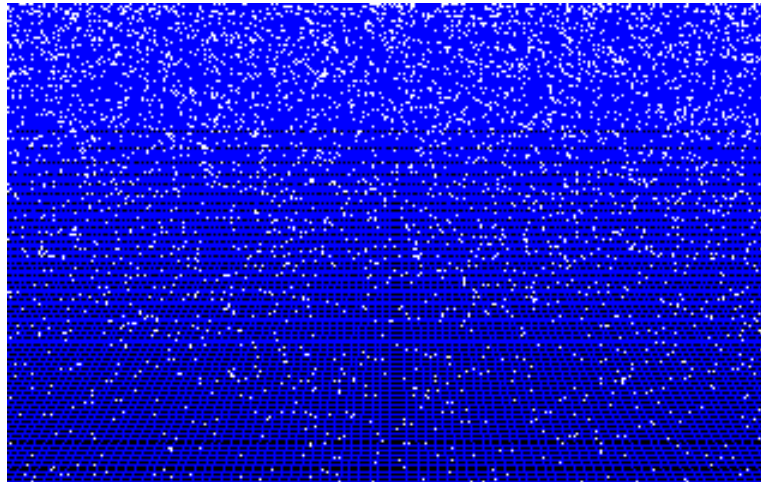


GRAVITATIE EN KOSMOLOGIE

FEW Cursus



Jo van den Brand & Joris van Heijningen
Speciale relativiteitstheorie: 28 oktober 2013

INHOUD

- Inleiding
 - Overzicht
- Klassieke mechanica
 - Galileo, Newton
 - Lagrange formalisme
- Quantumfenomenen
 - Neutronensterren
- Wiskunde I
 - Tensoren
- Speciale relativiteitstheorie
 - Minkowski
 - Ruimtetijd diagrammen
- Wiskunde II
 - Algemene coördinaten
 - Covariante afgeleide
- Algemene relativiteitstheorie
 - Einsteinvergelijkingen
 - Newton als limiet
- Kosmologie
 - Friedmann
 - Inflatie
- Gravitatiestraling
 - Theorie
 - Experiment

EINSTEINS SOMMATIECONVENTIE

- Vector en 1-vorm geven een scalar

$$p_0V^0 + p_1V^1 + p_2V^2 + p_3V^3 = c = p_\alpha V^\alpha$$

- Sommatie index is een dummy index, want uiteindelijk krijgen we een getal

- Problemen

$$a_i = b_j$$

Vrije indices horen overeen te komen

$$a_i = b^i + c_i$$

Nu tel je appels en peren op

$$a_i = b_i^i$$

Links een 1-vorm, rechts een scalar

$$a_i^i = b_i^i$$

$$a = b^i c_i d_i e^i$$

Sommatie index maar 1x gebruiken

$$a_i = b_i + 4.$$

Verschillende objecten

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

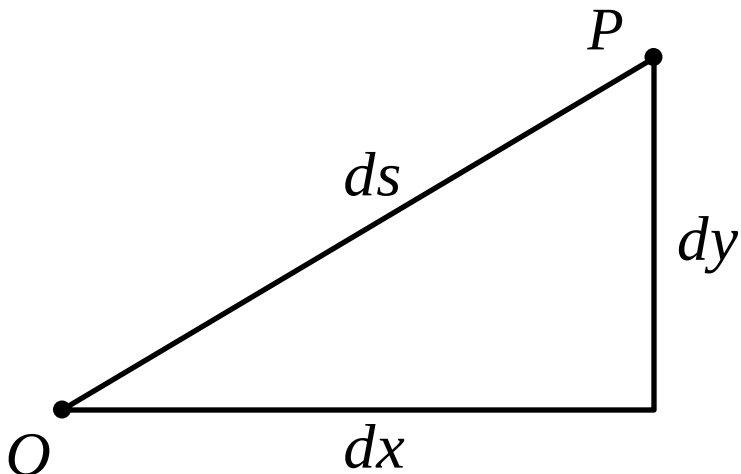
Gradient is een 1-vorm

EUCLIDISCHE RUIMTE

- Vlakke ruimte met afstand tussen punten als invariant
- Pythagoras $ds^2 = dx^2 + dy^2$

$$ds^2 = \vec{dx} \cdot \vec{dx} = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dx_\beta dx^\beta = dx^\mu dx_\mu$$

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = (dx, dy) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = dx^2 + dy^2$$



