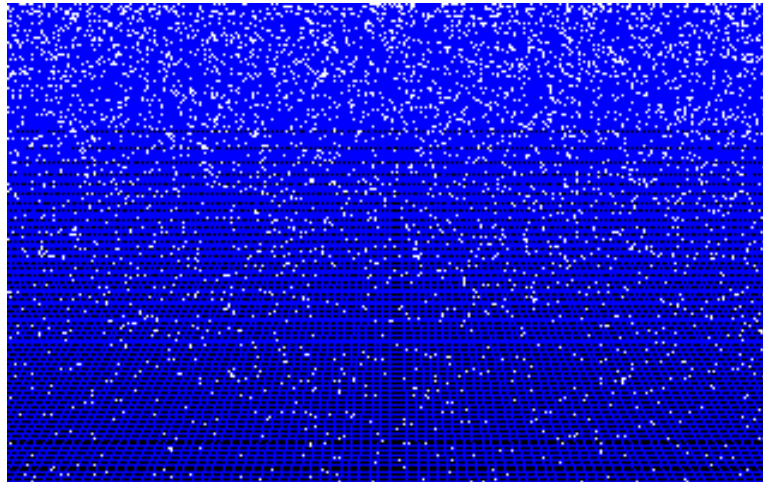


GRAVITATIE EN KOSMOLOGIE

FEW Cursus



Jo van den Brand & Joris van Heijningen
Speciale relativiteitstheorie: 7 oktober 2013

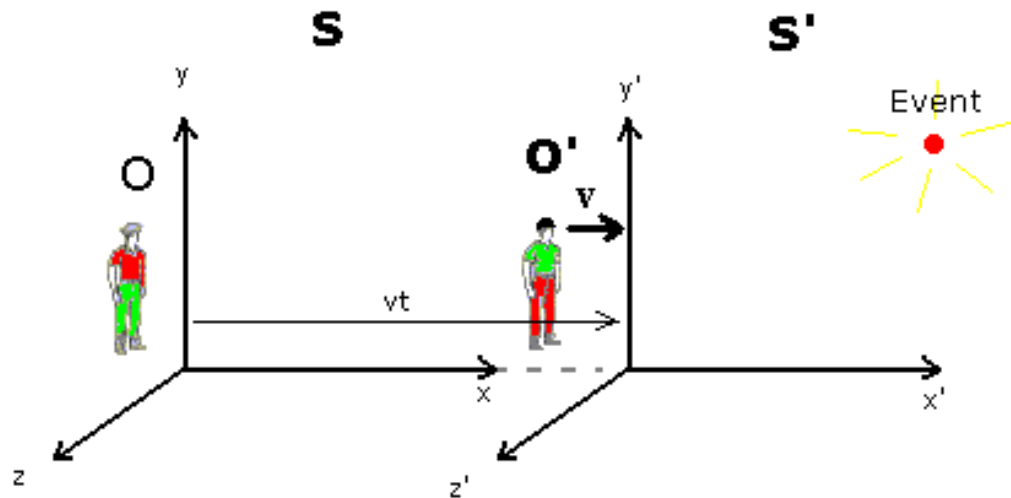
INHOUD

- Inleiding
 - Overzicht
- Klassieke mechanica
 - Galileo, Newton
 - Lagrange formalisme
- Quantumfenomenen
 - Neutronensterren
- Wiskunde I
 - Tensoren
- Speciale relativiteitstheorie
 - Minkowski
 - Ruimtetijd diagrammen
- Wiskunde II
 - Algemene coördinaten
 - Covariante afgeleide
- Algemene relativiteitstheorie
 - Einsteinvergelijkingen
 - Newton als limiet
- Kosmologie
 - Friedmann
 - Inlatie
- Gravitatiestraling
 - Theorie
 - Experiment

