

Gravitatie en kosmologie

maandag 14 november 2011

OPGAVEN WEEK 10

Opgave 1: In deze opgave wordt een ruimteschip beschouwd dat in een cirkelbaan rond een zwart gat valt. Rond een zwart gat geldt (in t, r, θ, ϕ coördinaten) de Schwarzschild-metrik, gegeven door

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{2MG}{rc^2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{2MG}{rc^2})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

We nemen aan dat het ruimteschip alle motoren heeft uitgezet, en daarom beweegt onder louter de zwaartekracht. Onder deze voorwaarde wordt de beweging van het schip gegeven door de geodeet-vergelijkingen

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

Opgave a) Gebruik de metrik en zijn inverse om alle niet-nul connecties te berekenen. Bespaar u hierbij rekenwerk door gebruik te maken van de diagonaliteit van de metrik en zijn inverse.

Opgave b) Laat zien dat de vier geodeet-vergelijkingen in het geval van een circulaire beweging in het $\theta = \pi/2$ -vlak reduceren tot de volgende vergelijkingen,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\tau^2} &= 0 \\ \frac{GM}{R^3} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 &= \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \\ 0 &= 0 \\ \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} &= 0 \end{aligned}$$

waarin R de straal is van de cirkelbaan.

De eerste van deze vergelijkingen laat zien dat, in een cirkelbaan, $\frac{dt}{d\tau}$ constant is, en de vierde vergelijking laat zien dat $\frac{d\phi}{d\tau}$ constant is. In de literatuur worden deze constanten respectievelijk als volgt geschreven

$$\frac{e}{1 - \frac{2MG}{Rc^2}}, \quad \frac{lc^2}{R^2}.$$

Hierin zijn e en l twee dimensieloze constanten, die we nu zullen gaan bepalen. Zij zijn aan elkaar gerelateerd via de tweede van uw geodeetvergelijkingen, gevonden in opgave b). Er is echter nog een relatie tussen de twee constanten.

Opgave c) Voor elke beweging $x^\mu(\tau)$ geldt de normalisatie $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2$, waarin $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$. Gebruik dit feit om een tweede relatie af te leiden tussen de constanten e en l . Los vervolgens de twee relaties op, om unieke (dit wil zeggen: louter in termen van R en M) uitdrukkingen te vinden voor e en l .

Opgave d) Substitueer uw waarden voor e en l in in de eerste en vierde geodeetvergelijking, en integreer dan elk van deze om de functies $t(\tau)$ en $\phi(\tau)$ te vinden.

Opgave e) Bereken hoeveel tijd t het kost voor het ruimteschip om een enkele omloop rond het zwarte gat te maken, en laat zien dat dit in overeenstemming is met de Derde Wet van Kepler.

De tijd-coördinaat t is niet de tijd die er gemeten wordt in het ruimteschip zelf, maar de tijd die gemeten wordt door een stationaire waarnemer op $r \rightarrow \infty$. In het schip zelf meet men de tijd τ .

Opgave f) Reken uit hoelang een omloop duurt voor de reizigers in het ruimteschip. Is dit meer of minder tijd dan een omloop duurt gezien door de waarnemer op $r \rightarrow \infty$?