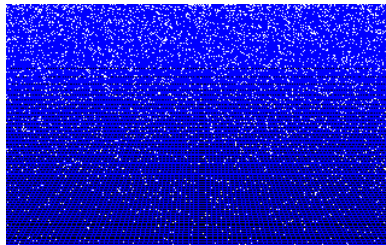


Gravitatie en kosmologie

FEW Cursus



Jo van den Brand & Joris van Heijningen
Speciale relativiteitstheorie: 6 oktober 2015

Copyright (C) Vrije Universiteit 2009

Inhoud

- **Inleiding**
 - Overzicht
- **Klassieke mechanica**
 - Galileo, Newton
 - Lagrange formalisme
- **Quantumfenomenen**
 - Neutronensterren
- **Wiskunde I**
 - Tensoren
- **Speciale relativiteitstheorie**
 - Minkowski
 - Ruimtetijsdiagrammen
 - Lagrangiaan en EM
- **Wiskunde II**
 - Algemene coördinaten
 - Covariante afgeleide
- **Algemene relativiteitstheorie**
 - Einsteinvergelijkingen
 - Newton als limiet
- **Kosmologie**
 - Friedmann
 - Inflatie
- **Gravitatiestraling**
 - Theorie
 - Experiment

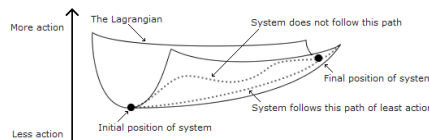


Formalisme van Lagrange

Lagrangiaan van een deeltje $L(x(t), v(t)) = K(x(t), v(t)) - V(x(t), v(t))$

Voor de actie geldt $S = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), v(t)) dt$

Deeltje volgt het pad waarvoor de waarde van S een extreme waarde is



We beschouwen een deeltje dat beweegt onder invloed van een kracht $\vec{F} \equiv -\nabla V$

Voor de kinetische energie geldt $K = \frac{1}{2}mv^i v_i$ met $v^i \equiv \frac{dx^i(t)}{dt}$

Lagrangiaan $L = \frac{1}{2}mv^i(t)v_i(t) - V(x(t)) \rightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2}mv^i(t)v_i(t) - V(x(t)) \right\} dt$

We zoeken het pad waarvoor geldt $S + \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \{L(x(t) + \delta x(t), v(t) + \delta v(t))\} dt$
 $\delta S = 0$

Omdat δx klein is, benaderen we L met een Taylor expansie rond $\delta x(t) = 0$ en $\delta v(t) = 0$

Dat geeft $L(x(t) + \delta x(t), v(t) + \delta v(t)) \approx L(x(t), v(t)) + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial v} \delta v$

Formalisme van Lagrange

We hebben dus $L(x(t) + \delta x(t), v(t) + \delta v(t)) \approx L(x(t), v(t)) + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial v} \delta v$

Dit levert $\delta S \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial v} \delta v \right\} dt$

Partieel integreren levert $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) \right\} \delta x(t) dt + \frac{\partial L}{\partial v} \delta x(t) \Big|_{t_1}^{t_2}$

Merk op dat geldt $\delta x(t_1) = 0$ en $\delta x(t_2) = 0$

Hiermee vinden we de Euler-Lagrange vergelijkingen $\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right)$

Toegepast op onze Lagrangiaan $L = \frac{1}{2}mv^i(t)v_i(t) - V(x(t))$ geeft $-\frac{\partial V}{\partial x^i} = m \frac{dv^i}{dt}$

De impuls volgt uit de Lagrangiaan als $p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i} \rightarrow \vec{p} = m\vec{v}$

De energie volgt uit de Lagrangiaan als $E = \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) v - L = (mv)v - \left(\frac{1}{2}mv^2 - V(x) \right)$
 $= \frac{1}{2}mv^2 + V(x).$

Lagrangiaan en actie in SRT

Lagrangiaan van een vrij deeltje $L = K$

Klassieke mechanica $K = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$

We kunnen dit schrijven als $L = K = \frac{1}{2}m \frac{dx^i}{dt} \frac{dx_i}{dt}$ (met $i = 1, 2, 3$)

