

Gravitatie en kosmologie

maandag 7 oktober 2013

OPGAVEN WEEK 6

Opgave 1: We bespreken kort Rindler space en de connectie met de Tweelingparadox. We kijken naar een uniform versnelde waarnemer (we beschouwen de x -richting) die met zijn ruimteschip een wereldlijn volgt die gegeven wordt door

$$t(\sigma) = \frac{1}{g} \sinh \sigma \quad \text{en} \quad x(\sigma) = \frac{1}{g} (\cosh \sigma - 1), \quad (1)$$

met g een constante.

(a) Bereken de eigentijd τ van de astronaut als functie van σ , en gebruik $\tau = 0$ voor $\sigma = 0$.

Antwoord: De eigentijd kan gevonden worden door integratie van het lijnelement langs de wereldlijn.

$$\begin{aligned} \tau &= \int \sqrt{-ds^2} = \int \sqrt{dt^2 - dx^2} \\ &= \int \sqrt{\left(\frac{1}{g} \cosh(g\sigma) d\sigma\right)^2 - \left(\frac{1}{g} \sinh(g\sigma) d\sigma\right)^2} = \frac{1}{g} \int d\sigma = \frac{1}{g} \sigma. \end{aligned} \quad (2)$$

(b) Bereken de viersnelheid $\mathbf{u}$ van de astronaut als functie van τ .

Antwoord: De viersnelheid $\mathbf{u}$ heeft componenten

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (3)$$

In termen van de eigentijd geldt

$$t(\tau) = \frac{1}{g} \sinh g\tau \quad \text{en} \quad x(\tau) = \frac{1}{g} (\cosh g\tau - 1) \quad (4)$$

en dus

$$u^0 = \frac{1}{g} \frac{d}{d\tau} \sinh g\tau = \cosh(g\tau) \quad \text{en} \quad u^1 = \frac{1}{g} \frac{d}{d\tau} (\cosh g\tau - 1) = \sinh(g\tau). \quad (5)$$

(c) Bereken de vierversnelling $\mathbf{a}$ van de astronaut als een functie van τ .

Antwoord: De vierversnelling $\mathbf{a}$ heeft componenten

$$a^\alpha = \frac{du^\alpha}{d\tau} \quad (6)$$

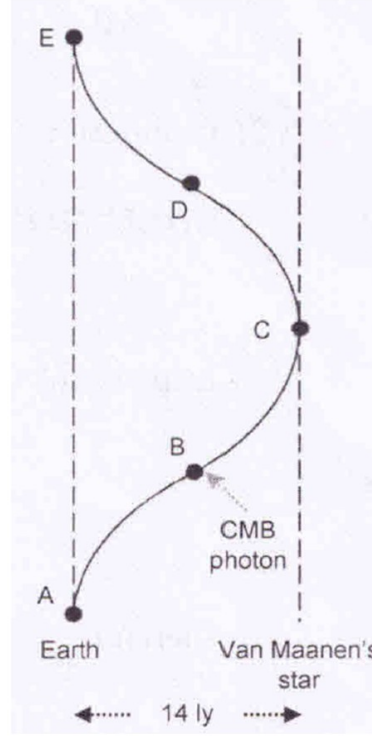
en dus

$$a^0 = \frac{d}{d\tau} \cosh(g\tau) = g \sinh g\tau \quad \text{en} \quad a^1 = \frac{d}{d\tau} \sinh(g\tau) = g \cosh(g\tau). \quad (7)$$

(d) Toon aan dat de grootte $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}$ van de vierversnelling constant is.

Antwoord: Er geldt

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2} &= \sqrt{\eta_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta} = \sqrt{-(a^0)^2 + (a^1)^2} \\ &= g \sqrt{(-\sinh^2(g\tau) + \cosh^2(g\tau))} = g. \end{aligned} \quad (8)$$



Figuur 1: Ruimtetijddiagram voor de schematische weergave van de Tweelingparadox.

