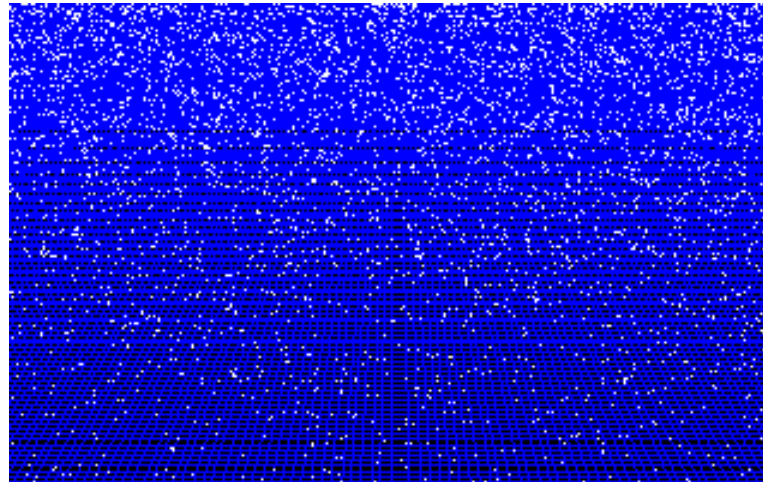


GRAVITATIE EN KOSMOLOGIE

FEW Cursus



Jo van den Brand & Joris van Heijningen
Speciale relativiteitstheorie: 30 september 2013

INHOUD

- Inleiding
 - Overzicht
- Klassieke mechanica
 - Galileo, Newton
 - Lagrange formalisme
- Quantumfenomenen
 - Neutronensterren
- Wiskunde I
 - Tensoren
- Speciale relativiteitstheorie
 - Minkowski
 - Ruimtetijd diagrammen
- Wiskunde II
 - Algemene coördinaten
 - Covariante afgeleide
- Algemene relativiteitstheorie
 - Einsteinvergelijkingen
 - Newton als limiet
- Kosmologie
 - Friedmann
 - Inflatie
- Gravitatiestraling
 - Theorie
 - Experiment

RELATIEVE BEWEGING

Einstein 1905:

Alle natuurwetten blijven dezelfde (zijn invariant) voor alle waarnemers die eenparig rechtlijnig t.o.v. elkaar bewegen.

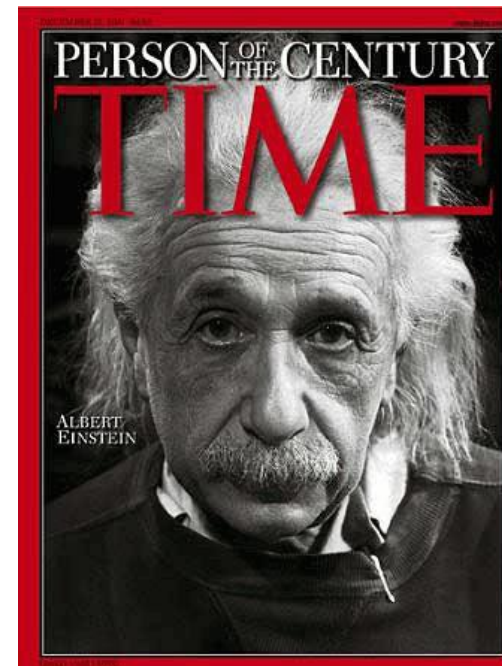
De lichtsnelheid is invariant – heeft voor alle waarnemers dezelfde waarde.

Inertiaalsysteem: objecten bewegen in rechte lijnen als er geen krachten op werken (Newton's eerste wet).

Indien een systeem met constante snelheid t.o.v. een inertiaalsysteem beweegt, dan is het zelf ook een inertiaalsysteem.



