

HOVO Het quantum universum

donderdag 19 februari 2009

OPGAVEN WEEK 3 - Oplossingen

Naam: _____

Opgave 1: Ga uit van vergelijking (53) op bladzijde 34. Maak gebruik van een grove benadering waarbij we de afgeleide $\frac{dP}{dr}$ in een klap schrijven als $\frac{dP}{dr} \approx \frac{P}{R}$ (zie ook blz. 36).

(a) Laat zien dat voor een ster met massa M , straal R , de gemiddelde druk bij benadering gegeven wordt door

$$P \approx \frac{3GM^2}{4\pi R^4}. \quad (1)$$

We gaan uit van vergelijking (53) op bladzijde 34,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_I \rho}{r^2} \rightarrow \frac{P}{R} \approx \frac{GM \rho}{R^2} \rightarrow P = \frac{GM}{R} \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \rightarrow P = \frac{3GM^2}{4\pi R^4}. \quad (2)$$

In de eerste stap hebben we dP vervangen door de benadering $P_{\text{steroppervlak}} - P_{\text{stercentrum}}$ (dat is een negatief getal) en evenzo dr door $R = R_{\text{steroppervlak}} - R_{\text{stercentrum}}$.

(b) Laat zien dat dezelfde relatie leidt tot de benadering $T \sim \frac{M}{R}$ voor de gemiddelde temperatuur van de ster.

We gaan weer uit van vergelijking (53) op bladzijde 34,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_I}{r^2} \rho = -\frac{GM_I}{r^2} \frac{P \mu}{kT} \rightarrow \frac{P}{R} \approx \frac{\mu GM}{R^2} \frac{P}{kT} \rightarrow T = \frac{\mu G}{k} \frac{M}{R}. \quad (3)$$

Merk op dat het symbool $\sim$ staat voor ‘evenredig aan’.

CHECK DEZE OPGAVE!!! ZIE PERKINS ASTROPHYSICS PAGE 334

Opgave 2: (Hint: lastige opgave; overweeg om deze als laatste te doen). In de stad Kamiokande in Japan staat de zogenaamde Kamiokande II detector. Deze detector is ontworpen om proton verval te bestuderen. Met Kamiokande II werd op 23 februari 1987 in slechts 12 seconden een totaal van 12 neutrino interacties geregistreerd. Deze meting viel samen met de explosie van supernova SN1987A die op ongeveer 170.000 lichtjaar van de aarde stond. Reeds lang hiervoor hadden astrofysici berekend dat bij een dergelijke explosie binnen een aantal seconden een energie van ongeveer 10^{46} J zou vrijkomen. Hiervan zou ongeveer 90 % vrijkomen in de vorm van neutrino's, die het heelal in gejaagd zouden worden, terwijl voor het spectaculaire zichtbare vuurwerk en de kinetische energie van de restanten ten hoogste een procent van de energie ter beschikking zou staan.

De Kamiokande II detector is in staat antineutrino's aan te tonen via de reactie

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n \quad (4)$$

aan protonen in normaal water. De protonen die gebonden zijn in zuurstof kunnen hierbij verwaarloosd worden, omdat deze niet wezenlijk tot de totale telsnelheid bijdragen. De energie en de richting van de positronen kan met de detector bepaald worden (uit de richting en de intensiteit van de door de positronen opgewekte Čerenkovstraling). De actieve massa van de detector is 2100 ton water (1 ton $\equiv$ 1000 kg). De theoretische werkzame doorsnede voor deze reactie is energieafhankelijk en kan bij de hier optredende energieën uit de volgende relatie afgeleid worden

$$\sigma = 10^{-45} \text{ m}^2 \cdot \left(\frac{E \text{ in MeV}}{10 \text{ MeV}} \right)^2, \quad (5)$$

waarbij de energie van de neutrino's E gelijk gesteld kan worden aan de energie van de positronen. De 12 geregistreerde neutrino's hadden in het gewogen gemiddelde een energie $\langle E_\nu \rangle = 12,8$ MeV en $(\langle E_\nu \rangle)^{1/2} = 10,9$ MeV.

(a) Wat is het totale aantal neutrino's dat vrijkwam bij de explosie van de supernova? Ga ervan uit dat de zes neutrino-soorten ν_e , $\bar{\nu}_e$, ν_μ , $\bar{\nu}_\mu$, ν_τ , en $\bar{\nu}_\tau$, waarvan enkel het $\bar{\nu}_e$ met de Kamiokande II detector aangetoond kan worden, met vergelijkbare energieën en in vergelijkbare hoeveelheden geproduceerd werden.

