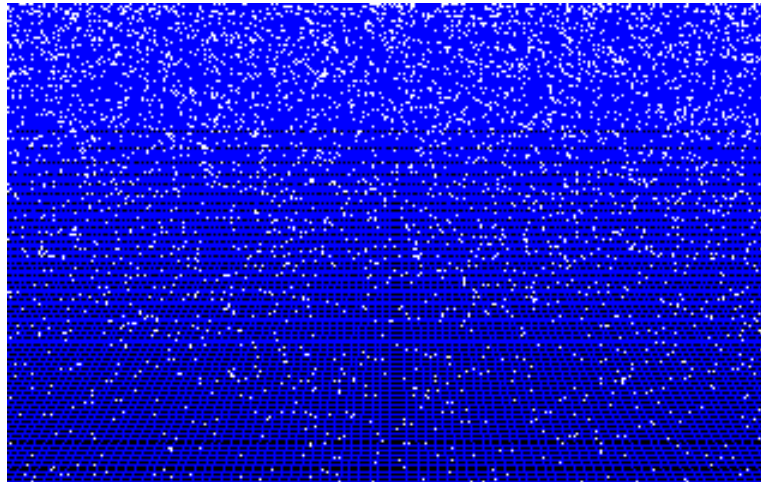


GRAVITATIE EN KOSMOLOGIE

FEW Cursus



Jo van den Brand & Jeroen Meidam
Speciale relativiteitstheorie: 1 en 8 oktober 2012

INHOUD

- Inleiding
 - Overzicht
- Klassieke mechanica
 - Galileo, Newton
 - Lagrange formalisme
- Quantumfenomenen
 - Neutronensterren
- Wiskunde I
 - Tensoren
- Speciale relativiteitstheorie
 - Minkowski
 - Ruimtetijd diagrammen
- Wiskunde II
 - Algemene coördinaten
 - Covariante afgeleide
- Algemene relativiteitstheorie
 - Einsteinvergelijkingen
 - Newton als limiet
- Kosmologie
 - Friedmann
 - Inflatie
- Gravitatiestraling
 - Theorie
 - Experiment

RELATIEVE BEWEGING

Einstein 1905:

Alle natuurwetten blijven dezelfde (zijn invariant) voor alle waarnemers die eenparig rechtlijnig t.o.v. elkaar bewegen.

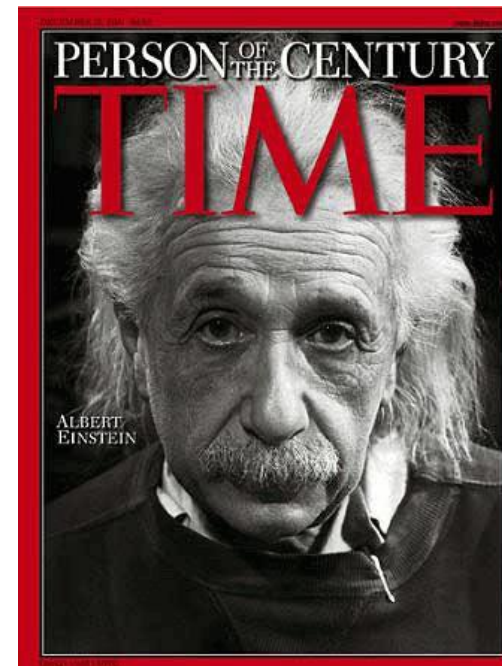
De lichtsnelheid is invariant – heeft voor alle waarnemers dezelfde waarde.

Inertiaalsysteem: objecten bewegen in rechte lijnen als er geen krachten op werken (Newton's eerste wet).

Indien een systeem met constante snelheid t.o.v. een inertiaalsysteem beweegt, dan is het zelf ook een inertiaalsysteem.



Einstein 1921

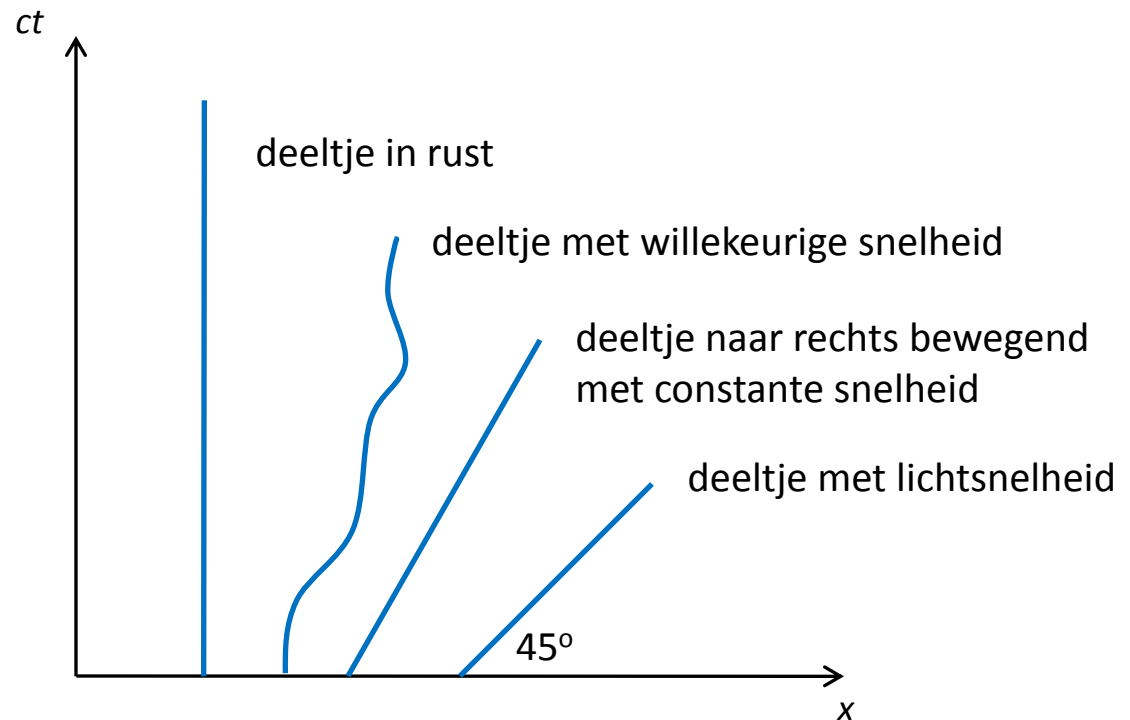


RUIMTETIJD VAN DE ART

Het belang van *fotonen* m.b.t. structuur van ruimte
tijd: empirisch vastgestelde *universaliteit van de
voortplanting* in vacuüm

Onafhankelijk van

- bewegingstoestand van de bron
- golflengte
- intensiteit
- polarisatie van EM golven