Stel dat een astronaut een reis maakt in een raket van de Aarde naar een ster op een afstand van 14 lichtjaar. De reis omvat 4 phases, zoals aangegeven in Fig. 1. Elke fase wordt uitgevoerd met een constante versnelling van $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Voor de eerste helft van de heenreis (van A tot B) versnelt de astronaut in de $+x$ -richting. Aangekomen bij B draait de astronaut de motor 180° om en versnelt in de $-x$ -richting, terwijl hij reist van B naar C en van C naar D. Bij D aangekomen draait hij de motor weer terug in de originele stand en versnelt in de $+x$ -richting tot dat hij in rust aankomt op Aarde op E (neem voor het gemak aan dat zowel de Aarde als de betreffende ster in rust zijn in een gemeenschappelijk inertiaalsysteem).

(e) Wat is de eigentijd (in jaren) die voor de astronaut verstrijkt op zijn retour-reis van de Aarde naar de ster en terug?

Antwoord: Vanwege symmetrie zal de eigentijd τ_E die verstrijkt gedurende de reis $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ vier keer de tijd zijn die verstrijkt voor het segment $A \rightarrow B$, dus

$$\tau_E = 4\tau_B, \quad (9)$$

Geef de afstand tot de ster aan met d . Omdat B halverwege de ster is in het inertiaalsysteem van de Aarde, wordt τ_B gegeven door

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{g} (\cosh(g\tau_B) - 1). \quad (10)$$

Er geldt dus

$$\tau_B = \frac{1}{g} \cosh^{-1} \left(\frac{1}{2}gd + 1 \right) = 2.77 \text{ jaar, en } \tau_E = 4\tau_B = 11.1 \text{ jaar,} \quad (11)$$

waarbij we gebruiken dat

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2 = 9.8 \text{ m/s}^2 \frac{3.16 \times 10^7 \text{ s/jaar}}{3.0 \times 10^8 \text{ m/s}} = 1.0/\text{jaar}. \quad (12)$$

(e) Wat is de eigentijd (in jaren) die voor een waarnemer op Aarde verstrijkt?

Antwoord: De eigentijd (in jaren) die verstrijkt voor een waarnemer die in rust is ten opzichte van de Aarde wordt gegeven door de coördinatentijd t . Vanwege symmetrie is de coördinatentijd t_E die verstrijkt gedurende de reis $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ vier keer de tijd die verstrijkt voor het segment $A \rightarrow B$. Er geldt

$$t_E = 4t_B = \frac{4}{g} \sinh(g\tau_B) = 4.0 \text{ jaar} \sinh(2.77) = 31.8 \text{ jaar}. \quad (13)$$

(e) Bereken de relativistische factor γ voor de astronaut ten opzichte van het inertiaalsysteem verbonden met de Aarde op punt B . Hoe kan dit de astronaut helpen om uit te leggen dat hij een rondreis van 28 lichtjaar heeft gemaakt in minder dan 28 jaren van zijn eigentijd?

Antwoord: De relativistische γ factor is de nulde component van de viersnelheid.

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau} = u^0 = \cosh(g\tau). \quad (14)$$

De γ factor op punt B is

$$\gamma(\tau_B) = \cosh(g\tau_B) = \cosh(2.77) = 8.0. \quad (15)$$

Dit demonstreert dat aangekomen op punt B (en ook op D) de astronaut de afstand van de Aarde tot de ster gecontraheerd ziet tot $d/\gamma = 14 \text{ lichtjaar}/8.0 = 1.75 \text{ lichtjaar}$. Omdat de ster hem nadert met bijna de lichtsnelheid, duurt het veel minder dan 14 jaar om de heen- en terugreis te maken.

Opgave 2: Via het formalisme van Lagrange kunnen we aantonen dat het kortste pad tussen twee punten in een euclidische ruimte, een rechte lijn is; dit is op het college voorgerekend. We vragen ons in deze opgave af of iets analoogs geldt in een minkowskiruimtetijd. Oftewel: is het kortste pad tussen twee *puntgebeurtenissen* ook een rechte lijn?

(a) Laat zien dat de afstand tussen twee puntgebeurtenissen wordt gegeven door de volgende integraal:

$$S = \int \left(- \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx. \quad (16)$$

Antwoord: Het lijnelement ds^2 kunnen we opvatten als de afstand (in het kwadraat) tussen twee puntgebeurtenissen in de ruimtetijd, maar strikt genomen alleen wanneer deze puntgebeurtenissen heel dicht bij elkaar liggen. Om de afstand S te berekenen als de puntgebeurtenissen niet

heel dicht bij elkaar liggen, moet ds geïntegreerd worden:

$$\begin{aligned}
 S &= \int ds \\
 &= \int \left(\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \right)^{1/2} \\
 &= \int \left(-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \right)^{1/2} \\
 &= \int \left(-c^2 \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right)^{1/2} dx
 \end{aligned}$$

In de laatste stap is gekozen om dx^2 uit de integrand te halen; een van de andere dx^μ was uiteraard ook correct geweest.