Einstein 1921

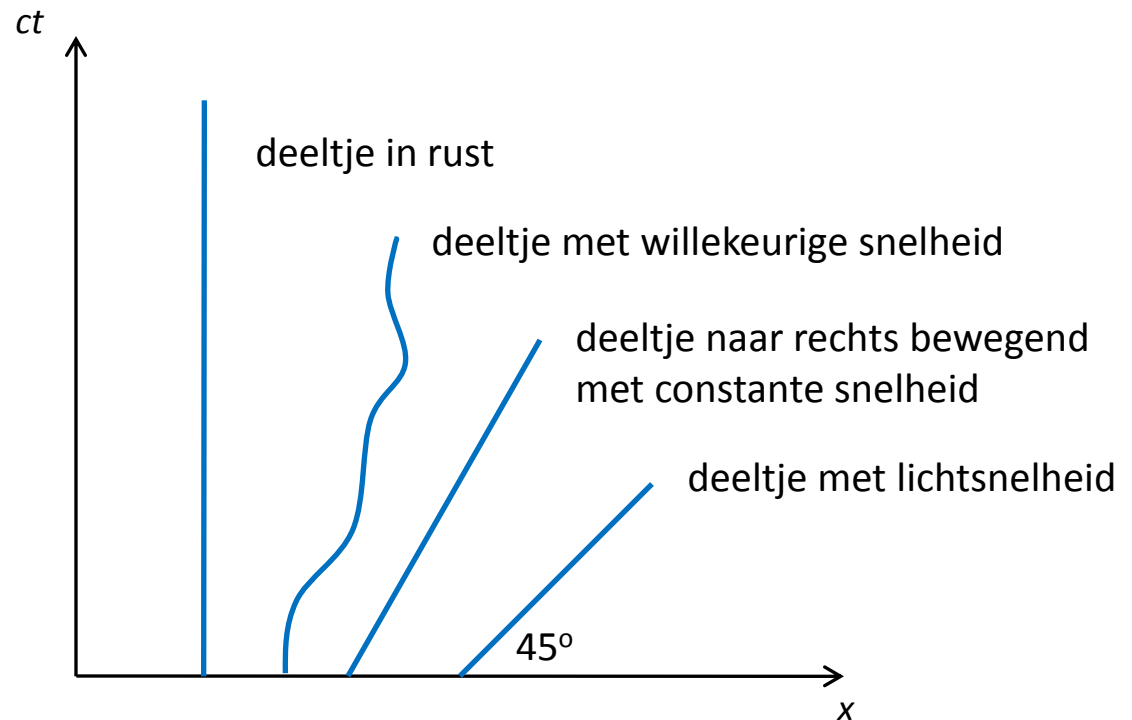


RUIMTETIJD VAN DE ART

Het belang van *fotonen* m.b.t. structuur van ruimte
tijd: empirisch vastgestelde *universaliteit van de
voortplanting* in vacuüm

Onafhankelijk van

- bewegingstoestand van de bron
- golflengte
- intensiteit
- polarisatie van EM golven



