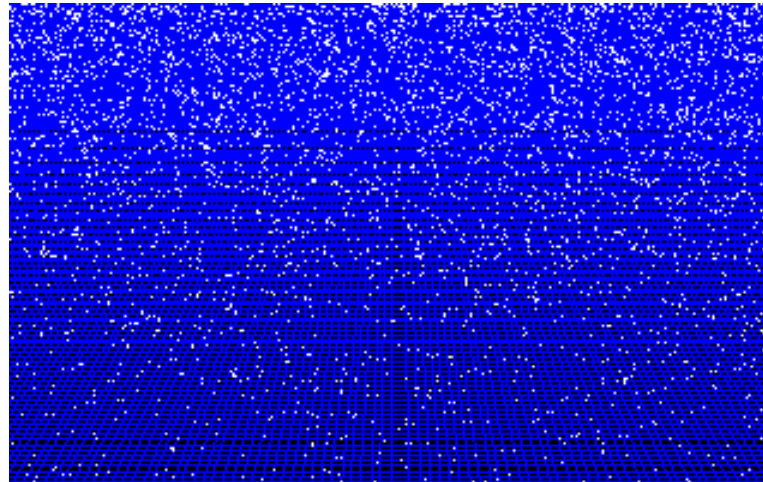


Algemene relativiteitstheorie

HOVO cursus



Jo van den Brand

Les 1: 5 november 2015

Copyright (C) Vrije Universiteit 2015

Overzicht

- **Docent informatie**
 - Jo van den Brand, Gideon Koekoek
 - Email: jo@nikhef.nl, gkoekoek@gmail.com
 - 0620 539 484 / 020 598 7900
 - Kamer: T2.69
- **Rooster informatie**
 - Hoorcollege: dinsdag 13:30 – 15:15, HG-0G30 (totaal 5 keer)
- **Boek en website**
 - Dictaat: in ontwikkeling ...
 - Zie website URL: www.nikhef.nl/~jo
- **Response op college**

Inhoud

- **Speciale relativiteitstheorie**

- Inertiaalsystemen
- Bewegende waarnemers
- Relativiteitsprincipe

- **Ruimtetijd**

- Minkowski ruimtetijd
- Tensoren

- **Gekromde ruimtetijd**

- Algemene coördinaten
- Covariante afgeleide

- **Algemene relativiteitstheorie**

- Einsteinvergelijkingen
- Newton als limiet

- **Toepassingen ART**

- Zwarte gaten
- Kosmologie
- Gravitatiestraling

Relatieve beweging

Einstein 1905:

Alle natuurwetten blijven dezelfde (zijn invariant) voor alle waarnemers die eenparig rechtlijnig t.o.v. elkaar bewegen.

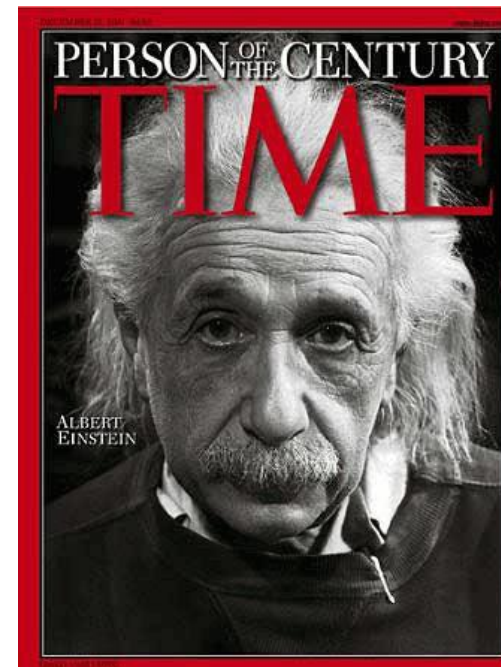
De lichtsnelheid is invariant – heeft voor alle waarnemers dezelfde waarde.

Inertiaalsysteem: objecten bewegen in rechte lijnen als er geen krachten op werken (Newtons eerste wet).

Indien een systeem met constante snelheid t.o.v. een inertiaalsysteem beweegt, dan is het zelf ook een inertiaalsysteem.

