

OPGAVEN WEEK 10

Opgave 1: Deze opgave is het vervolg van opgave 1 van vorige week: stel voor dat we op het oppervlak van een bol leven. We introduceren de gebruikelijke sferische coördinaten (r, θ, ϕ) en laten $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi)$ de gebruikelijke set orthonormale sferische basisvectoren zijn. Het lijnelement in sferische coördinaten wordt dan gegeven door

$$d\vec{s} = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \hat{e}_\phi. \quad (1)$$

We beperken ons nu tot het oppervlak van de bol en leggen de conditie $r = \text{constant}$ op. We kiezen de coördinaten $(x^1, x^2) = (\theta, \phi)$ op het boloppervlak. Het lijnelement op het oppervlak van de bol kan in termen van de *natuurlijke basisvectoren* geschreven worden als

$$d\vec{s} = d\theta \vec{e}_\theta + d\phi \vec{e}_\phi, \quad \text{met} \quad \vec{e}_\theta = r \hat{e}_\theta, \quad \vec{e}_\phi = r \sin \theta \hat{e}_\phi. \quad (2)$$

Met deze definitie wordt het kwadratische lijnelement gegeven door

$$ds^2 = (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\phi)^2. \quad (3)$$

(a) Hoeveel onafhankelijke componenten heeft de Riemann-tensor? Gebruik hierbij de symmetrie-eigenschappen van dit object.

(b) Bereken de componenten van de Riemann-tensor.

(c) Bereken de componenten van de Ricci-tensor.

(d) Bereken de scalaire kromming (Ricci-kromming).

(e) Bereken de componenten van de Einstein-tensor op het oppervlak van de bol.

Opgave 2: In deze opgave beschouwen we *behouden* grootheden. De geodetenvergelijking is $\nabla_{\vec{U}} \vec{U} = 0$ en omdat ook τ/m een goede parameter langs een geodeet is, kunnen we deze vergelijking ook schrijven als

$$\nabla_{\vec{p}} \vec{p} = 0 \rightarrow p^\alpha p_{\beta;\alpha} = 0 \rightarrow p^\alpha p_{\beta,\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma p^\alpha p_\gamma = 0 \rightarrow m \frac{dp_\beta}{d\tau} = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma p^\alpha p_\gamma. \quad (4)$$

De term rechts van het laatste gelijkteken is relatief eenvoudig, er geldt

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma p^\alpha p_\gamma &= \frac{1}{2} g^{\gamma\nu} (g_{\nu\beta,\alpha} + g_{\nu\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\nu}) p^\alpha p_\gamma \\ &= \frac{1}{2} (g_{\nu\beta,\alpha} + g_{\nu\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\nu}) g^{\gamma\nu} p_\gamma p^\alpha \\ &= \frac{1}{2} (g_{\nu\beta,\alpha} + g_{\nu\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\nu}) p^\nu p^\alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

Het product $p^\nu p^\alpha$ is symmetrisch in ν en α , terwijl de eerste en derde term binnen haakjes samen antisymmetrisch zijn in ν en α . Deze moeten daarom tegen elkaar wegvallen, waardoor alleen de middelste term overblijft,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma p^\alpha p_\gamma = \frac{1}{2} g_{\nu\alpha,\beta} p^\nu p^\alpha. \quad (6)$$

Een volledig algemene uitdrukking voor een geodeet is dus ook

$$m \frac{dp_\beta}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{\nu\alpha,\beta} p^\nu p^\alpha. \quad (7)$$

Dit levert het belangrijke resultaat: *als alle componenten van $g_{\alpha\nu}$ onafhankelijk zijn van x^β voor een bepaalde index β , dan is p_β constant langs de baan van het deeltje.*

Beschouw de volgende metrieken gegeven in termen van het lijnelement:

1. $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$;
2. $ds^2 = -(1 - 2M/r)dt^2 + (1 - 2M/r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$, met M een constante;
3. $ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\rho^2}dt^2 - 2a\frac{2Mr \sin^2\theta}{\rho^2}dtd\phi + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2\theta}{\rho^2} \sin^2\theta d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2$, met M en a constanten. Verder hebben we de verkorte notatie $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta$ ingevoerd;
4. $ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]$, met k een constante en $R(t)$ een willekeurige functie van t .

De eerste vergelijking wordt bekend verondersteld. De andere vergelijkingen komen we later nog tegen. Hun namen zijn achtereenvolgens de Schwarzschild, Kerr, en Robertson-Walker metrieken.

(a) Geef voor elke metriek zoveel mogelijk behouden grootheden p_α van de vierimuls van een vrijvallend deeltje.

(b) Schrijf de eerste metriek in de vorm

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (8)$$

Maak hiervan gebruik en beargumenteer dat ook de Schwarzschild en de Robertson-Walker (RW) metriek sferisch symmetrisch zijn. Neemt hierdoor het aantal behouden grootheden p_α toe?

(c) We kunnen laten zien dat voor bovenstaande metriek en voor de Schwarzschild, Kerr en RW metrieken, een geodeet die begint met $\theta = \pi/2$ en $p^\theta = 0$, dus een die tangenciaal aan het equatoriale vlak begint, altijd geldt dat $\theta = \pi/2$ en $p^\theta = 0$. Hint: gebruik de vergelijking $\vec{p} \cdot \vec{p} = m^2$ om p^r te vinden uitgedrukt in m , andere behouden grootheden, en bekende functies van positie.

(d) Voor de RW metriek geldt dat sferische symmetrie impliceert dat als een geodeet begint met $p^\theta = p^\phi = 0$, deze dan gelijk aan nul blijven. Laat zien dat de geodetenvergelijking in het geval dat $k = 0$, dan p^r een behouden grootheid is.

Opgave 3: In deze opgave werken we het onderwerp *behouden grootheden* nog wat verder uit.

(a) Laat zien dat als een vectorveld ξ^α voldoet aan de *Killing* vergelijking

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0, \quad (9)$$

dan langs een geodeet geldt dat $p^\alpha \xi_\alpha = \text{const.}$ Dit is een coördinaten-onafhankelijke wijze om de behoudswet die we uit vergelijking (7) hebben afgeleid, te karakteriseren. We hoeven enkel te weten of een metriek Killing velden toelaat.

(b) Vind tien Killing velden van de Minkowskimetriek.

(c) Laat zien dat als $\vec{\xi}$ en $\vec{\eta}$ Killing velden zijn, dan is $\alpha\vec{\xi} + \beta\vec{\eta}$ ook een Killing veld voor constante α en β .

(d) Toon aan dat Lorentztransformaties van de velden in (b) de lineaire combinaties genoemd in opgave (c) produceren.

(e) Gebruik de resultaten van (a) om de Killing vectoren van de metrieken in opgave 3 te bepalen.

Opgave 4: Bewijs vergelijking (436) in het dictaat,

$$\nabla_{\vec{U}} \nabla_{\vec{U}} \vec{\xi} = -\mathbf{R}(_, \vec{U}, \vec{\xi}, \vec{U}), \quad (10)$$

met $\mathbf{R}$ de krommingstensor van Riemann en $\vec{U}$ de viersnelheid, door uit te gaan van de definitie van de Riemannntensor gegeven in vergelijking (415),

$$A_{\alpha;\mu\nu} - A_{\alpha;\nu\mu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]A_\alpha \equiv R^\beta_{\alpha\mu\nu}A_\beta, \quad (11)$$

met A_α de componenten van een willekeurige 1-vorm. (Dit is een uitdagende opgave.)