

Tensoren - beknopte samenvatting

Lineaire (vector) ruimte: Een verzameling L heet een lineaire ruimte als

1. *Optelling* van elementen van L gedefinieerd is: als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ elementen van L zijn, dan is $\vec{a} + \vec{b}$ ook element van L .
2. *Vermenigvuldiging* van elementen van L met (reële) getallen gedefinieerd is: als $\vec{a}$ element van L is, dan is voor elke reële getal λ , de vector $\lambda\vec{a}$ ook element van L .
3. L bevat 0 , en dat is zo gedefinieerd dat $\vec{a} + 0 = \vec{a}$ voor elke $\vec{a}$ in L .
4. Alle gebruikelijke regels uit de algebra gelden: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$, etc.

De lineaire ruimte L is n -dimensionaal als het een verzameling n van nul verschillende vectoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ bevat, zodat elke vector in L uitgedrukt kan worden als lineaire combinatie van $\vec{e}_i$'s als

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^n A^i \vec{e}_i. \quad (1)$$

Hierbij zijn de A^i reële getallen, en we noemen deze de componenten van de vector $\vec{A}$. Met 'lineair onafhankelijk' wordt bedoeld dat geen enkele van de $\vec{e}_i$'s kan worden uitgedrukt als lineaire combinatie van de anderen. We noemen de vectoren $\{\vec{e}_i\}$ een *basis*. Het is conventie dat we de componenten van een vector A^i met een *bovenindex* aangeven, en basisvectoren $\vec{e}_i$ met een *benedenindex*.

De sommatieconventie van Einstein: Dit is een handige en beknopte schrijfwijze die we veelvuldig zullen gebruiken tijdens de cursus. Deze conventie stelt dat wanneer twee indices aangegeven met dezelfde letter in een wiskundige uitdrukking voorkomen, één als bovenindex en één beneden, we er van uit gaan dat over deze indices gesommeerd wordt, zonder dat we uitdrukkelijk het $\sum$ teken hoeven op te schrijven. Bijvoorbeeld, met deze conventie kunnen we de vector $\vec{A}$ in vergelijking (1) schrijven als

$$\vec{A} = A^i \vec{e}_i. \quad (2)$$

We noemen dergelijke herhaalde indices 'dummy indices'. Vanaf nu zullen we altijd de sommatieconventie gebruiken.

Veranderen van basis: Een lineaire ruimte heeft oneindig veel bases. Als $\vec{e}_i$ een basis vormen in L , dan vormen de vectoren $\vec{e}_{j'}$ ook een basis in L . Er geldt

$$\vec{e}_{j'} = \Lambda^i_{j'} \vec{e}_i, \quad (3)$$

met Λ een matrix waarvan de determinant ongelijk aan nul is. Merk op dat we de sommatieconventie gebruiken voor index i . We noemen $\Lambda^i_{j'}$ het element van Λ voor rij i en kolom j' . De notatie is subtiel, maar u kunt Λ^a_b zó lezen dat de *basisvectoren* getransformeerd worden van systeem a naar b .

We kunnen vergelijking (3) inverteren,

$$\vec{e}_i = \Lambda^{j'}_i \vec{e}_{j'}, \quad (4)$$

waarbij de matrix $\Lambda^{j'}_i$ de inverse is van $\Lambda^i_{j'}$. Omdat $\Lambda^{j'}_i = \left(\Lambda^i_{j'}\right)^{-1}$ en dus $\Lambda^{-1}\Lambda = \Lambda\Lambda^{-1} = 1$, schrijven we in indexnotatie

$$\Lambda^{j'}_i \Lambda^k_{j'} = \delta^k_i, \quad (5)$$

waarbij de Kronecker δ^j_j gelijk is aan 1 als $i = j$ en anders 0.