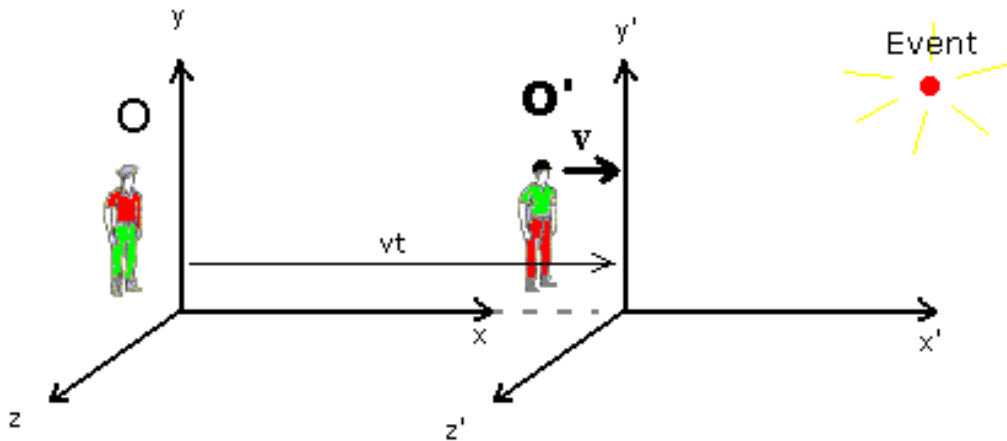


Einstein 1921



Lorentztransformaties

Transformaties laten *lichtsnelheid* invariant



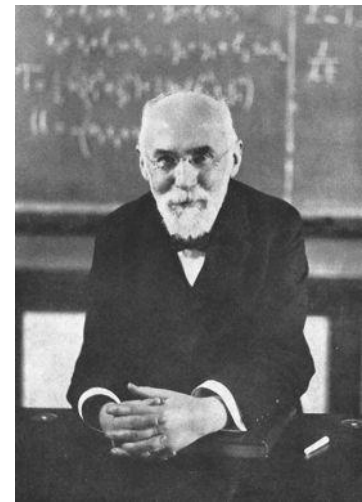
Lorentz 1902

Waarnemers in O en O' bewegen met snelheid v t.o.v. elkaar.
Systemen vallen samen op $t = t' = 0$.

Waarnemer in S kent (x, y, z, t) toe aan het event.

Waarnemer in S' kent (x', y', z', t') toe aan hetzelfde event

Wat is het verband tussen de coördinaten voor dit zelfde event?



Lorentztransformaties

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ \gamma &\equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\end{aligned}$$

Lorentztransformatie

$$\begin{aligned}x &= \gamma(x' + vt') \\y &= y' \\z &= z' \\t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)\end{aligned}$$

Inverse transformatie
(snelheid v verandert van teken)

Relativiteit van gelijktijdigheid

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Stel dat in systeem O twee events, A en B, op dezelfde tijd, $t_A = t_B$, gebeuren, maar op verschillende plaatsen, $x_A \neq x_B$.

Invullen levert

$$t'_A = t'_B + \frac{\gamma v}{c^2} (x_B - x_A)$$

Events vinden niet simultaan plaats in systeem O'

Waarnemers O en O' hebben verschillend besef van wat het “nu” is

In 1905 werkt Einstein nog met verschillende tijden en 3D ruimten voor beide waarnemers en gebruikt de Lorentztransformaties om de ervaringen (meetgegevens) van beide waarnemers te relateren

