

OPGAVEN WEEK 1 - Oplossingen

Opgave 1: Ons zonnestelsel is gemaakt uit gas afkomstig van een supernova. Al het uranium op aarde is gemaakt in deze supernova. Gedetailleerde berekeningen van de fysica van supernova explosies suggereren dat het aantal geproduceerde ^{235}U kernen 1,7 maal groter was dan het aantal ^{238}U kernen. Sinds hun productie vervalt ^{235}U met een halfwaardetijd van $t_{\frac{1}{2}} = 7,0 \times 10^8$ jaar en ^{238}U met halfwaardetijd van $t_{\frac{1}{2}} = 4,5 \times 10^9$ jaar. Hoe lang geleden vond de supernova explosie plaats, gegeven dat de verhouding ^{235}U tot ^{238}U zoals gevonden in gesteente gelijk is aan 0,007? (Hint: in radioactief verval neemt het aantal nog niet vervallen kernen af volgens de relatie $N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$ met τ de levensduur.)

Voor het verval van het ^{235}U geldt¹ $N_{235}(t) = N_{235}(0)/2^{(t/0,7)}$ met t in miljard jaar. Evenzo vinden we voor het verval van het ^{238}U de relatie $N_{238}(t) = N_{238}(0)/2^{(t/4,5)}$.

We delen bovenstaande vergelijkingen door elkaar en vinden

$$\frac{N_{235}(t)}{N_{238}(t)} = \frac{N_{235}(0)}{N_{238}(0)} \frac{2^{(t/4,5)}}{2^{(t/0,7)}}. \quad (1)$$

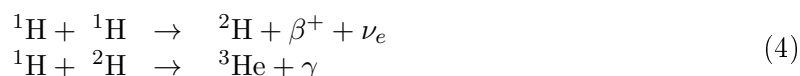
Er geldt $N_{235}(t)/N_{238}(t) = 0,007$ en $N_{235}(0)/N_{238}(0) = 1,7$. Ook geldt $2^a/2^b = 2^{(a-b)}$. We vinden

$$0,007 = 1,7 \times 2^{t(\frac{1}{4,5} - \frac{1}{0,7})} \rightarrow {}^2\log\left(\frac{0,007}{1,7}\right) = t\left(\frac{1}{4,5} - \frac{1}{0,7}\right), \quad (2)$$

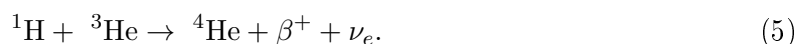
waar we beide kanten door 1,7 gedeeld hebben en de ${}^2\log$ van beide kanten hebben genomen. Ook geldt ${}^2\log(a) = {}^{10}\log(a)/{}^{10}\log(2)$. We vinden nu

$$t = \frac{{}^{10}\log(\frac{0,007}{1,7})}{{}^{10}\log 2} / \left(\frac{1}{4,5} - \frac{1}{0,7}\right) = 6,6 \text{ miljard jaar}. \quad (3)$$

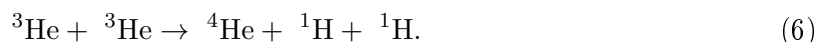
Opgave 2: De zon en andere sterren produceren hun energie door kernfusie. Een van de fusiereacties, de proton-proton cyclus, bestaat uit de volgende reacties:



gevolgd door in 10^{-5} van de gevallen



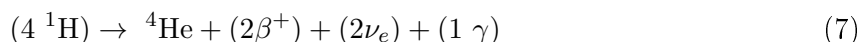
of in 85 procent van de gevallen



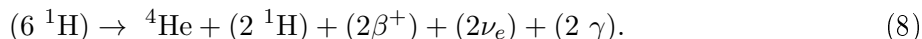
(a) Toon aan dat het netto effect van deze reacties gelijk is aan $(4 {}^1\text{H}) \rightarrow {}^4\text{He} + (2\beta^+) + (2\nu_e) + (1 \text{ of } 2) \gamma$.

¹Als u dat makkelijker vindt kunt u ook gebruikmaken van de relatie $N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$ met τ de levensduur. Het verband tussen halfwaarde tijd $t_{\frac{1}{2}}$ en de levensduur τ wordt gevonden uit $N(t_{\frac{1}{2}}) = \frac{N(0)}{2} = N(0)e^{-t_{\frac{1}{2}}/\tau}$. Hieruit volgt $t_{\frac{1}{2}} = \tau \ln 2$. Verder gewoon bovenstaande logica volgen.

Gewoon optellen van de reacties geeft in het eerste geval



en in het tweede geval



Netto wordt er evenveel waterstof omgezet per cyclus.

(b) Toon aan dat een rustenergie van 24,7 MeV vrijkomt in deze cyclus (en dan tellen we de 1,02 MeV die vrijkomt als elk van de positronen annihileert met een elektron niet eens mee).