(b) Kies een lorentzstelsel waarin de twee gebeurtenissen plaatsvinden op hetzelfde tijdstip. Gebruik daarna de Euler-Lagrange vergelijkingen om aan te tonen dat S minimaal is wanneer het pad tussen de twee gebeurtenissen een rechte lijn is.

Antwoord: Voor de waarnemer voor wie de puntgebeurtenissen op hetzelfde moment plaatsvinden geldt $dt = 0$, en is de eerste term van de integrand gelijk aan nul. Er blijft over:

$$S = \int \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right)^{1/2} dx$$

Het minimaliseren van deze uitdrukking krijgen we voor elkaar door de integrand $L = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right)^{1/2}$ in te vullen in de Euler-Lagrange vergelijkingen

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\alpha}{dx}} \right)$$

Dit zijn vier vergelijkingen: voor elk van de x^α levert dit een differentiaalvergelijking op. Die voor $x^\alpha = t$ is makkelijk: omdat onze L niet van t of $\frac{dt}{dx}$ afhangt, zullen beide kanten nul opleveren. Hetzelfde geldt voor $x^\alpha = x$. Er blijven dan ook twee vergelijkingen over: een voor $x^\alpha = y$, en een keer voor $x^\alpha = z$. Die voor y ziet er dan als volgt uit:

$$0 = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{L} \frac{dy}{dx} \right)$$

Dit leert ons dat de uitdrukking tussen haakjes een constante is met betrekking tot x :

$$\left(\frac{1}{L} \frac{dy}{dx} \right) = A = \text{constant}$$

Dezelfde analyse en conclusie volgt voor $x^\alpha = z$:

$$\left(\frac{1}{L} \frac{dz}{dx} \right) = B = \text{constant}$$

Deze twee vergelijkingen zijn aan elkaar gekoppeld: de functie L bevat zowel $\frac{dy}{dx}$ als $\frac{dz}{dx}$, en dit maakt dat de oplossing voor $y(x)$ van $z(x)$ afhangt en vice versa. Dit maakt het gelijktijdig

oplossen van de twee vergelijkingen wat lastig, maar we kunnen dit probleem omzeilen door de twee vergelijkingen op elkaar delen. Op deze manier valt de functie L er uit, en wordt gevonden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A}{B} \frac{dz}{dx}$$

Hier staat dat de afgeleides van de functies $z(x)$ en $y(x)$ slechts een constante A/B schelen met elkaar. Dit verband kunnen we gebruiken om de twee eerdere vergelijkingen te ontkoppelen. Vul hiertoe dit verband in, en gevonden wordt voor (zeg) $\frac{dy}{dx}$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= A \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= A \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{B}{A} \right)^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Dit is een vergelijking voor de afgeleide $\frac{dy}{dx}$, en kan eenvoudig worden herschreven tot

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{A}{\sqrt{1 - A^2 - B^2}} = \text{constant}$$

Deze vergelijking is makkelijk op te lossen: hij zegt dat de functie y en x een lineair verband kennen: zo is gevolgd dat $y(x)$ een rechte lijn is. Op dezelfde manier kan de analyse gedaan worden voor z om te vinden dat ook z en x een lineair verband kennen, en dus dat $z(x)$ een rechte lijn is. De conclusie is dan ook dat het pad $\vec{x} = (x, y(x), z(x))$ tussen de twee gebeurtenissen een rechte lijn is, en dit is wat moest worden aangetoond.

(c) De conclusie uit opgave (b) is dat voor deze *specifieke* waarnemer inderdaad geldt dat de afstand tussen twee puntgebeurtenissen een rechte lijn is. Beargumenteer, zonder opnieuw de Euler-Lagrange vergelijkingen op te lossen, dat dezelfde conclusie ook moet gelden voor *alle waarnemers* in minkowksistelsels.