LORENTZTRANSFORMATIES

Transformation of Coordinates

Transformaties laten ds^2 invariant



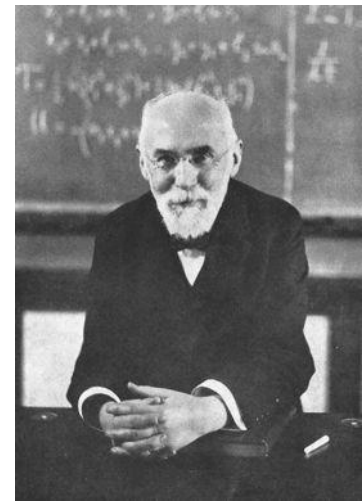
Lorentz 1902

Waarnemers in S en S' bewegen met snelheid v t.o.v. elkaar. Systemen vallen samen op $t = t' = 0$.

Waarnemer in S kent (x, y, z, t) toe aan het event.

Waarnemer in S' kent (x', y', z', t') toe aan hetzelfde event.

Wat is het verband tussen de ruimtetijd coördinaten voor dit zelfde event?



LORENTZTRANSFORMATIES

$$\begin{aligned}\text{i.} \quad & x' = \gamma(x - vt) \\ \text{ii.} \quad & y' = y \\ \text{iii.} \quad & z' = z \\ \text{iv.} \quad & t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\end{aligned}$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Lorentztransformatie

$$\begin{aligned}\text{i'}. \quad & x = \gamma(x' + vt') \\ \text{ii'}. \quad & y = y' \\ \text{iii'}. \quad & z = z' \\ \text{iv'}. \quad & t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)\end{aligned}$$

Inverse transformatie
(snelheid v verandert van teken)

RELATIVITEIT VAN GELIJKTIJDIGHEID

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

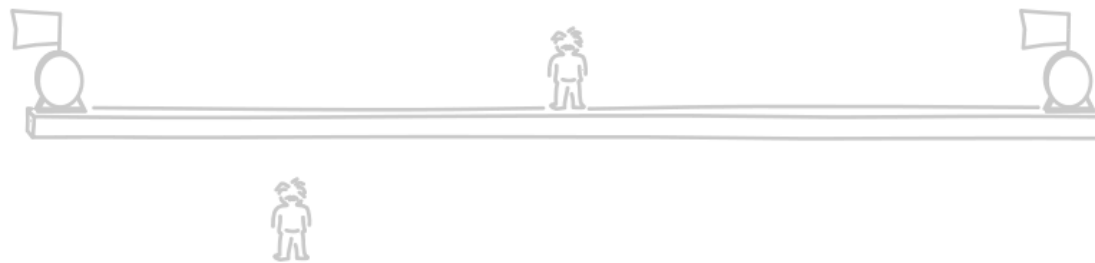
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Stel dat in systeem S twee events, A en B, op dezelfde tijd, $t_A = t_B$, gebeuren, maar op verschillende plaatsen, $x_A \neq x_B$.

Invullen levert

$$t'_A = t'_B + \frac{\gamma v}{c^2} (x_B - x_A)$$

Events vinden niet simultaan plaats in systeem S'



LORENTZCONTRACTIE (LENGTEKRIMP)

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\end{aligned}$$

Stel dat in systeem S' een staaf ligt, in rust, langs de x' as.
Een einde op $x' = 0$, het andere op $x' = L'$.

Wat is de lengte L gemeten in S ?

We moeten dan de posities van de uiteinden meten op dezelfde tijd, zeg op $t = 0$.