We hebben de volgende rustmassa's: $m_{^1\text{H}} = 1,007825 \text{ u}$, $m_{^4\text{He}} = 4,02603 \text{ u}$, $m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$, met u de atomaire massaeenheid, $1 \text{ u} = 1,660\,538\,782(83) \times 10^{-27} \text{ kg} = 931,5 \text{ MeV}/c^2$. Je vindt dan het massaverschil uit

$$\begin{aligned} \Delta m &= (4m_{^1\text{H}} - 2m_{e^-}) - (m_{^4\text{He}} + 2m_{e^+}) \\ &= 0,028697 \text{ u} - 4m_e = (26,73 - 2,044) \text{ MeV}/c^2 = 24,7 \text{ MeV}/c^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Dit komt overeen met een rustenergieverschil van $\Delta E_0 = \Delta mc^2 = 24,7 \text{ MeV}$.

(c) De zon straalt met een energie van ongeveer $4 \times 10^{26} \text{ W}$. Neem aan dat dit wordt veroorzaakt door de conversie van vier protonen naar helium, gammastraling en neutrino's, hetgeen 26,7 MeV vrijmaakt. Wat is het verbruik van protonen in de zon (in protonen per seconde).

Het aantal proton-proton cycli per seconde is

$$\frac{P}{\Delta E} = \frac{(4 \times 10^{26} \text{ W})}{(26,7 \text{ MeV})(1,602 \times 10^{-13} \text{ J/MeV})} = 0,936 \times 10^{38} \text{ s}^{-1}. \quad (10)$$

Het verbruik in de zon is dan $3,75 \times 10^{38}$ waterstofatomen (^1H) per seconde. Vermenigvuldig dit met $m_{^1\text{H}} = 1,67353 \times 10^{-27} \text{ kg}$ voor een verbruik van $6,28 \times 10^{11} \text{ kg/s}$.

(d) Hoe lang kan de zon nog schijnen op deze wijze? Neem aan dat de helft van de massa van de zon ($2 \times 10^{30} \text{ kg}$) door protonen gevormd wordt.

Als er in totaal 10^{30} kg aan protonbrandstof voorradig is, dan zal de zon gedurende

$$T = \frac{(10^{30} \text{ kg})}{(6,28 \times 10^{11} \text{ kg/s})} = 1,6 \times 10^{18} \text{ seconde} \quad \text{of ook} \quad T = 5,0 \times 10^{10} \text{ jaar} \quad (11)$$

schijnen.

Opgave 3: In de stad Kamiokande in Japan staat de zogenaamde Kamiokande II detector. Deze detector is ontworpen om proton verval te bestuderen. Met Kamiokande II werd op 23 februari 1987 in slechts 12 seconden een totaal van 12 neutrino interacties geregistreerd. Deze meting viel samen met de explosie van supernova SN1987A die op ongeveer 170.000 lichtjaar van de aarde stond. Reeds lang hiervoor hadden astrofysici berekend dat bij een dergelijke explosie binnen een aantal seconden een energie van ongeveer 10^{46} J zou vrijkomen. Hiervan zou ongeveer 90 % vrijkomen in de vorm van neutrino's, die het heelal in gejaagd zouden worden, terwijl voor het spectaculaire zichtbare vuurwerk en de kinetische energie van de restanten ten hoogste een procent van de energie ter beschikking zou staan.

De Kamiokande II detector is in staat antineutrino's aan te tonen via de reactie



aan protonen in normaal water. De protonen die gebonden zijn in zuurstof kunnen hierbij verwaarloosd worden, omdat deze niet wezenlijk tot de totale telsnelheid bijdragen. De energie en de richting van de positronen kan met de detector bepaald worden (uit de richting en de intensiteit van de door de positronen opgewekte Čerenkovstraling). De actieve massa van de detector is 2100 ton water (1 ton $\equiv$ 1000 kg). De theoretische werkzame doorsnede voor deze reactie is energieafhankelijk en kan bij de hier optredende energieën uit de volgende relatie afgeleid worden

$$\sigma = 10^{-45} \text{ m}^2 \cdot \left(\frac{E \text{ in MeV}}{10 \text{ MeV}} \right)^2, \quad (13)$$

waarbij de energie van de neutrino's E gelijk gesteld kan worden aan de energie van de positronen. De 12 geregistreerde neutrino's hadden in het gewogen gemiddelde een energie $\langle E_\nu \rangle = 12,8$ MeV en $(\langle E_\nu \rangle)^{1/2} = 10,9$ MeV.