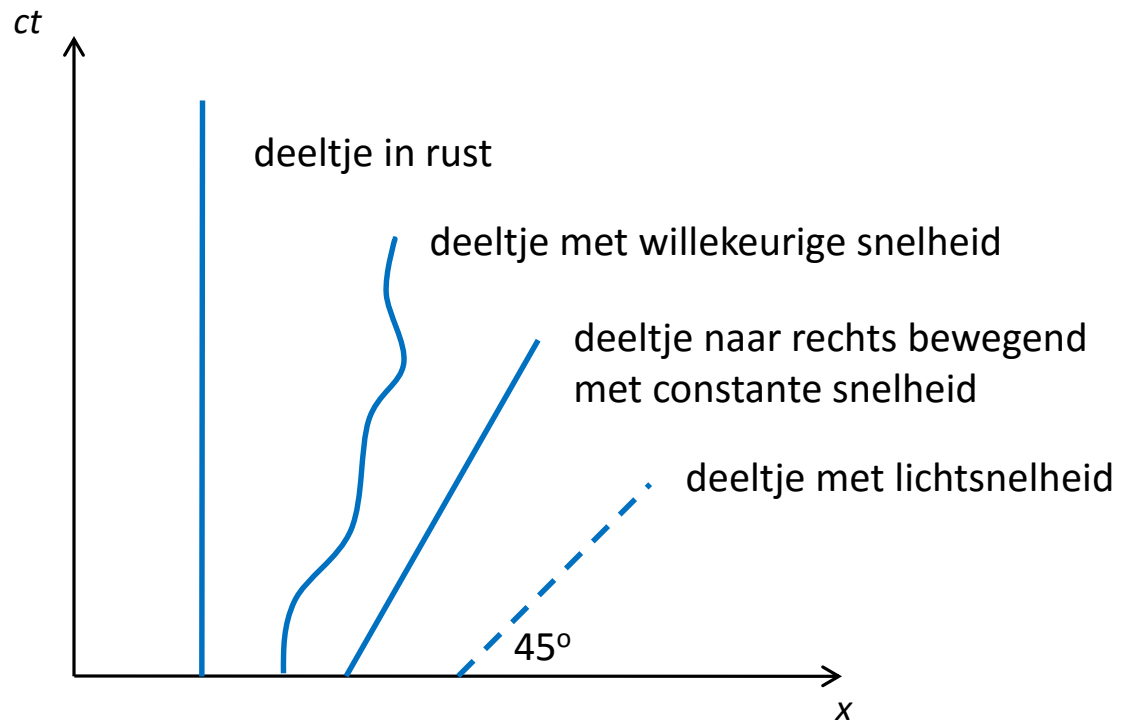
Er bestaan oneindig veel van deze inertiale waarnemers en evenveel tijden en 3D ruimten

Er is één enkele ruimtetijd in de SRT

In 1908 introduceerde Minkowski het begrip ruimtetijd: een vierdimensionale wereld

Het belang van *fotonen* m.b.t. structuur van ruimtetijd:
empirisch vastgestelde *universaliteit van de voortplanting* in vacuüm

Onafhankelijk van
bewegingstoestand van de bron
golflengte
intensiteit
polarisatie van EM golven



Minkowski-ruimte – inproduct

We kennen de vector $\overrightarrow{PQ}$ toe aan de geordende events P en Q

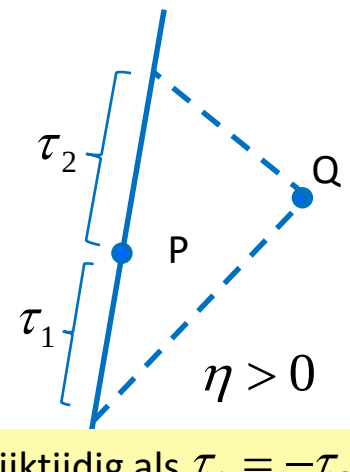
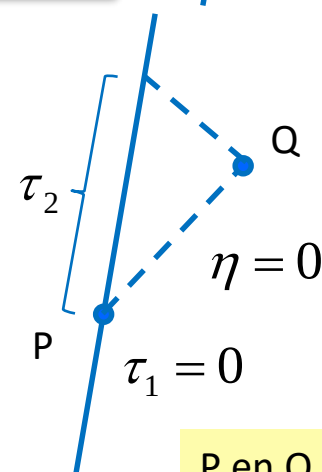
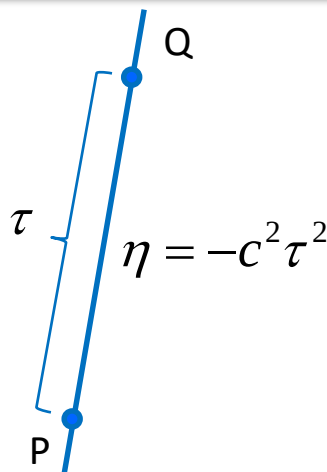
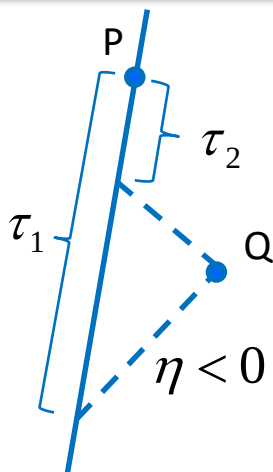
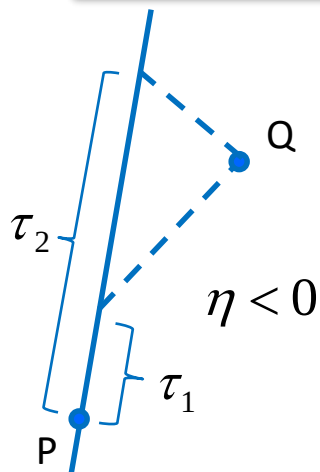
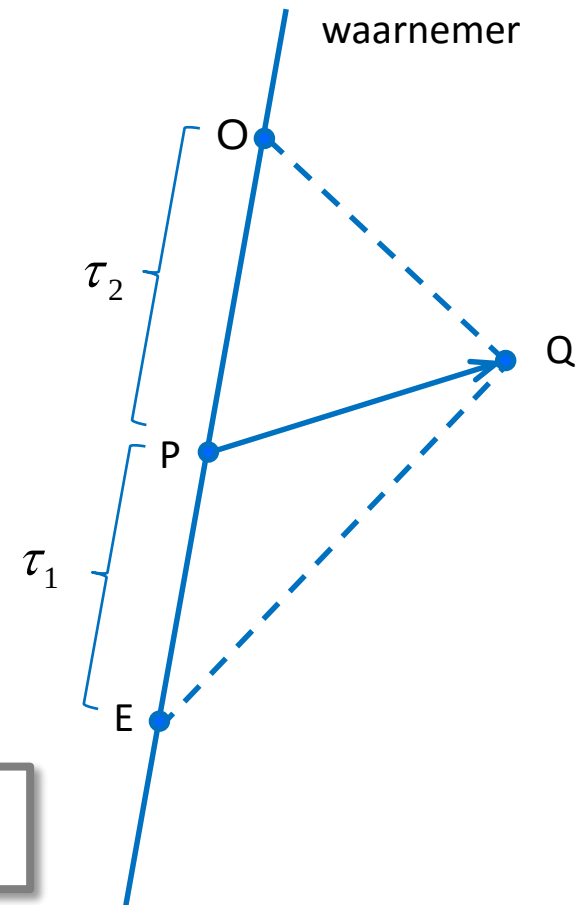
Definitie: $\eta(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) \equiv -c^2 \tau_1 \tau_2$