Evenzo in 3 dimensies

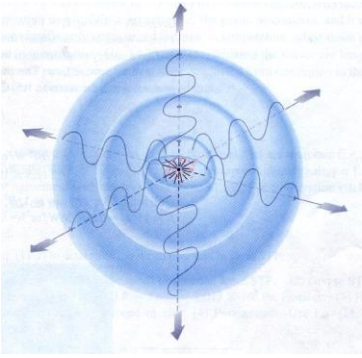
Stel we hebben vectorcomponenten $a^\mu = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Wat is dan de 1-vorm componenten a_μ ?

$$a_\mu = (2, 3)$$

MINKOWSKIRUIMTE

- Licht gedraagt zich onafhankelijk van de waarnemer
- Golffronten zijn behouden voor bewegende waarnemers
- Beschouw bolgolven vanuit de oorsprong

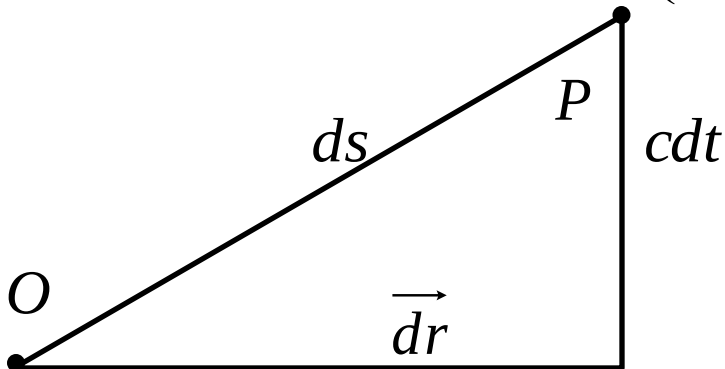


$$O: \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0$$

$$O': \quad dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 = 0$$

$$ds^2 = \vec{dx} \cdot \vec{dx} = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dx_\beta dx^\beta$$

$$ds^2 = \begin{pmatrix} cdt \\ \vec{dr} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ \vec{dr} \end{pmatrix} = (-cdt, \vec{dr}) \cdot \begin{pmatrix} cdt \\ \vec{dr} \end{pmatrix} = -c^2 dt^2 + \vec{dr}^2$$



We hebben nu ruimtetijd en weer een invariant (een scalar).

Trouwens, elke $a_\mu b^\mu$ is een scalar en dus invariant!

MINKOWSKIRUIMTE

$$\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_0 = -1$$

- Metrische tensor

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Beschrijft de vlakke (hyperbolische) ruimte van de speciale relativiteitstheorie

Beschouw 2D hyperbolische ruimte, cdt en dx

Stel we hebben vectorcomponenten $a^\mu = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Wat zijn dan de 1-vorm componenten a_μ ? $a_\mu = (-2, 3)$

Wat is de lengte van $\vec{a}$?

$$|\vec{a}|^2 = a_\mu a^\mu = -2 \times 2 + 3 \times 3 = 5$$

Kan positief, nul of negatief zijn!

Metriek heeft signatuur 2: een pseudo-riemannse variëteit

MINKOWSKIRUIMTE

- Ruimtetime geometrie

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2$$

Welke zijde van driehoek ABC is het langst? Welk de kortste? Wat zijn de lengten?

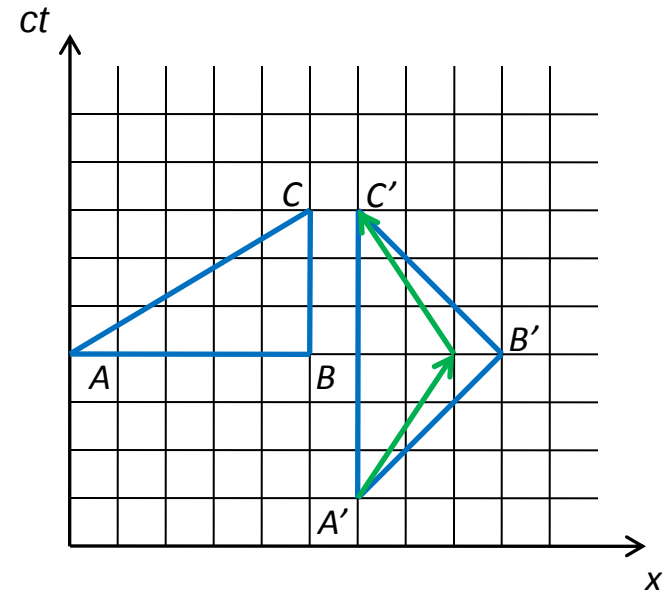
$$|AB| = 5, |BC| = 3, |AC| = \sqrt{-3^2 + 5^2} = 4$$

Wat is het kortste pad tussen punten A en C? De rechte lijn tussen A en C, of het pad ABC?