We kunnen dit niet gebruiken in de SRT omdat zowel de dx^i als dt systeem afhankelijk zijn

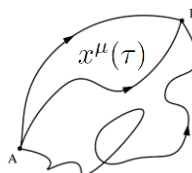
We proberen $\left. \begin{array}{ll} dx^i dx_i & \rightarrow dx^\mu dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ dt dt & \rightarrow d\tau^2 \end{array} \right\} L = \frac{1}{2}m\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$

Merk op: dit is een *aanname* en dus geen bewijs van de geldigheid van deze uitdrukking

Voor de actie geldt

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \frac{1}{2}m\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right\} d\tau$$

We zoeken het pad van het deeltje $x^\mu(\tau)$



Lagrangiaan en actie in SRT

Euler-Lagrange vergelijkingen $\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial (\frac{dx^\alpha}{d\tau})} \right)$

Dit zijn vier gekoppelde partiële differentiaalvergelijkingen

Invullen van onze Lagrangiaan $L = \frac{1}{2}m\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \rightarrow m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$

Dit lijkt op de tweede wet van Newton voor een vrij deeltje

Newton geeft informatie over *drie* plaatscoördinaten. We hebben nu *vier* vergelijkingen

Voor $\mu = 0$ vinden we $m \frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$

Dit betekent dat $\frac{dt}{d\tau}$ een constante is. Het verschil is de Lorentzfactor γ

Voor $\mu = i$ vinden we $m\gamma^2 \frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} = 0$

$$\rightarrow m\gamma^2 \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \equiv \frac{m}{1 - (\frac{v}{c})^2} \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \approx m \left(1 + \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \approx m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = 0$$

We vinden voor relatief lage snelheden weer de tweede wet van Newton

Lagrangiaan en actie in SRT

$$\left. \begin{array}{l} \text{Relativistische impuls } p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\alpha}{d\tau}} = m \frac{dx^\nu}{d\tau} \eta_{\alpha\nu} \\ \text{Contraheer beide zijden met } \eta^{\mu\alpha} \end{array} \right\} p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} = mu^\mu$$

$$\text{Er geldt } p^\alpha = m\gamma \frac{dx^\alpha}{dt}$$

$$\text{Voor de } 0\text{-component geldt } p^0 = \gamma mc$$

$$\begin{aligned} \text{Voor lage snelheden vinden we } p^0 c &= mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ &\approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = mc^2 + K \end{aligned}$$

$$\text{Voor } K = 0 \text{ geldt } \boxed{E = mc^2}$$

Covariante Lagrangiaan en actie in SRT

Eisen die we stellen aan de actie van een relativistisch systeem

- een scalaire grootheid: zodat hij invariant is onder Lorentztransformaties
- een integraal waarvan de integrand een eerste-orde differentiaal is

De enige grootheid die aan beide criteria voldoet is het ruimtetijd-interval ds

$$\text{We schrijven de actie dus als } S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} -mc^2 d\tau$$

$$\text{Voor de eigentijd geldt } ds^2 = -c^2 d\tau^2$$

$$\text{We minimaliseren het ruimtetijd interval } S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} -mc^2 d\tau = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-ds^2}$$

Het pad dat we op deze wijze vinden noemen we een *geodeet*

We herschrijven het nu als een integraal over de eigentijd

$$S = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-ds^2} = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{\frac{-ds^2}{d\tau^2}} d\tau = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-v_\mu v_\mu} d\tau$$

PS. Hoe hebben we hier de Minkowski-metrik gedefinieerd?

