

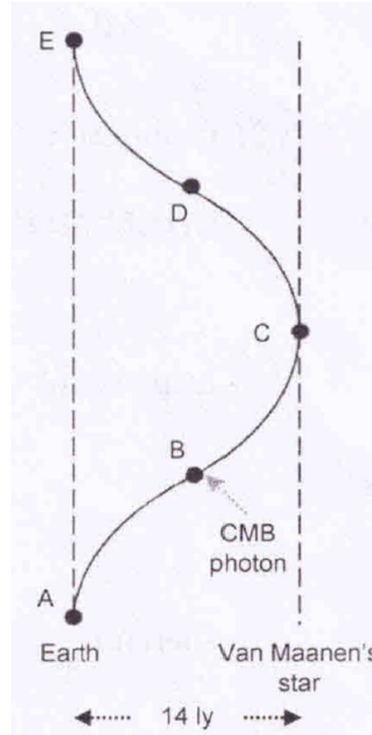
OPGAVEN WEEK 7

Opgave 1: We bespreken kort Rindler space en de connectie met de Tweelingparadox. We kijken naar een uniform versnelde waarnemer (we beschouwen enkel de x -richting) die met zijn ruimteschip een wereldlijn volgt die gegeven wordt door

$$t(\sigma) = \frac{1}{g} \sinh \sigma \quad \text{en} \quad x(\sigma) = \frac{1}{g} (\cosh \sigma - 1), \quad (1)$$

met g een constante.

- (a) Bereken de eigentijd τ van de astronaut als functie van σ , en gebruik $\tau = 0$ voor $\sigma = 0$.
- (b) Bereken de viersnelheid $\mathbf{u}$ van de astronaut als functie van τ .
- (c) Bereken de vierversnelling $\mathbf{a}$ van de astronaut als een functie van τ .
- (d) Toon aan dat de grootte $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}$ van de vierversnelling constant is.



Figuur 1: Ruimtetijddiagram voor de schematische weergave van de Tweelingparadox.

Stel dat een astronaut een reis maakt in een raket van de Aarde naar een ster op een afstand van 14 lichtjaar. De reis omvat 4 fases, zoals aangegeven in Fig. 1. Elke fase wordt uitgevoerd met een constante versnelling van $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Voor de eerste helft van de heenreis (van A tot B) versnelt de astronaut in de $+x$ -richting. Aangekomen in B draait de astronaut de motor 180° om en versnelt in de $-x$ -richting, terwijl hij reist van B naar C, en ook van C naar D. Bij D aangekomen draait hij de motor weer terug in de originele stand en versnelt de raket in de $+x$ -richting totdat hij in rust aankomt op Aarde op E (neem voor het gemak aan dat zowel de Aarde als de betreffende ster in rust zijn in een gemeenschappelijk inertiaalsysteem).

(e) Wat is de eigentijd (in jaren) die voor de astronaut verstrijkt op zijn retour-reis van de Aarde naar de ster en terug?

(f) Wat is de eigentijd (in jaren) die voor een waarnemer op Aarde verstrijkt?

(g) Bereken de relativistische factor γ voor de astronaut ten opzichte van het inertiaalsysteem verbonden met de Aarde op punt B . Hoe kan dit de astronaut helpen om uit te leggen dat hij een rondreis van 28 lichtjaar heeft gemaakt in minder dan 28 jaren van zijn eigentijd?

Opgave 2: We beschouwen Elektromagnetisme in de Speciale Relativiteitstheorie. De Maxwellvergelijkingen voor de elektrische en magnetische velden in vacuüm, $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$, in drie-vector notatie worden gegeven door

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 4\pi \mathbf{J}, & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \rho, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{2}$$

in eenheden waarbij $\mu_0 = \epsilon_0 = c = 1$. Hierbij stelt ρ de dichtheid van elektrische lading voor en $\mathbf{J}$ de stroomdichtheid.

(a) We kunnen een *antisymmetrische* $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ tensor $\mathbf{F}$ op ruimtetijd definiëren door vergelijkingen $F^{0i} = E^i$ ($i = 1, 2, 3$), $F^{xy} = B^z$, $F^{yz} = B^x$, $F^{zx} = B^y$. Leidt uit deze definities alle andere componenten $F^{\mu\nu}$ in dit referentiesysteem (frame) af en schrijf ze in de vorm van een matrix.