Rechte pad AC is kortste pad tussen A en C

Idem voor driehoek A'B'C'

$|A'B'| = |B'C'| = \sqrt{-3^2 + 3^2} = 0$ en $|A'C'| = 6$
Pad is A'B'C' met lengte 0.



$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 = 0$$

$$\rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = c$$

Tweelingparadox

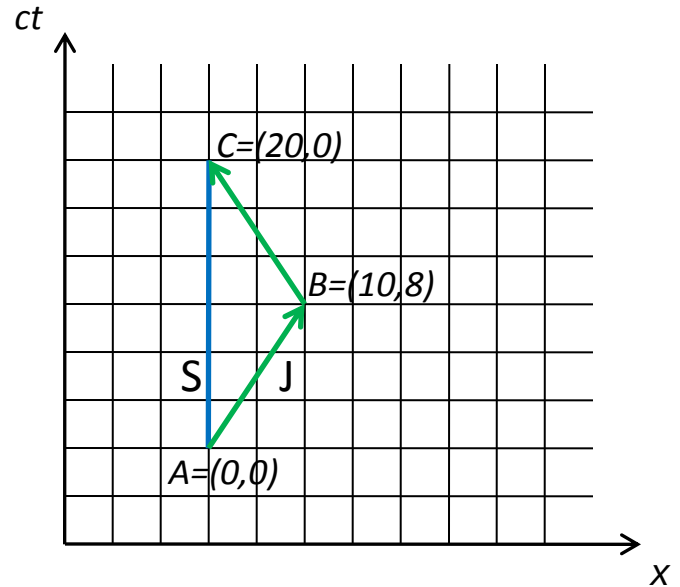
$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 = -(c\Delta \tau)^2$$

TWEELINGPARADOX

Smith en Jones zijn tweelingen, beiden 30 jaar oud. Jones vliegt naar Sirius en reist met $8/10$ van de lichtsnelheid. Als hij Sirius bereikt, komt hij meteen terug.

Jones, gaat snel, maar Sirius is ver. Jones is 20 jaar weg en als hij terugkeert is Smith 50.

Hoe oud is Jones?



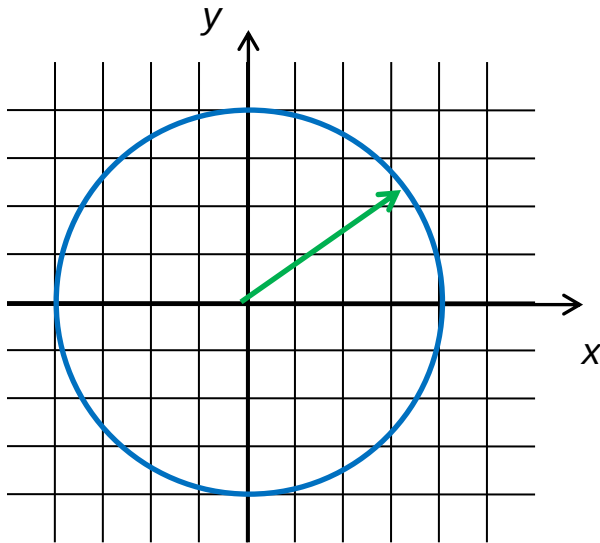
$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 = -(c\Delta \tau)^2$$