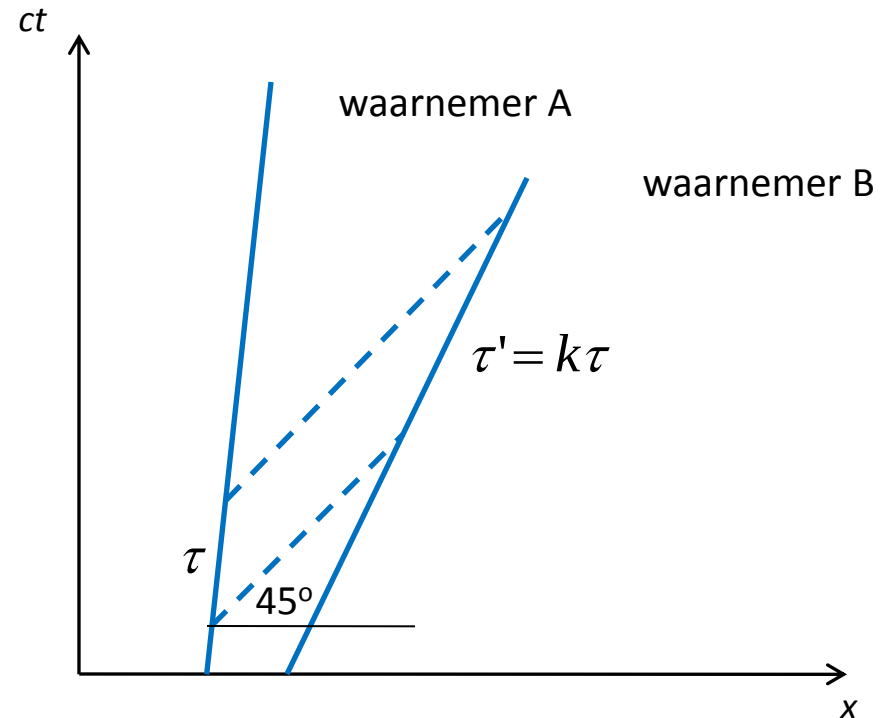
MINKOWSKIRUIMTE — DOPPLERFACTOR

Waarnemers A en B hebben geijkte standaardklokken en lampjes

τ = tijd tussen pulsen van lampje van A, gemeten met de klok van A

τ' = tijd tussen pulsen van lampje van A, gemeten met de klok van B

$\tau' = k\tau$ met dopplerfactor k



MINKOWSKIRUIMTE — DOPPLERFACTOR

Vanuit punt P bewegen waarnemers A en B ten opzichte van elkaar (constante snelheid v van B tov A)

Lampje van A flitst na tijd τ gemeten met de klok van A (in E)

B ziet de flits van A na tijd $k\tau$ (in Q)

B flitst zijn lampje in Q. Waarnemer A ziet dat in R, op tijd $k^2\tau$

Afstand van Q tot A:
(vluchttijd radar puls x lichtsnelheid)/2

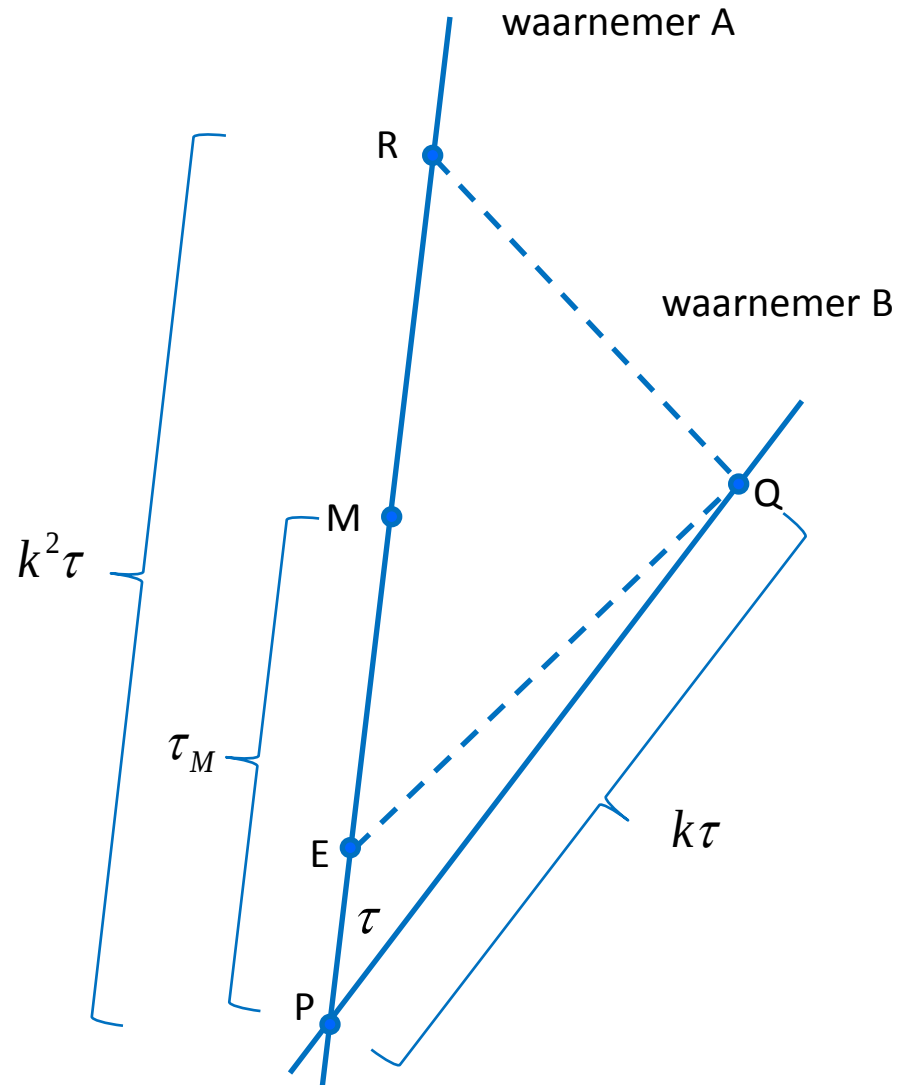
$$\Rightarrow d = \frac{\tau_{ER} \times c}{2} = \frac{c\tau(k^2 - 1)}{2}$$

M is gelijktijdig met Q als $\tau_{EM} = \tau_{RM}$

$$\tau_{EM} = \tau_M - \tau \quad \tau_{RM} = k^2\tau - \tau_M$$

$$\tau_M - \tau = k^2\tau - \tau_M \quad \tau_M = \frac{\tau}{2}(k^2 + 1)$$

$$v = \frac{\text{afstand}}{\text{tijd}} = \frac{d}{\tau_M} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$$



