2} \tag{B.5}$$

Dans la pratique, les coordonnées (x, y) des points sont discrètes, et le nombre de divisions des axes ρ et θ de l'histogramme de Hough sont finies. La relation (B.5) ne s'applique plus. La question se pose alors de savoir laquelle des 2 méthodes est la plus adaptées à notre recherche. Rappelons que la transformée de Hough est réalisée dans un carré de 50×50, et que l'on garde les droites correspondant aux 10 pics les plus hauts de l'histogramme de Hough. Nous allons maintenant étudier l'efficacité des 2 méthodes, c'est-à-dire la probabilité de retrouver, parmi les 10 pics les plus hauts, celui correspondant à une droite connue que l'on a enfouie dans le bruit.

B.4.1 Description de l'analyse

Les points (x, y) sont répartis dans un carré de taille nbin_x=50 $\times$ nbin_y=50. Leurs coordonnées des 2 axes sont arbitrairement prises entre -500 et +500 Une recherche de droite dans un carré favorise les diagonales [108]. Pour s'affranchir de cet effet géométrique, on ne garde que les points á l'intérieur du cercle inscrit dans le carré. Le domaine de varitaion de ρ est donc [0,500], et θ varie de 0 à 2π. Les axes de l'histogramme de Hough sont arbitrairement découpés en 50.

Les différentes transformées employées

Nous avons testé 4 différentes façons d'appliquer la transformée de Hough :

1. La méthode simple, décrite en B.2.
2. La méthode combinatoire, décrite en B.3.
3. La méthode simple "élargie". Dans cette méthode, la courbe de la figure B.3 qui sert à remplir l'histogramme de Hough est remplacée par une bande (*cf* figure B.5). Cette méthode s'inspire de la technique de 'fat mapping' de S. Frasca [103]. En procédant ainsi, on tient compte du fait que la fréquence d'un point du diagramme temps-fréquence a

une incertitude égale à $1/T_{FFT}$. Lorsque l'on remplit l'histogramme de Hough, on calule, pour chaque valeur de θ, les valeurs de ρ_{min} et ρ_{max}, et on incrémente toutes les cellules entre $[\theta, \rho_{min}]$ et $[\theta, \rho_{max}]$.

4. La méthode combinatoire "élargie". On calcule cette fois, pour chaque couple de points, les valeurs extrêmales de ρ et de θ, et on incérmente toutes les cases à l'intérieur du carré ainsi défini (*cf* figure B.5).

Remarque

Dans les méthodes élargies, on n'a plus bijectivité entre l'espace (x, y) et l'espace (ρ, θ).

Une comparaison entre les histogrammes de Hough aclculés par ces 4 différentes méthodes est donné figure B.6. On a défini une droite d'équation $(y = -1.25x - 200)$, comptant 38 points. Les hauteurs des pics maximaux sont les suivantes : 20 pour la méthode simple, 401 pour la méthode combinatoire, 37 pour la méthode simple élargie et 690 pour la méthode combinatoire élargie. En principe, on attend 38 et $C_{38}^2 = 703$ pour les méthodes élargies, ce qui indique que l'on n'a pas un recouvrement parfait entre les bandes de la méthode simple et les carrés de la méthode combinatoire.

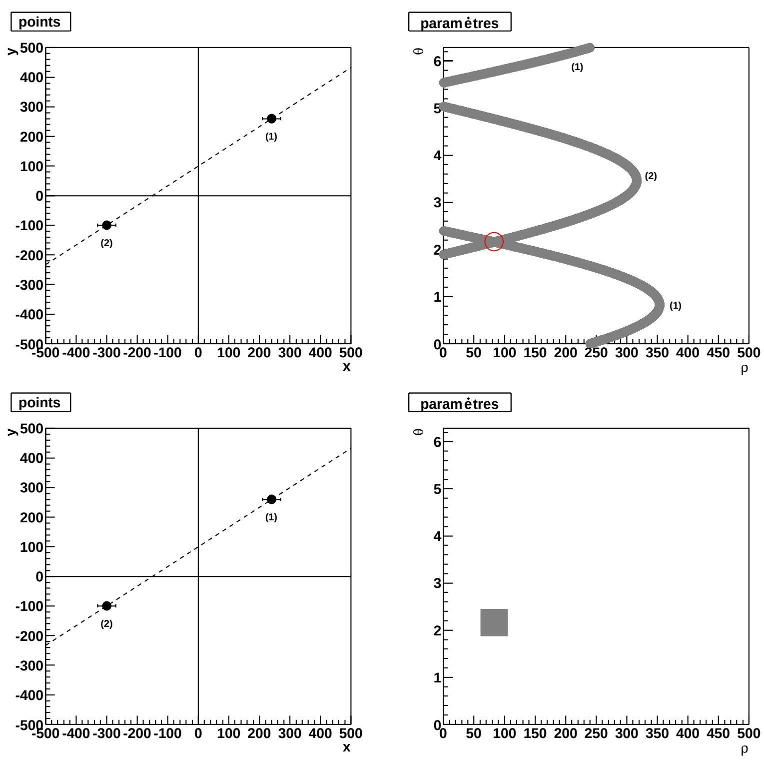
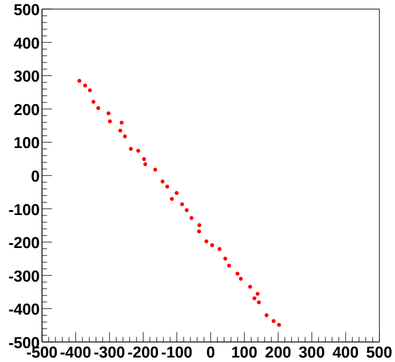
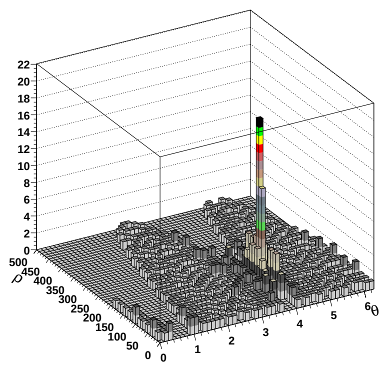


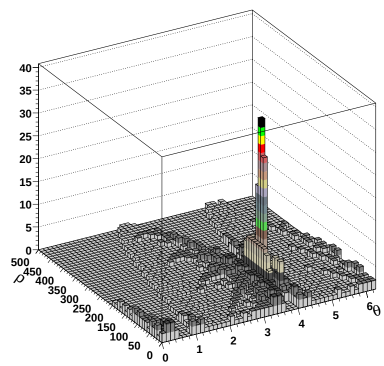
FIG. B.5 – Transformées de Hough "élargies" à 1 et 2 points.



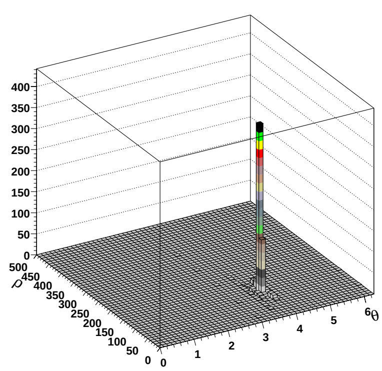
Points de départ.