(a) Wat is het totale aantal neutrino's dat vrijkwam bij de explosie van de supernova? Ga ervan uit dat de zes neutrinosoorten ν_e , $\bar{\nu}_e$, ν_μ , $\bar{\nu}_\mu$, ν_τ , en $\bar{\nu}_\tau$, waarvan enkel het $\bar{\nu}_e$ met de Kamiokande II detector aangetoond kan worden, met vergelijkbare energieën en in vergelijkbare hoeveelheden geproduceerd werden.

Antwoord: Allereerst rekenen we uit hoeveel actieve protonen aanwezig zijn in de Kamiokande II detector.

$$N_p^{\text{actief}} = (2 \text{ protonen/H}_2\text{O}) \left(\frac{2.1 \times 10^9 \text{ gram H}_2\text{O}}{M_{\text{H}_2\text{O}} = 18} \right) \times N_A = 1.4 \times 10^{32}. \quad (14)$$

De werkzame doorsnede per actief proton bedraagt

$$\sigma = 10^{-45} \text{ m}^2 \cdot \left(\frac{E}{10 \text{ MeV}} \right)^2 = 10^{-45} \text{ m}^2 \cdot \left(\frac{10.9 \text{ MeV}}{10 \text{ MeV}} \right)^2 = 1.19 \times 10^{-45} \text{ m}^2. \quad (15)$$

Een actief oppervlakte van $N_p \times \sigma$ resulteerde in de detectie van 12 neutrino's. Het totale oppervlakte van de neutrinoshil bedraagt

$$A_{\text{total}} = 4\pi R^2 = 4\pi(170,000 \text{ lichtjaar})^2 = 4\pi(1.61 \times 10^{21} \text{ m})^2 = 3.25 \times 10^{43} \text{ m}^2. \quad (16)$$

In totaal zijn dus

$$N_\nu = (6 \text{ soorten neutrino's}) \times \frac{A_{\text{total}}}{N_p \sigma} = 1.17 \times 10^{57} \quad (17)$$

neutrino's vrijgekomen.

(b) Hoe groot is de totale in de vorm van neutrino's vrijgekomen energie in de explosie van SN1987A? Vergelijk dit met de theoretische voorspelling en vorm een oordeel over de overeenstemming.

Antwoord: De totale vrijgekomen energie in de vorm van neutrino's bedraagt

$$E_\nu = N_\nu \times \langle 12.8 \text{ MeV} \rangle = 1.5 \times 10^{64} \text{ eV} = 2.4 \times 10^{45} \text{ J}. \quad (18)$$

We hebben hier gebruikt dat $1 \text{ eV} \equiv 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$. De overeenstemming is redelijk.

(c) Het eerst gemeten $\bar{\nu}_e$ had een energie van 20,0 MeV. Het laatst gemeten neutrino kwam 12,4 seconde later en had een energie van 8,9 MeV. Welke limiet wordt hiermee op de massa van het neutrino geplaatst? Neem hierbij aan dat de supernova explosie minstens 10 s en hoogstens 20 s geduurd heeft. De benadering $y = (1 - (x/C)^2)^{-1/2} \approx 1 + x^2/2C^2 + \dots$ voor $x \ll C$ kan hier nuttig zijn.

Antwoord: We zoeken een relatie die verband legt tussen de massa en de energie van een neutrino. We gebruiken

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{p}_\nu}{E_\nu} \quad \text{en} \quad \gamma = \frac{E_\nu}{m_\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (19)$$

waarbij m_ν de massa van het neutrino is. We kunnen schrijven

$$\frac{1}{\beta} = \left[1 - \left(\frac{m_\nu}{E_\nu} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{m_\nu^2}{2E_\nu^2}. \quad (20)$$

Het verschil in aankomsttijden van de neutrino's wordt enerzijds gegeven door de periode van 10 s waarin de supernova explodeerde, en anderzijds door de verschillen in reistijd, $t = d/v$, in het geval dat de neutrino's een massa ongelijk aan nul zouden hebben. Er geldt

$$\begin{aligned} 10 \text{ s} + 12.4 \text{ s} &= \frac{d}{v_2} - \frac{d}{v_1} = \frac{d}{c} \left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1} \right) \\ &= \frac{d}{c} \left(1 + \frac{m_\nu^2}{2E_2^2} - 1 - \frac{m_\nu^2}{2E_1^2} \right) = \frac{dm_\nu^2}{2c} (E_2^{-2} - E_1^{-2}). \end{aligned} \quad (21)$$

We kiezen voor E_1 en E_2 de grootste en kleinste neutrino energieën, en vinden

$$m_\nu^2 = 22.4 \text{ s} \times \frac{2c}{d} \frac{E_1^2 E_2^2}{E_1^2 - E_2^2} = (22.4 \text{ s}) \left(\frac{(2)(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{1.61 \times 10^{21} \text{ m}} \right) (3.94 \times 10^{23}) = (29 \text{ eV})^2. \quad (22)$$