Elektrodynamica in SRT

Kracht in SRT

We eisen *covariantie* in SRT: dat de natuurkundige wetten (*e.g.* Maxwellvergelijkingen) dezelfde vorm hebben in alle inertiaalsystemen

Vierimpuls $[P^\mu] = m[U^\mu] = (\gamma(v)mc, \gamma(v)mv_x, \gamma(v)mv_y, \gamma(v)mv_z)$

$$[P^\mu] \equiv (P^0, P^1, P^2, P^3) = (E/c, \mathbf{p})$$

Er geldt $P'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} E'(v)/c \\ p'_x(v) \\ p'_y(v) \\ p'_z(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(V) & -\gamma(V)V/c & 0 & 0 \\ -\gamma(V)V/c & \gamma(V) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(v)/c \\ p_x(v) \\ p_y(v) \\ p_z(v) \end{pmatrix}$$

$$\text{Vierkracht } [F^\mu] = \left[\frac{dP^\mu}{d\tau} \right] = \left(\frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau}, \frac{dp_x}{d\tau}, \frac{dp_y}{d\tau}, \frac{dp_z}{d\tau} \right) \Bigg\} \\ F^0 = \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau} = \frac{\gamma(v)}{c} \frac{dE}{dt}$$

$$\text{Kracht drievector } \mathbf{f} \quad \Rightarrow [F^\mu] = \left[\frac{dP^\mu}{d\tau} \right] = \left(\frac{\gamma}{c} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \gamma f_x, \gamma f_y, \gamma f_z \right) = \left(\frac{\gamma}{c} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \gamma \mathbf{f} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Transformeert als } F'^0 &= \gamma(V)(F^0 - VF^1/c), \\ F'^1 &= \gamma(V)(F^1 - VF^0/c), \\ F'^2 &= F^2, \\ F'^3 &= F^3. \end{aligned}$$

Merk op: v en V

Behoud van lading in SRT

$$\left. \begin{array}{l} \text{Continuïteitsvergelijking} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0 \\ \text{Vierstroomdichtheid} \quad [J^\mu] \equiv (J^0, J^1, J^2, J^3) = (c\rho, J_x, J_y, J_z) \end{array} \right\} \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial J^\nu}{\partial x^\nu} = 0$$

$$J^\mu_{;\mu} = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Coulombkracht} \quad \mathbf{f} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 d^2} \hat{\mathbf{d}} \\ \text{Elektrisch veld} \quad \mathbf{E} = \mathbf{f}/q \end{array} \right\} \mathbf{f} = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

$$\text{Magnetische kracht} \quad \mathbf{f} = q\mathbf{v} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

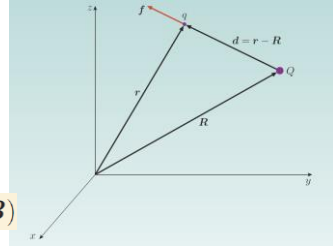
$$\text{Magnetisch veld} \quad \mathbf{f} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

$$\text{Combineren levert de Lorentzkracht} \quad \mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

In componenten

$$\begin{aligned} f_x &= q(\mathcal{E}_x + v_y B_z - v_z B_y) \\ f_y &= q(\mathcal{E}_x + v_z B_x - v_x B_z) \\ f_z &= q(\mathcal{E}_z + v_x B_y - v_y B_x) \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ \mathcal{E}_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ \mathcal{E}_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

We willen dit nu in manifest covariante vorm schrijven



Lorentzkracht in SRT

$$\text{We hadden} \quad \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ \mathcal{E}_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ \mathcal{E}_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\text{Introduceer elektromagnetisch tensor, of veld tensor, of ook wel Faraday tensor genaamd} \quad [F^{\mu\nu}] \equiv \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{E}_x/c & -\mathcal{E}_y/c & -\mathcal{E}_z/c \\ \mathcal{E}_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ \mathcal{E}_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ \mathcal{E}_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Er geldt} \quad F'^{\mu\nu} = \sum_{\alpha, \beta=0}^3 \Lambda^\mu_{\alpha} \Lambda^\nu_{\beta} F^{\alpha\beta}$$

$$\text{Ook geldt} \quad F^\mu_{\beta} = \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\beta\nu} F^{\mu\nu} \rightarrow F_{\alpha\beta} = \sum_{\mu=0}^3 \eta_{\alpha\mu} F^\mu_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_x/c & \mathcal{E}_y/c & \mathcal{E}_z/c \\ -\mathcal{E}_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -\mathcal{E}_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -\mathcal{E}_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Beschouw} \quad F^\mu = q \sum_{\nu=0}^3 F^{\mu\nu} U_\nu$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} (\gamma(v)/c) \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \\ \gamma(v) f_x \\ \gamma(v) f_y \\ \gamma(v) f_z \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{E}_x/c & -\mathcal{E}_y/c & -\mathcal{E}_z/c \\ \mathcal{E}_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ \mathcal{E}_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ \mathcal{E}_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ -\gamma(v) v_x \\ -\gamma(v) v_y \\ -\gamma(v) v_z \end{pmatrix}$$

$$\text{Eerste rij levert de arbeid die verricht wordt door de Lorentzkracht} \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