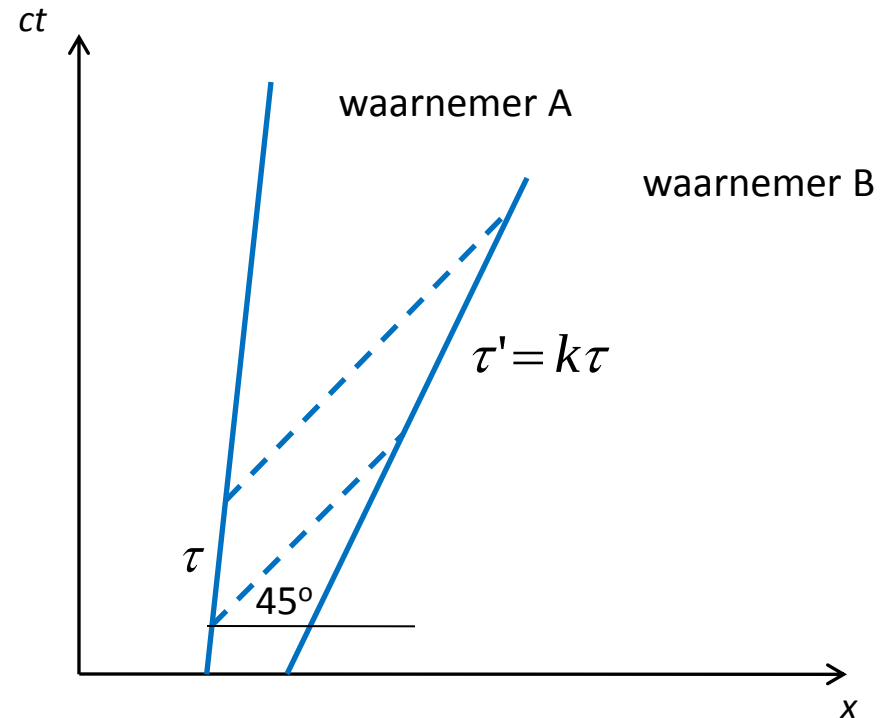
MINKOWSKIRUIMTE — DOPPLERFACTOR

Waarnemers A en B hebben geijkte standaardklokken en lampjes

τ = tijd tussen pulsen van lampje van A, gemeten met de klok van A

τ' = tijd tussen pulsen van lampje van A, gemeten met de klok van B

$\tau' = k\tau$ met dopplerfactor k



MINKOWSKIRUIMTE — DOPPLERFACTOR

Vanuit punt P bewegen waarnemers A en B ten opzichte van elkaar (constante snelheid v van B tov A)

Lampje van A flitst na tijd τ gemeten met de klok van A (in E)

B ziet de flits van A na tijd $k\tau$ (in Q)

B flitst zijn lampje in Q. Waarnemer A ziet dat in R, op tijd $k^2\tau$

Afstand van Q tot A:
(vluchttijd radarpuls x lichtsnelheid)/2

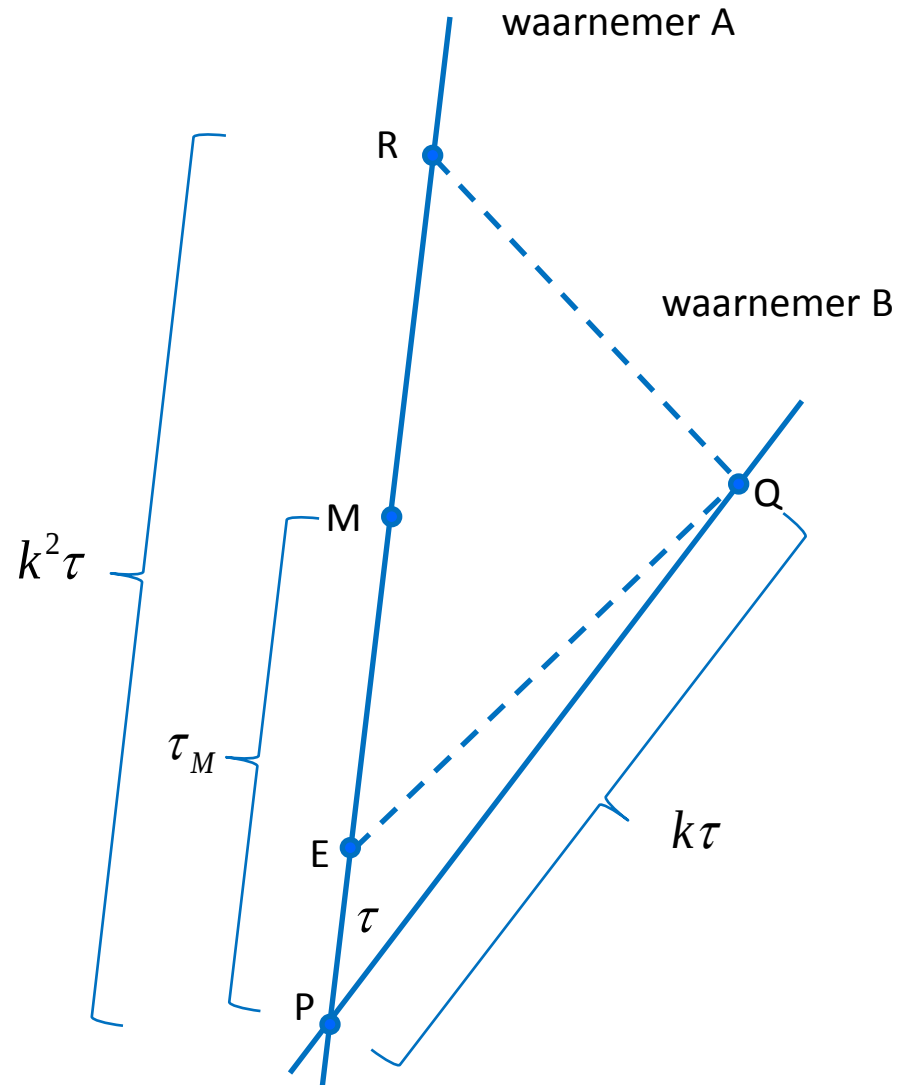
$$\Rightarrow d = \frac{\tau_{ER} \times c}{2} = \frac{c\tau(k^2 - 1)}{2}$$