MINKOWSKIRUIMTE — INPRODUCT

We kennen de vector $\overrightarrow{PQ}$ toe aan de geordende events P en Q

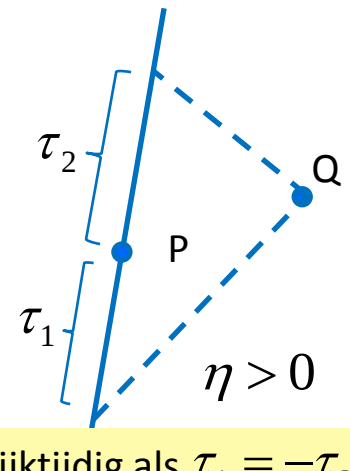
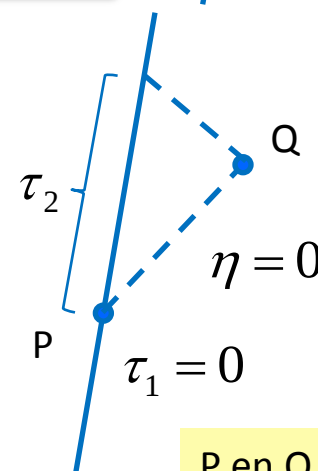
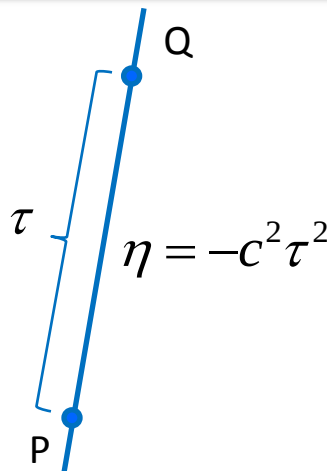
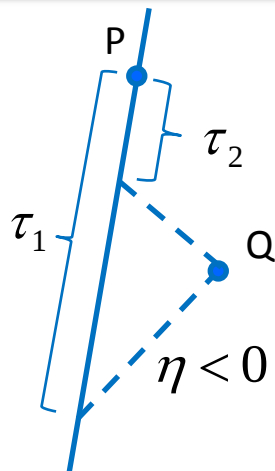
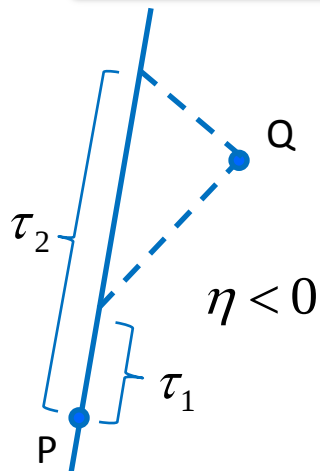
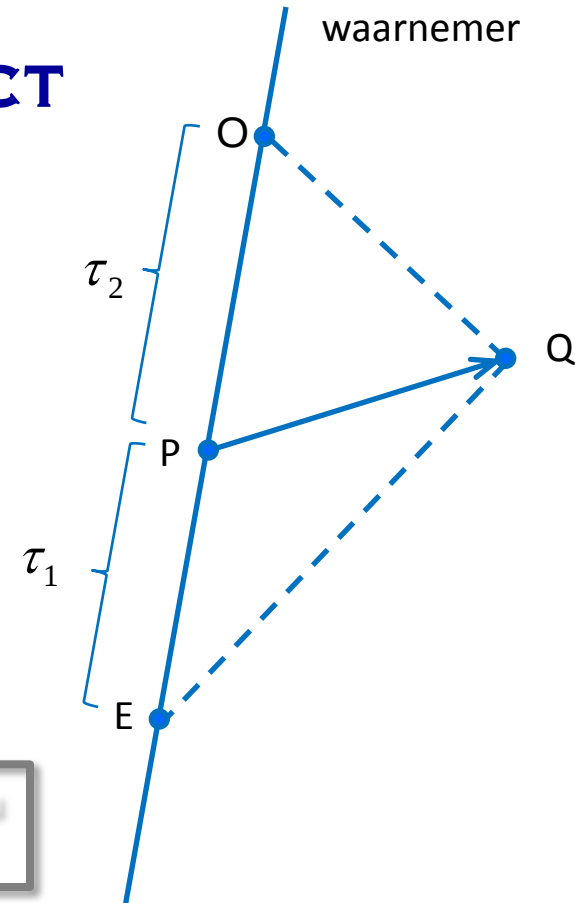
Definitie: $\eta(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) \equiv -c^2 \tau_1 \tau_2$

Afspraak:

tijden voor P negatief

tijden na P positief

Dankzij het bestaan van een metriek (inproduct) kunnen we nu afstanden bepalen. Ruimtetijd heeft een metriek



P en Q gelijktijdig als $\tau_1 = -\tau_2$

LORENTZINVARIANTIE MINKOWSKI-METRIEK

Dat wil zeggen $\eta(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ})$ is onafhankelijk van de inertiaële waarnemer door P

Definitie: $\eta(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) \equiv -c^2 \tau_1 \tau_2$

Met afspraak over het teken!

Volgens A: $\eta(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) = c^2 \tau_1 \tau_2$

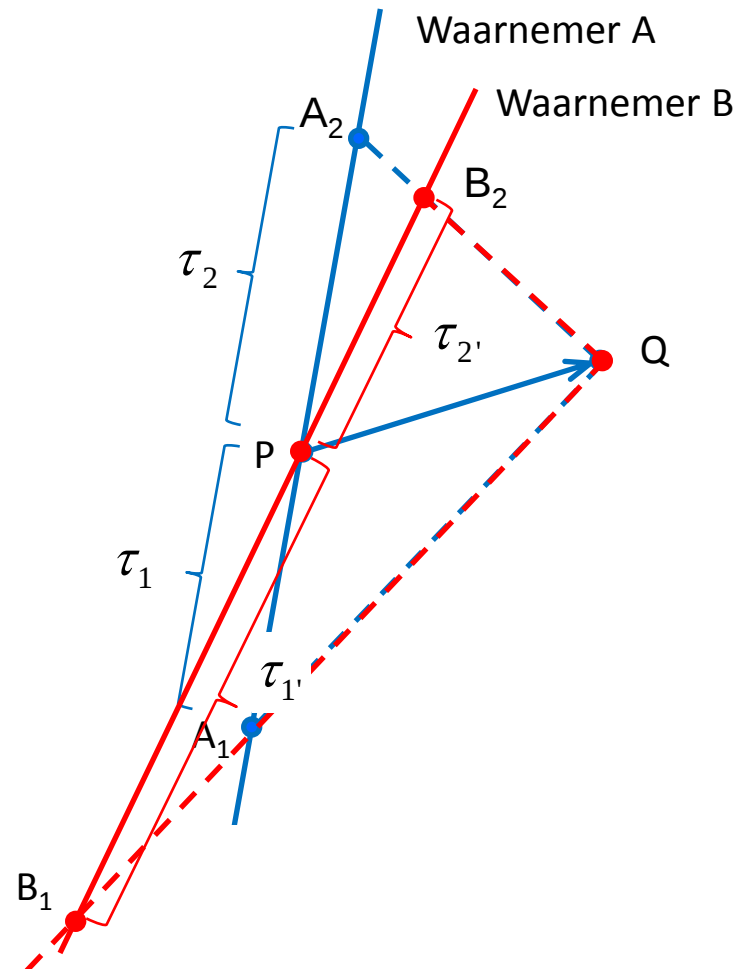
Volgens B: $\eta(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) = c^2 \tau_1' \tau_2'$

Er geldt $\tau_{PA_1} = k^{-1} \tau_{PB_1} \rightarrow \tau_1 = k^{-1} \tau_1'$

$\tau_{PA_2} = k \tau_{PB_2} \rightarrow \tau_2 = k \tau_2'$

➡ $\tau_1 \tau_2 = \tau_1' \tau_2'$

Scalar product is Lorentzinvariant



LORENTZCOÖRDINATEN

Definieer basisvector $\vec{e}_0 = \overrightarrow{OE}$

Er geldt $\eta(\vec{e}_0, \vec{e}_0) = -1$

E is verzameling puntgebeurtenissen die
gelijktijdig zijn met O (t.o.v. A)

Dat is de 3-dim euclidische ruimte op $\tau = 0$ t.o.v. A

E_τ is verzameling puntgebeurtenissen die
gelijktijdig zijn met τ

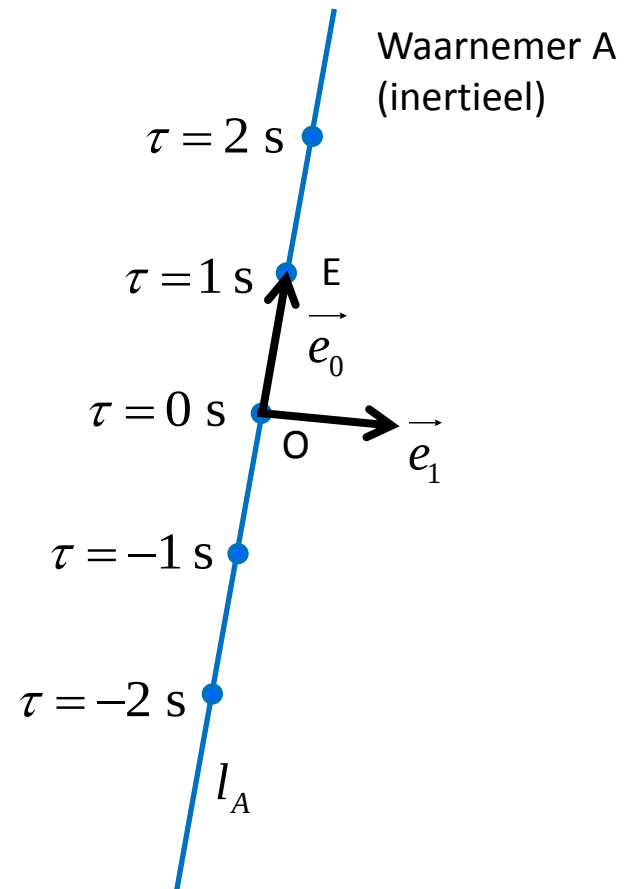
$$\longrightarrow M = \bigcup_{\tau} E_{\tau}$$