Antwoord: Gekeken naar het lijnelement, is er geen wezenlijk verschil tussen de term $c^2 dt^2$ en de termen dx^2 , dy^2 , dz^2 : zij schelen onderling een minteken en een paar factoren c^2 , maar dit verandert alleen de waarde van de constanten in de uitwerking van (b); de conclusie dat alle verbanden rechte lijnen zijn, blijft dan ook ongewijzigd.

Opgave 3: In Stanford, Californie, staat een lineaire deeltjesversneller genaamd SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) Two-mile Accelerator. Dit is een instrument van ongeveer 2 mijl lang waarin een constant elektrisch veld $\mathcal{E}$ is aangebracht, dat sterk genoeg is om elektronen vanuit rust te doen versnellen tot zij een energie E hebben van 40 GeV (zoals gemeten in het ruststelsel van het apparaat). We nemen aan dat het ruimtelijk deel van de relativistische impuls $\vec{p}$ voldoet aan de volgende bewegingsvergelijking:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{\mathcal{E}}, \tag{17}$$

waarin t de tijd is zoals gemeten in het ruststelsel van de pijp, en e de elektrische lading van het elektron (hierdoor is $e\vec{\mathcal{E}}$ niets anders dan de kracht $\vec{F}$ op het elektron).

(a) Neem aan dat het elektron start vanuit rust aan een kant van het apparaat, en dat het elektrisch veld langs de x -as is. Gebruik de bewegingsvergelijking om uit te rekenen wat de positie x is van het elektron als functie van de tijd t . Hint: bereken eerst $v(t)$; wanneer deze

gevonden is, integreer deze om $x(t)$ te vinden. U houdt een integratieconstante over; kies deze zodanig dat geldt dat het elektron een positie $x = 0$ heeft op tijdstip $t = 0$.

Antwoord: De snelheid $v(t)$ ten opzichte van de pijp kunnen we uitrekenen met behulp van de gegeven bewegingsvergelijking. De relativistische impuls $\vec{p}$ is gelijk aan $\gamma m v$ (waarbij γ geen constante is, omdat de snelheid van het deeltje toeneemt in de tijd), en de bewegingsvergelijking wordt dan

$$\gamma(v)mv = e\mathcal{E}t$$

De linkerkant van de vergelijking bevat v , en we kunnen deze uit de vergelijking oplossen. Wat simpele algebra levert op

$$v = \pm \frac{e\mathcal{E}ct}{\sqrt{m^2c^2 + e^2\mathcal{E}^2t^2}}$$

(plusmin-teken komt voort uit het nemen van een wortel; het definieert hier niets anders dan de richting waarin het deeltje beweegt. We kiezen vanaf nu de plus-richting). Nu de functie $v(t)$ is gevonden, kan deze worden geïntegreerd om de positie $x(t)$ te vinden. Dit is niet zo moeilijk als het lijkt: de afgeleide van een wortel is 1 gedeeld door die wortel, en zo kunnen we al vermoeden dat de integraal van deze uitdrukking ongeveer de wortel van de noemer zal opleveren. Er geldt dan ook in het algemeen

$$\int \frac{\theta}{\sqrt{A + \theta^2}} d\theta = \sqrt{A + \theta^2} + B$$

waarin A en B twee willekeurige constanten zijn. Als we dit gebruiken om de functie $v(t)$ te integreren, vinden we voor de positie $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{e\mathcal{E}} \sqrt{m^2c^4 + e^2\mathcal{E}^2c^2t^2} + B$$

De constante B kiezen we zo, dat op tijdstip $t = 0$ het elektron op positie $x = 0$ is. Vul hiertoe de waarde $t = 0$ in, eis dat $x = 0$, en gevonden wordt dat dit alleen waar kan zijn als de constante de volgende waarde heeft:

$$B = -\frac{mc^2}{e\mathcal{E}}$$

(b) Laat zien dat de elektronen, ten opzichte van het apparaat, niet sneller kunnen gaan dan het licht. (Opmerking: via opgave 4b, volgt hieruit dat de elektronen niet sneller kunnen gaan dan het licht ten opzichte van *elke* waarnemer.)