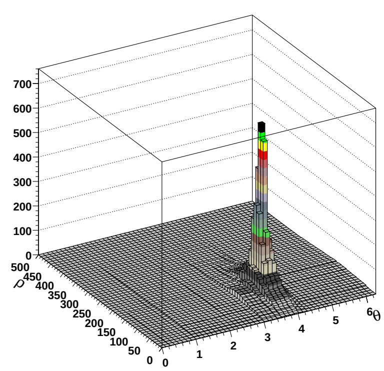
Méthode à 1 point.



Méthode élargie à 1 point.



Méthode à 2 points.



Méthode élargie à 2 points.

FIG. B.6 – Comparaison des résultats des 4 algorithmes.

Critères d'évaluation des efficacités des méthodes

La procédure employée est la suivante :

1. On remplit le plan (x, y) avec des nombres aléatoires suivant une distribution gaussienne centrée d'écart-type σ.
2. On définit une droite (D) d'équation $y = a.x + b$, où $a = \tan\varphi$, φ et b étant des nombres aléatoires uniformément distribués respectivement entre 0 et π et entre -250 et +250. Dans les cases (x, y) correspondant à cette droite, on ajoute la valeur k.σ, k est l'amplitude du signal.
3. Dans tout l'histogramme (x, y) , les valeurs supérieures à un seuil ajustable sont remplacées par 1, les valeurs inférieures par 0. On obtient un diagramme temps-fréquence binaire.
4. On effectue la transformée de Hough de ces points, en utilisant successivement les 4 méthodes précédemment décrites.
5. Dans l'histogramme de Hough (ρ, θ), on sélectionne les 10 pics les plus élevés, qui sont nos 10 traces candidates. Ces traces sont comparées à la droite définie en à l'étape 2, en utilisant un test de χ^2
6. On répète les étapes 1 à 5, 4000 fois afin d'obtenir une statistique suffisante. L'efficacité est définie comme le nombre de fois où la droite initiale a été retrouvée parmi les 10 candidats, divisé par le nombre total d'essais.

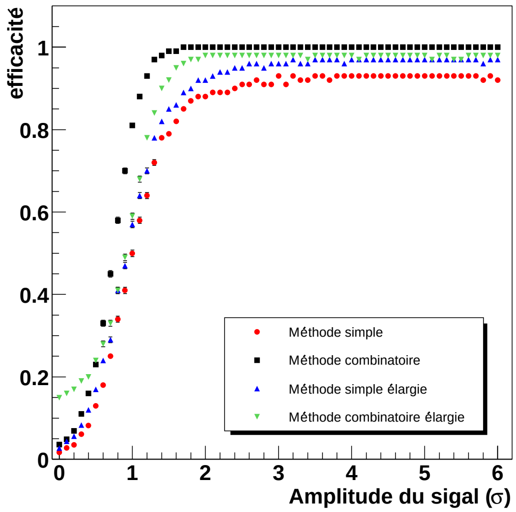
B.4.2 Résultats

Ls figure B.7 représente les efficacités des différentes méthodes en fonction de l'amplitude du signal pour pour 3 seuils de coupure : 1.78 σ[1], 1 σ et 0.5 σ.

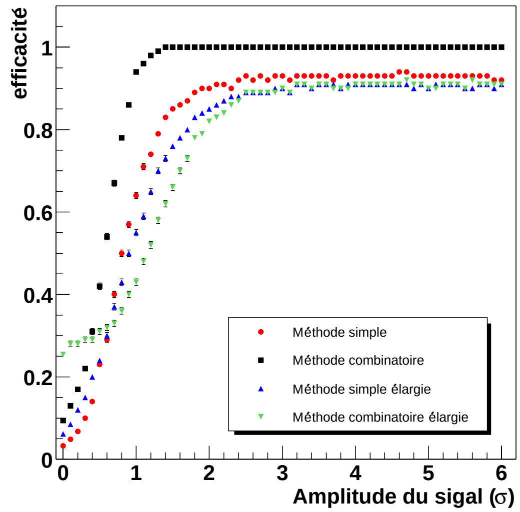
On peut tirer plusieurs conclusions :

1. Pour un niveau de signal donné, l'efficacité de toutes les méthodes se dégrade lorsque le seuil est abaissé, c'est-à-dire lorsque le nombre de points sélectionnés augmente, en particulier pour la méthode combinatoire élargie.
2. Lorsqu'il y a peu de points, la métode simple élargie a une plus grande efficacité que la méthode simple, tendance qui s'inverse lorsque le nombre de points augmente.

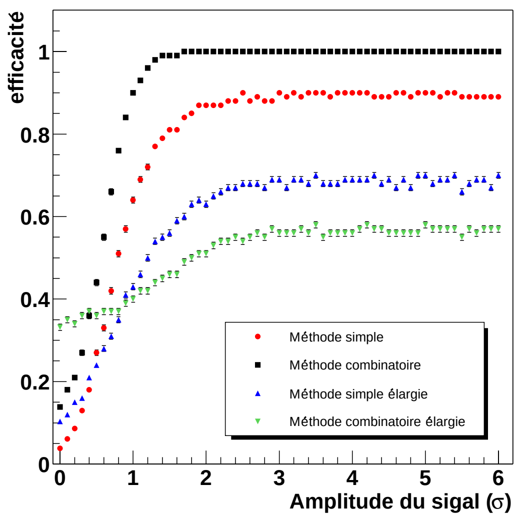
[1] La probabilité qu'une variable gaussienne, centrée et d'écart-type σ, dépasse 1.78 σ est égale à la probabilité qu'une variable obéissant à une distribution de Rayleigh d'écart type Σ (voir la relation A.9) dépasse 2 Σ



Seuil fixé à 1.78 σ.



Seuil fixé à 1 σ.



Seuil fixé à 0.5 σ.

FIG. B.7 – Efficacités des différentes méthodes en fonction de l'amplitude du signal pour 3 seuils de coupure.

3. Lorsque le nombre de points sélectionnés augmente, la probabilité de fausse détection (lorsqu'il n'u a pas de signal) augmente, en particulier pour la méthode combinatoire élargie.
4. La méthode la plus efficace entre les 4 testées ici, et ce quel que soit le

seuil de coupure, est la méthode combinatoire simple. C'est celle que nous avons employée pour la recherche de pulsars en système binaire.

La transformée de Houghà 1 point fait l'objet d'actives recherches, notamment sur des correspondances non linéaires entre les espaces (x, y) et (ρ, θ) [103], ce qui pourrait permettre d'améliorer l'efficacité de la recherche des droites. Les performances obtenues par la transformée de Hough combinatoire sont cependant suffisantes pour notre étude.

Conclusion

Nous avons vu le principe de la transformée de Hough appliquée à la recherche de droites. Deux groupes de méthodes sont possibles, celles utilisant 1 points et celles utilisant des couples de points, amenant 4 implémentations possibles, si l'on tient compte de l'incertitude sur la fréquence des points considérés. Les performances de ces algorithmes ont été comparées, et nous avons finalement retenu la méthode combinatoire qui incrémente une case de l'histogramme de Hough pour chaque couple de points (x, y) possible, méthode qui, dans ce cadre, nous donne la plus grande efficacité.

Annexe C

La transformée de Hough à 3 points

Introduction

Nous avons précédemment étudié la transformée de Hough appliquée à la recherche de droites. Dans ce chapitre, nous allons voir comment on peut l'appliquer à la recherche d'une sinusoïde. Une sinusoïde est décrite par 4 paramètres. Un espace de paramètres à 4 dimensions étant difficile à manipuler, on se rapporte à un espace à 3 dimensions. On utilise une transformée de Hough à 3 points, qui nécessite la résolution d'un système de 3 équations non-linéaires à 3 inconnues. Nous détaillerons la résolution de ce système, et les domaines de variations des grandeurs physiques que nous autorisons.