Er geldt $Q \in E \Rightarrow \langle \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OQ} \rangle = 0 \quad (l_A \perp E)$

Orthonormaal stelsel vectoren $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$
in E met beginpunt O

Er geldt $\eta(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1$ en $\eta(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$

En ook $\eta(\vec{e}_0, \vec{e}_i) = 0$



MINKOWSKI MEETKUNDE

Basisvectoren $\vec{e}_\mu$ met $\mu = 0, 1, 2, 3$
 We hebben gevonden dat $\eta(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \begin{cases} -1 & \text{als } \mu = \nu = 0 \\ 1 & \text{als } \mu = \nu = i \\ 0 & \text{overige gevallen} \end{cases}$

Nieuw symbool $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



Minkowskimetrik $\eta(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \eta_{\mu\nu}$

Inverse $\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Het invariante lijnelement $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

Notatie bevat metriek en coördinaten

Voor cartesische coördinaten

Lijnelement uitschrijven $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

Dezelfde tijd: Ruimtelijke termen: Stelling van Pythagoras

Dezelfde plaats: *het lijnelement is een maat voor de tijd verstreken tussen twee gebeurtenissen voor een waarnemer die in rust is ten opzichte van deze gebeurtenissen*

Dan geldt $ds^2 = -c^2 d\tau^2$

TIJDDILATATIE

Het invariante lijnelement $c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

Waarnemer W1: twee gebeurtenissen op dezelfde plaats $d\tau$

Waarnemer W2: meet tijdverschil dt

We vinden $d\tau = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt \rightarrow d\tau = \frac{dt}{\gamma}$ met lorentzfactor $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

Snelheid tussen waarnemers $v \equiv \frac{dx}{dt}$

Tijddilatatie is geometrisch effect in 4D ruimtetijd

Tijd tussen twee gebeurtenissen verstrijkt het snelst voor een waarnemer die in rust is ten opzichte van deze gebeurtenissen: eigentijd

LORENTZCONTRACTIE

Het invariante lijnelement $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

Kies x-as als bewegingsrichting

Er geldt $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 = -c^2 dt'^2 + dx'^2$



O' beweegt t.o.v. lat

O staat stil t.o.v. lat

Lat passeert waarnemer O' (dus geldt $dx' = 0$ en $L' = v dt'$)

We vinden $-c^2 dt^2 + dx^2 = -\frac{c^2 L'^2}{v^2}$

Waarnemer O beweegt met de lat mee: lengte lat is L

Voor hem vinden de twee gebeurtenissen (passeren van begin en eind van de lat bij O') op verschillende tijden, gescheiden door dt

We hebben te maken met tijddilatatie $dt' = \gamma^{-1} dt$

Invullen levert $-c^2 \gamma^2 \frac{L'^2}{v^2} + L^2 = -\frac{c^2 L'^2}{v^2}$  $L = \gamma L'$

LORENTZTRANSFORMATIES

Minkowski meetkunde: het invariante lijnelement $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

Welke transformaties laten dit element invariant?

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

Translaties $t' = t + a_t, \quad x' = x + a_x, \quad y' = y + a_y, \quad z' = z + a_z$

Rotaties, bijvoorbeeld $dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2$

Dit is een rotatie rond de z-as (met t en z constant, terwijl x en y mengen)

Schrijf $x' = A_x x + A_y y \quad y' = B_x x + B_y y$

Invullen levert $A_x^2 + B_x^2 = 1, \quad A_y^2 + B_y^2 = 1 \quad A_x A_y = -B_x B_y$

$$\begin{aligned} A_x &= \cos \alpha, B_x = \sin \alpha \\ A_y &= \cos \beta, B_y = \sin \beta \\ \beta &= -\alpha \end{aligned}$$

We vinden $x' = (\cos \alpha)x + (\sin \alpha)y, \quad y' = (\sin \alpha)x - (\cos \alpha)y$

Rotatie rond de z-as

$$\Lambda(\{x, y\}, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Evenzo voor rotaties rond de x- en y-as

LORENTZTRANSFORMATIES

Welke transformaties laten dit element invariant?

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

Boost, bijvoorbeeld $-c^2 dt'^2 + dx'^2 = -c^2 dt^2 + dx^2$

Dit is een boost langs de x-as (met y en z constant, terwijl t en x mengen)

Schrijf $ct' = A_t ct + A_x x$, $x' = B_t ct + B_x x$,

Invullen levert $A_t^2 - B_t^2 = 1$, $-A_x^2 + B_x^2 = 1$ $A_t A_x = B_t B_x$

$$\begin{aligned} \cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta &= 1 \\ A_t &= \cosh \eta, B_t = \sinh \eta \\ A_x &= \sinh \rho, B_x = \cosh \rho \\ \rho &= \eta \end{aligned}$$

We vinden $ct' = (\cosh \eta)ct + (\sinh \eta)x$, $x' = (\sinh \eta)ct + (\cosh \eta)x$

Boost langs de z-as

$$\Lambda(\{t, z\}, y_u) = \begin{pmatrix} \cosh y_u & 0 & 0 & -\sinh y_u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh y_u & 0 & 0 & \cosh y_u \end{pmatrix}$$

Evenzo voor boosts langs de x- en y-as

Wat is die hyperbolische hoek η ?

RAPIDITY

We hadden $ct' = (\cosh \eta)ct + (\sinh \eta)x$, $x' = (\sinh \eta)ct + (\cosh \eta)x$

Neem differentiaalvorm, kies $dt' = d\tau$ en schrijf

$$d\tau = (\cosh \eta)dt + (\sinh \eta)\frac{1}{c}dx$$

Kwadrateren, delen door dt^2 en vergelijken met tijddilatatie

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}$$

 $\cosh^2 \eta + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sinh^2 \eta + 2 \left(\frac{v}{c}\right) \cosh \eta \sinh \eta = 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2$

Dat is een kwadratische vergelijking in $\frac{v}{c}$

Maniluleer $\left(\frac{v}{c}\right)^2 (1 + \sinh^2 \eta) + 2 \left(\frac{v}{c}\right) (\cosh \eta \sinh \eta) + (\cosh^2 \eta - 1) = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 (\cosh^2 \eta) + 2 \left(\frac{v}{c}\right) (\cosh \eta \sinh \eta) + (\sinh^2 \eta) = 0$$

Gebruik de *abc*-formule $\left(\frac{v}{c}\right) = -\frac{\sinh \eta}{\cosh \eta} \equiv -\tanh \eta \Rightarrow \eta = -\operatorname{arctanh} \left(\frac{v}{c}\right)$