M is gelijktijdig met Q als $\tau_{EM} = \tau_{RM}$

$$\tau_{EM} = \tau_M - \tau \quad \tau_{RM} = k^2\tau - \tau_M$$

$$\tau_M - \tau = k^2\tau - \tau_M \quad \tau_M = \frac{\tau}{2}(k^2 + 1)$$

$$v = \frac{\text{afstand}}{\text{tijd}} = \frac{d}{\tau_M} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$



MINKOWSKIRUIMTE — INPRODUCT

We kennen de vector $\overrightarrow{PQ}$ toe aan de geordende events P en Q

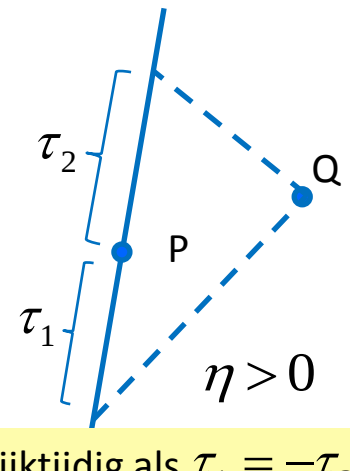
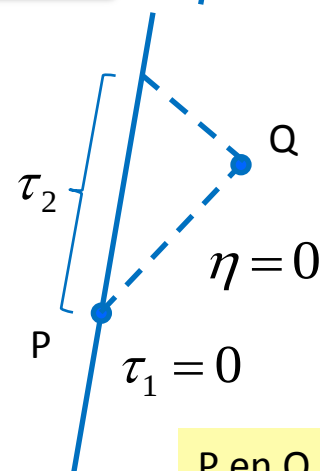
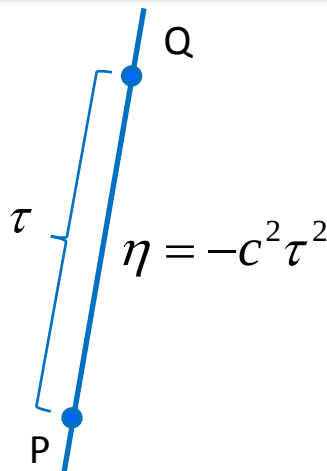
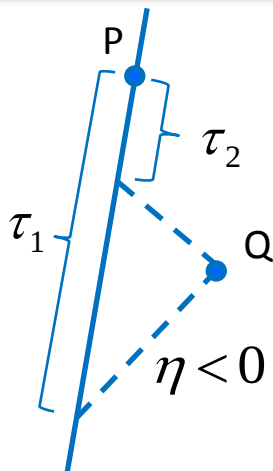
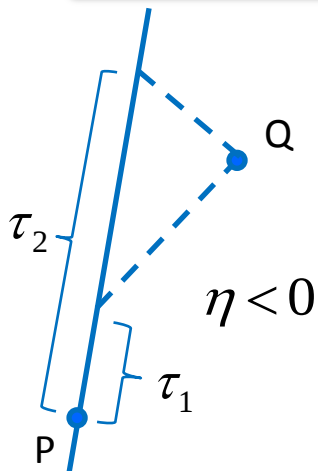
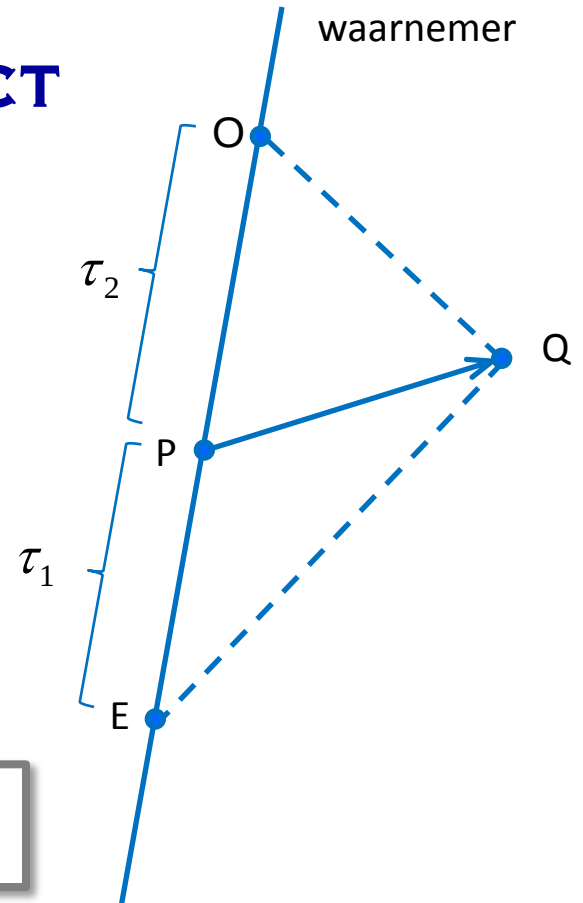
Definitie: $\eta(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) \equiv -c^2 \tau_1 \tau_2$