C.1 Réduction du nombre de paramètres

On rappelle l'équation d'une sinusoïde :

$$f = f_o + a.\sin(\omega t + \varphi) \tag{C.1}$$

Cette équation a 4 paramètres : f_o, a, ω et φ. Pour plus de commodité, on considère séparément la fréquence centrale f_o. On la fait varier entre f_{min} et f_{max} et, pour chaque valeur, on résoud le système de 3 équations non-linéaires à 3 inconnues suivant :

$$\begin{cases} f_1 = f_o + a.\sin(\omega t_1 + \varphi) \\ f_2 = f_o + a.\sin(\omega t_2 + \varphi) \\ f_3 = f_o + a.\sin(\omega t_3 + \varphi), \end{cases} \tag{C.2}$$

dans lequel on a imposé $t_1 < t_2 < t_3$. Les points i et j tels que $t_i = t_j$ ne peuvent appartenir à une sinusoïde.

On réécrit ce système de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{rl} \frac{f_1-f_o}{a} = \sin(\omega t_1 + \varphi) & (a) \\ \frac{f_2-f_o}{a} = \sin(\omega t_2 + \varphi) & (b) \\ f_3 - f_o + a.\sin(\omega t_3 + \varphi) = 0 & (c) \end{array}\right. \tag{C.3}$$

La méthode de résolution de ce système est la suivante : on fait varier a entre ses bornes a_{min} et a_{max}, et on résoud le système à 2 équations et 2 inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{f_1-f_o}{a} = \sin(\omega t_1 + \varphi) \\ \frac{f_2-f_o}{a} = \sin(\omega t_2 + \varphi) \end{array}\right. \tag{C.4}$$

les solutions ω et φ déterminées sont injectées dans la relation (C.3-c), qui ne dépend plus que de a. Reste à déterminer les zéros de cette fonction, ce qui est fait par dichotomie. Pour ces zéros, on résoud à nouveau le système (C.2). Les triplets (a, ω, φ) solutions sont reportés dans l'histogramme de Hough.

On pose

$$\begin{array}{rcl} u_i & = & \text{Arcsin}\left(\dfrac{f_i - f_o}{a}\right), \; i = \{1,2,3\} \text{ et} \\ K_{ij}^- & = & k_i - k_j \text{ et } K_{ij}^+ = k_i + k_j, \; i,j = \{1,2,3\} \end{array}$$

C.2 Cas où $f_1 \neq f_2$

Inversons le système (C.4) :

$$\left\{\begin{array}{l} \omega t_1 + \varphi = \text{ou} \left\{\begin{array}{ll} u_1 + k_1.2\pi & (k_1 \in \mathbb{Z}) \\ \pi - u_1 - k_1.2\pi & (k_1 \in \mathbb{Z}) \end{array}\right. \\ \\ \omega t_2 + \varphi = \text{ou} \left\{\begin{array}{ll} u_2 + k_2.2\pi & (k_2 \in \mathbb{Z}) \\ \pi - u_2 - k_2.2\pi & (k_2 \in \mathbb{Z}) \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{C.5}$$

Nous avons donc 4 solutions distinctes pour (ω, φ) :

$$\left\{\begin{array}{ll} \omega_1 = \frac{u_1-u_2+K_{12}^- 2\pi}{t_1-t_2}, & \varphi_1 = u_1 - \omega_1.t_1 \; [2\pi] \\ \omega_4 = \frac{-u_1+u_2-K_{12}^- 2\pi}{t_1-t_2} = -\omega_1, & \varphi_4 = \pi - u_1 - \omega_4.t_1 \; [2\pi] \\ \\ \omega_2 = \frac{u_1+u_2+(2K_{12}^+-1)\pi}{t_1-t_2}, & \varphi_2 = u_1 - \omega_2.t_1 \; [2\pi] \\ \omega_3 = \frac{-u_1-u_2-(2K_{12}^+-1)\pi}{t_1-t_2} = -\omega_2, & \varphi_3 = \pi - u_1 - \omega_3.t_1 \; [2\pi] \end{array}\right. \tag{C.6}$$

On impose que la valeur de ω soit positive, et inférieure à ω_{max}, fixée en fonction des propriétés des pulsars répertoriés. On obtient ainsi (en remplaçant u_1 et u_2 par leurs valeurs extrêmales [1],

$$-\frac{1}{2} + \frac{\omega_{max}.(t_1 - t_2)}{2\pi} < K_{12}^{-} < \frac{1}{2} - \frac{\omega_{max}.(t_1 - t_2)}{2\pi} \tag{C.7}$$

$$-1 + \frac{\omega_{max}.(t_1 - t_2)}{2\pi} < K_{12}^{+} < 1 - \frac{\omega_{max}.(t_1 - t_2)}{2\pi} \tag{C.8}$$

Dans la pratique, on boucle sur K_{12}^{-} et K_{12}^{+}. Pour chacune des valeurs considérées, on fait varier a (dont dépendent u_1 et u_2), et on résoud le système (C.5). En utilisant les valeurs de ω et φ ainsi trouvées, on calcule la quantité $r(a) = f_3 - f_o + a.\sin(\omega t_3 + \varphi)$, qui est une fonction de a uniquement. On étudie ensuite les variations de $r(a)$. La valeur exacte de a qui annule cette fonction est utilisée pour résoudre à nouveau le système (C.5). On obtient un triplet de solutions (a, ω, φ).

C.3 Cas où $f_1 = f_2 \neq f_3$

Les relations (C.6) deviennent :

$$\left\{\begin{array}{ll} \omega_1 = \frac{K_{12}^{-}}{t_1 - t_2} 2\pi, & \varphi_1 = u_1 - \omega_1.t_1 \ [2\pi] \\ \omega_4 = \frac{K_{12}^{-}}{t_1 - t_2} 2\pi = -\omega_1, & \varphi_4 = \pi - u_1 - \omega_4.t_1 \ [2\pi] \\ & \\ \omega_2 = \frac{2u_1 + (2K_{12}^{+} - 1)\pi}{t_1 - t_2}, & \varphi_1 = u_1 - \omega_2.t_1 \ [2\pi] \\ \omega_3 = -\frac{2u_1 + (2K_{12}^{+} - 1)\pi}{t_1 - t_2} = -\omega_2, & \varphi_3 = \pi - u_1 - \omega_3.t_1 \ [2\pi] \end{array}\right. \tag{C.9}$$

Le principe de résolution est le même que pour le cas où $f_1 \neq f_2$. Certaines précautions s'imposent toutefois pour le calcul numérique des solutions, car des problèmes d'arrondi se posent lorsque $\omega = \omega_1$ ou $\omega = \omega_4$. Le domaine de variation de K_{12}^{-} est maintenant

$$\frac{\omega_{max}.(t_1 - t_2)}{2\pi} < K_{12}^{-} < \frac{\omega_{max}.(t_1 - t_2)}{2\pi} \tag{C.10}$$

[1]Pendant la résolution, u_1 et u_2 sont fixés après K_{12}^{-} et K_{12}^{+})