(b) Een rotatie over een hoek θ rond de z -as is een soort Lorentztransformatie met matrix

$$\Lambda^{\beta'}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\tag{3}$$

Laat zien dat de nieuwe componenten van $\mathbf{F}$,

$$F^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha'}_{\mu} \Lambda^{\beta'}_{\nu} F^{\mu\nu},\tag{4}$$

nieuwe elektrische en magnetische drie-vector componenten definiëren (door de regel gegeven onder (a)), die hetzelfde zijn als de componenten van de oude $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$ in de geroteerde drie-ruimte. (Dit laat zien dat een ruimtelijke rotatie van $\mathbf{F}$ resulteert in een ruimtelijke rotatie van de velden $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$.)

(c) Definieer de stroom viervector $\vec{J}$ door $J^0 = \rho$, $J^i = (J)^i$ en toon aan dat twee van de Maxwellvergelijkingen geschreven kunnen worden als

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} = 4\pi J^{\mu}.\tag{5}$$

(d) Laat zien dat de andere twee Maxwellvergelijkingen gegeven worden door

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0.\tag{6}$$

Merk op dat dit slechts vier onafhankelijke vergelijkingen voorstellen. We kunnen een indexwaarde gelijk aan bijvoorbeeld 0 kiezen. We kunnen dan de andere drie waarden $(1, 2, 3)$ toekennen aan μ, ν, λ in willekeurige volgorde. Dit levert elke keer weer dezelfde vergelijking (afgezien van een algemeen minteken). Probeer het zelf: dit volgt uit de antisymmetrie van $F_{\mu\nu}$.

(e) We hebben de Maxwellvergelijkingen nu in tensorvorm uitgedrukt. Laat zien dat ladingsbehoud $J^\mu_{;\mu} = 0$ besloten ligt in vergelijking (5). (Hint: gebruik weer de antisymmetrie van $F_{\mu\nu}$.)

(f) De ladingsdichtheid wordt in elk frame gegeven door J^0 . De totale lading in ruimtetijd is daarom $Q = \int J^0 dx dy dz$, waar de integratie het volledige hyperoppervlak $t = \text{constant}$ bestrijkt. Definieer $\tilde{dt} = \tilde{n}$ als eenheidsnormaal op voor dit hyperoppervlak en toon aan dat

$$Q = \int J^\alpha n_\alpha dx dy dz. \quad (7)$$

(g) Gebruik de wet van Gauss en vergelijking (5) om aan te tonen dat de totale lading omsloten binnen elk willekeurig gesloten twee-oppervlak $\mathcal{S}$ in het hyperoppervlak $t = \text{constant}$, bepaald kan worden door een integraal over $\mathcal{S}$ zelf uit te voeren:

$$Q = \oint_{\mathcal{S}} F^{0i} n_i d\mathcal{S} = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S}, \quad (8)$$

met $\mathbf{n}$ de eenheidsnormaal op $\mathcal{S}$ in het hyperoppervlak (en dat is *niet* hetzelfde als $\tilde{n}$ in vraag (f) hierboven).

(h) Voer een Lorentztransformatie van $F^{\mu\nu}$ uit van een frame $\bar{\mathcal{O}}$ dat met snelheid v in de x -richting beweegt relatief ten opzichte van het frame dat we in opgave (a) hierboven gebruikt hebben. Definieer in dit frame een drie-vector $\bar{\mathbf{E}}$ met componenten $\bar{E}^i = F^{\bar{0}i}$, en analoog als in opgave (a) voor $\bar{\mathbf{B}}$. Ontdek op deze manier hoe $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$ zich gedragen onder een Lorentztransformatie: ze mengen! Dus $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$ zijn zelf niet Lorentzinvariant, maar slechts componenten van $\mathbf{F}$, die de Faraday tensor genoemd wordt, en die de invariante beschrijving van elektromagnetische velden in relativiteitstheorie is. Als je hier zorgvuldig over nadenkt, dan zie je dat op fysische redenen ze niet invariant *kunnen* zijn. In het bijzonder worden magnetische velden veroorzaakt door bewegende ladingen; maar een lading die in een frame beweegt kan in rust zijn in een ander frame, en dus kan een magnetisch veld dat bestaat in een frame, niet bestaan in een ander frame. Wat hetzelfde is in *alle* frames is de Faraday tensor: enkel zijn componenten worden getransformeerd.