Afspraak:

tijden voor P negatief

tijden na P positief

Dankzij het bestaan van een metriek (inproduct) kunnen we nu afstanden bepalen. Ruimtetijd heeft een metriek



P en Q gelijktijdig als $\tau_1 = -\tau_2$

LORENTZINVARIANTIE MINKOWSKI-METRIEK

Dat wil zeggen $\eta(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ})$ is onafhankelijk van de inertiele waarnemer door P

Definitie: $\eta(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) \equiv -c^2 \tau_1 \tau_2$

Met afspraak over het teken!

Volgens A: $\eta(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) = c^2 \tau_1 \tau_2$

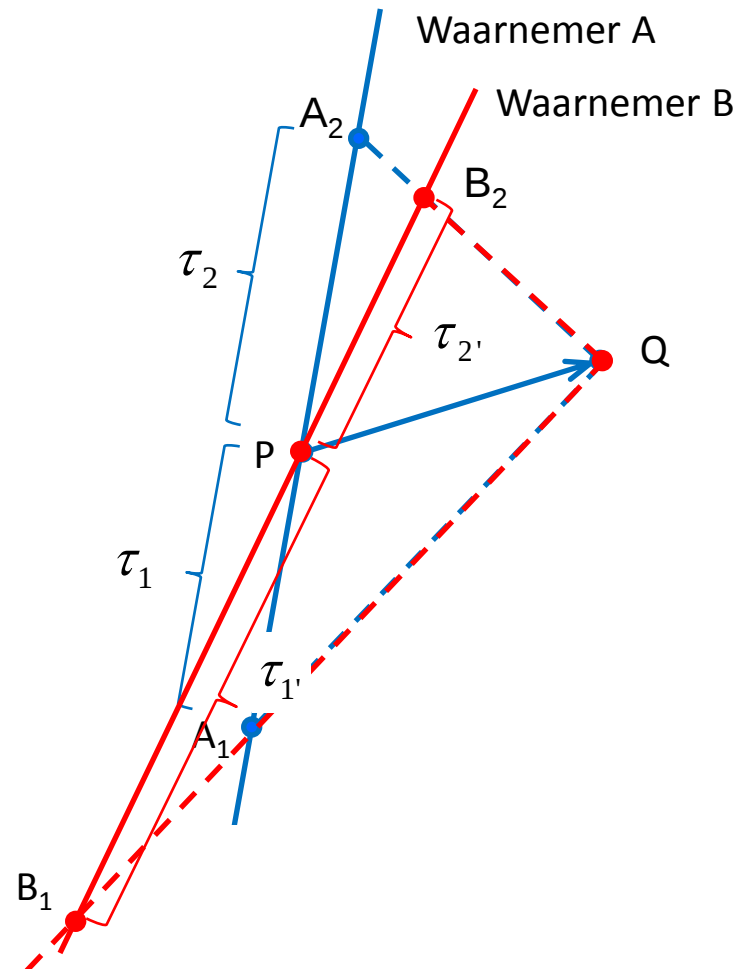
Volgens B: $\eta(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) = c^2 \tau_1' \tau_2'$