C.4 Cas où $f_1 = f_2 = f_3$

On écrit le système de départ (C.2) sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \omega t_1 + \varphi = \text{ou} \left\{\begin{array}{ll} u_1 + k_1.2\pi \ (k_1 \in \mathbb{Z}) & (1a.) \\ \pi - u_1 - k_1.2\pi \ (k_1 \in \mathbb{Z}) & (1b.) \end{array}\right. \\ \\ \omega t_2 + \varphi = \text{ou} \left\{\begin{array}{ll} u_1 + k_2.2\pi \ (k_2 \in \mathbb{Z}) & (2a.) \\ \pi - u_1 - k_2.2\pi \ (k_2 \in \mathbb{Z}) & (2b.) \end{array}\right. \\ \\ \omega t_3 + \varphi = \text{ou} \left\{\begin{array}{ll} u_1 + k_3.2\pi \ (k_3 \in \mathbb{Z}) & (3a.) \\ \pi - u_1 - k_3.2\pi \ (k_3 \in \mathbb{Z}) & (3b.) \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{C.11}$$

Nous obtenons donc 8 systèmes de 3 équations à 3 inconnues, que l'on peut classer en 4 groupes. Avant de les détailler, bornons les variations des K_{ij}^+ et K_{ij}^- : on impose $0 < \omega < \omega_{max}$, ce qui entraîne

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\omega_{max}.(t_i - t_j)}{2\pi} < K_{ij}^- < -\frac{\omega_{max}.(t_i - t_j)}{2\pi} \\ \frac{\omega_{max}.(t_i - t_j)}{2\pi} < K_{ij}^+ < -\frac{\omega_{max}.(t_i - t_j)}{2\pi} + 1 \end{array}\right. \tag{C.12}$$

C.4.1 Premier groupe de solutions

On considère les systèmes constitués des équations (1a., 2a., 3a.) d'une part, et des équations (1b., 2b., 3b.) d'autre part.

$$\begin{array}{ll} (1a., 2a., 3a.) & (1b., 2b., 3b.) \\ \\ \left\{\begin{array}{l} \omega(t_1 - t_2) = K_{12}^-.2\pi \\ \omega(t_1 - t_3) = K_{13}^-.2\pi \\ \omega t_3 + \varphi = u_1 + k_3.2\pi \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} \omega(t_1 - t_2) = -K_{12}^-.2\pi \\ \omega(t_1 - t_3) = -K_{13}^-.2\pi \\ \omega t_3 + \varphi = \pi - u_1 - k_3.2\pi \end{array}\right. \end{array} \tag{C.13}$$

$$\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{l} \omega = \frac{K_{12}^-}{t_1 - t_2} 2\pi = \frac{K_{13}^-}{t_1 - t_3} 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} < u_1 < \frac{\pi}{2} \\ \varphi = u_1 - \omega t_3 \ [2\pi] \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} \omega = -\frac{K_{12}^-}{t_1 - t_2} 2\pi = -\frac{K_{13}^-}{t_1 - t_3} 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} < u_1 < \frac{\pi}{2} \\ \varphi = \pi - u_1 - \omega t_3 \ [2\pi] \end{array}\right. \end{array} \tag{C.14}$$

Les 2 systèmes imposent la condition suivante sur K_{12}^- et K_{13}^- :

$$K_{12}^-(t_1 - t_3) = K_{13}^-(t_1 - t_2) \tag{C.15}$$

Si cette égalité est vérifiée, ω est déterminée. Selon le signe de K_{12}^- et K_{13}^-, on résoud le premier ou le deuxième système. Ainsi, pour toutes les valeurs de $a \geq |f_1 - f_o|$, les triplets $(a, \omega, u_1 - \omega.t_3 \ [2\pi])$ (premier système) ou $(a, \omega, \pi - u_1 - \omega.t_3 \ [2\pi])$ (deuxième système) sont solutions de (7.2).

C.4.2 Deuxième groupe de solutions

On considère les systèmes constitués des équations (1a., 2a., 3b.) d'une part, et des équations (1b., 2b., 3a.) d'autre part.

$$(1a., 2a., 3b.) \qquad\qquad (1b., 2b., 3a.)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \omega(t_1 - t_2) = K_{12}^{-}.2\pi \\ \omega(t_1 - t_3) = 2u_1 + (2K_{13}^{+} - 1)\pi \\ \omega t_3 + \varphi = \pi - u_1 - k_3.2\pi \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \omega(t_1 - t_2) = -K_{12}^{-}.2\pi \\ \omega(t_1 - t_3) = -2u_1 - (2K_{13}^{+} - 1)\pi \\ \omega t_3 + \varphi = u_1 + k_3.2\pi \end{array}\right. \tag{C.16}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \omega = \frac{K_{12}^{-}}{t_1 - t_2}2\pi \\ u_1 = \frac{\omega(t_1-t_3)-(2K_{13}^{+}-1)\pi}{2} \\ \varphi = \pi - u_1 - \omega t_3\ [2\pi] \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \omega = -\frac{K_{12}^{-}}{t_1 - t_2}2\pi \\ u_1 = \frac{-\omega(t_1-t_3)-(2K_{13}^{+}-1)\pi}{2} \\ \varphi = u_1 - \omega t_3\ [2\pi] \end{array}\right. \tag{C.17}$$

On fait varier K_{12}^{-} entre ses bornes. Selon le signe de K_{12}^{-}, on résoud le premier ou le deuxième système : on fait alors varier K_{13}^{+} entre ses bornes. Si, pour certaines valeurs de K_{13}^{+}, $-\frac{\pi}{2} < u_1 < \frac{\pi}{2}$, le triplet $(\frac{y_1 - y_o}{\sin(u_1)}, \omega, \pi - u_1 - \omega t_3\ [2\pi])$ (premier système) ou le triplet $(a, \omega, \pi - u_1 - \omega t_3\ [2\pi])$ (deuxième système) est solution de (7.2).

C.4.3 Troisième groupe de solutions

On considère les systèmes constitués des équations (1a., 2b., 3a.) d'une part, et des équations (1b., 2a., 3b.) d'autre part.

$$(1a., 2b., 3a.) \qquad\qquad (1b., 2a., 3b.)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \omega(t_1 - t_2) = 2u_1 + (2K_{12}^{+} - 1)\pi \\ \omega(t_1 - t_3) = K_{13}^{-}.2\pi \\ \omega t_3 + \varphi = u_1 + k_3 2\pi \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \omega(t_1 - t_2) = -2u_1 - (2K_{12}^{+} - 1)\pi \\ \omega(t_1 - t_3) = -K_{13}^{-}.2\pi \\ \omega t_3 + \varphi = \pi - u_1 - k_3 2\pi \end{array}\right. \tag{C.18}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \omega = -\frac{K_{13}^{-}}{t_1 - t_3}2\pi \\ u_1 = \frac{\omega(t_1-t_2)-(2K_{12}^{+}-1)\pi}{2} \\ \varphi = u_1 - \omega t_3\ [2\pi] \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \omega = -\frac{K_{13}^{-}}{t_1 - t_3}2\pi \\ u_1 = \frac{-\omega(t_1-t_2)-(2K_{12}^{+}-1)\pi}{2} \\ \varphi = \pi - u_1 - \omega t_3\ [2\pi] \end{array}\right. \tag{C.19}$$

Le troisième groupe de systèmes se résoud de la même façon que le deuxième groupe.