Elektrodynamica

Maxwellvergelijkingen $\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi \mathbf{j}, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$
 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$

Faraday tensor $F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & B^z & -B^y \\ -E^y & -B^z & 0 & B^x \\ -E^z & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix}$

Er geldt $\mathbf{E} = (E^x, E^y, E^z) = (F^{01}, F^{02}, F^{03})$
 $\mathbf{B} = (B^x, B^y, B^z) = (F^{23}, F^{31}, F^{12})$

Stroom viervector $\mathbf{J} = (\rho, j^x, j^y, j^z)$

Maxwellvergelijkingen $F^{\mu\nu}_{,\nu} = 4\pi J^\mu$
 $F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0, \quad F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}F^{\alpha\beta}$

Continuïteitsvergelijking $J^\mu_{,\mu} = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$

Volgt uit $4\pi J^\mu_{,\mu} = F^{\mu\nu}_{,\nu\mu} = F^{\nu\mu}_{,\mu\nu} = -F^{\mu\nu}_{,\nu\mu} \rightarrow F^{\mu\nu}_{,\nu\mu} = 0 \rightarrow J^\mu_{,\mu} = 0$

Elektrodynamica

Lorentztransformaties $F^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_{\alpha}\Lambda^\nu_{\beta}F^{\alpha\beta}$

We vinden $\mathbf{E}_{\parallel} = E^x$ onveranderd, terwijl $\mathbf{E}_{\perp} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

Vierkracht $K^\mu = qF^{\mu\nu}U_\nu = q\gamma(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

Nul-component: arbeid verricht door deze kracht per tijdseenheid

Ruimtelijke-componenten: Lorentzkracht

Schrijf $\mathbf{J} = q\mathbf{U}$

Dan geldt $K^\mu = -T^{\mu\nu}_{,\nu}$ met $T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\alpha}F^\nu_{\alpha} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right)$

Energie-impulstensor van elektromagnetisch veld

Energie-impulstensor is symmetrisch

Energiedichtheid $T^{00} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$

Energie-impuls tensor

Energie-impuls tensor

De energie-impuls tensor beschrijft de distributie en stroming van energie- en impulsdichtheid (met eenheid J / m^3) in een klein gebiedje van ruimtetijd

Definitie $T^{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) met $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$

Er geldt T^{00} is de lokale energiedichtheid inclusief rustmassa

$T^{0i} = T^{i0}$ is de energiestroom per m^2 loodrecht op i gedeeld door c

$T^{ij} = T^{ji}$ is de impulsstroom van component i per m^2 loodrecht op j

Voorbeeld: deeltjes met massa m en snelheid $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$ zonder interactie

Impuls $m\gamma(v)\mathbf{v}$

Totale energie $m\gamma(v)c^2$

Deeltjesdichtheid n



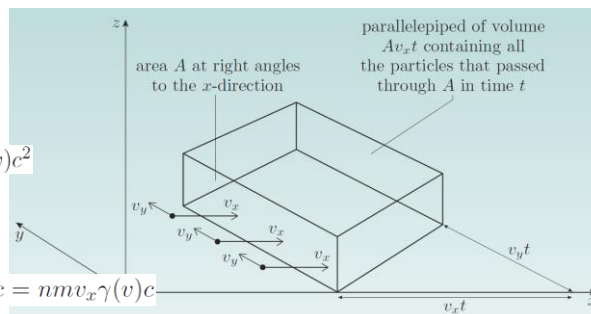
Energiedichtheid $T^{00} = nm\gamma(v)c^2$