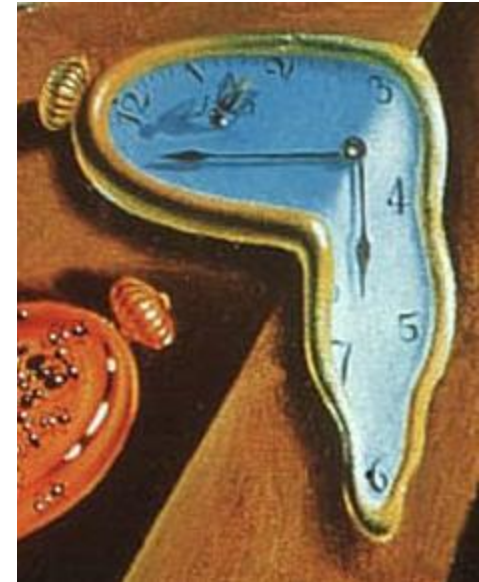
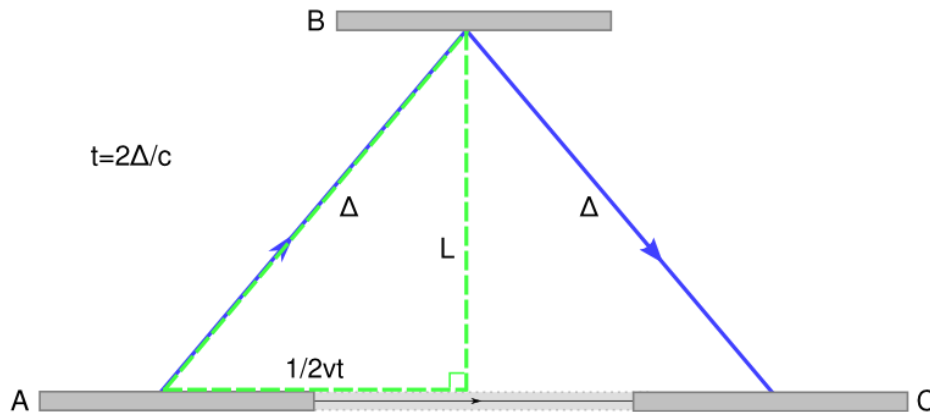
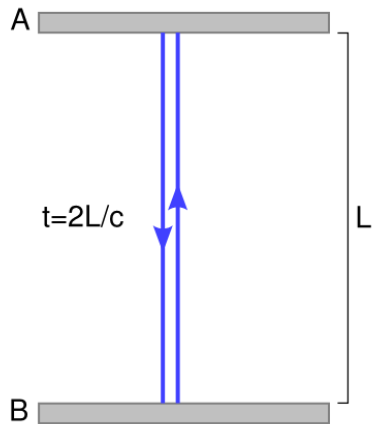
Het linker einde bevindt zich dan op $x = 0$.

Het rechter einde op positie $x = L' / \gamma$.

Langs bewegingsrichting!

Een bewegend object wordt korter met een factor γ
in vergelijking tot zijn lengte in rust.

TIJDDILATATIE (TIJDREK)



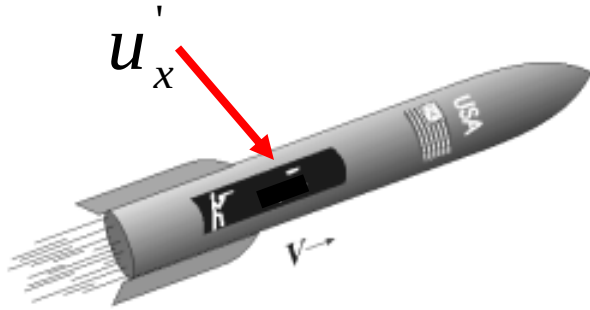
$$t = \frac{2\Delta}{c} \quad \Delta = \sqrt{\left(\frac{1}{2}vt\right)^2 + L^2} \quad ct = 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}vt\right)^2 + L^2}$$

$$c^2t^2 = v^2t^2 + 4L^2 \quad t^2 = \frac{4L^2}{c^2 - v^2} \quad t = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Een bewegende klok loopt langzamer met een factor γ in vergelijking tot toestand in rust.

Deeltjes hebben 'ingebouwde' klokken (verval).

OPTELLEN VAN SNELHEDEN



Een raket is in rust in inertiaalsysteem S' dat met snelheid v beweegt t.o.v. S .

Iemand vuurt een kogel af in systeem S' met snelheid u'_x in S' .

Wat is de snelheid van de kogel in S ?

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)} \\ &= \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{vdx}{c^2 dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \end{aligned}$$

Een kwestie van afgeleiden nemen ...