Afspraak:

tijden voor P negatief

tijden na P positief

Dankzij het bestaan van een metriek (inproduct) kunnen we nu afstanden bepalen. Ruimtetijd heeft een metriek



P en Q gelijktijdig als $\tau_1 = -\tau_2$

Lorentzinvariantie Minkowski-metriek

Dat wil zeggen $\eta(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ})$ is onafhankelijk van de inertiele waarnemer door P

Definitie: $\eta(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) \equiv -c^2 \tau_1 \tau_2$

Met afspraak over het teken!

Volgens A: $\eta(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) = c^2 \tau_1 \tau_2$

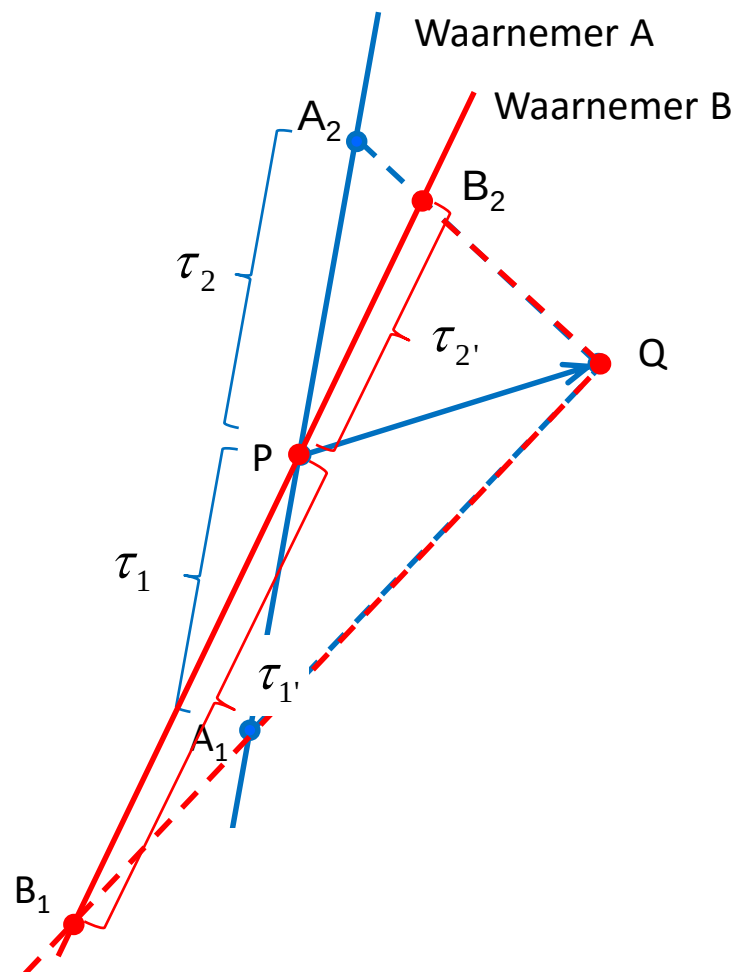
Volgens B: $\eta(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) = c^2 \tau_1' \tau_2'$