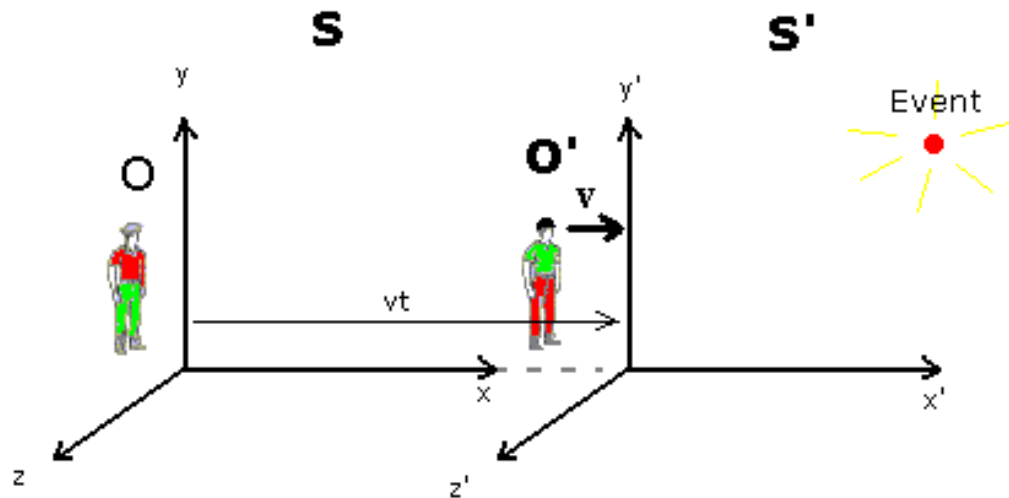
Ook geldt

$$\begin{aligned} \cosh \left(-\operatorname{arctanh} \left(\frac{v}{c}\right)\right) &= \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma \\ \sinh \left(-\operatorname{arctanh} \left(\frac{v}{c}\right)\right) &= -\left(\frac{v}{c}\right) \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = -\left(\frac{v}{c}\right) \gamma \end{aligned} \quad \text{  } \quad \begin{pmatrix} dx^{0'} \\ dx^{1'} \\ dx^{2'} \\ dx^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}$$

LORENTZTRANSFORMATIES

Transformation of Coordinates

Transformaties laten ds^2 invariant



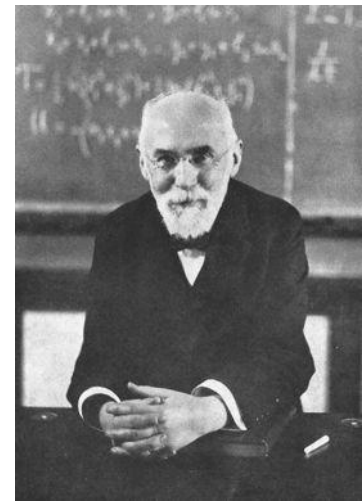
Lorentz 1902

Waarnemers in S en S' bewegen met snelheid v t.o.v. elkaar. Systemen vallen samen op $t = t' = 0$.

Waarnemer in S kent (x, y, z, t) toe aan het event.

Waarnemer in S' kent (x', y', z', t') toe aan hetzelfde event.

Wat is het verband tussen de ruimtetijd coördinaten voor dit zelfde event?



LORENTZTRANSFORMATIES

$$\begin{aligned}\text{i.} \quad & x' = \gamma(x - vt) \\ \text{ii.} \quad & y' = y \\ \text{iii.} \quad & z' = z \\ \text{iv.} \quad & t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\end{aligned}$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Lorentztransformatie

$$\begin{aligned}\text{i'}. \quad & x = \gamma(x' + vt') \\ \text{ii'}. \quad & y = y' \\ \text{iii'}. \quad & z = z' \\ \text{iv'}. \quad & t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)\end{aligned}$$

Inverse transformatie
(snelheid v verandert van teken)

RELATIVITEIT VAN GELIJKTIJDIGHEID

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

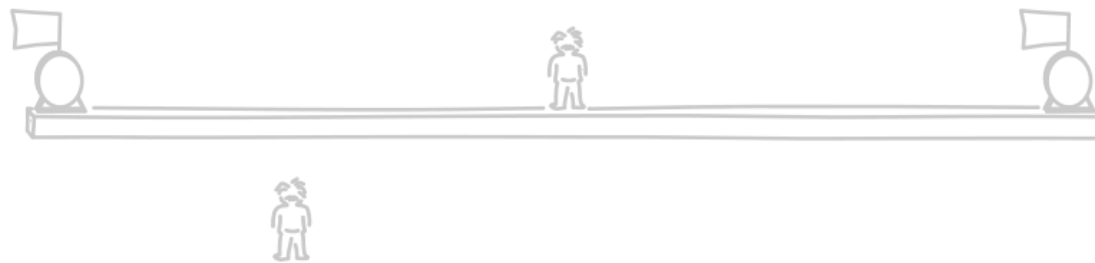
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Stel dat in systeem S twee events, A en B, op dezelfde tijd, $t_A = t_B$, gebeuren, maar op verschillende plaatsen, $x_A \neq x_B$.

Invullen levert

$$t'_A = t'_B + \frac{\gamma v}{c^2} (x_B - x_A)$$

Events vinden niet simultaan plaats in systeem S'



LORENTZCONTRACTIE (LENGTEKRIMP)

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Stel dat in systeem S' een staaf ligt, in rust, langs de x' as.
Een einde op $x' = 0$, het andere op $x' = L'$.

Wat is de lengte L gemeten in S ?

We moeten dan de posities van de uiteinden meten op dezelfde tijd, zeg op $t = 0$.

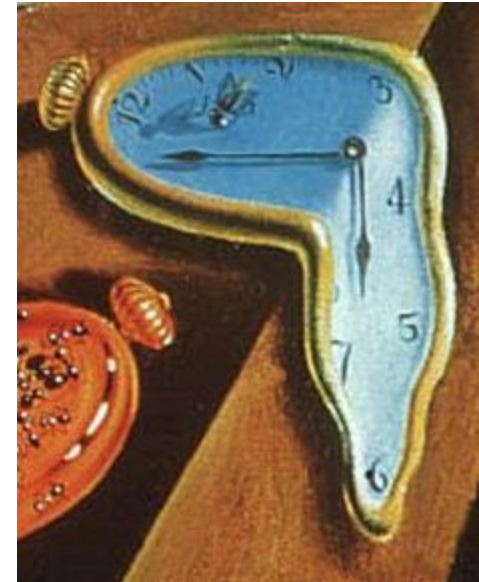
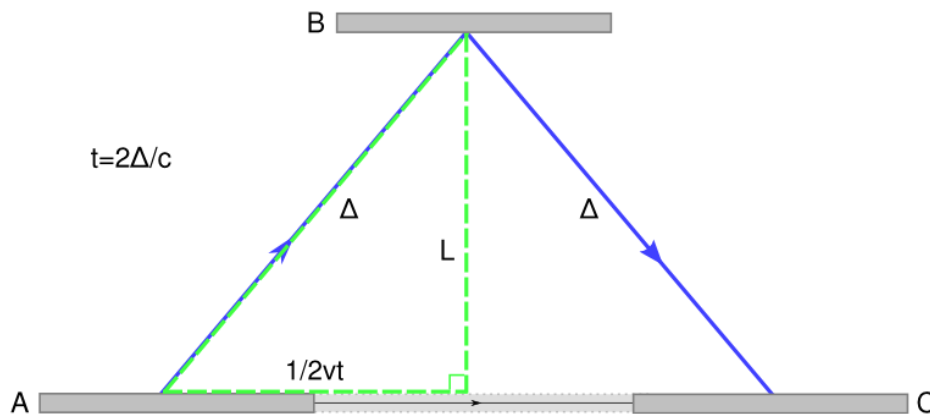
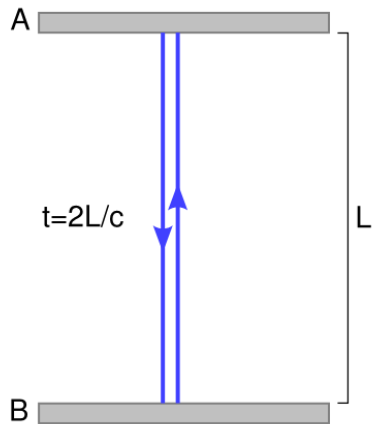
Het linker einde bevindt zich dan op $x = 0$.