Als $u'_x = c$, dan $u = c$ en
lichtsnelheid gelijk voor alle
systemen!!!

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}$$

Het klassieke antwoord

VIERVECTOREN

Positie-tijd viervector x^μ , met $m = 0, 1, 2, 3$

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

Lorentztransformaties

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$



$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1)$$

$$x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0)$$

$$x^{2'} = x^2$$

$$x^{3'} = x^3$$

$$\beta \equiv \frac{v}{c}$$

VIERVECTOREN

Lorentztransformaties

$$\begin{aligned}x^{0'} &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\x^{1'} &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\x^{2'} &= x^2 \\x^{3'} &= x^3\end{aligned}$$

In matrixvorm

$$\begin{aligned}x^{0'} &= \Lambda_0^0 x^0 + \Lambda_1^0 x^1 + \Lambda_2^0 x^2 + \Lambda_3^0 x^3 \\x^{1'} &= \Lambda_0^1 x^0 + \Lambda_1^1 x^1 + \Lambda_2^1 x^2 + \Lambda_3^1 x^3 \\x^{2'} &= \Lambda_0^2 x^0 + \Lambda_1^2 x^1 + \Lambda_2^2 x^2 + \Lambda_3^2 x^3 \\x^{3'} &= \Lambda_0^3 x^0 + \Lambda_1^3 x^1 + \Lambda_2^3 x^2 + \Lambda_3^3 x^3\end{aligned}$$



$$x^{\mu'} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$



$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}$$

algemeen geldig

met

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

LORENTZINVARIANTIE

Ruimtetime coordinaten zijn
systeem afhankelijk

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

Invariantie voor

$$I \equiv (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 - (x^{2'})^2 - (x^{3'})^2$$

Net als r^2 voor rotaties in R3

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Analoog zoeken we een uitdrukking als

$$\sum_{\mu=0}^3 x^{\mu} x^{\mu}$$

Hiervoor schrijven we de invariant I
als een dubbelsom

$$I = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$$

Met metrische tensor

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

CO- EN CONTRAVARIANTE VECTOREN

Contravariante viervector

$$x^\mu \text{ (index up)}$$

Covariante viervector

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu$$

Invariant

$$I = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad \Rightarrow \quad I = x_\mu x^\mu$$

Dit is de uitdrukking die we zochten.

De metriek is nu ingebouwd in de notatie!

Deze notatie wordt ook gebruikt voor niet-cartesische systemen en gekromde ruimten (Algemene Relativiteitstheorie)

VIERVECTOREN

Viervector a^μ (contravariant)
transformeert als x^μ

$$x^{\mu'} = \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu$$

$$a^{\mu'} = \Lambda^\mu_{\nu} a^\nu$$

We associeren hiermee een
covariante viervector

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$$

Ruimte componenten
krijgen een minteken

Ook geldt

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$$

Invariant

$$a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

Scalar product

$$a \cdot b \equiv a_\mu b^\mu$$



$$a \cdot b = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

Er geldt

$$a^2 \equiv a \cdot a = (a^0)^2 - \mathbf{a}^2$$

If $a^2 > 0$, a^μ is called *timelike*
If $a^2 < 0$, a^μ is called *spacelike*
If $a^2 = 0$, a^μ is called *lightlike*

SNELHEID

Snelheid van een deeltje t.o.v. het LAB: afstand gedeeld door tijd
(beide gemeten in het LAB)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

Proper snelheid: afstand in LAB gedeeld door eigentijd (gemeten met klok van het deeltje)

$$\boldsymbol{\eta} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$$

vierversnelheid

$$\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

Een hybride grootheid. Er geldt $\boldsymbol{\eta} = \gamma \mathbf{v}$

$$\eta^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d(ct)}{(1/\gamma)dt} = \gamma c$$



$$\eta^\mu = \gamma(c, v_x, v_y, v_z)$$

Er geldt

$$\eta_\mu \eta^\mu = \gamma^2(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) = \gamma^2 c^2 (1 - v^2/c^2) = c^2$$