EUCLIDISCH VERSUS MINKOWSKIRUIMTE

- Afstand s^2 tussen oorsprong O en P

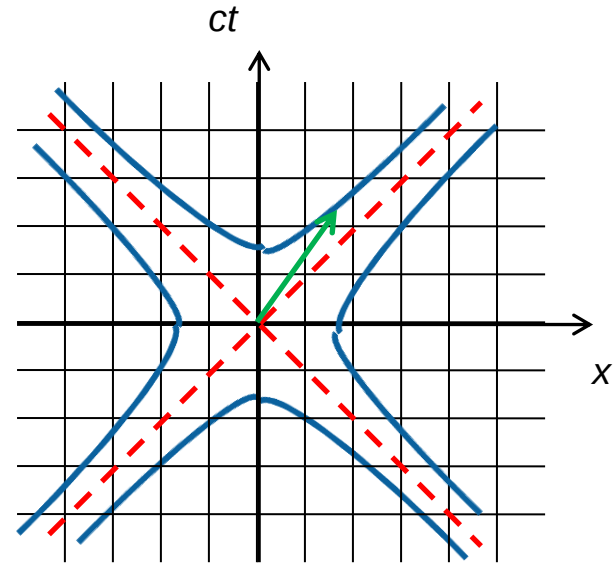
Euclidisch

$$s^2 = x^2 + y^2$$



Minkowski

$$s^2 = -c^2 t^2 + x^2$$

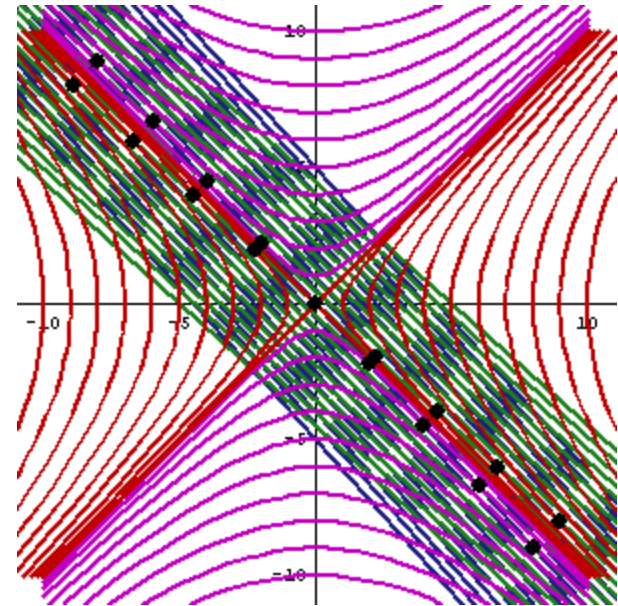
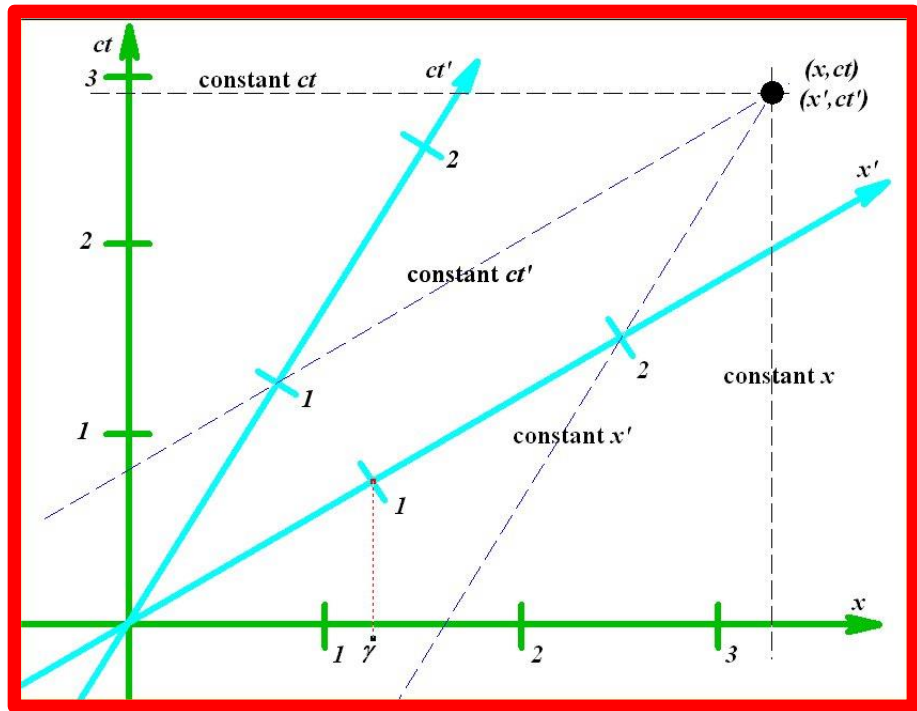