De vector $\vec{A}$ is een geometrisch object en verandert niet als we een andere basis kiezen. De componenten A^i veranderen wel. In de nieuwe basis worden ze gegeven door

$$A^{i'} = \Lambda^{i'}_j A^j. \quad (6)$$

De notatie is weer subtiel, maar als u het bovenstaande met uitdrukking (3) vergelijkt, ziet u dat het transformatiegedrag van basisvectoren en vectorcomponenten *tegengesteld (contra)* is. In de algemene relativiteitstheorie (ART) worden vectoren ook wel ‘contravariante vectoren’ genoemd om dit gedrag uit te drukken.

1-vormen en duale ruimten: De ART werkt met geometrische (dat zijn basisonafhankelijke) objecten. Een vector is hiervan een voorbeeld. Een ander voorbeeld is een reëelwaardige functie $\tilde{p}(\vec{a})$ op een lineaire ruimte, dat is een afbeelding van de lineaire ruimte naar de reële getallen. Dat is ingewikkelde taal, maar u kunt zich een 1-vorm voorstellen als een apparaat met één sleuf, waarin u een vector kunt stoppen. Nadat de vector in de sleuf geplaatst is, rolt er een reëel getal uit het apparaat.

Beschouw nu alle mogelijke 1-vormen op een lineaire ruimte L . Het blijkt dan dat de verzameling van deze 1-vormen ook weer gezien kan worden als een lineaire ruimte. Met L^* duiden we de lineaire ruimte van alle 1-vormen op L aan. Deze staat bekend als de *duale* of *geconjugeerde* ruimte aan L . L^* heeft niet minder status dan L . Dit kan al afgeleid worden uit het opmerkelijke feit dat als L n -dimensionaal is, dan is L^* ook n -dimensionaal. Als $\tilde{p}$ een willekeurige 1-vorm is en $\vec{V}$ een vector dan geldt

$$\tilde{p}(\vec{V}) = \tilde{p}(V^i \vec{e}_i) = \tilde{p}(\vec{e}_i) V^i. \quad (7)$$

We zien dat $\tilde{p}$ volledig bepaald wordt door n getallen, $\{\tilde{p}(\vec{e}_i)\}$, en dat zijn de componenten p_i van de 1-vorm. Dus L^* is n -dimensionaal.

Basis in een duale ruimte: Gegeven een basis $\{\vec{e}_i\}$ in L , is het handig om een verzameling $\{\tilde{\omega}^i\}$ 1-vormen te definiëren met de relatie

$$\tilde{\omega}^i(\vec{e}_j) = \delta^i_j. \quad (8)$$

Deze 1-vormen leveren een basis in L^* die we de duale basis noemen, omdat er n van deze $\tilde{\omega}^i$ lineair onafhankelijk zijn. Dus kunnen we elke 1-vorm $\tilde{p}$ schrijven als

$$\tilde{p} = p_i \tilde{\omega}^i, \quad (9)$$

met p_i reële getallen. Verder geldt

$$\tilde{p}(\vec{V}) = p_i V^i. \quad (10)$$

Wiskundig is $\tilde{p}(\vec{V})$ analoog aan het inproduct van twee vectoren, $\tilde{p}$ en $\vec{V}$, behalve dat $\tilde{p}$ en $\vec{V}$ in verschillende ruimten leven, namelijk $\tilde{p}$ in L^* , en $\vec{V}$ in L . We komen hier later op terug als we over inproducten spreken.

Als de basis in L verandert volgens vergelijking (3), verandert de duale basis ook

$$\tilde{\omega}^{i'} = \Lambda^{i'}_j \tilde{\omega}^j. \quad (11)$$

Merk op dat dit identiek is aan hoe componenten van een vector in L veranderen (zie vergelijking (6)). De componenten van 1-vormen veranderen net als (*covariant aan*) de basisvectoren in L

$$p_{i'} = \Lambda^j_{i'} p_j. \quad (12)$$

Daarom staan 1-vormen ook bekend als covariante vectoren of als rang-1 covariante tensoren.