C.4.4 Quatrième groupe de solutions

On considère les systèmes constitués des équations (1b., 2a., 3a.) d'une part, et des équations (1a., 2b., 3b.) d'autre part.

$$(1a., 2b., 3b.) \qquad\qquad (1b., 2a., 3a.)$$

$$\begin{cases} \omega(t_1 - t_2) = 2u_1 + (2K_{12}^{+} - 1)\pi \\ \omega(t_1 - t_3) = 2u_1 + (2K_{13}^{+} - 1)\pi \\ \omega t_3 + \varphi = \pi - u_1 - k_3 2\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega(t_1 - t_2) = -2u_1 - (2K_{12}^{+} - 1)\pi \\ \omega(t_1 - t_3) = -2u_1 - (2K_{13}^{+} - 1)\pi \\ \omega t_3 + \varphi = u_1 + k_3 2\pi \end{cases} \tag{C.20}$$

$$\begin{cases} \omega = -\frac{K_{23}^{-}}{t_2 - t_3} 2\pi \\ u_1 = \frac{\omega(t_2 - t_3) - (2K_{13}^{+} - 1)\pi}{2} \\ \varphi = \pi - u_1 - \omega t_3 \ [2\pi] \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega = \frac{K_{23}^{-}}{t_2 - t_3} 2\pi \\ u_1 = \frac{-\omega(t_2 - t_3) - (2K_{13}^{+} - 1)\pi}{2} \\ \varphi = u_1 - \omega t_3 \ [2\pi] \end{cases} \tag{C.21}$$

Le quatrième groupe de systèmes se résoud de la même façon que le deuxième et le troisième groupe.

Conclusion

Nous avons étudié la recherche de sinusoïdes avec une transfomrée de Hough à 3 points. Le formalisme mathématique a été détaillé. Toutes les solutions appartenant aux domaines de a, ω et φ autorisés sont déterminées, et ne sont comptées qu'une seule fois. L'implémentation informatique nous a poussé à séparer les cas où $f_1 = f_2$ des cas où $f_1 \neq f_2$.

Annexe D

Fichier de simulation

```
UJclock masterClocks  1036800000 2 4000 1

UFrBuilder FBuilder 1 1 0 0

MEtric    metric  0 0.18325 0.762127 1.24878  NO

MEbinaryPulsar J0023-7203J  metric 1e-20 477.05 0.104676 -1.257795
.45 .13 .1   0.120665  0.040403     0. 0. 0. 47149.695312

MEbinaryPulsar J0024-7203U  metric 1e-20 231.26 0.105435 -1.257799
.45 .13 .1   0.429106  0.526951     0. 0. 0. 50000.

MEbinaryPulsar J0024-7204I  metric 1e-20 287.94 0.105297 -1.257993
.45 .13 .1   0.226000  0.039000     0. 0. 0. 47861.511719

MEbinaryPulsar J0024-7204O  metric 1e-20 379.31 0.105058 -1.258061
.45 .13 .1   0.135974  0.045153     0. 0. 0. 50000.

MEbinaryPulsar J0024-7204P  metric 1e-20 275.50 0.104720 -1.257801
.45 .13 .1   0.147234  0.038007     0. 0. 0. 50689.679688

MEbinaryPulsar J0024-7204Q  metric 1e-20 248.94 0.105919 -1.257923
.45 .13 .1   1.189084  1.462197     0. 0. 0. 50000.

MEbinaryPulsar J0024-7204R  metric 1e-20 288.32 0.104720 -1.257801
.45 .13 .1   0.066770  0.033824     0. 0. 0. 50742.636719

MEbinaryPulsar J0024-7204S  metric 1e-20 354.31 0.105009 -1.258006
.45 .13 .1   1.201724  0.766274     0. 0. 0. 50000.

MEbinaryPulsar J0024-7204T  metric 1e-20 132.78 0.105341 -1.257989
.45 .13 .1   1.126177  1.338515     0. 0. 0. 50000.

MEbinaryPulsar J0024-7205E  metric 1e-20 283.78 0.105527 -1.258189
.45 .13 .1   2.256844  1.978000     0. 0. 0. 47861.148438

MEbinaryPulsar J0034-0534   metric 1e-20 533.71 0.149940 -0.097334
.45 .13 .1   1.589282  1.437765     0. 0. 0. 49550.703125

MEbinaryPulsar J0218+4232   metric 1e-20 431.46 0.602600  0.742432
.45 .13 .1   2.028850  1.984400     0. 0. 0. 49150.609375

MEbinaryPulsar J0437-4715   metric 1e-20 174.69 1.209789 -0.824709
```

```
.45 .13 .1   5.741044  3.366693  2e-05 0. 0. 51194.632812

MEbinaryPulsar J0613-0200   metric 1e-20 327.60 1.630717 -0.035135
.45 .13 .1   1.198513  1.091444  4e-06 0. 0. 50315.378906

MEbinaryPulsar J0700+6418   metric 1e-20   6.11 1.835345  1.122301
.45 .13 .1   1.028670  4.125612  7e-06 0. 0. 46066.769531

MEbinaryPulsar J0751+1807   metric 1e-20 288.46 2.055791  0.316383
.45 .13 .1   0.263144  0.396615     0. 0. 0. 49301.031250

MEbinaryPulsar J1012+5307   metric 1e-20 191.27 2.672785  0.927074
.45 .13 .1   0.604673  0.581816     0. 0. 0. 49220.449219

MEbinaryPulsar J1022+1001   metric 1e-20  61.78 2.718209  0.175086
.45 .13 .1   7.805130 16.765411 0.0001 0. 0. 49778.406250

MEbinaryPulsar J1045-4509   metric 1e-20 134.79 2.817994 -0.788279
.45 .13 .1   4.083529  3.015132   2e-05 0. 0. 50276.273438

MEbinaryPulsar J1157-5112   metric 1e-20  23.94 3.129097 -0.893881
.45 .13 .1   3.507386 14.286340     0. 0. 0. 50000.

MEbinaryPulsar J1232-6501   metric 1e-20  12.33 3.282516 -1.134771
.45 .13 .1   1.863272  1.614020     0. 0. 0. 50000.

MEbinaryPulsar J1435-6100   metric 1e-20 107.98 3.819382 -1.064932
.45 .13 .1   1.354885  6.184023     0. 0. 0. 50000.

MEbinaryPulsar J1455-3330   metric 1e-20 126.20 3.908662 -0.584910
.45 .13 .1  76.174568 32.362232 0.0002 0. 0. 50275.171875

MEbinaryPulsar J1528-3148   metric 1e-20  17.44 4.051666 -0.554026
.45 .13 .1   3.180347 11.452271     0. 0. 0. 52065.125000

MEbinaryPulsar J1600-3053   metric 1e-20 278.94 4.192565 -0.539255
.45 .13 .1  14.348457  8.801657 0.0002 0. 0. 52190.707031

MEbinaryPulsar J1603-7202   metric 1e-20  68.38 4.204475 -1.257377
.45 .13 .1   6.308630  6.880658  9e-06 0. 0. 50429.269531

MEbinaryPulsar J1640+2224   metric 1e-20 317.12 4.364541  0.390997
.45 .13 .1 175.460663 55.329723 0.0008 0. 0. 49345.183594

MEbinaryPulsar J1643-1224   metric 1e-20 217.37 4.379188 -0.216706
.45 .13 .1 147.017395 25.072613 0.0005 0. 0. 50313.039062

MEbinaryPulsar J1713+0747   metric 1e-20 219.81 4.510914  0.136027
.45 .13 .1  67.825127 32.342422  7e-05 0. 0. 48741.984375

MEbinaryPulsar J1721-1936   metric 1e-20   2.00 4.542330 -0.342316
.45 .13 .1   0.258274  0.352000     0. 0. 0. 48455.023438

MEbinaryPulsar J1732-5049   metric 1e-20 189.23 4.593690 -0.886919
.45 .13 .1   5.262997  3.982868     0. 0. 0. 50000.

MEbinaryPulsar J1738+0333   metric 1e-20 171.94 4.620397  0.062119
.45 .13 .1   0.354792  0.343443     0. 0. 0. 52897.175781

MEbinaryPulsar J1740-5340   metric 1e-20 274.95 4.628368 -0.936862
.45 .13 .1   1.354060  1.652850     0. 0. 0. 51749.710938
```

```
MEbinaryPulsar J1745-0952   metric 1e-20  52.61 4.647604 -0.172398
.45 .13 .1   4.943453  2.378615     0. 0. 0. 50000.

MEbinaryPulsar J1748-2446A  metric 1e-20  87.48 4.660193 -0.432443
.45 .13 .1   0.075646  0.119596     0. 0. 0. 48270.031250

MEbinaryPulsar J1757-5322   metric 1e-20 113.74 4.700402 -0.931552
.45 .13 .1   0.453311  2.086527     0. 0. 0. 50000.

MEbinaryPulsar J1803-2712   metric 1e-20   3.99 4.727774 -0.474759
.45 .13 .1 406.781006 58.939701 0.0005 0. 0. 48467.398438

MEbinaryPulsar J1804-2717   metric 1e-20 108.03 4.731379 -0.476335
.45 .13 .1  11.128712  7.281450  4e-05 0. 0. 49615.109375

MEbinaryPulsar J1807-2459   metric 1e-20 327.86 4.744459 -0.436289
.45 .13 .1   0.071092  0.012207     0. 0. 0. 51732.921875

MEbinaryPulsar J1810-2005   metric 1e-20  31.47 4.760312 -0.350559
.45 .13 .1  15.012020 11.977850     0. 0. 0. 50000.

MEbinaryPulsar J1834-0010   metric 1e-20   2.92 4.861996  0.003149
.45 .13 .1   1.811103  0.723100     0. 0. 0. 46458.382812

MEbinaryPulsar J1857+0943   metric 1e-20 187.49 4.963745  0.169672
.45 .13 .1  12.327171  9.230781  2e-05 0. 0. 47529.898438

MEbinaryPulsar J1904+0412   metric 1e-20  15.07 4.993924  0.073332
.45 .13 .1  14.934263  9.634780     0. 0. 0. 50000.

MEbinaryPulsar J1909-3744   metric 1e-20 340.32 5.016908 -0.658640
.45 .13 .1   1.533449  1.897996  3e-06 0. 0. 52056.250000

MEbinaryPulsar J1910+0004   metric 1e-20 277.36 5.019538  0.001433
.45 .13 .1   0.140996  0.038000     0. 0. 0. 47153.902344

MEbinaryPulsar J1910-5958   metric 1e-20 307.17 5.023348 -1.046761
.45 .13 .1   0.865000  1.270000     0. 0. 0. 51745.000000

MEbinaryPulsar J1911-1114   metric 1e-20 276.81 5.025770 -0.196167
.45 .13 .1   2.716558  1.762875  2e-05 0. 0. 50456.898438

MEbinaryPulsar J1918-0642   metric 1e-20 131.79 5.056221 -0.117106
.45 .13 .1  10.913177  8.350489     0. 0. 0. 50000.

MEbinaryPulsar J1955+2908   metric 1e-20 164.05 5.216199  0.508684
.45 .13 .1 117.349098 31.412685 0.0003 0. 0. 46112.488281

MEbinaryPulsar J1959+2048   metric 1e-20 623.12 5.234298  0.363102
.45 .13 .1   0.381967  0.089227     0. 0. 0. 49531.800781

MEbinaryPulsar J2019+2425   metric 1e-20 255.16 5.321214  0.426226
.45 .13 .1  76.511635 38.767624 0.0001 0. 0. 48906.968750

MEbinaryPulsar J2033+1734   metric 1e-20 169.10 5.381505  0.307178
.45 .13 .1  56.307999 20.163000 0.0001 0. 0. 49584.320312

MEbinaryPulsar J2051-0827   metric 1e-20 222.80 5.459064 -0.147663
.45 .13 .1   0.099110  0.045086     0. 0. 0. 49642.171875

MEbinaryPulsar J2129-5721   metric 1e-20 269.36 5.625978 -1.001015
.45 .13 .1   6.625493  3.500559  7e-06 0. 0. 50445.898438
```

```
MEbinaryPulsar J2145-0750   metr ic 1e-20  63.30 5.697807 -0.136806
.45 .13 .1   6.838902 10.164105 2e-05 0. 0. 50313.710938

MEbinaryPulsar J2229+2643   metric 1e-20 336.82 5.889824  0.466574
.45 .13 .1  93.015892 18.912519 0.0003 0. 0. 49419.738281

MEbinaryPulsar J2317+1439   metric 1e-20 291.25 6.096234  0.255842
.45 .13 .1   2.459332  2.313948  5e-07 0. 0. 49300.472656


MEbinaryPulsar J1915+1606   metric 1e-20  17.94 5.041674  0.281131
.45 .13 .1   0.322997  2.341759  0.617 0. 0. 46443.996094

MEbinaryPulsar J0024-7204H  metric 1e-20 312.49 0.105207 -1.257834
.45 .13 .1   2.357697  2.152823   0.07 0. 0. 51000.972656


USadder    h  0  2  metric.hx metric.hy .5 -.5

UFrLRdout  0 generatedSignal h.out 1. -32 adc

UFrOFile -1 file.dat NO FBuilder.frameH 86400
```