Antwoord: Het elektrisch veld geeft het elektron een (constante) versnelling, en dus zou het elektron zijn maximale snelheid bereiken na oneindig veel tijd. Als we de limiet nemen $t \rightarrow \infty$ in de uitdrukking voor de snelheid $v(t)$, vinden we een maximale snelheid van c :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e\mathcal{E}ct}{\sqrt{m^2c^2 + e^2\mathcal{E}^2t^2}} = c.$$

Sneller dan het licht is blijkbaar niet mogelijk, en de lichtsnelheid zelf wordt pas bereikt na oneindig lang versnellen.

(c) De elektronen versnellen door de aanwezigheid van het elektrisch veld $\mathcal{E}$, en winnen daardoor aan energie, zoals gezien vanuit het apparaat. Schrijf de uitdrukking op voor deze energie als functie van de tijd t . Schrijf ook de energie op gezien vanuit het elektron.

Antwoord: De relativistische energie van een deeltje wordt gegeven door $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$, waar $\vec{p}$ het ruimtelijke deel is van de relativistische impuls. Een uitdrukking voor de laatste, zoals gemeten in het stelsel van de pijp, kunnen we direct vinden uit de gegeven bewegingsvergelijking: $\frac{d\vec{p}}{dt} = e\mathcal{E}$ geeft $\vec{p}(t) = e\mathcal{E}t$ (merk op dat dit geldt omdat het elektrisch veld constant is). De relativistische energie is dan

$$E = \sqrt{e^2 \mathcal{E}^2 c^2 t^2 + m^2 c^4}$$

Deze energie neemt toe in de tijd; dit is, uiteraard, omdat het elektrisch veld het elektron een steeds hogere snelheid geeft; hierdoor neemt de kinetische energie van het elektron toe. De energie gezien vanuit het elektron is simpelweg $E = mc^2$, omdat het elektron zich altijd in zijn eigen ruststelsel bevindt. Merk op dat het niet toegestaan is om de Lorentz-transformaties tussen energie en impuls te gebruiken om deze energie te vinden omdat het elektron zich niet in een inertiaalstelsel bevindt (het versnelt!): de Lorentz-transformaties gelden voor coördinaattransformaties tussen inertiaalstelsels!

(d) De lengte van de versneller is twee mijl. Gebruik uw antwoorden uit (a) en (c) om te bepalen hoe groot het elektrisch veld moet zijn opdat de elektronen een energie (ten opzichte van het apparaat) van $E = 40$ GeV hebben wanneer zij aan de andere kant van de versneller uitkomen (opmerking: de wetten van de elektrodynamica dicteren dat de elektronen een beetje energie verliezen ten gevolge van hun versnelling; dit effect mag u verwaarlozen).

Antwoord: Wanneer we de gevonden uitdrukkingen bekijken voor de positie $x(t)$ en de energie $E(t)$ van het elektron gezien vanuit de pijp, is te zien dat zij beide dezelfde wortel bevatten. Dit is handig, want dat betekent dat we x en E in elkaar kunnen uitdrukken:

$$x = \frac{1}{e\mathcal{E}}E - \frac{mc^2}{e\mathcal{E}}$$

Het elektrisch veld $\mathcal{E}$ benodigd om te zorgen dat het elektron een energie E heeft op positie x , wordt dan gegeven door

$$\mathcal{E} = \frac{1}{ex}(E - mc^2) \approx \frac{E}{ex}$$

(waar in de laatste stap de rustenergie mc^2 van het elektron is verwaarloosd: deze is namelijk ongeveer 0.5 MeV, wat veel kleiner is dan de energie E). We vullen de volgende getallen in: $E = 40$ GeV = $6.4 \cdot 10^{-9}$ J, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $x = 2$ mijl = 3 km, en zo wordt een elektrisch veld gevonden van $\mathcal{E} = 1.3 \cdot 10^7$ N/C.

(e) Welke snelheid, ten opzichte van het apparaat, hebben de elektronen, wanneer zij de versneller uitkomen?

Antwoord: Het verband tussen snelheid en energie wordt gegeven door de uitdrukking $E = \gamma mc^2$. Deze kan worden omgeschreven tot

$$v = c \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}}. \quad (18)$$

Invullen van de getallen $E = 40$ GeV (energie van het elektron op het eind van de pijp) en $mc^2 = 0.5$ MeV geeft een snelheid van nagenoeg de lichtsnelheid: $v = 0.999999999922c$.