Snelheid ($i = 1$) v_x

Stroom door A in tijd t $nv_x At$



$$T^{01} = nv_x Atm\gamma(v)c^2 / Atc = nmv_x\gamma(v)c$$



Voorbeeld van energie-impuls tensor

Evenzo $T^{02} = T^{20} = nmv_y \gamma(v)c$

En $T^{03} = T^{30} = 0$

Er geldt T^{00} is de lokale energiedichtheid inclusief rustmassa

$T^{0i} = T^{i0}$ is de energiestroom per m² loodrecht op i gedeeld door c

$T^{ij} = T^{ji}$ is de impulsstroom van component i per m² loodrecht op j

Op tijd t gaan deeltjes met y -component impuls $m\gamma(v)v_y$ door oppervlak A loodrecht op de x richting met een flow van $nmv_x At / At = nv_x$

De impulsstroom van component y per oppervlakte-eenheid door een oppervlak loodrecht op de x richting is $T^{21} = nv_x m\gamma(v)v_y = nmv_y v_x \gamma(v)$

Aldus vinden we $[T^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nm\gamma c^2 & nmv_x \gamma c & nmv_y \gamma c & 0 \\ nmv_x \gamma c & nmv_x^2 \gamma & nmv_x v_y \gamma & 0 \\ nmv_y \gamma c & nmv_y v_x \gamma & nmv_y^2 \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dit soort materie noemen we *dust*

In de uitdrukking herken je de dichtheid $\rho = nm$ en het product van snelheden $U^\mu U^\nu$

Energie-impuls tensor: 'stof'

- Beschouw 'stof' (engels: *dust*)

- Verzameling deeltjes in rust ten opzichte van elkaar

- Constant viersnelheidsveld $U^\mu(x)$ Flux viervector $N^\mu = nU^\mu$

- Rustsysteem

- n en m zijn 0-componenten van viervectoren

↑
deeltjesdichtheid in rustsysteem
massadichtheid in rustsysteem $\rho = nm$
energiedichtheid in rustsysteem ρc^2

- Bewegend systeem

- N^0 is deeltjesdichtheid

- N^i deeltjesflux in x^i – richting

$$N^\mu = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p^\mu = mU^\mu = \begin{pmatrix} mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ρc^2 is de $\mu=0, \nu=0$ component van de tensor $p \otimes N$

$$T_{\text{stof}}^{\mu\nu} = p^\mu N^\nu = mnU^\mu U^\nu = \rho U^\mu U^\nu$$

Er is geen gasdruk!

Energie-impuls tensor: perfecte vloeistof

- Perfecte vloeistof (in rustsysteem)

– Energiedichtheid ρ

– Isotrope druk P

$T^{\mu\nu}$ diagonaal, met $T^{11} = T^{22} = T^{33}$

- In rustsysteem

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

- In tensorvorm (geldig in elke systeem)

We hadden $T_{\text{stof}}^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu$

Probeer $T_{\text{stof}}^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) U^\mu U^\nu$

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

We vinden

$$T_{\text{stof}}^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) U^\mu U^\nu + P g^{\mu\nu}$$

Verder geldt

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

Groeptheorie en de Lorentzgroep

Groeptheorie

Groep G

1. $g_i \cdot g_j = g_k \in G$. Producten van elementen zijn ook elementen van de groep,
2. vermenigvuldiging is associatief, $(g_i \cdot g_j) \cdot g_k = g_i \cdot (g_j \cdot g_k)$,
3. het identiteits-element bestaat en is een element van de groep, $1 \in G$, $1 \cdot g_i = g_i \cdot 1 = g_i$,
4. de groep bevat een unieke inverse voor elk element, $g_i \in G \rightarrow g_i^{-1} \in G$, zodat $g_i \cdot g_i^{-1} = g_i^{-1} \cdot g_i = 1$.