Er geldt $\tau_{PA_1} = k^{-1} \tau_{PB_1} \rightarrow \tau_1 = k^{-1} \tau_1'$

$\tau_{PA_2} = k \tau_{PB_2} \rightarrow \tau_2 = k \tau_2'$

➡ $\tau_1 \tau_2 = \tau_1' \tau_2'$

Scalair product is Lorentzinvariant



Lorentzcoördinaten

Definieer basisvector $\vec{e}_0 = \overrightarrow{OE}$

Er geldt $\eta(\vec{e}_0, \vec{e}_0) = -1$

E is verzameling puntgebeurtenissen die
gelijktijdig zijn met O (t.o.v. A)

Dat is de 3-dim euclidische ruimte op $\tau = 0$ t.o.v. A

E_τ is verzameling puntgebeurtenissen die
gelijktijdig zijn met τ

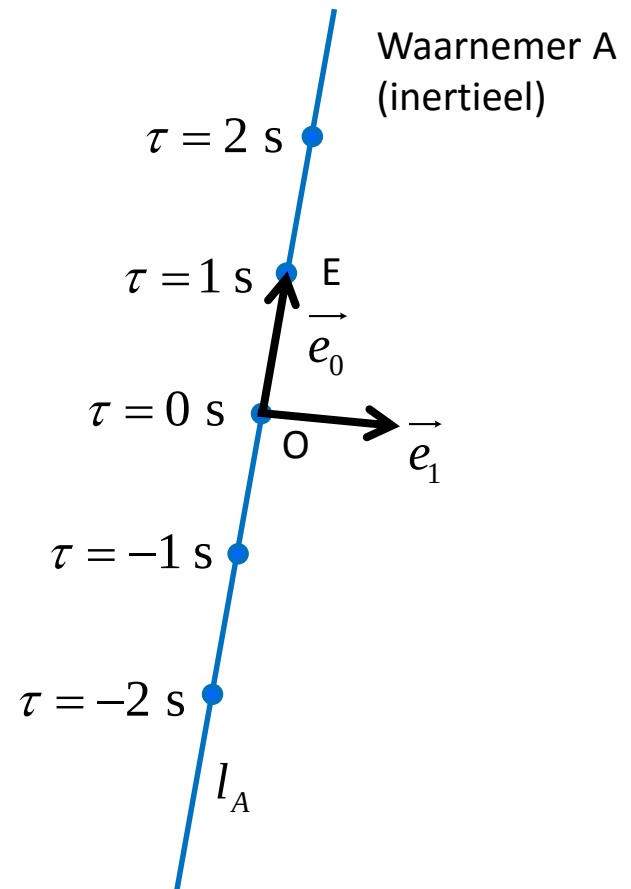
$$\longrightarrow M = \bigcup_{\tau} E_{\tau}$$

Er geldt $Q \in E \Rightarrow \langle \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OQ} \rangle = 0 \quad (l_A \perp E)$

Orthonormaal stelsel vectoren $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$
in E met beginpunt O

Er geldt $\eta(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1$ en $\eta(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$

En ook $\eta(\vec{e}_0, \vec{e}_i) = 0$



Minkowski meetkunde

Basisvectoren $\vec{e}_\mu$ met $\mu = 0, 1, 2, 3$
We hebben gevonden dat $\eta(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \begin{cases} -1 & \text{als } \mu = \nu = 0 \\ 1 & \text{als } \mu = \nu = i \\ 0 & \text{overige gevallen} \end{cases}$

Nieuw symbool $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



Minkowskimetrik $\eta(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \eta_{\mu\nu}$

Inverse $\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Het invariante lijnelement $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

Notatie bevat metriek en coördinaten

Voor cartesische coördinaten

Lijnelement uitschrijven $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

Dezelfde tijd: Ruimtelijke termen: Stelling van Pythagoras

Dezelfde plaats: *het lijnelement is een maat voor de tijd verstreken tussen twee gebeurtenissen voor een waarnemer die in rust is ten opzichte van deze gebeurtenissen*

Dan geldt $ds^2 = -c^2 d\tau^2$

Minkowski-ruimte

- Ruimtetime geometrie

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2$$

Welke zijde van driehoek ABC is het langst? Welk de kortste? Wat zijn de lengten?