Opgave 4. We beschouwen de consequenties van het bestaan van tachyonen (deeltjes die sneller dan het licht reizen).

Opgave 4a) Beargumenteer dat het bestaan van een type deeltjes die altijd *sneller* dan het licht bewegen, consistent is met Lorentzinvariantie in de zin dat als in één stelsel de snelheid

groter is dan de lichtsnelheid, die groter dan de lichtsnelheid zal zijn in alle stelsels (dergelijke hypothetische deeltjes worden *tachyonen* genoemd).

Antwoord: Tachyonen bewegen langs ruimteachtige paden en het onderscheid tussen ruimteachtig, tijdachtig en nul is Lorentzinvariant.

Opgave 4b) Toon aan dat de raakvector (tangent vector) van een baan van een tachyon ruimtelijk is en geschreven kan worden als $u^\alpha = dx^\alpha/ds$, met s het ruimtelijke interval langs de baan. Toon aan dat $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$.

Antwoord: Stel dat $x^\alpha(\lambda)$ de wereldlijn van een tachyon voorstelt. Verder is $u^\alpha = dx^\alpha/d\lambda = (dx^\alpha/dt)(dt/d\lambda)$. Dan geldt dat

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 \left[-1 + \vec{V}^2 \right]. \quad (19)$$

Dit is groter dan nul als $|\vec{V}| > 1$. Dus, s is een goede parameter en $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$.

Opgave 4c) Bereken de componenten van de viersnelheid $\mathbf{u}$ van een tachyon in termen van de driesnelheid $\vec{V} = d\vec{x}/dt$.

Antwoord: Er geldt

$$\begin{aligned} u^t &\equiv \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\vec{V}^2 - 1}} \\ \vec{u} &= \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{V}}{\sqrt{\vec{V}^2 - 1}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Opgave 4d) Definieer de vierimpuls door $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ en leid een relatie af tussen energie en impuls voor een tachyon.

Antwoord: Als $\mathbf{p} \equiv m\mathbf{u}$, dan geldt dat $\mathbf{p}^2 = m^2 = -E^2 + \vec{p}^2$, zodat

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 - m^2}. \quad (21)$$

Opgave 4e) Toon aan dat er een inertiaalsysteem bestaat waarin de energie van elk tachyon negatief is.

Antwoord: Omdat de vierimpuls ruimteachtig is, is er altijd een referentiesysteem waarin haar t -component negatief is.

$$E' = \gamma(E - vp). \quad (22)$$

Maar als $E > 0$, dan $|E| < |\vec{p}|$ volgens (d), zodat voor voldoende grote v voor de rechterkant $E' < 0$.

Opgave 4f) Laat zien dat wanneer tachyonen wisselwerken met normale deeltjes, een normaal deeltje een tachyon zou kunnen uitzenden waarbij totale energie en drie-impuls behouden blijven.

Antwoord: Beschouw het verval van een deeltje A naar een tachyon T en een ander deeltje B . Dan geldt

$$\mathbf{p}_A = \mathbf{p}_B + \mathbf{p}_T. \quad (23)$$

Beschouw het verval in het rustsysteem van deeltje A . Behoud van impuls leidt tot

$$\vec{p}_B = -\vec{p}_T \equiv \vec{p}. \quad (24)$$

Energiebehoud levert

$$m_A = \sqrt{p^2 + m_B^2} - \sqrt{p^2 - m_T^2}, \quad (25)$$

waar we hebben aangenomen dat het tachyon negatieve energie heeft. Energie is behouden als aan bovenstaande vergelijking voldaan kan worden voor bepaalde p . Voor $p = m_t$, de kleinst mogelijke waarde, wordt de rechterkant gelijk aan $\sqrt{m_T^2 + m_B^2}$, hetgeen groter is dan m_A . Voor $p = \infty$ wordt de rechterkant gelijk aan 0. Dus ergens in dit interval is er een waarde waarvoor het gelijk is aan m_A .

Opgave 4g) Als deeltjes met negatieve energie zouden bestaan, wat zegt dat dan over de stabiliteit van normale materie?

Antwoord: Dat materie kan vervallen door tachyonen uit te stralen. Materie is derhalve niet stabiel in dit geval.