MINKOWSKIRUIMTE

- Bewegende waarnemers

$$s^2 = -c^2 t^2 + x^2 \quad ct' = \gamma \left(ct - \frac{v}{c} x \right)$$

$$x' = \gamma (x - vt)$$



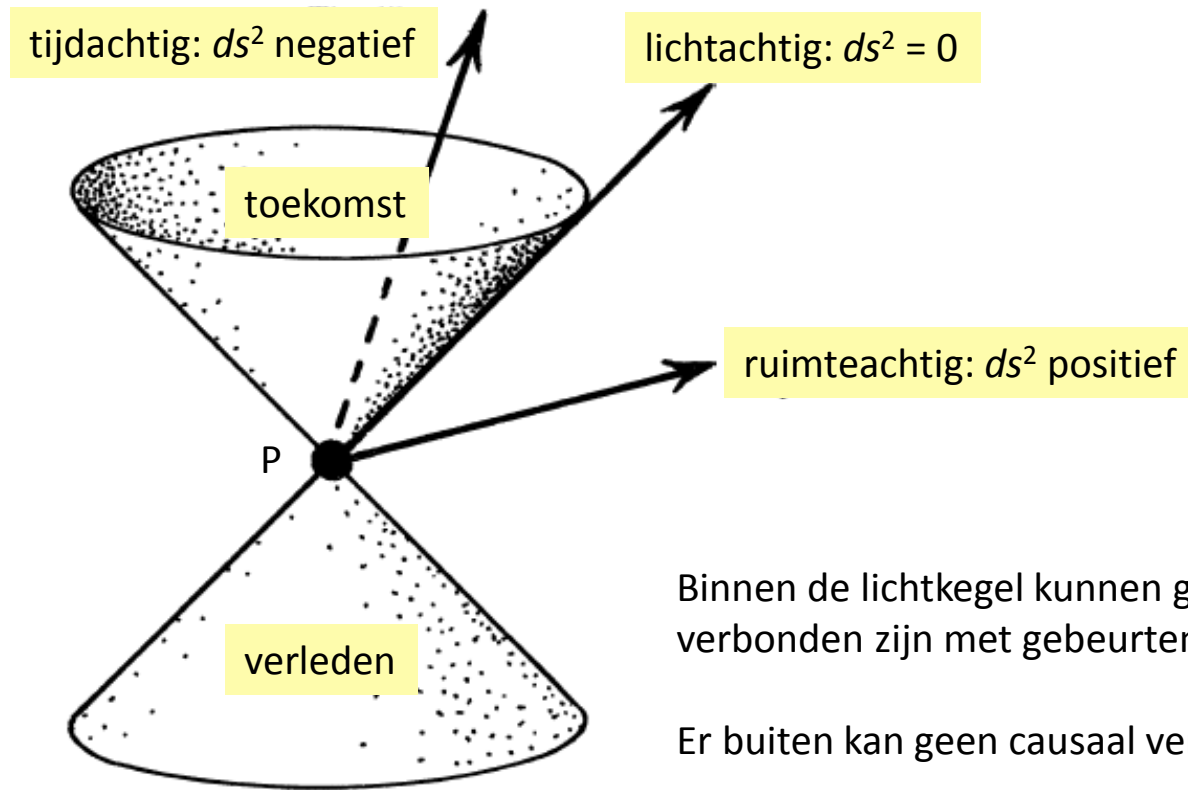
Voor de x' as: stel $ct' = 0$. Dan volgt $ct = \beta x$.

Voor de schaal op de x' as: stel $x' = 1$ en $ct' = 0$.
Dan volgt $x = \gamma$.

Voor de ct' as: stel $x' = 0$. Dan volgt $ct = x/\beta$.

Voor de schaal op de ct' as: stel $ct' = 1$ en $x' = 0$.
Dan volgt $ct = \gamma$.

MINKOWSKIRUIMTE: CAUSALE STRUCTUUR



Binnen de lichtkegel kunnen gebeurtenissen causaal verbonden zijn met gebeurtenis P .

Er buiten kan geen causaal verband bestaan.

GROEPTHEORIE

Groep G

1. $g_i \cdot g_j = g_k \in G$. Producten van elementen zijn ook elementen van de groep,
2. vermenigvuldiging is *associatief*, $(g_i \cdot g_j) \cdot g_k = g_i \cdot (g_j \cdot g_k)$,
3. het identiteits-element bestaat en is een element van de groep, $1 \in G$, $1 \cdot g_i = g_i \cdot 1 = g_i$,
4. de groep bevat een unieke inverse voor elk element, $g_i \in G \rightarrow g_i^{-1} \in G$, zodat $g_i \cdot g_i^{-1} = g_i^{-1} \cdot g_i = 1$.