Antwoord: Allereerst rekenen we uit hoeveel actieve protonen aanwezig zijn in de Kamiokande II detector.

$$N_p^{\text{actief}} = (2 \text{ protonen/H}_2\text{O}) \left(\frac{2.1 \times 10^9 \text{ gram H}_2\text{O}}{M_{\text{H}_2\text{O}} = 18} \right) \times N_A = 1.4 \times 10^{32}. \quad (6)$$

De werkzame doorsnede per actief proton bedraagt

$$\sigma = 10^{-45} \text{ m}^2 \cdot \left(\frac{E}{10 \text{ MeV}} \right)^2 = 10^{-45} \text{ m}^2 \cdot \left(\frac{10.9 \text{ MeV}}{10 \text{ MeV}} \right)^2 = 1.19 \times 10^{-45} \text{ m}^2. \quad (7)$$

Een actief oppervlakte van $N_p \times \sigma$ resulteerde in de detectie van 12 neutrino's. Het totale oppervlakte van de neutrinoschil bedraagt

$$A_{\text{total}} = 4\pi R^2 = 4\pi(170,000 \text{ lichtjaar})^2 = 4\pi(1.61 \times 10^{21} \text{ m})^2 = 3.25 \times 10^{43} \text{ m}^2. \quad (8)$$

In totaal zijn dus

$$N_\nu = (6 \text{ soorten neutrino's}) \times \frac{A_{\text{total}}}{N_p \sigma} = 1.17 \times 10^{57} \quad (9)$$

neutrino's vrijgekomen.

(b) Hoe groot is de totale in de vorm van neutrino's vrijgekomen energie in de explosie van SN1987A? Vergelijk dit met de theoretische voorspelling en vorm een oordeel over de overeenstemming.

Antwoord: De totale vrijgekomen energie in de vorm van neutrino's bedraagt

$$E_\nu = N_\nu \times \langle 12.8 \text{ MeV} \rangle = 1.5 \times 10^{64} \text{ eV} = 2.4 \times 10^{45} \text{ J}. \quad (10)$$

We hebben hier gebruikt dat $1 \text{ eV} \equiv 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$. De overeenstemming is redelijk.

(c) Het eerst gemeten $\bar{\nu}_e$ had een energie van 20,0 MeV. Het laatst gemeten neutrino kwam 12,4 seconde later en had een energie van 8,9 MeV. Welke limiet wordt hiermee op de massa van het neutrino geplaatst? Neem hierbij aan dat de supernova explosie minstens 10 s en hoogstens 20 s geduurd heeft. De benadering $y = (1 - (x/C)^2)^{-1/2} \approx 1 + x^2/2C^2 + \dots$ voor $x \ll C$ kan hier nuttig zijn.

Antwoord: We zoeken een relatie die verband legt tussen de massa en de energie van een neutrino. We gebruiken

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{p}_\nu}{E_\nu} \text{ en } \gamma = \frac{E_\nu}{m_\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (11)$$

waarbij m_ν de massa van het neutrino is. We kunnen schrijven

$$\frac{1}{\beta} = \left[1 - \left(\frac{m_\nu}{E_\nu} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{m_\nu^2}{2E_\nu^2}. \quad (12)$$

Het verschil in aankomsttijden van de neutrino's wordt enerzijds gegeven door de periode van 10 s waarin de supernova explodeerde, en anderzijds door de verschillen in reistijd, $t = d/v$, in het geval dat de neutrino's een massa ongelijk aan nul zouden hebben. Er geldt

$$\begin{aligned} 10 \text{ s} + 12.4 \text{ s} &= \frac{d}{v_2} - \frac{d}{v_1} = \frac{d}{c} \left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1} \right) \\ &= \frac{d}{c} \left(1 + \frac{m_\nu^2}{2E_2^2} - 1 - \frac{m_\nu^2}{2E_1^2} \right) = \frac{dm_\nu^2}{2c} (E_2^{-2} - E_1^{-2}). \end{aligned} \quad (13)$$

We kiezen voor E_1 en E_2 de grootste en kleinste neutrino energieën, en vinden

$$m_\nu^2 = 22.4 \text{ s} \times \frac{2c}{d} \frac{E_1^2 E_2^2}{E_1^2 - E_2^2} = (22.4 \text{ s}) \left(\frac{(2)(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{1.61 \times 10^{21} \text{ m}} \right) (3.94 \times 10^{23}) = (29 \text{ eV})^2. \quad (14)$$

Opgave 3: Er geldt $n = 3$ en we hebben de compacte uitdrukking $y_i = a^r_i x_r$, waarbij we gebruik maken van de Einsteinsommatieconventie.