We onderscheiden

$$g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i \text{ (commutatief) een Abelse groep,}$$

$$g_i \cdot g_j \neq g_j \cdot g_i \text{ (niet - commutatief) een niet - Abelse groep.}$$

Eindige (of discrete) groep $n < \infty$

Kleinste groep (triviale groep) met $n = 1$ heeft enkel element $g = 1$

G met oneindig aantal elementen gespecificeerd door N parameters: $g = G(x_1, x_2, \dots, x_N)$

Compacte groep G: parameters zijn eindig

Lie groep G: de afgeleiden $\partial g / \partial x_i$ naar parameters bestaan

Definitie: het identiteits-element is de oorsprong van parameterruimte $g(0, 0, \dots, 0) \equiv 1$

Definitie: de generatoren $\left. \frac{\partial g}{\partial x_k} \right|_{x_i=0, \text{ all } j} \equiv X_k$ spannen vectorruimte op $\vec{X} = \sum_{k=1}^N c_k X_k$

Vectorproduct levert element $[X_k, X_l] \equiv X_k X_l - X_l X_k = C_{klm} X_m$
└─┘ Structuurconstante(n)

Lorentzgroep

Lorentztransformatie in matrixvorm $p^{\mu'} \equiv \Lambda^{\mu'}_{\nu} p^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$

Invariantie scalair product $p_1^{\mu'} p_{2\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} p_1^{\nu} g_{\mu\sigma} \Lambda^{\sigma}_{\delta} p_2^{\delta} = p_1^{\nu} g_{\nu\delta} p_2^{\delta} = p_1^{\nu} p_{2\nu} \rightarrow \Lambda^{\mu}_{\nu} g_{\mu\sigma} \Lambda^{\sigma}_{\delta} = g_{\nu\delta}$

In matrixnotatie $\Lambda^T g \Lambda = g$
 Er geldt $g^2 = 1$, $g = g^{-1} = g^T$ } $1 = g \Lambda^T g \Lambda \equiv \Lambda^{-1} \Lambda \rightarrow \Lambda^{-1} = g \Lambda^T g$

Unieke inverse bestaat

Achtereenvolgende transformaties leveren ook weer een element $\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_3$

De groep is niet-Abels $\Lambda_1 \Lambda_2 \neq \Lambda_2 \Lambda_1$

Elementen (de transformaties) vormen de Lorentzgroep $SO(3,1)$

De metriek behandelt de 3 ruimtelijke dimensies anders de 1 tijddimensie

4 x 4 reële matrices hebben 16 reële parameters

Er zijn echter 10 relaties vanwege $\Lambda^T g \Lambda = g$ Merk op $(\Lambda^T g \Lambda)^T = \Lambda^T g \Lambda$

De groep wordt beschreven door $6 = 16 - 10$ parameters

We laten in de proper Lorentzgroep geen reflecties toe, en eisen ook $\det(\Lambda) = +1$

Generatoren Lorentzgroep

6 parameters:

3 Euler rotatiehoeken (orthogonale transformaties die lengte 3-vector behouden)

3 boosts (hyperbolische rotaties die lengte 4-vector behouden)

Rotatie om z-as $\Lambda(\{x, y\}, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Boost langs z-as $\Lambda(\{t, z\}, y_u) = \begin{pmatrix} \cosh y_u & 0 & 0 & -\sinh y_u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh y_u & 0 & 0 & \cosh y_u \end{pmatrix}$

We schrijven transformatie als $\Lambda = e^L = 1 + L + \frac{L^2}{2} + \dots$

$$e^A \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{A}{n} \right)^n$$

Generator L wordt geïtereerd tot volledige transformatie; L is reële 4 x 4 matrix

We staan enkel "proper" transformaties toe $\det(\Lambda) = e^{\text{Tr}(L)} = 1 \rightarrow \text{Tr}(L) = 0$

L is traceless en reëel. Ook geldt $\Lambda^T = e^{L^T} = 1 + L^T + \frac{L^T L^T}{2} + \dots$

Generatoren Lorentzgroep

Inverse $\Lambda^{-1} = g \Lambda^T g = e^{-L} = g \left(1 + L^T + \frac{L^T L^T}{2} + \dots \right) g = gg + g L^T g + \frac{g L^T g g L^T g}{2} + \dots = e^{g L^T g}$

Neem logaritme en gebruik $g = g^{-1} = g^T \rightarrow g L^T g = -L \rightarrow L^T g = (g L)^T = -g L$