Het rechter einde op positie $x = L' / \gamma$.

Langs bewegingsrichting!

Een bewegend object wordt korter met een factor γ
in vergelijking tot zijn lengte in rust.

TIJDDILATATIE (TIJDREK)



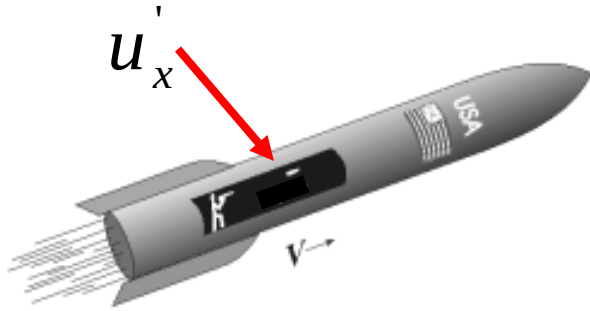
$$t = \frac{2\Delta}{c} \quad \Delta = \sqrt{\left(\frac{1}{2}vt\right)^2 + L^2} \quad ct = 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}vt\right)^2 + L^2}$$

$$c^2t^2 = v^2t^2 + 4L^2 \quad t^2 = \frac{4L^2}{c^2 - v^2} \quad t = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Een bewegende klok loopt langzamer met een factor γ in vergelijking tot toestand in rust.

Deeltjes hebben 'ingebouwde' klokken (verval).

OPTELLEN VAN SNELHEDEN



Een raket is in rust in inertiaalsysteem S' dat met snelheid v beweegt t.o.v. S .

Iemand vuurt een kogel af in systeem S' met snelheid u'_x in S' .

Wat is de snelheid van de kogel in S ?

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{vdx}{c^2 dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{vu_x'}{c^2}}$$

Een kwestie van afgeleiden nemen ...

Als $u_x' = c$, dan $u = c$ en lichtsnelheid gelijk voor alle systemen!!!

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}$$

Het klassieke antwoord

VIERVECTOREN

Positie-tijd viervector x^μ , met $m = 0, 1, 2, 3$

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

Lorentztransformaties

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$



$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1)$$

$$x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0)$$

$$x^{2'} = x^2$$

$$x^{3'} = x^3$$

$$\beta \equiv \frac{v}{c}$$

VIERVECTOREN

Lorentztransformaties

$$\begin{aligned}x^{0'} &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\x^{1'} &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\x^{2'} &= x^2 \\x^{3'} &= x^3\end{aligned}$$

In matrixvorm

$$\begin{aligned}x^{0'} &= \Lambda_0^0 x^0 + \Lambda_1^0 x^1 + \Lambda_2^0 x^2 + \Lambda_3^0 x^3 \\x^{1'} &= \Lambda_0^1 x^0 + \Lambda_1^1 x^1 + \Lambda_2^1 x^2 + \Lambda_3^1 x^3 \\x^{2'} &= \Lambda_0^2 x^0 + \Lambda_1^2 x^1 + \Lambda_2^2 x^2 + \Lambda_3^2 x^3 \\x^{3'} &= \Lambda_0^3 x^0 + \Lambda_1^3 x^1 + \Lambda_2^3 x^2 + \Lambda_3^3 x^3\end{aligned}$$



$$x^{\mu'} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$



$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}$$

algemeen geldig

met

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

LORENTZINVARIANTIE

Ruimtetime coordinaten zijn
systeem afhankelijk

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

Invariantie voor

$$I \equiv (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 - (x^{2'})^2 - (x^{3'})^2$$

Net als r^2 voor rotaties in R3

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Analoog zoeken we een uitdrukking als

$$\sum_{\mu=0}^3 x^{\mu} x^{\mu}$$

Hiervoor schrijven we de invariant I
als een dubbelsom

$$I = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$$

Met metrische tensor

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

CO- EN CONTRAVARIANTE VECTOREN

Contravariante viervector

$$x^\mu \text{ (index up)}$$

Covariante viervector

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu$$

Invariant

$$I = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad \Rightarrow \quad I = x_\mu x^\mu$$

Dit is de uitdrukking die we zochten.

De metriek is nu ingebouwd in de notatie!

Deze notatie wordt ook gebruikt voor niet-cartesische systemen en gekromde ruimten (Algemene Relativiteitstheorie)

VIERVECTOREN

Viervector a^μ (contravariant)
transformeert als x^μ

$$x^{\mu'} = \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu$$

$$a^{\mu'} = \Lambda^\mu_{\nu} a^\nu$$

We associeren hiermee een
covariante viervector

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$$

Ruimte componenten
krijgen een minteken

Ook geldt

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$$

Invariant

$$a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

Scalar product

$$a \cdot b \equiv a_\mu b^\mu$$



$$a \cdot b = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

Er geldt

$$a^2 \equiv a \cdot a = (a^0)^2 - \mathbf{a}^2$$

If $a^2 > 0$, a^μ is called *timelike*
If $a^2 < 0$, a^μ is called *spacelike*
If $a^2 = 0$, a^μ is called *lightlike*

SNELHEID

Snelheid van een deeltje t.o.v. het LAB: afstand gedeeld door tijd
(beide gemeten in het LAB)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

Proper snelheid: afstand in LAB gedeeld door eigentijd (gemeten met klok van het deeltje)

$$\boldsymbol{\eta} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$$

vierversnelheid

$$\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

Een hybride grootheid. Er geldt $\boldsymbol{\eta} = \gamma \mathbf{v}$

$$\eta^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d(ct)}{(1/\gamma)dt} = \gamma c$$



$$\eta^\mu = \gamma(c, v_x, v_y, v_z)$$

Er geldt

$$\eta_\mu \eta^\mu = \gamma^2(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) = \gamma^2 c^2 (1 - v^2/c^2) = c^2$$

IMPULS EN ENERGIE

Klassieke impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

Indien behouden in S dan niet in S'

Definieer relativistische impuls als

$$p^\mu = m\eta^\mu$$

Ruimtelijke componenten

$$\mathbf{p} = m\boldsymbol{\eta} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Tijdachtige component

$$p^0 = \gamma mc$$

Definieer relatv. energie

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \left. \vphantom{\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \right\} p^0 = \frac{E}{c}$$

Energie-impuls viervector

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right)$$



$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$$

ENERGIE

Taylor expansie levert

$$E = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) = mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} + \dots$$

Rustenergie van deeltje

Klassieke kinetische energie

Merk op dat enkel veranderingen in energie relevant zijn in de klassieke mechanica!

Relativistische kinetische energie

$$T \equiv mc^2(\gamma - 1) = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} + \dots$$

Massaloze deeltjes (snelheid altijd c)

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



$$E = |\mathbf{p}|c$$

$$E = h\nu$$

BOTSINGEN

Energie en impuls: behouden grootheden!

Merk op dat E en $\mathbf{p}$ niet (Lorentz) invariant zijn!

Massa is Lorentzinvariant

Massa m is geen behouden grootheid!

