

Gravitatie en kosmologie

maandag 1 oktober 2012

OPGAVEN WEEK 5

Opgave 1: De geometrie van de lege ruimte buiten een sferisch symmetrisch object met massa M , zoals een ster of zwart gat, wordt gegeven door de Schwarzschild metrie. Voor coördinaten $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$ wordt het lijnelement in de Schwarzschild metrie gegeven door

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1)$$

Hierbij gebruiken we zogenaamde geometrische eenheden met $c = G = 1$.

(a) Beschouw de functie

$$f(x) = (5t^2 - 2r^2)/(2M)^2, \quad (2)$$

met t en r de Schwarzschild coördinaten. Bepaal de contravariante componenten $(\nabla f)^\alpha$ van de gradiënt van f .

(b) We beschouwen de basisvectoren $\{\vec{e}_\alpha\}$ voor een vrijvallende waarnemer. Er geldt

$$(\vec{e}_0)^\alpha = ((1 - 2M/r)^{-1}, -(2M/r)^{1/2}, 0, 0), \quad (3)$$

$$(\vec{e}_1)^\alpha = (-(2M/r)^{1/2}(1 - 2M/r)^{-1}, 1, 0, 0), \quad (4)$$

$$(\vec{e}_2)^\alpha = (0, 0, 1/r, 0), \quad (5)$$

$$(\vec{e}_3)^\alpha = (0, 0, 0, 1/(r \sin \theta)). \quad (6)$$

Laat expliciet zien dat deze vectoren een orthonormale set vormen.

(c) Bepaal de covariante componenten van elk van deze basisvectoren.

(d) Bepaal de contravariante componenten van de basisvectoren $\vec{e}^\alpha$ die dual is aan de gegeven set basisvectoren.

(e) Beschouw de vector $\vec{a}$ met contravariante componenten

$$\vec{a} = (4, 3, 0, 0) \quad (7)$$

op punt $(0, 3M, 0, 0)$. Bepaal de componenten a^α en a_α van deze vector in de gegeven orthonormale basis.

Opgave 2: Een intelligente mier beweegt zich over een vlakke plaat gemaakt van invar (daarvan is de uitzettingscoëfficiënt gelijk aan nul), die is voorzien van een Cartesisch coördinatensysteem $\{x^1, x^2\}$. De plaat heeft niet overal dezelfde temperatuur: de temperatuur varieert als functie van de afstand r tot de oorsprong. Dit heeft tot gevolg dat de meetlat waarmee de mier afstanden meet krimpt en uitzet. De mier heeft overigens geen idee van temperatuur.

Opgave a) Laat zien dat de mier de volgende covariante metrie zal vinden voor het Cartesische coördinatensysteem $\{x^1, x^2\}$,

$$g_{11}(x) = g_{22}(x) = f(r), \quad g_{12}(x) = g_{21}(x) = 0, \quad r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}. \quad (8)$$

Laat ook zien dat $f(r)$ kleiner is naarmate de temperatuur van de plaat hoger is.

Opgave b) Omdat de mier intelligent is, gaat hij liever over op poolcoördinaten $\{\xi^1, \xi^2\}$,

$$x^1 = \xi^1 \sin \xi^2, \quad x^2 = \xi^1 \cos \xi^2. \quad (9)$$

Laat zien dat in termen van deze coördinaten de metrie gegeven wordt door

$$g_{11}(\xi) = f(\xi^1), \quad g_{22}(\xi) = (\xi^1)^2 f(\xi^1), \quad g_{12}(\xi) = g_{21}(\xi) = 0. \quad (10)$$

In het vervolg gebruiken zowel de mier als wij deze coördinaten.

Opgave c) Geef de contravariante metrie.