IMPULS EN ENERGIE

Klassieke impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

Indien behouden in S dan niet in S'

Definieer relativistische impuls als

$$p^\mu = m\eta^\mu$$

Ruimtelijke componenten

$$\mathbf{p} = m\boldsymbol{\eta} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Tijdachtige component

$$p^0 = \gamma mc$$
$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \left. \vphantom{\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \right\} p^0 = \frac{E}{c}$$

Definieer relatv. energie

Energie-impuls viervector

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right)$$



$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$$

ENERGIE

Taylor expansie levert

$$E = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) = mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} + \dots$$

Rustenergie van deeltje

Klassieke kinetische energie

Merk op dat enkel veranderingen in energie relevant zijn in de klassieke mechanica!

Relativistische kinetische energie

$$T \equiv mc^2(\gamma - 1) = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} + \dots$$

Massaloze deeltjes (snelheid altijd c)

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



$$E = |\mathbf{p}|c$$

$$E = h\nu$$

BOTSINGEN

Energie en impuls: behouden grootheden!

Merk op dat E en $\mathbf{p}$ niet (Lorentz) invariant zijn!

Massa is Lorentzinvariant

Massa m is geen behouden grootheid!

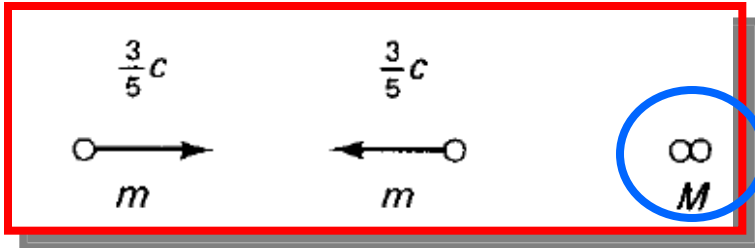
Relativistic Collisions

1. Energy is conserved, $E_A + E_B = E_C + E_D$.
 2. Momentum is conserved $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_C + \mathbf{p}_D$.
 3. Kinetic energy may or may not be conserved.
- $$\left. \begin{array}{l} 1. \text{ Energy is conserved, } E_A + E_B = E_C + E_D. \\ 2. \text{ Momentum is conserved } \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_C + \mathbf{p}_D. \end{array} \right\} \Rightarrow p_A^\mu + p_B^\mu = p_C^\mu + p_D^\mu$$

Types of Collisions (Relativistic)

- (a) *Sticky*: Kinetic energy decreases, rest energy and mass increase.
- (b) *Explosive*: Kinetic energy increases, rest energy and mass decrease.
- (c) *Elastic*: Kinetic energy, rest energy, and mass are conserved.

VOORBEELD 1



Massa's klonteren samen tot 1 object

begintoestand

eindtoestand

Energiebehoud

$$E_1 + E_2 = E_M$$

Impulsbehoud

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_M$$

Er geldt

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$$

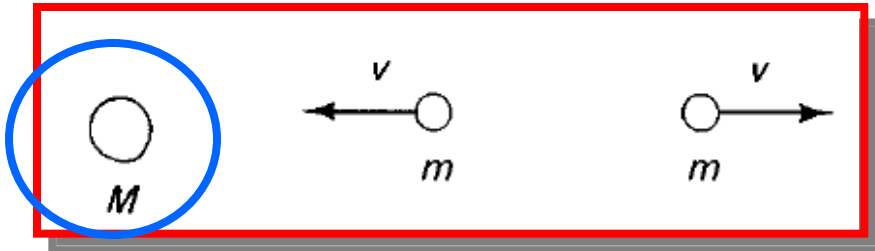
Na botsing is object in rust!

Energiebehoud levert

$$Mc^2 = 2E_m = \frac{2mc^2}{\sqrt{1 - (3/5)^2}} = \frac{5}{4}(2mc^2)$$

Na botsing hebben we een object met massa $M = 5m/2$. Massa is toegenomen: kinetische energie is omgezet in rustenergie en de massa neemt toe.