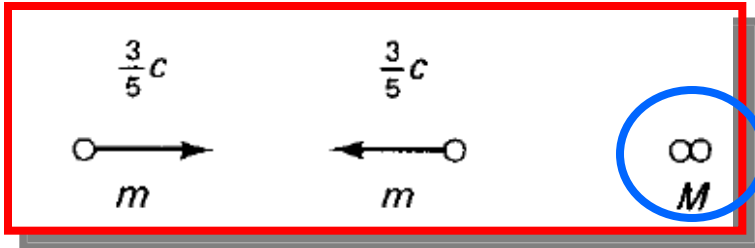
Relativistic Collisions

1. Energy is conserved, $E_A + E_B = E_C + E_D$.
 2. Momentum is conserved $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_C + \mathbf{p}_D$.
 3. Kinetic energy may or may not be conserved.
- $$\left. \begin{array}{l} 1. \text{ Energy is conserved, } E_A + E_B = E_C + E_D. \\ 2. \text{ Momentum is conserved } \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_C + \mathbf{p}_D. \end{array} \right\} \Rightarrow p_A^\mu + p_B^\mu = p_C^\mu + p_D^\mu$$

Types of Collisions (Relativistic)

- (a) *Sticky*: Kinetic energy decreases, rest energy and mass increase.
- (b) *Explosive*: Kinetic energy increases, rest energy and mass decrease.
- (c) *Elastic*: Kinetic energy, rest energy, and mass are conserved.

VOORBEELD 1



Massa's klonteren samen tot 1 object

begintoestand

eindtoestand

Energiebehoud

$$E_1 + E_2 = E_M$$

Impulsbehoud

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_M$$

Er geldt

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$$

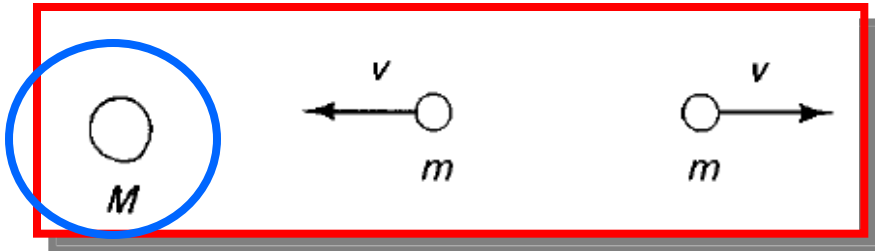
Na botsing is object in rust!

Energiebehoud levert

$$Mc^2 = 2E_m = \frac{2mc^2}{\sqrt{1 - (3/5)^2}} = \frac{5}{4}(2mc^2)$$

Na botsing hebben we een object met massa $M = 5m/2$. Massa is toegenomen: kinetische energie is omgezet in rustenergie en de massa neemt toe.

VOORBEELD 2



begintoestand

eindtoestand

Deeltje vervalst in 2 gelijke delen

Energiebehoud

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(zie vorige opgave)



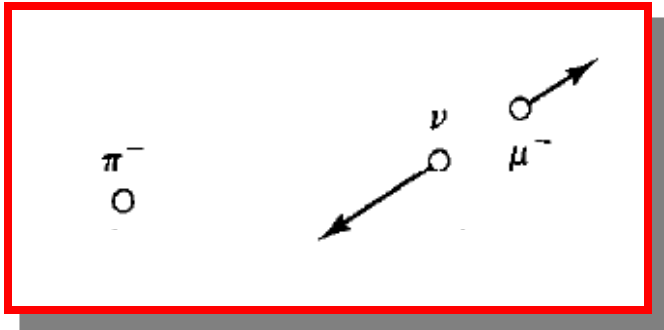
$$v = c \sqrt{1 - (2m/M)^2}$$

Heeft enkel betekenis als $M > 2m$

Men noemt $M = 2m$ de drempelenergie voor het verval.

Voor stabiele deeltjes is de bindingsenergie negatief. Bindingsenergie maakt net als alle andere interne energieën deel uit van de rustmassa.

VOORBEELD 3



Verval van een negatief pion (in rust): $\pi^- \rightarrow \nu + \mu^-$

Vraag: snelheid van het muon

Relatie tussen energie en impuls

$$E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4$$

Dit levert

$$\begin{aligned} E_\pi &= m_\pi c^2 \\ E_\mu &= c \sqrt{m_\mu^2 c^2 + \mathbf{p}_\mu^2} \\ E_\nu &= |\mathbf{p}_\nu| c = |\mathbf{p}_\mu| c \end{aligned}$$

Massa van neutrino is verwaarloosbaar!

Energiebehoud

$$m_\pi c^2 = c \sqrt{m_\mu^2 c^2 + \mathbf{p}_\mu^2} + |\mathbf{p}_\mu| c \quad \Rightarrow \quad (m_\pi c - |\mathbf{p}_\mu|)^2 = m_\mu^2 c^2 + \mathbf{p}_\mu^2$$

$$\Rightarrow \quad |\mathbf{p}_\mu| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c$$

VOORBEELD 3 – VERVOLG

$$|\mathbf{p}_\mu| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c$$

Gebruik

$$E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4$$

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2$$

Relatie tussen energie, impuls en snelheid

$$E = \gamma m c^2$$

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$$

$$\left. \begin{array}{l} E = \gamma m c^2 \\ \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \end{array} \right\} \mathbf{p}/E = \mathbf{v}/c^2$$

Snelheid van het muon

$$v_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} c$$

Invullen van de massa's levert $v_\mu = 0.271c$

VOORBEELD 3 – VIERVECTOREN

Energie en impulsbehoud

$$p_\pi = p_\mu + p_\nu \quad \Rightarrow \quad p_\nu = p_\pi - p_\mu$$

Kwadrateren levert

$$p_\nu^2 = p_\pi^2 + p_\mu^2 - 2p_\pi \cdot p_\mu$$

Merk op dat $p_\nu^2 = 0$; $p_\pi^2 = m_\pi^2 c^2$, $p_\mu^2 = m_\mu^2 c^2$; en $p_\pi \cdot p_\mu = \frac{E_\pi}{c} \frac{E_\mu}{c} = m_\pi E_\mu$

We vinden E_μ

$$0 = m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2m_\pi E_\mu$$

Evenzo

$$p_\mu = p_\pi - p_\nu \quad m_\mu^2 c^2 = m_\pi^2 c^2 - 2m_\pi E_\nu$$

Er geldt

$$E_\nu = |\mathbf{p}_\nu|c = |\mathbf{p}_\mu|c \quad \Rightarrow \quad 2m_\pi |\mathbf{p}_\mu| = (m_\pi^2 - m_\mu^2)c$$

Hiermee hebben we weer E_μ en $\mathbf{p}$ gevonden en weten we de snelheid.

GROEPTHEORIE

Groep G

1. $g_i \cdot g_j = g_k \in G$. Producten van elementen zijn ook elementen van de groep,
2. vermenigvuldiging is *associatief*, $(g_i \cdot g_j) \cdot g_k = g_i \cdot (g_j \cdot g_k)$,
3. het identiteits-element bestaat en is een element van de groep, $1 \in G$, $1 \cdot g_i = g_i \cdot 1 = g_i$,
4. de groep bevat een unieke inverse voor elk element, $g_i \in G \rightarrow g_i^{-1} \in G$, zodat $g_i \cdot g_i^{-1} = g_i^{-1} \cdot g_i = 1$.

We onderscheiden

$g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i$ (commutatief) een Abelse groep,
 $g_i \cdot g_j \neq g_j \cdot g_i$ (niet – commutatief) een niet – Abelse groep.