We onderscheiden

$$g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i \quad (\text{commutatief}) \quad \text{een Abelse groep,}$$
$$g_i \cdot g_j \neq g_j \cdot g_i \quad (\text{niet - commutatief}) \quad \text{een niet - Abelse groep.}$$

Eindige (of discrete) groep $n < \infty$

Kleinste groep (triviale groep) met $n = 1$ heeft enkel element $g = 1$

G met oneindig aantal elementen gespecificeerd door N parameters: $g = G(x_1, x_2, \dots, x_N)$

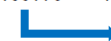
Compacte groep G : parameters zijn eindig

Lie groep G : de afgeleiden $\partial g / \partial x_i$ naar parameters bestaan

Definitie: het identiteits-element is de oorsprong van parameterruimte $g(0, 0, \dots, 0) \equiv 1$

Definitie: de generatoren $\left. \frac{\partial g}{\partial x_k} \right|_{x_i=0, \text{ all } j} \equiv X_k$ spannen vectorruimte op $\vec{X} = \sum_{k=1}^N c_k X_k$

Vectorproduct levert element $[X_k, X_l] \equiv X_k X_l - X_l X_k = C_{klm} X_m$



Structuurconstante(n)

LORENTZGROEP

Lorentztransformatie in matrixvorm $p^{\mu'} \equiv \Lambda^{\mu'}_{\nu} p^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$

Invariantie scalair product $p_1^{\mu'} p_{2\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} p_1^{\nu} g_{\mu\sigma'} \Lambda^{\sigma'}_{\delta} p_2^{\delta} = p_1^{\nu} g_{\nu\delta} p_2^{\delta} = p_1^{\nu} p_{2\nu} \rightarrow \Lambda^{\mu}_{\nu} g_{\mu\sigma} \Lambda^{\sigma}_{\delta} = g_{\nu\delta}$

In matrixnotatie $\Lambda^T g \Lambda = g$
 Er geldt $g^2 = 1, g = g^{-1} = g^T$ } $1 = g \Lambda^T g \Lambda \equiv \Lambda^{-1} \Lambda \rightarrow \Lambda^{-1} = g \Lambda^T g$

Unieke inverse bestaat

Achtereenvolgende transformaties leveren ook weer een element $\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_3$

De groep is niet-Abels $\Lambda_1 \Lambda_2 \neq \Lambda_2 \Lambda_1$

Elementen (de transformaties) vormen de Lorentzgroep $SO(3,1)$

De metriek behandelt de 3 ruimtelijke dimensies anders de 1 tijddimensie

4 x 4 reële matrices hebben 16 reële parameters

Er zijn echter 10 relaties vanwege $\Lambda^T g \Lambda = g$ Merk op $(\Lambda^T g \Lambda)^T = \Lambda^T g \Lambda$

De groep wordt beschreven door 6 = 16 – 10 parameters

We laten in de proper Lorentzgroep geen reflecties toe, en eisen ook $\det(\Lambda) = +1$

GENERATOREN LORENTZGROEP

6 parameters:

3 Euler rotatiehoeken (orthogonale transformaties die lengte 3-vector behouden)

3 boosts (hyperbolische rotaties die lengte 4-vector behouden)

Rotatie om z-as $\Lambda(\{x, y\}, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Boost langs z-as $\Lambda(\{t, z\}, y_u) = \begin{pmatrix} \cosh y_u & 0 & 0 & -\sinh y_u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh y_u & 0 & 0 & \cosh y_u \end{pmatrix}$

We schrijven transformatie als $\Lambda = e^L = 1 + L + \frac{L^2}{2} + \dots$

$$e^A \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{A}{n} \right)^n$$

Generator L wordt geïtereerd tot volledige transformatie; L is reële 4 x 4 matrix

We staan enkel “proper” transformaties toe $\det(\Lambda) = e^{\text{Tr}(L)} = 1 \rightarrow \text{Tr}(L) = 0$

L is traceless en reëel. Ook geldt $\Lambda^T = e^{L^T} = 1 + L^T + \frac{L^T L^T}{2} + \dots$

GENERATOREN LORENTZGROEP

Inverse $\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g = e^{-L} = g \left(1 + L^T + \frac{L^T L^T}{2} + \dots \right) g = gg + gL^T g + \frac{gL^T ggL^T g}{2} + \dots = e^{gL^T} g$

Neem logaritme en gebruik $g = g^{-1} = g^T \longrightarrow gL^T g = -L \rightarrow L^T g = (gL)^T = -gL$

Dus gL spoorloos en L spoorloos en mixed symmetry

Er geldt
$$L = \begin{pmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Boosts L_{01}, L_{02} en L_{03} en rotaties L_{12}, L_{13} en L_{23}