Als we de notatie nog eens samenvatten, dan zien we dat basisvectoren $\vec{e}_i$ en componenten van 1-vormen p_i aangegeven worden met een *benedenindex*, terwijl we vectorcomponenten a^i en basis 1-vormen $\tilde{\omega}^i$ aangegeven met een *bovenindex*. J.A. Schouten heeft deze indexnotatie bedacht: objecten met een benedenindex transformeren met $\Lambda^j_{i'}$, terwijl objecten met een bovenindex transformeren met de inverse $\Lambda^{i'}_j$.

De duale van de duale: We hebben 1-vormen gedefinieerd als lineaire reëelwaardige functies op een lineaire ruimte L . Maar we kunnen ook vectoren voorstellen als lineaire reëelwaardige functies in L^* . Stel dat $\vec{a}$ een vector is in L . Deze genereert een afbeelding van L^* naar de reële getallen. Deze afbeelding is lineair en als je in L^* leeft, zie je vectoren in L als 1-vormen. Voor eindig-dimensionale ruimten is het eenvoudig te bewijzen dat L de duale ruimte van L^* is, dus dat geldt $L^{**} = L$.

Tensoren: Tot nu toe hebben we twee geometrische objecten gedefinieerd: de 1-vorm, die een lineaire functie op L is, en de vectoren die gezien kunnen worden als lineaire functies op L^* . Waarom beschouwen we geen lineaire functies van verschillende variabelen? Dergelijke functies worden tensoren genoemd. Om alles algemeen te houden, staan we toe dat sommige variabelen bij L horen, terwijl andere bij L^* horen. We kunnen ons een tensor voorstellen als een apparaat met n sleuven waar we vectoren (objecten uit L) in kunnen stoppen en m sleuven waar we 1-vormen (objecten uit L^*) in kunnen plaatsen. Als we alle $n+m$ sleuven van vectoren en 1-vormen voorzien hebben, rolt er een reëel getal uit het apparaat.

We demonstreren het bovenstaande aan de hand van een $(1,1)$ tensor. Laat T een $(1,1)$ tensor zijn. U kunt zich dit weer voorstellen als

$$T = T(_, _) = T(\text{"plaats voor een vector"}, \text{"plaats voor een 1-vorm"}). \quad (13)$$

Door de vector $\vec{x}$ en 1-vorm $\tilde{y}$ als argumenten te geven, krijgen we het reële getal

$$T = T(\vec{x}, \tilde{y}). \quad (14)$$

De vector $\vec{x}$ leeft in ruimte L en we expanderen haar in de basis $\vec{e}_j$ die in L gedefinieerd is. Hetzelfde doen we voor $\tilde{y}$ die leeft in L^* . We vinden

$$\vec{x} = x^j \vec{e}_j \quad \text{en} \quad \tilde{y} = p_i \tilde{\omega}^i. \quad (15)$$

Invullen in vergelijking (14) levert

$$T = T(\vec{x}, \tilde{y}) = T(x^j \vec{e}_j, p_i \tilde{\omega}^i) = T^i_j x^j y_i \quad \text{met} \quad T^i_j = T(\vec{e}_j, \tilde{\omega}^i). \quad (16)$$

Merk op dat de tensor volledig bepaald wordt door de verzameling getallen T^i_j . Deze getallen worden de *componenten* van de tensor T genoemd. De componenten van een tensor zijn reële getallen en we vinden component T^i_j door de sleuven van de tensor te vullen met basisvector $\vec{e}_j$ en basis 1-vorm $\tilde{\omega}^i$. Door alle permutaties van basisvectoren en basis 1-vormen in de sleuven te plaatsen vinden we alle mogelijke componenten van de tensor T voor deze bases. Als we van basis veranderen, blijft de tensor hetzelfde omdat deze op een basis-onafhankelijke manier gedefinieerd is, maar haar componenten veranderen. In de nieuwe basis worden deze gegeven door

$$T^{i'}_{j'} = (\Lambda^{i'}_{i'})^{-1} \Lambda^j_{j'} T^i_j = \Lambda^{i'}_i \Lambda^j_{j'} T^i_j. \quad (17)$$