Dus $g L$ spoorloos en L spoorloos en mixed symmetry

Er geldt $L = \begin{pmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{pmatrix}$

Boosts L_{01}, L_{02} en L_{03} en rotaties L_{12}, L_{13} en L_{23}

We kiezen als basis in parameterruimte

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In de eerste rij herkennen we de rotatiematrix

Rotatie om z-as

Kies parameters $\vec{\theta} = (0, 0, \phi)$ en $\vec{y} = (0, 0, 0)$

We hadden $\Lambda = e^L = 1 + L + \frac{L^2}{2} + \dots$ met $L = -\vec{\theta} \cdot \vec{S} - \vec{y} \cdot \vec{K}$

Dan $-\vec{\theta} \cdot \vec{S} = -\phi S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi & 0 \\ 0 & -\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Verder $(-\vec{\theta} \cdot \vec{S})^2 = \phi^2 S_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, en $(-\vec{\theta} \cdot \vec{S})^3 = -\phi^2(-\phi S_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi^3 & 0 \\ 0 & \phi^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exponentiatie $e^{-\phi S_3} = -S_3 \left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \dots \right) - S_3^2 \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \dots \right) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dit levert $e^{-\phi S_3} = -S_3 \sin \phi - S_3^2 \cos \phi + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dit levert de bekende rotatie Λ om de z-as

Boost langs z-as

Kies parameters $\vec{\theta} = (0, 0, 0)$ en $\vec{y} = (0, 0, y_u)$

We hadden $\Lambda = e^L = 1 + L + \frac{L^2}{2} + \dots$ met $L = -\vec{\theta} \cdot \vec{S} - \vec{y} \cdot \vec{K}$

Dan $-\vec{y} \cdot \vec{K} = -y_u K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -y_u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_u & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Verder $(-\vec{y} \cdot \vec{K})^2 = y_u^2 K_3^2 = \begin{pmatrix} y_u^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_u^2 \end{pmatrix}$, en $(-\vec{y} \cdot \vec{K})^3 = -y_u^2(-y_u K_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -y_u^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_u^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exponentiatie $e^{-y_u K_3} = -K_3 \left(y_u - \frac{y_u^3}{3!} + \dots \right) + K_3^2 \left(1 - \frac{y_u^2}{2!} + \dots \right) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dit levert $e^{-y_u K_3} = -K_3 \sinh y_u + K_3^2 \cosh y_u + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh y_u & 0 & 0 & -\sinh y_u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh y_u & 0 & 0 & \cosh y_u \end{pmatrix}$

Dit levert de bekende boost Λ langs de z-as

Connectie met quantummechanica

We hebben voor Lorentzgroep gevonden $g(\vec{\theta}, \vec{y}) = \Lambda(\vec{\theta}, \vec{y}) = e^L$, met $L = -\vec{\theta} \cdot \vec{S} - \vec{y} \cdot \vec{K}$

Niet-Abelse groep $e^{-\theta_1 S_1} e^{-\theta_2 S_2} \neq e^{-\theta_2 S_2} e^{-\theta_1 S_1} \neq e^{-\theta_1 S_1 - \theta_2 S_2}$

Relateer generatoren aan fysische observabelen: Hermitische operatoren $M^\dagger = (M^T)^* = M$

Definieer $J_k = iS_k$ en $\tilde{K}_k = iK_k$ ($k = 1, 2, 3$)

Dan geldt $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$, en $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\tilde{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, en $\tilde{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Hermitische operatoren J_i van impulsmoment

Generatoren $\left. \frac{1}{i} \frac{\partial g}{\partial x_k} \right|_{x_j=0} \equiv Y_k$ en $[Y_j, Y_k] = iC_{jkl} Y_l$

Lie algebra $[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl} J_l$, $[J_j, \tilde{K}_k] = i\epsilon_{jkl} \tilde{K}_l$, en $[\tilde{K}_j, \tilde{K}_k] = -i\epsilon_{jkl} J_l$

Noether theorema, Casimiroperatoren $C_1 \equiv P^\mu P_\mu$, en $C_2 \equiv W_\mu W^\mu = -m^2 s(s+1)$