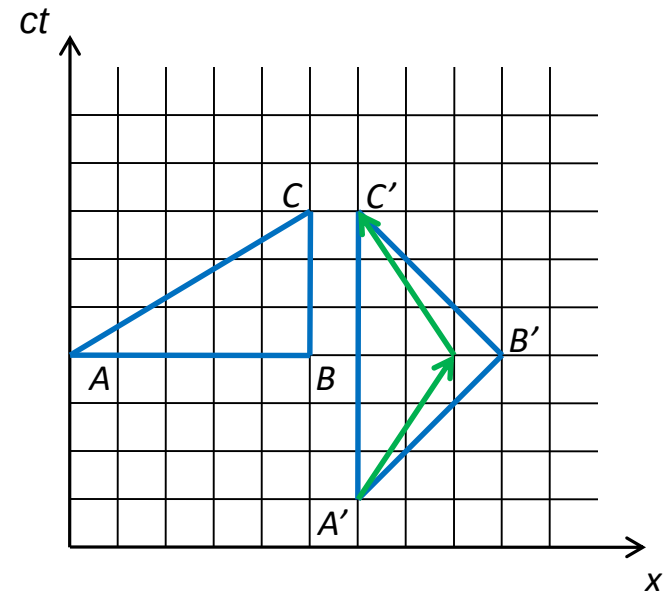
$$|AB| = 5, |BC| = 3, |AC| = \sqrt{-3^2 + 5^2} = 4$$

Wat is het kortste pad tussen punten A en C? De rechte lijn tussen A en C, of het pad ABC?

Rechte pad AC is kortste pad tussen A en C

Idem voor driehoek A'B'C'

$|A'B'| = |B'C'| = \sqrt{-3^2 + 3^2} = 0$ en $|A'C'| = 6$
Pad is A'B'C' met lengte 0.



$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 = 0$$

$$\rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = c$$

Tweelingparadox

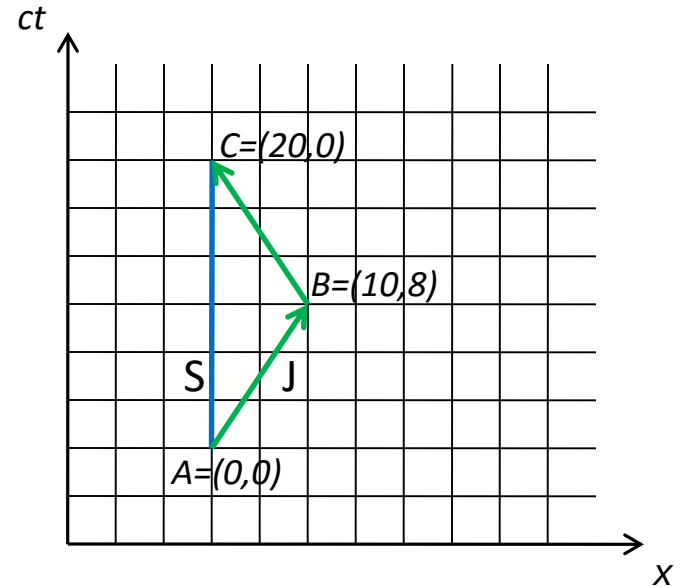
$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 = -(c\Delta \tau)^2$$

Tweelingparadox

Smith en Jones zijn tweelingen, beiden 30 jaar oud. Jones vliegt naar Sirius en reist met $8/10$ van de lichtsnelheid. Als hij Sirius bereikt, komt hij meteen terug.