Eindige (of discrete) groep $n < \infty$

Kleinste groep (triviale groep) met $n = 1$ heeft enkel element $g = 1$

G met oneindig aantal elementen gespecificeerd door N parameters: $g = G(x_1, x_2, \dots, x_N)$

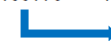
Compacte groep G : parameters zijn eindig

Lie groep G : de afgeleiden $\partial g / \partial x_i$ naar parameters bestaan

Definitie: het identiteits-element is de oorsprong van parameterruimte $g(0, 0, \dots, 0) \equiv 1$

Definitie: de generatoren $\left. \frac{\partial g}{\partial x_k} \right|_{x_i=0, \text{ all } j} \equiv X_k$ spannen vectorruimte op $\vec{X} = \sum_{k=1}^N c_k X_k$

Vectorproduct levert element $[X_k, X_l] \equiv X_k X_l - X_l X_k = C_{klm} X_m$



Structuurconstante(n)

LORENTZGROEP

Lorentztransformatie in matrixvorm $p^{\mu'} \equiv \Lambda^{\mu'}_{\nu} p^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$

Invariantie scalair product $p_1^{\mu'} p_{2\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} p_1^{\nu} g_{\mu\sigma'} \Lambda^{\sigma'}_{\delta} p_2^{\delta} = p_1^{\nu} g_{\nu\delta} p_2^{\delta} = p_1^{\nu} p_{2\nu} \rightarrow \Lambda^{\mu}_{\nu} g_{\mu\sigma} \Lambda^{\sigma}_{\delta} = g_{\nu\delta}$

In matrixnotatie $\Lambda^T g \Lambda = g$
 Er geldt $g^2 = 1, g = g^{-1} = g^T$ } $1 = g \Lambda^T g \Lambda \equiv \Lambda^{-1} \Lambda \rightarrow \Lambda^{-1} = g \Lambda^T g$

Unieke inverse bestaat

Achtereenvolgende transformaties leveren ook weer een element $\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_3$

De groep is niet-Abels $\Lambda_1 \Lambda_2 \neq \Lambda_2 \Lambda_1$

Elementen (de transformaties) vormen de Lorentzgroep $SO(3,1)$

De metriek behandelt de 3 ruimtelijke dimensies anders de 1 tijddimensie

4 x 4 reële matrices hebben 16 reële parameters

Er zijn echter 10 relaties vanwege $\Lambda^T g \Lambda = g$ Merk op $(\Lambda^T g \Lambda)^T = \Lambda^T g \Lambda$

De groep wordt beschreven door 6 = 16 – 10 parameters

We laten in de proper Lorentzgroep geen reflecties toe, en eisen ook $\det(\Lambda) = +1$

GENERATOREN LORENTZGROEP

6 parameters:

3 Euler rotatiehoeken (orthogonale transformaties die lengte 3-vector behouden)

3 boosts (hyperbolische rotaties die lengte 4-vector behouden)

Rotatie om z-as $\Lambda(\{x, y\}, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Boost langs z-as $\Lambda(\{t, z\}, y_u) = \begin{pmatrix} \cosh y_u & 0 & 0 & -\sinh y_u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh y_u & 0 & 0 & \cosh y_u \end{pmatrix}$

We schrijven transformatie als $\Lambda = e^L = 1 + L + \frac{L^2}{2} + \dots$

Generator L wordt geïttereerd tot volledige transformatie; L is reële 4 x 4 matrix

We staan enkel “proper” transformaties toe $\det(\Lambda) = e^{\text{Tr}(L)} = 1 \rightarrow \text{Tr}(L) = 0$

L is traceless en reëel. Ook geldt $\Lambda^T = e^{L^T} = 1 + L^T + \frac{L^T L^T}{2} + \dots$

GENERATOREN LORENTZGROEP

Inverse $\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g = e^{-L} = g \left(1 + L^T + \frac{L^T L^T}{2} + \dots \right) g = gg + gL^T g + \frac{gL^T ggL^T g}{2} + \dots = e^{gL^T} g$

Neem logaritme en gebruik $g = g^{-1} = g^T \longrightarrow gL^T g = -L \rightarrow L^T g = (gL)^T = -gL$

Dus gL spoorloos en L spoorloos en mixed symmetry

Er geldt
$$L = \begin{pmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Boosts L_{01}, L_{02} en L_{03} en rotaties L_{12}, L_{13} en L_{23}

We kiezen als basis in parameterruimte

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In de eerste rij herkennen we de rotatiematrices

GENERATOREN LORENTZGROEP

Elke S_i^2 is diagonaal (2 keer -1), elke K_i^2 ook diagonaal (2 keer +1)

Verder $S_i^3 = -S_i$ en $K_i^3 = K_i$

$$S_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad K_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definieer de vectoren $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, en $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ (de 6 parameters!)

Producten

$$\vec{\theta} \cdot \vec{S} \equiv \theta_1 S_1 + \theta_2 S_2 + \theta_3 S_3$$

$$\vec{y} \cdot \vec{K} = y_1 K_1 + y_2 K_2 + y_3 K_3$$

Dan geldt

$$(\vec{\theta} \cdot \vec{S})^3 = -\vec{\theta} \cdot \vec{S} |\vec{\theta}|^2$$

$$(\vec{y} \cdot \vec{K})^3 = -\vec{y} \cdot \vec{K} |\vec{y}|^2$$

Expandeer nu $\Lambda = e^L = 1 + L + \frac{L^2}{2} + \dots$ met $L = -\vec{\theta} \cdot \vec{S} - \vec{y} \cdot \vec{K}$

Voor Lie groep geldt $\left. \frac{\partial \Lambda(\vec{\theta}, \vec{y})}{\partial \theta_k} \right|_{\vec{\theta}=0, \vec{y}=0} \equiv -S_k$, en $\left. \frac{\partial \Lambda(\vec{\theta}, \vec{y})}{\partial y_l} \right|_{\vec{\theta}=0, \vec{y}=0} \equiv -K_l$

Lie algebra $[S_1, S_2] = S_3$, $[S_2, S_3] = S_1$ en $[K_1, K_2] = -S_3$, $[S_1, K_2] = K_3$

ROTATIE OM Z-AS

Kies parameters $\vec{\theta} = (0, 0, \phi)$ en $\vec{y} = (0, 0, 0)$

We hadden $\Lambda = e^L = 1 + L + \frac{L^2}{2} + \dots$ met $L = -\vec{\theta} \cdot \vec{S} - \vec{y} \cdot \vec{K}$

$$\text{Dan } -\vec{\theta} \cdot \vec{S} = -\phi S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi & 0 \\ 0 & -\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Verder } (-\vec{\theta} \cdot \vec{S})^2 = \phi^2 S_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ en } (-\vec{\theta} \cdot \vec{S})^3 = -\phi^2(-\phi S_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi^3 & 0 \\ 0 & \phi^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Exponentiatie } e^{-\phi S_3} = -S_3 \left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \dots \right) - S_3^2 \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \dots \right) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dit levert } e^{-\phi S_3} = -S_3 \sin \phi - S_3^2 \cos \phi + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dit levert de bekende rotatie Λ om de z-as

BOOST LANGS Z-AS

Kies parameters $\vec{\theta} = (0, 0, 0)$ en $\vec{y} = (0, 0, y_u)$

We hadden $\Lambda = e^L = 1 + L + \frac{L^2}{2} + \dots$ met $L = -\vec{\theta} \cdot \vec{S} - \vec{y} \cdot \vec{K}$

Dan $-\vec{y} \cdot \vec{K} = -y_u K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -y_u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_u & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Verder $(-\vec{y} \cdot \vec{K})^2 = y_u^2 K_3^2 = \begin{pmatrix} y_u^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_u^2 \end{pmatrix}$, en $(-\vec{y} \cdot \vec{K})^3 = -y_u^2(-y_u K_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -y_u^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_u^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exponentiatie $e^{-y_u K_3} = -K_3 \left(y_u - \frac{y_u^3}{3!} + \dots \right) + K_3^2 \left(1 - \frac{y_u^2}{2!} + \dots \right) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dit levert $e^{-y_u K_3} = -K_3 \sinh y_h + K_3^2 \cosh y_u + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh y_u & 0 & 0 & -\sinh y_u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh y_u & 0 & 0 & \cosh y_u \end{pmatrix}$

Dit levert de bekende boost Λ langs de z-as