Annexe E

Conversion secondes GPS / date

Pour obetnir la date à partir d'un nombre de secondes GPS,

1. Diviser le nombre de secondes GPS par 86400.
2. Ajouter 2444244.5 au résultat (2444244.5 est la date julienne correspondant à l'origine du GPS – le 6 janvier 1980).
3. Remonter à la date souhaitée grâce au tableau E.1.

Mois	2002	2003
1er janvier	2 452 276	2 452 641
1er février	2 452 307	2 452 672
1er mars	2 452 335	2 452 700
1er avril	2 452 366	2 452 731
1er mai	2 452 396	2 452 761
1er juin	2 452 427	2 452 792
1er juillet	2 452 457	2 452 822
1er août	2 452 488	2 452 853
1er septembre	2 452 519	2 452 884
1er octobre	2 452 549	2 452 914
1er novembre	2 452 580	2 452 945
1er décembre	2 452 610	2 452 975

TAB. E.1 – Correspondance entre les dates de début des 12 mois de l'année et la date julienne [109].

Pour des dates en dehors de la période indiquée, on pourra consulter [109].

Bibliographie

[1] A. Einstein. Zum gegenwärtigen stande des gravitationsproblems. *Physikalishe Zeitschrift*, **14** :1249–1266, 1913.

[2] J. Bok et N. Hulin-Jung. *Ondes électromagnétiques, Relativité*. Hermann, 1991.

[3] J.H. Gundlach E.G. Adelberger B.R. Heckel et H.E. Swanson G.L. Smith, C.D. Hoyle. Short-range tests of the equivalence principle. *Phys. Rev. D*, **61** :22001, 2000.

[4] http ://www.sstd.rl.ac.uk/fundphys/step/.

[5] J.B. Hartle. Basic general relativity, 1999.

[6] R.V. Pound et G.A Rebka. Apparent weight of photons. *Phys. Rev. Lett.*, **4** :337–341, 1960.