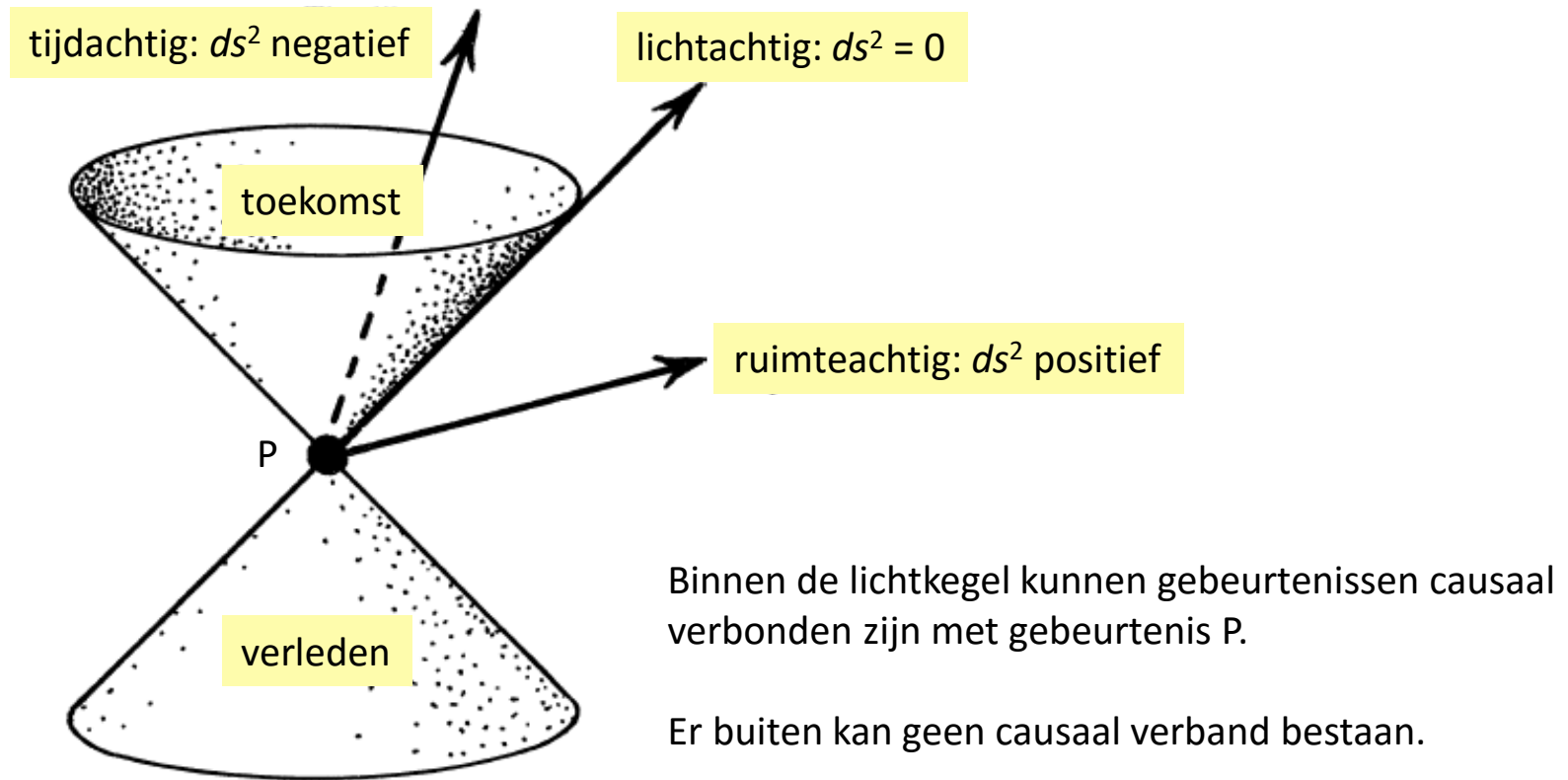
Jones, gaat snel, maar Sirius is ver. Jones is 20 jaar weg en als hij terugkeert is Smith 50.

Hoe oud is Jones?