De behandeling van tensoren van het algemene type (n,m) gaat analoog: dat zijn een reëelwaardige multilineaire functies van $n+m$ variabelen, waarvan n variabelen in L leven en m in

L^* . Er zijn verschillende interessante en nuttige wiskundige bewerkingen die uitgevoerd kunnen worden om met tensoren nieuwe tensoren te maken, zoals *contractie* en *tensorproduct*. We bespreken dat waar we het nodig hebben.

Inproduct en metrische tensor: We kennen allemaal het inproduct: neem twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en produceer het reële getal $\vec{a} \cdot \vec{b}$. De *metrische tensor* g bepaalt het inproduct. Er geldt

$$g(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (18)$$

Het zal duidelijk zijn dat het inproduct een rang-2 covariante tensor is, want we stoppen 2 vectoren in de twee sleuven van g , en er rolt een reëel getal uit: het inproduct van deze vectoren. De metrische tensor is symmetrisch, $g(\vec{a}, \vec{b}) = g(\vec{b}, \vec{a})$. De componenten van de metrische tensor worden aangegeven met g_{ij} , en we vinden deze door de basisvectoren in g te stoppen,

$$g_{ij} = g(\vec{e}_i, \vec{e}_j). \quad (19)$$

Omdat g_{ij} een symmetrische matrix is, kunnen we een basis vinden waarin hij diagonaal is (dus enkel g_{ii} termen heeft die ongelijk zijn aan nul). Dit is de vertrouwde orthogonale basis.

De metrische tensor introduceert een natuurlijke correspondentie tussen vectoren in L en 1-vormen in L^* . Stel dat $\vec{a}$ een vector in L is. Het is gebruikelijk om de componenten van de 1-vorm die op deze wijze verbonden is met de vector $\vec{a}$ aan te duiden met a_i . Er geldt

$$a_i = g_{ij} a^j. \quad (20)$$

We noemen dit ‘het naar beneden halen van een index’. Het is een erg handige notatie. Bijvoorbeeld

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{ij} a^i b^j = a_j b^j = a^i b_i. \quad (21)$$

Als de matrix g_{ij} niet singulier is (en dus een inverse heeft), dan zien we met bovenstaande vergelijking dat de door de metriek geïnduceerde correspondentie tussen vectoren en 1-vormen één-op-één is. Voor de metriek in de duale ruimte geldt

$$g^{ij} = g(\tilde{\omega}^i, \tilde{\omega}^j), \quad (22)$$

en we kunnen laten zien dat de matrix g^{ij} de inverse is van de matrix g_{ij} . In indexnotatie schrijven we dat als

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k. \quad (23)$$

Dus geldt

$$a^i = g^{ij} a_j. \quad (24)$$

De reden dat we in de 3D euclidische ruimte nooit een verschil hebben gemaakt tussen vectoren en 1-vormen, komt doordat de metrische tensor voor cartesische coördinaten gegeven wordt door de eenheidsmatrix, I . De relatie tussen de componenten van een vector en zijn bijbehorende 1-vorm wordt dan $a_j = g_{ij} a^i \rightarrow a_j = \delta_{ij} a^i = a^j$. We zien dat er in de 3D euclidische ruimte geen verschil is tussen vectorcomponenten en 1-vormcomponenten in cartesische coördinaten.

Naar boven en beneden halen van indices: We hebben gezien hoe de door de metriek geïnduceerde correspondentie tussen L en L^* ons in staat stelt om over te gaan tussen vectoren en 1-vormen. In het algemeen stelt deze correspondentie ons in staat om een type (n, m) tensor te veranderen in een $(n - 1, m + 1)$ tensor of in een $(n + 1, m - 1)$ tensor.