[7] J.C. Hafele et R.E. Keating. Around the world atomic clocks : observed relativistic time gains. *Science*, **177** :168, 1972.

[8] Valeria Ferrari. Lecture at the First Virgo-SIGRAV School on Gravitational Waves, May $27^{th} - 31^{st}$ 2002.

[9] R.A. Hulse et J.H. Taylor. Discovery of a pulsar in a binary system. *Astroph. Journal*, **195** :L51–L53, janvier 1975.

[10] J.H Taylor et J.M. Weisberg. Further experimental tests of relativistic gravity using the binary pulsar 1913+16. *Astroph. Journal*, **345** :434–4501, october 1989.

[11] T. Damour et J.H Taylor. On the orbital period change of the binary pulsar PSR1913+16. *Astroph. Journal*, **366** :501–511, january 1991.

[12] http ://www.nobel.se/physics/laureates/1993/index.html.

[13] K.S. Thorne et J.A. Wheeler C.W. Misner. *Gravitation*. W.H. Freeman and company, 1970. ISBN 0-7167-0334-3.

[14] B.F. Schutz. Gravitational radiation. *gr-qc 0003069*, mars 2000.

[15] P.C. Peters et J. Mathews. Gravitational radiation from point masses in a keplerian orbit. *Phys. Rev.*, **131** :435–440, 1963.

[16] Andrea Viceré. Lecture at the First Virgo-SIGRAV School on Gravitational Waves, May $27^{th} - 31^{st}$ 2002.

[17] A.G. Lyne et D.R. Lorimer. High birth velocities of radio pulsars. *Letters to Nature*, **369** :127–129, mai 1994.

[18] B.F. Schutz. Gravitational-wave sources. *Class. Quantum Grav.*, **13** :A219–A238, 1996.

[19] T. Zwerger et E. Müller. Dynamics and gravitational wave signature of axisymmetric rotational core collapse. *Astron. Astrop.*, **320** :209–227, 1997.

[20] Michele Maggiore. Gravitational wave experiments and early universe cosmology. *Physics Reports*, **331** :283–367, 2000.

[21] J. Weber. Detection and generation of gravitational waves. *Phys. Rev.*, **117** :306–313, 1960.

[22] J. Weber. Evidence for the discovery of gravitational radiation. *Phys. Rev. Letters*, **20** :1320–1325, 1969.

[23] Virgo collaboration. Lecture at the First Virgo-SIGRAV School on Gravitational Waves, May $27^{th} - 31^{st}$ 2002.

[24] K. Danzmann *et al.* *Lectures Notes in Physics*, **410** :184, 1992.

[25] K. Tsubono. *Gravitational waves experiments.* World Scientific, Singapore. p. 112, édité par E. Coccia, G. Pizella et F. Ronga.

[26] http ://www.gravity.uwa.edu.au/AIGO/AIGO.html.

[27] A. Abramovici *et al.* *Science*, **256** :325, 1992.

[28] K. Danzmann. Lisa : laser interferometer space antenna for gravitational wave measurements. *Class. Quant. Grav.*, **13** :A247, 1996.

[29] B. Mours and M. Yvert. A capacitive device approach to gravitational wave detection. *Physics Letters A*, **136** :209–212, 1989.

[30] G. Brautti. Heterodyne detection of gravitational waves emitted from binary pulsars. *Modern Physics Letters A*, **25** :1733–1738, 1999.

[31] S. Braccini et A. Giazotto. Virgo : an interferometric detector of gravitational waves. In *Recent developments in general relativity. 14th SIGRAV Conference on General Relativity and Gravitational Physics, Genova, Italy, September 18-22, 2000, edited by R. Cianci, R. Collina, M. Francaviglia, P. Fré. Milano : Springer, ISBN 88-470-0162-5, 2002, p. 111 - 119*, pages 111–+, 2002.

[32] S.W. Hawking and W.Israel. *300 years of gravitation.* Cambridge University Press, 1987.

[33] P.R. Saulson. *Fundamentals of interferometric gravitational wave detectors*. World Scientific, 1994. ISBN 981-02-1820-6.

[34] Virgo final design report, Mai 1997.

[35] M. Punturo. Virgo sensitivity curve. *VIR-NOT-PER-1390-51*, Mars 2001.

[36] H.B. Callen et T.A. Welton. Irreversibility and generalized noise. *Phys. Rev*, **83** :34–40, 1951.

[37] E. Mauceli *et al.* *Phys. Rev. D*, **54** :1264, 1996.

[38] M. Cerdonio *et al.* *Class. Quant. Grav.*, **14** :1491–1494, 1997.

[39] P.Astone *et al.* *Phys Rev. D.*, **47** :362, 1993.

[40] P. Astone *et al.* *Astroparticle Physics*, **7** :231, 1997.

[41] D.G. Blair *et al.* *Phys. Rev. Letters*, **74** :1908, 1994.

[42] G. Pizella. Experiments with resonnant antennas for detecting gravitational waves. *Proc. International Symposium on Experimental Gravitational Physics, Guangzhou (Chine)*, pages 52–74, 3-8 août 1987.

[43] M. Visco. Nautilus and explorer status report. 38 ème rencontres de Moriond.

[44] J.A. Lobo. What can we learn about gravitational wave physics with a spherical elastic antenna. *Phys. Rev. D*, **D 52** :591–604, 1995.

[45] A. de Waard *et al.* MiniGRAIL, the first spherical gravitational wave detector. *Classical and Quantum gravity*, **20** no. 10 :S143–151, 2003. Comptes-rendus du '4th International LISA symposium'.

[46] S. M. Merkowitz et W.W. Johnson. First tests of a truncated icosahedral gravitational wave antenna. *Phys. Rev D*, **53** :5377–5381, 1996.

[47] E.Coccia *et al.* SFERA : research and development for a spherical gravitational wave detector. In *Second Edoardo Amaldi Conference on Gravitational Wave Experiments*, page 551, 1998.

[48] http ://www.das.inpe.br/ graviton/.

[49] B. Hiscock et R.W. Hellings. OMEGA : A space gravitational wave MIDEX mission. *Bulletin of the American Astronomical Society*, **29** :1312, 1997.

[50] Arlette de Waard et Luciano Gottardi, communications privées.

[51] J.A. Lobo. Wideband dual sphere detectors of gravitational waves. *Phys. Rev. Letters*, **87** :031101, 2001.

[52] José Alberto Lobo, communication privée.

[53] H. Lichtenegger et J.Collins B. Hoffman-Wellenhof. *GPS, Theory and Practice*. ISBN 3-211-83534-2. Springer-Verlag Wien New York, 5$^{\text{ème}}$ edition, 2001.

[54] http ://www.ostp.gov/html/0053_2.html.

[55] M. Tinto et Y. Gürsel. Near optimal solution to the inverse problem for gravitational-wave bursts. *Phys. Rev D*, **40** :3884–3938, 1989.

[56] D. Buskulic *et al.* Estimation of the needed accuracy for the calibration of the virgo interferometer in relation to the detection of coalescing binaries. *Astroparticle Physics*, **15 (4)** :383–389, 2001.

[57] A. Masserot et B. Mours Sz. Márka. Measurement of the time offset between the ligo and virgo data acquisition systems. *VIR-NOT-LAP-1390-198 et LIGO-T020036-00-D*, Mars 2002.

