

OPGAVEN WEEK 6

Opgave 1: Een vrij deeltje beweegt met snelheid v langs de y -as, zoals gezien in een zeker lorentzstelsel. Op tijd $t = 0$, gezien vanuit dit lorentzstelsel, is het deeltje in de oorsprong.

- (a) U kunt aannemen dat de snelheid v van dit deeltje constant is. Waarom?
- (b) Bereken de positie van het deeltje als functie van de eigentijd τ met behulp van de tijddilatatieformule.
- (c) Bereken nogmaals de positie van het deeltje als functie van de eigentijd, maar nu met behulp van de Lorentztransformaties.
- (d) Gebruik uw antwoord uit (b) of (c) om de viersnelheid u^μ van het deeltje te berekenen. Laat zien dat geldt $\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -c^2$.

Opgave 2: Via het formalisme van Lagrange kunnen we aantonen dat het kortste pad tussen twee punten in een Euclidische ruimte, een rechte lijn is; dit is op het college voorgerekend. We vragen ons in deze opgave af of iets analoogs geldt in een Minkowski-ruimtetijd. Oftewel: is het kortste pad tussen twee *puntgebeurtenissen* ook een rechte lijn?

- (a) Laat zien dat de afstand tussen twee puntgebeurtenissen wordt gegeven door de volgende integraal:

$$S = \int \left(- \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right) dx. \quad (1)$$

- (b) Kies een Lorentzstelsel waarin de twee gebeurtenissen plaatsvinden op hetzelfde tijdstip. Gebruik daarna de Euler-Lagrange vergelijkingen om aan te tonen dat S minimaal is wanneer het pad tussen de twee gebeurtenissen een rechte lijn is.
- (c) De conclusie uit opgave (b) is dat voor deze *specifieke* waarnemer inderdaad geldt dat de afstand tussen twee puntgebeurtenissen een rechte lijn is. Beargumenteer, zonder opnieuw de Euler-Lagrange vergelijkingen op te lossen, dat dezelfde conclusie ook moet gelden voor *alle* waarnemers in Minkowski-stelsels.

Opgave 3: In Stanford, Californie, staat een lineaire deeltjesversneller genaamd SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) Two-mile Accelerator. Dit is een instrument van ongeveer 2 mijl lang waarin een constant elektrisch veld $\mathcal{E}$ is aangebracht, dat sterk genoeg is om elektronen vanuit rust te doen versnellen tot zij een energie E hebben van 40 GeV (zoals gemeten in het ruststelsel van het apparaat). We nemen aan dat het ruimtelijk deel van de relativistische impuls $\vec{p}$ voldoet aan de volgende bewegingsvergelijking:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{\mathcal{E}}, \quad (2)$$

waarin t de tijd is zoals gemeten in het ruststelsel van de pijp, en e de elektrische lading van het elektron (hierdoor is $e\vec{\mathcal{E}}$ niets anders dan de kracht $\vec{F}$ op het elektron).

- (a) Neem aan dat het elektron start vanuit rust aan een kant van het apparaat, en dat het elektrisch veld langs de x -as is. Gebruik de bewegingsvergelijking om uit te rekenen wat de positie x is van het elektron als functie van de tijd t . Hint: bereken eerst $v(t)$; wanneer deze

gevonden is, integreer deze om $x(t)$ te vinden. U houdt een integratieconstante over; kies deze zodanig dat geldt dat het elektron een positie $x = 0$ heeft op tijdstip $t = 0$.

(b) Laat zien dat de elektronen, ten opzichte van het apparaat, niet sneller kunnen gaan dan het licht. (Opmerking: via opgave 4b, volgt hieruit dat de elektronen niet sneller kunnen gaan dan het licht ten opzichte van *elke* waarnemer.)

(c) De elektronen versnellen door de aanwezigheid van het elektrisch veld $\mathcal{E}$, en winnen daardoor aan energie, zoals gezien vanuit het apparaat. Schrijf de uitdrukking op voor deze energie als functie van de tijd t . Schrijf ook de energie op gezien vanuit het elektron.

(d) De lengte van de versneller is twee mijl. Gebruik uw antwoorden uit (a) en (c) om te bepalen hoe groot het elektrisch veld moet zijn opdat de elektronen een energie (ten opzichte van het apparaat) van $E = 40$ GeV hebben wanneer zij aan de andere kant van de versneller uitkomen (opmerking: de wetten van de elektrodynamica dicteren dat de elektronen een beetje energie verliezen ten gevolge van hun versnelling; dit effect mag u verwaarlozen).

(e) Welke snelheid, ten opzichte van het apparaat, hebben de elektronen, wanneer zij de versneller uitkomen?

Opgave 4: In het college is de regel voor het optellen van snelheden afgeleid: wanneer twee waarnemers in lorentzstelsels bewegen ten opzichte van elkaar met snelheid v in de x -richting en beiden kijken naar de snelheid van een voorbijvliegend deeltje, dan gelden de volgende relaties tussen de snelheden $\vec{u}$ en $\vec{u}'$ van het deeltje, zoals gemeten door de twee waarnemers:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x + v}{1 + \frac{u_x v}{c^2}}, \\ u'_y &= \frac{1}{\gamma} \frac{u_y}{1 + \frac{v u_x}{c^2}}, \\ u'_z &= \frac{1}{\gamma} \frac{u_z}{1 + \frac{v u_x}{c^2}}, \end{aligned}$$

waarin

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

(a) Bewijs deze formules met behulp van de Lorentztransformaties.

(b) Laat zien dat als een van de twee waarnemers (zeg: de waarnemer die we aanduiden zonder accentje) het deeltje ziet bewegen met een snelheid $\vec{u}$ lager dan de lichtsnelheid c , elke andere waarnemer (met accentje) ook een snelheid $\vec{u}'$ zal meten kleiner dan c . Neem hierbij niet zondermeer aan dat het deeltje in x -richting beweegt.

(c) Dezelfde opgave als (b), maar deze keer voor snelheden $\vec{u}$ groter dan c , oftewel: laat zien dat als voor een waarnemer geldt $\vec{u} > c$, dan voor elke andere waarnemer eveneens geldt $\vec{u}' > 0$.