$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 = -(c\Delta \tau)^2$$

Minkowskiruimte: causale structuur

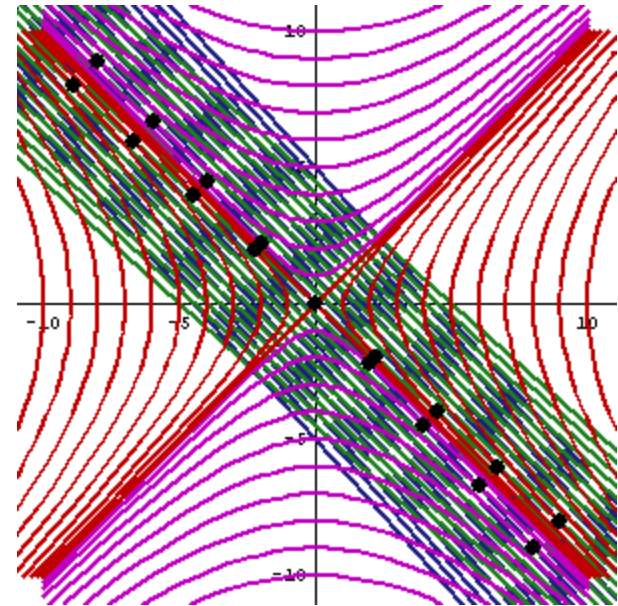
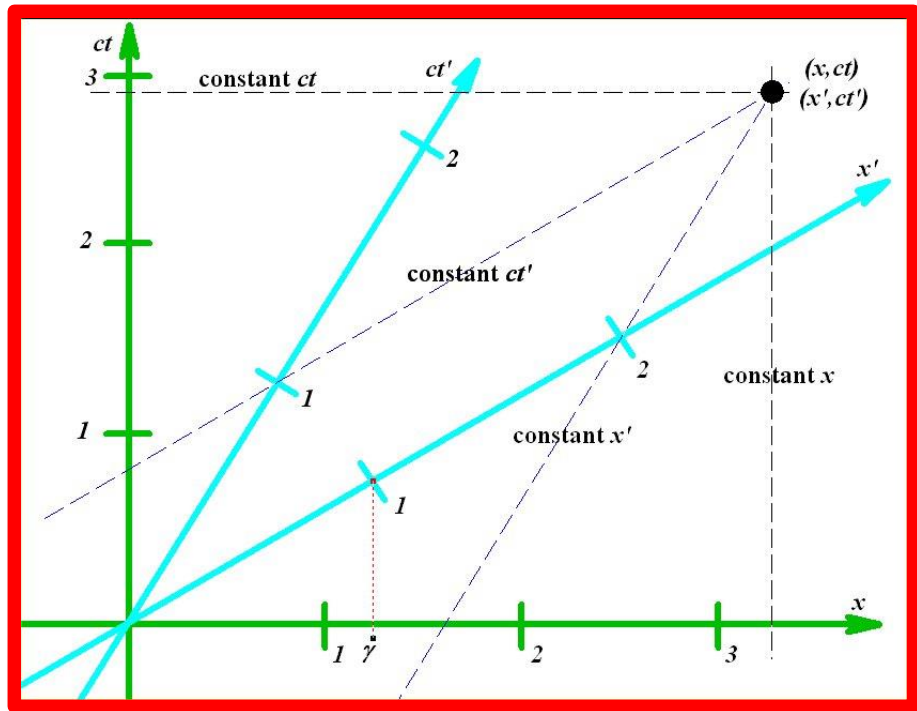


Minkowski-ruimte

- Bewegende waarnemers

$$s^2 = -c^2 t^2 + x^2 \quad ct' = \gamma \left(ct - \frac{v}{c} x \right)$$

$$x' = \gamma (x - vt)$$



Voor de x' as: stel $ct' = 0$. Dan volgt $ct = \beta x$.

Voor de schaal op de x' as: stel $x' = 1$ en $ct' = 0$.
Dan volgt $x = \gamma$.

Voor de ct' as: stel $x' = 0$. Dan volgt $ct = x/\beta$.

Voor de schaal op de ct' as: stel $ct' = 1$ en $x' = 0$.
Dan volgt $ct = \gamma$.

Minkowski ruimtetijd

Gebeurtenis (event) 1 heeft coördinaten

Waarnemer O : (ct_1, x_1)

Waarnemer O' : (ct'_1, x'_1)

Lees (ct'_1, x'_1) in O' af door lijnen // aan ct' en x' assen te trekken

Voor waarnemer O' gebeurt event 1 op dezelfde tijd als event 2 en op dezelfde plaats als event 3

Voor waarnemer O is de volgorde van de events: 0, 2, 3, 1

Voor waarnemer O' is de volgorde van de events: 0 en 3 gelijktijdig, dan 1 en 2 gelijktijdig

Volgorde voor gebeurtenissen 2 en 3 is verschillend voor beide waarnemers

Dit lijkt schokkend: het kan ons begrip van causaliteit omver werpen

De SRT respecteert causaliteit mits we geen signalen met snelheden $> c$ toestaan!

Lichtkegels zijn van groot belang: event 2 in kegel van 0, en 1 in kegel van 3