(a) Schrijf expliciet de vergelijkingen op die worden voorgesteld door de uitdrukking $y_i = a^r_i x_r$.

Antwoord: Stel dat $i = 3$ (per conventie gaan indices als i , j en k over 1, 2 en 3. Stel verder $r = 4$ (hiervoor is geen conventie), dan geldt

$$\begin{aligned} y_1 &= a^1_1 x_1 + a^2_1 x_2 + a^3_1 x_3 + a^4_1 x_4, \\ y_i = a^r_i x_r \rightarrow y_2 &= a^1_2 x_1 + a^2_2 x_2 + a^3_2 x_3 + a^4_2 x_4, \\ y_3 &= a^1_3 x_1 + a^2_3 x_2 + a^3_3 x_3 + a^4_3 x_4. \end{aligned} \quad (15)$$

(b) Verklaar waarom een uitdrukking als $a_{ii}x^i$ zonder enige betekenis is.

Antwoord: In het algemeen geldt $a_{ij} \neq j_i$. In het geval van uitdrukking $a_{ii}x^i$ is het niet duidelijk of we over de rij- of de kolomindex dienen te sommeren. Ook zouden we nog kunnen bedoelen dat we over de diagonale elementen van de matrix a_{ij} sommeren.

(c) Gebruik de sommatieconventie om

$$a_{11}b^{11} + a_{21}b^{12} + a_{31}b^{13} + a_{41}b^{14} \quad (16)$$

compact weer te geven (ken ook een waarde toe aan n).

Antwoord: Er geldt (met $n = 4$)

$$a_{i1}b^{1i} = a_{11}b^{11} + a_{21}b^{12} + a_{31}b^{13} + a_{41}b^{14}. \quad (17)$$

(d) Idem voor

$$a_{11}b^{11} + a_{12}b^{12} + a_{13}b^{13} + a_{14}b^{14} + a_{15}b^{15}. \quad (18)$$

Antwoord: Er geldt (met $n = 5$)

$$a_{1i}b^{1i} = a_{11}b^{11} + a_{12}b^{12} + a_{13}b^{13} + a_{14}b^{14} + a_{15}b^{15}. \quad (19)$$

(e) Idem voor

$$c^1_{i1} + c^2_{i2} + c^3_{i3} + c^4_{i4} + c^5_{i5} + c^6_{i6} + c^7_{i7} + c^8_{i8}. \quad (20)$$

Antwoord: We hebben (met $n = 8$) de i vergelijkingen

$$c^j_{ij} = c^1_{i1} + c^2_{i2} + c^3_{i3} + c^4_{i4} + c^5_{i5} + c^6_{i6} + c^7_{i7} + c^8_{i8}. \quad (21)$$

Opgave 4: Als a_{ij} constanten zijn, bereken dan de partiële afgeleiden

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (a_{ij} x^i x^j). \quad (22)$$

Hint: het antwoord is $\frac{\partial}{\partial x^k}(a_{ij}x^i x^j) = a_{ki}x^i + a_{ik}x^i = (a_{ik} + a_{ki})x^i$.

Antwoord: Als we de $\sum$ -notatie gebruiken, vinden we

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} a_{ij}x^i x^j &= \sum_{j \neq k} a_{ij}x^i x^j + \sum_{j \neq k} a_{ij}x^i x^j + \sum_{j \neq k} a_{ij}x^i x^j + \sum_{j=k} a_{ij}x^i x^j \\ &= C + \left(\sum_{j \neq k} a_{kj}x^j\right)x^k + \left(\sum_{i \neq k} a_{ik}x^i\right)x^k + a_{kk}(x^k)^2,\end{aligned}\quad (23)$$

met C onafhankelijk van x^k . Differentiëren naar x^k levert

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sum_{i,j} a_{ij}x^i x^j \right) = 0 + \sum_{j \neq k} a_{kj}x^j + \sum_{i \neq k} a_{ik}x^i + 2a_{kk}x^k = \sum_j a_{kj}x^j + \sum_i a_{ik}x^i. \quad (24)$$

Als we gebruikmaken van de sommatieconventie, vinden we

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(a_{ij}x^i x^j) = a_{ki}x^i + a_{ik}x^i = (a_{ik} + a_{ki})x^i. \quad (25)$$

Opgave 5: We bekijken nu wat lineaire algebra met tensoren.