VOORBEELD 2



Deeltje vervalst in 2 gelijke delen

begintoestand

eindtoestand

Energiebehoud

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(zie vorige opgave)



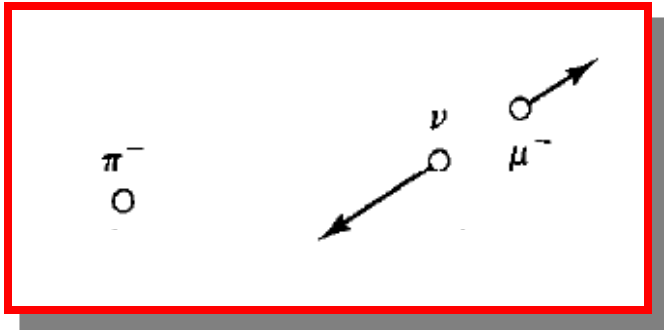
$$v = c\sqrt{1 - (2m/M)^2}$$

Heeft enkel betekenis als $M > 2m$

Men noemt $M = 2m$ de drempelenergie voor het verval.

Voor stabiele deeltjes is de bindingsenergie negatief. Bindingsenergie maakt net als alle andere interne energieën deel uit van de rustmassa.

VOORBEELD 3



Verval van een negatief pion (in rust): $\pi^- \rightarrow \nu + \mu^-$

Vraag: snelheid van het muon

Relatie tussen energie en impuls

$$E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4$$

Dit levert

$$\begin{aligned} E_\pi &= m_\pi c^2 \\ E_\mu &= c \sqrt{m_\mu^2 c^2 + \mathbf{p}_\mu^2} \\ E_\nu &= |\mathbf{p}_\nu| c = |\mathbf{p}_\mu| c \end{aligned}$$

Massa van neutrino is verwaarloosbaar!

Energiebehoud

$$m_\pi c^2 = c \sqrt{m_\mu^2 c^2 + \mathbf{p}_\mu^2} + |\mathbf{p}_\mu| c \quad \Rightarrow \quad (m_\pi c - |\mathbf{p}_\mu|)^2 = m_\mu^2 c^2 + \mathbf{p}_\mu^2$$

$$\Rightarrow \quad |\mathbf{p}_\mu| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c$$

VOORBEELD 3 – VERVOLG

$$|\mathbf{p}_\mu| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c$$

Gebruik

$$E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4$$

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2$$

Relatie tussen energie, impuls en snelheid

$$E = \gamma m c^2$$

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$$

$$\left. \begin{array}{l} E = \gamma m c^2 \\ \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \end{array} \right\} \mathbf{p}/E = \mathbf{v}/c^2$$

Snelheid van het muon

$$v_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} c$$

Invullen van de massa's levert $v_\mu = 0.271c$

VOORBEELD 3 – VIERVECTOREN

Energie en impulsbehoud

$$p_\pi = p_\mu + p_\nu \quad \Rightarrow \quad p_\nu = p_\pi - p_\mu$$

Kwadrateren levert

$$p_\nu^2 = p_\pi^2 + p_\mu^2 - 2p_\pi \cdot p_\mu$$

Merk op dat $p_\nu^2 = 0$; $p_\pi^2 = m_\pi^2 c^2$, $p_\mu^2 = m_\mu^2 c^2$; en $p_\pi \cdot p_\mu = \frac{E_\pi}{c} \frac{E_\mu}{c} = m_\pi E_\mu$

We vinden E_μ

$$0 = m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2m_\pi E_\mu$$

Evenzo

$$p_\mu = p_\pi - p_\nu \quad m_\mu^2 c^2 = m_\pi^2 c^2 - 2m_\pi E_\nu$$

Er geldt

$$E_\nu = |\mathbf{p}_\nu|c = |\mathbf{p}_\mu|c \quad \Rightarrow \quad 2m_\pi |\mathbf{p}_\mu| = (m_\pi^2 - m_\mu^2)c$$

Hiermee hebben we weer E_μ en $\mathbf{p}$ gevonden en weten we de snelheid.