We kiezen als basis in parameterruimte

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In de eerste rij herkennen we de rotatiematrices

ROTATIE OM Z-AS

Kies parameters $\vec{\theta} = (0, 0, \phi)$ en $\vec{y} = (0, 0, 0)$

We hadden $\Lambda = e^L = 1 + L + \frac{L^2}{2} + \dots$ met $L = -\vec{\theta} \cdot \vec{S} - \vec{y} \cdot \vec{K}$

$$\text{Dan } -\vec{\theta} \cdot \vec{S} = -\phi S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi & 0 \\ 0 & -\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Verder } (-\vec{\theta} \cdot \vec{S})^2 = \phi^2 S_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ en } (-\vec{\theta} \cdot \vec{S})^3 = -\phi^2(-\phi S_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi^3 & 0 \\ 0 & \phi^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Exponentiatie } e^{-\phi S_3} = -S_3 \left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \dots \right) - S_3^2 \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \dots \right) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dit levert } e^{-\phi S_3} = -S_3 \sin \phi - S_3^2 \cos \phi + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dit levert de bekende rotatie Λ om de z-as

BOOST LANGS Z-AS

Kies parameters $\vec{\theta} = (0, 0, 0)$ en $\vec{y} = (0, 0, y_u)$

We hadden $\Lambda = e^L = 1 + L + \frac{L^2}{2} + \dots$ met $L = -\vec{\theta} \cdot \vec{S} - \vec{y} \cdot \vec{K}$

Dan $-\vec{y} \cdot \vec{K} = -y_u K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -y_u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_u & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Verder $(-\vec{y} \cdot \vec{K})^2 = y_u^2 K_3^2 = \begin{pmatrix} y_u^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_u^2 \end{pmatrix}$, en $(-\vec{y} \cdot \vec{K})^3 = -y_u^2(-y_u K_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -y_u^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_u^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exponentiatie $e^{-y_u K_3} = -K_3 \left(y_u - \frac{y_u^3}{3!} + \dots \right) + K_3^2 \left(1 - \frac{y_u^2}{2!} + \dots \right) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dit levert $e^{-y_u K_3} = -K_3 \sinh y_h + K_3^2 \cosh y_u + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh y_u & 0 & 0 & -\sinh y_u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh y_u & 0 & 0 & \cosh y_u \end{pmatrix}$

Dit levert de bekende boost Λ langs de z-as

CONNECTIE MET QUANTUMMECHANICA

We hebben voor Lorentzgroep gevonden $g(\vec{\theta}, \vec{y}) = \Lambda(\vec{\theta}, \vec{y}) = e^L$, met $L = -\vec{\theta} \cdot \vec{S} - \vec{y} \cdot \vec{K}$

Niet-Abelse groep $e^{-\theta_1 S_1} e^{-\theta_2 S_2} \neq e^{-\theta_2 S_2} e^{-\theta_1 S_1} \neq e^{-\theta_1 S_1 - \theta_2 S_2}$

Relateer generatoren aan fysische observabelen: Hermitische operatoren $M^\dagger = (M^T)^* = M$

Definieer $J_k = iS_k$ en $\tilde{K}_k = iK_k$ ($k = 1, 2, 3$)

Dan geldt

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad \tilde{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hermitische operatoren J_i van impulsmoment

Generatoren $\left. \frac{1}{i} \frac{\partial g}{\partial x_k} \right|_{x_j=0} \equiv Y_k$ en $[Y_j, Y_k] = iC_{jkl} Y_l$ voor alle j

Lie algebra $[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl} J_l, \quad [J_j, \tilde{K}_k] = i\epsilon_{jkl} \tilde{K}_l, \quad \text{en} \quad [\tilde{K}_j, \tilde{K}_k] = -i\epsilon_{jkl} J_l$

Noether theorema, Casimiroperatoren $C_1 \equiv P^\mu P_\mu$, en $C_2 \equiv W_\mu W^\mu = -m^2 s(s+1)$

ELEKTRODYNAMICA

Maxwellvergelijkingen

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi \mathbf{j}, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Faraday tensor

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & B^z & -B^y \\ -E^y & -B^z & 0 & B^x \\ -E^z & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix}$$

Er geldt

$$\mathbf{E} = (E^x, E^y, E^z) = (F^{01}, F^{02}, F^{03})$$

$$\mathbf{B} = (B^x, B^y, B^z) = (F^{23}, F^{31}, F^{12})$$

Stroom viervector $\mathbf{J} = (\rho, j^x, j^y, j^z)$

Maxwellvergelijkingen

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} = 4\pi J^\mu$$

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0, \quad F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}F^{\alpha\beta}$$