(a) Toon aan dat geldt

$$(x^1, x^2, x^3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = a_{ij}x^i x^j. \quad (26)$$

Antwoord: Er geldt

$$(x^1, x^2, x^3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = (x^1, x^2, x^3) \begin{pmatrix} a_{1j}x^j \\ a_{2j}x^j \\ a_{3j}x^j \end{pmatrix} = [x^i(a_{ij}x^j)] = a_{ij}x^i x^j. \quad (27)$$

(b) Schrijf de kwadratische vorm $3x^2 + y^2 - 2z^2 - 5xy - 6yz = 10$ door gebruik te maken van een symmetrische matrix.

Antwoord: Bovenstaande kwadratische vorm wordt gegeven door de niet-symmetrische matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

We vinden de symmetrische equivalente matrix door elk niet-diagonaal element te vervangen door de halve som van dat element en haar spiegelbeeld in de diagonaal van de matrix. De gevraagde representatie wordt dus

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 3 & -5/2 & 0 \\ -5/2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 10. \quad (29)$$

Uitwerken hiervan levert weer $3x^2 + y^2 - 2z^2 - 5xy - 6yz = 10$.

(c) In een orthonormaal coördinatenstelsel wordt de afstand $d(\vec{x}, \vec{y})$ tussen de punten met plaatsvectoren $\vec{x}$ en $\vec{y}$ gegeven door

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y})^T (\vec{x} - \vec{y})}. \quad (30)$$

We voeren de coördinatentransformatie $\vec{x}' = A\vec{x}$ of $\vec{x} = B\vec{x}'$ met $B = A^{-1}$ uit. Wat is de formule voor de afstand $d(\vec{x}', \vec{y}')$ in het getransformeerde systeem?

Hint, het antwoord is

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(\vec{x}' - \vec{y}')^T G (\vec{x}' - \vec{y}')} = d(\vec{x}', \vec{y}') \quad (31)$$

met $G \equiv B^T B = (A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = (AA^T)^{-1}$.

Antwoord: Het is een kwestie van invullen. Dit levert

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, \vec{y}) &= \sqrt{(\vec{x} - \vec{y})^T (\vec{x} - \vec{y})} \\ &= \sqrt{(B\vec{x}' - B\vec{y}')^T (B\vec{x}' - B\vec{y}')} \\ &= \sqrt{(B(\vec{x}' - \vec{y}'))^T B(\vec{x}' - \vec{y}')} \\ &= \sqrt{(\vec{x}' - \vec{y}')^T B^T B (\vec{x}' - \vec{y}')} \\ &= \sqrt{(\vec{x}' - \vec{y}')^T G (\vec{x}' - \vec{y}')} \\ &= d(\vec{x}', \vec{y}'), \end{aligned} \quad (32)$$

met $G \equiv B^T B = (A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = (AA^T)^{-1}$.

We kunnen tensornotatie gebruiken en de productregel voor matrices om te bewijzen dat geldt $(AB)^T = B^T A^T$. Het bewijs gaat als volgt Stel dat $A \equiv [a_{ij}]_{mn}$ (dus m rijen en n kolommen), $B \equiv [b_{ij}]_{nk}$, en $AB \equiv [c_{ij}]_{mk}$. Voor alle i en j hebben we

$$a'_{ij} = a_{ji}, \quad b'_{ij} = b_{ji}, \quad c'_{ij} = c_{ji}. \quad (33)$$

Er geldt dus $A^T = [a'_{ij}]_{nm}$, $B^T = [b'_{ij}]_{kn}$, en $(AB)^T = [c'_{ij}]_{km}$. We moeten laten zien dat $B^T A^T = [c'_{ij}]_{km}$. De definitie van het matrixproduct geeft $B^T A^T = [b'_{ir} a'_{rj}]_{km}$, en omdat

$$b'_{ir} a'_{rj} = b_{ri} a_{jr} = a_{jr} b_{ri} = c_{ji} = c'_{ij} \quad (34)$$

vinden we het gewenste resultaat.