[58] A. Masserot et B. Mours Sz. Márka. Measurement of the time offset between the ligo and virgo data acquisition systems using an internet time transfer. *VIR-NOT-LAP-1390-219 et LIGO-T200118-00-D*, Août 2002.

[59] L. Landau. On the theory of stars. *Phys. Z. Sowjetunion*, **1** :285, 1932.

[60] W. Baade et F. Zwicky. Supernovae and comic rays. *Physical review*, **45** :138, 1934.

[61] J.R. Oppenheimer and G. Volkoff. On massive neutron cores. *Phys. Rev.*, **55** :374, 1939.

[62] J.D.H. Pilkington P.F. Scott et R.A. Collins A. Hewish, S.J. Bell. Observation of a rapidly pulsating radio source. *Nature*, **217** :709, 1968.

[63] T. Gold. Rotating neutron stars and the nature of pulsars. *Nature*, **221** :25–27, 1969.

[64] J. B. Hartle, communication privée.

[65] S.L. Shapiro et S.A. Teukolsky. *Black holes, white dwarfs and neutron stars. The physics of compact objects.* Wiley-Interscience, 1983. ISBN 0-471-87317-9.

[66] Periodic sources of gravitational radiation. *Virgo DAD.*

[67] P. Goldreich et W.H. Julian. Pulsar electrodynamics. *Astrophysical Journal*, **157** :869, 1969.

[68] http ://www.phy.cuhk.edu.hk/people/teach/mcchu/gee240m/Chap_13/sec13_2.html.

[69] M. Zimmermann et E. Szedenits Jr. Gravitational waves from rotating and precessing rigid bodies : simple models and applications to pulsars. *Phys. Rev. D*, **20** :351–355, juillet 1979.

[70] S. Bonazzola et E. Gourgoulhon. Gravitational waves from pulsars : emission by the magnetic-field-induced distortion. *Astron. Astroph.*, **312** :675–690, 1996.

[71] J. Frieben et E. Gourgoulhon S. Bonazzola. Spontaneous symmetry breaking of rapidly rotating stars in general relativity. *Astrophysical journal*, **460** :379–389, Mars 1996.

[72] S. Chandrasekhar. Solution of two problems in the theory of gravitational radiation. *Phys. Rev. Letters*, **24** :611–615, 1970.

[73] J. Friedman et B. Schutz. Secular instability of rotating newtonian stars. *Astrophysical journal*, **222** :281–293, 1978.

[74] P. Roberts et K. Stewartson. On the stability of a Maclaurin spheroid of small viscosity. *Astrophysical journal*, **3** :777–790, 1963.

[75] R. Wagoner. Gravitational radiation from accreting neutron stars. *Astrophysical Journal*, **275** :345–348, mars 1984.

[76] J. Papaloizou et J.E. Pringle. Gravitational radiation and the stability of rotating stars'. *MNRAS*, **184** :501, 1978.

[77] Groupe des pulsars de l'ATNF. Catalog de 1326 pulsars.
http ://www.atnf.csiro.au/research/pulsar, 2002.

[78] A. Wolszczan *et al.* A 100-ms pulsar, with negative period derivative, in the globular cluster m15. *Nature*, **337** :531–533, 1989.

[79] B. Caron *et al.* SIESTA, a time domain, general purpose simulation program for the Virgo experiment. *Astroparticle Physics*, **10** :369–386, 1999.

[80] SIESTA user's guide. VIR-MAN-LAP-5700-XXX.

[81] Xavier Grave. *Etude de méthodes pour la recherche, avec le détecteur Virgo, d'ondes gravitationnelles émises pas des étoiles à neutrons.* PhD thesis, Université de Paris Sud, 1997.

[82] *Le grand livre du ciel.* Bordas, 1999. ISBN 2-04-027238-0.

[83] J.E. Olsen and E. stgaard. Higher order terms in the analysis of gravitational waves from binary pulsars. ISSN 0365-2459, July 1995. Theoretical Physics Seminar in Trondheim.

[84] J.H. Taylor *et al.* Measurements of general relativistic effects in the binary pulsar 1913+16. *Nature*, **277** :437–440, février 1979.

[85] J. Ramonet et M. Yvert. Simulation of gravitational waves signal from asymetric spinning neutron stars in binary systems using SIESTA. *VIR-NOT-LAP-1390-181*, Octobre 2001.

[86] X. Grave and B. Mours. Doppler effect and periodic signal search. *VIRGO-NTS 95-40*, décembre 1995.

[87] B. Morando, J. Chapront et G. Francou. The calculation of the positions and velocities of the Earth during the Hipparcos mission, May 1984. Notes scientifiques et techniques du Bureau Des Longitudes (edited by the FAST Consortium).

[88] The GAIA mission. http ://sci.esa.int/home/gaia/index.cfm.

[89] J. Ramonet. New ephemerides for the earth position and velocity in SIESTA. *VIR-NOT-LAP-1390-228*, Décembre 2002.

[90] Pierre Bretagnon, communication privée.

[91] Les éphémérides sont disponibes sur le serveur ftp anonyme nav.jpl.nasa.gov (128.149.23.44). Une fois la connection établie, se placer dans le répertoire ephem/export.

[92] D. Buskulic et al. VEGA, an environment for gravitational waves data analysis. *International Journal of Modern Physics D*, **9**, No. 3 :293–297, 2000.

[93] http ://www.math.keio.ac.jp/ matumoto/emt.html.

[94] P. Jaranowski. Noise-free response of the laser interferometric detector to periodic gravitational waves from a neutronstar in a binary system. *VIR-LAS 2/2000*, Juillet 2000.

[95] S. Frasca. Basic tools for signal detection. *Virgo DAD*.

[96] C. Cutler B. Schutz P. Brady, T. Creighton. Searching for periodic sources with LIGO. *Physical Review D*, **47** :2101–2116, février 1998.

[97] S. Dhurandhar. Searching for gravitational waves from rotationg neutron stars. *Pramana journal of physics*, **55**(4) :545–558, 2000.

[98] S. Dhurandhar et A. Vecchio. Searching for continuous gravitational wave sources in binary systems. *Phys. Rev. D.*, **63** :122001, 2001.

[99] http ://www.fftw.org.

[100] M.A. Papa S. Frasca. Advanced search for periodic sources. *Virgo DAD*.

[101] http ://wwwasdoc.web.cern.ch/wwwasdoc/minuit/minmain.html.

[102] http ://star-www.st-and.ac.uk/~fv/webnotes/chapt9a.htm.

[103] Sergio Frasca et Cristiano Palomba. communication privée.

[104] Olivier Véziant. *Calibration de l'expérience Virgo : de l'étalonnage du détecteur à la recherche de signaux de coalescences binaires avec l'interféromètre central*. PhD thesis, Université de Savoie, 2003.

[105] John Middletitch. *The measurement of the masses of the neutron star Her X-1, and its binary companion HZ Her, as derived from the study of 1.24-second optical pulsations from the HZ Her-Her X-1 binary system and the X ray-to-optical reprocessing reflection and ransmission mechanisms*. PhD thesis, University of Claifornia, Berkeley, 1976.

[106] P.V.C. Hough. Machine analysis of bubble chamber pictures. Int. Conf. on High-Energy Accelerators and Instrumentation CERN 1959.

[107] J. Ramonet et M. Yvert. A study of the efficiency of the hough transform method used on the binary pulsars search context. *VIR-NOT-LAP-1390-238*, Avril 2003.

[108] Philippe Bolon. communication privée.

[109] http ://www.aavso.org/observing/aids/jdcalendar.shtml.