Continuïteitsvergelijking $J^\mu_{,\mu} = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$

Volgt uit $4\pi J^\mu_{,\mu} = F^{\mu\nu}_{,\nu\mu} = F^{\nu\mu}_{,\mu\nu} = -F^{\mu\nu}_{,\nu\mu} \rightarrow F^{\mu\nu}_{,\nu\mu} = 0 \rightarrow J^\mu_{,\mu} = 0$

ELEKTRODYNAMICA

Lorentztransformaties $F^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}$

We vinden $\mathbf{E}_\parallel = E^x$ onveranderd, terwijl $\mathbf{E}_\perp = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

Vierkracht $K^\mu = qF^{\mu\nu}U_\nu = q\gamma(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

Nul-component: arbeid verricht door deze kracht per tijdseenheid

Ruimtelijke-componenten: Lorentzkracht

Schrijf $\mathbf{J} = q\mathbf{U}$

Dan geldt $K^\mu = -T^{\mu\nu}_{,\nu}$ met $T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\alpha} F^\nu_\alpha - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)$

Energie-impulstensor van elektromagnetisch veld

Energie-impulstensor is symmetrisch

Energiedichtheid $T^{00} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$

TRAAGHEID VAN GASDRUK

- SRT: hoe hoger de gasdruk, des te moeilijker is het om het gas te versnellen (traagheid neemt toe)

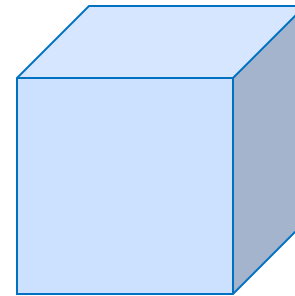
- Oefen kracht F uit, versnel tot snelheid $v \ll c$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho Vv^2$$

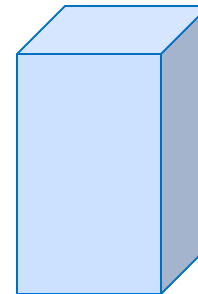
- SRT: lorentzcontractie maakt de doos kleiner

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = -P\Delta V$$

- Energie nodig om gas te versnellen



Volume V
Dichtheid ρ
Druk P



$$E = \frac{1}{2}mv^2 - P\Delta V = \frac{1}{2}\rho Vv^2 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}PV = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)v^2V$$

$$\Delta L = L\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) \approx -\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}L$$

extra traagheid van gasdruk

ENERGIE-IMPULS TENSOR: 'STOF'

- Energie nodig om gas te versnellen

- Afhankelijk van referentiesysteem
- 0 – component van vierimpuls

$$E = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) v^2 V$$

- Beschouw 'stof' (engels: *dust*)

- Verzameling deeltjes in rust ten opzichte van elkaar
- Constant viersnelheidsveld

$$U^\mu(x) \quad \text{Flux viervector} \quad N^\mu = n U^\mu$$

- Rustsysteem

- n en m zijn 0-componenten van viervectoren

deeltjesdichtheid in rustsysteem

massadichtheid in rustsysteem $\rho = nm$

energiedichtheid in rustsysteem ρc^2

- Bewegend systeem

- N^0 is deeltjesdichtheid
- N^i deeltjesflux in x^i – richting

$$N^\mu = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p^\mu = m U^\mu = \begin{pmatrix} mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ρc^2 is de $\mu=0, \nu=0$ component van de tensor $p \otimes N$

$$T_{\text{stof}}^{\mu\nu} = p^\mu N^\nu = mn U^\mu U^\nu = \rho U^\mu U^\nu$$

Er is geen gasdruk!

ENERGIE-IMPULS TENSOR: PERFECTE VLOEISTOF

- Perfecte vloeistof (in rustsysteem)

- Energiedichtheid ρ
- Isotrope druk P

$$T^{\mu\nu} \text{ diagonaal, met } T^{11} = T^{22} = T^{33}$$

- In rustsysteem

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

- In tensorvorm (geldig in elke systeem)

We hadden $T_{\text{stof}}^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu$

Probeer $T_{\text{stof}}^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) U^\mu U^\nu$

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

We vinden

$$T_{\text{stof}}^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) U^\mu U^\nu + P g^{\mu\nu}$$

Verder geldt

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$