

Opgave 1: Stel voor dat we leven op het oppervlak van een bol. We introduceren de gebruikelijke sferische coördinaten (r, θ, ϕ) en laten $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi)$ de gebruikelijke set orthonormale sferische basisvectoren zijn. Het lijnelement in sferische coördinaten wordt dan gegeven door

$$d\vec{s} = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \hat{e}_\phi. \quad (1)$$

We beperken ons nu tot het oppervlak van de bol en leggen de conditie $r = \text{constant}$ op. We kiezen de coördinaten $(x^1, x^2) = (\theta, \phi)$ op het boloppervlak. Het lijnelement op het oppervlak van de bol kan in termen van de *natuurlijke basisvectoren* geschreven worden als

$$d\vec{s} = d\theta \vec{e}_\theta + d\phi \vec{e}_\phi, \quad \text{met} \quad \vec{e}_\theta = r \hat{e}_\theta, \quad \vec{e}_\phi = r \sin \theta \hat{e}_\phi. \quad (2)$$

Met deze definitie wordt het kwadratische lijnelement gegeven door

$$ds^2 = (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\phi)^2. \quad (3)$$

(a) In termen van sferische coördinaten (r, θ, ϕ) kunnen we de positievector schrijven als

$$\vec{r} = r \sin \theta \cos \phi \vec{i} + r \sin \theta \sin \phi \vec{j} + r \cos \theta \vec{k}. \quad (4)$$

De drie natuurlijke basisvectoren worden gegeven door $\vec{e}_r = \partial \vec{r} / \partial r$, $\vec{e}_\theta = \partial \vec{r} / \partial \theta$ en $\vec{e}_\phi = \partial \vec{r} / \partial \phi$. Bepaal deze vectoren en geef de lengte van elke vector. Merk op dat in het volgende alleen de basisvectoren op het oppervlak, $\vec{e}_\theta$ en $\vec{e}_\phi$, relevant zijn.

(b) Bepaal de metrische tensor en haar inverse.

(c) Bereken alle Christoffelsymbolen Γ_{ij}^k waarbij de indices lopen over de verzameling (θ, ϕ) .

Opgave 2: In deze opgave testen we onze kennis van het berekenen van covariante afgeleiden. We gebruiken de geometrie van het oppervlak van een twee-dimensionale bol,

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (5)$$

en een vector $\vec{V}$ met componenten $V^A = (0, 1)$. Bereken de vier componenten van $\nabla_A v^B$ en bereken dan de twee grootheden $\nabla_\theta \nabla_\phi v^\theta$ en $\nabla_\phi \nabla_\theta v^\theta$ en onderzoek of deze covariante afgeleiden commuteren.

Opgave 3: Bereken de componenten van de divergentie voor sferische coördinaten in de drie-dimensionale euclidische ruimte. Hint: voor de covariante divergentie van vector $\vec{V}$ geldt $\nabla \cdot \vec{V}$ en voor de componenten ervan $V^i_{;i}$. Zie bladzijde 114 van het dictaat voor een voorbeeld.