Er geldt $\tau_{PA_1} = k^{-1} \tau_{PB_1} \rightarrow \tau_1 = k^{-1} \tau_1'$

$\tau_{PA_2} = k \tau_{PB_2} \rightarrow \tau_2 = k \tau_2'$

➡ $\tau_1 \tau_2 = \tau_1' \tau_2'$

Scalair product is Lorentzinvariant



LORENTZCOÖRDINATEN

Definieer basisvector $\vec{e}_0 = \overrightarrow{OE}$

Er geldt $\eta(\vec{e}_0, \vec{e}_0) = -1$

E is verzameling puntgebeurtenissen die
gelijktijdig zijn met O (t.o.v. A)

Dat is de 3-dim euclidische ruimte op $\tau = 0$ t.o.v. A

E_τ is verzameling puntgebeurtenissen die
gelijktijdig zijn met τ

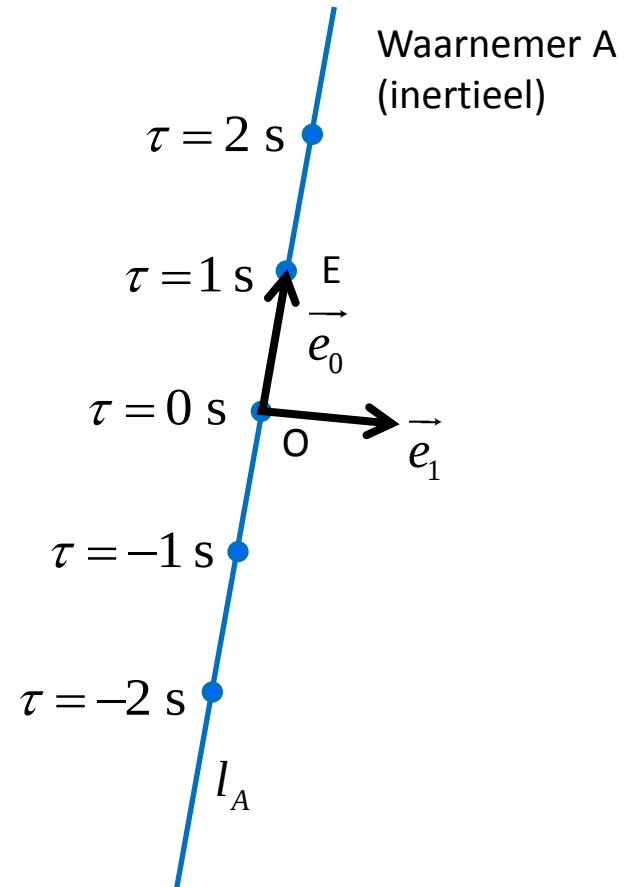
$$\longrightarrow M = \bigcup_{\tau} E_{\tau}$$

Er geldt $Q \in E \Rightarrow \langle \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OQ} \rangle = 0 \quad (l_A \perp E)$

Orthonormaal stelsel vectoren $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$
in E met beginpunt O

Er geldt $\eta(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1$ en $\eta(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$

En ook $\eta(\vec{e}_0, \vec{e}_i) = 0$



MINKOWSKI MEETKUNDE

Basisvectoren $\vec{e}_\mu$ met $\mu = 0, 1, 2, 3$
 We hebben gevonden dat $\eta(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \begin{cases} -1 & \text{als } \mu = \nu = 0 \\ 1 & \text{als } \mu = \nu = i \\ 0 & \text{overige gevallen} \end{cases}$

Nieuw symbool $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



Minkowskimetrik $\eta(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \eta_{\mu\nu}$

Inverse $\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Het invariante lijnelement $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

Notatie bevat metriek en coördinaten

Voor cartesische coördinaten

Lijnelement uitschrijven $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

Dezelfde tijd: Ruimtelijke termen: Stelling van Pythagoras

Dezelfde plaats: *het lijnelement is een maat voor de tijd verstreken tussen twee gebeurtenissen voor een waarnemer die in rust is ten opzichte van deze gebeurtenissen*

Dan geldt $ds^2 = -c^2 d\tau^2$

TIJDDILATATIE

Het invariante lijnelement $c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

Waarnemer W1: twee gebeurtenissen op dezelfde plaats $d\tau$

Waarnemer W2: meet tijdverschil dt

We vinden $d\tau = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt \rightarrow d\tau = \frac{dt}{\gamma}$ met lorentzfactor $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

Snelheid tussen waarnemers $v \equiv \frac{dx}{dt}$

Tijddilatatie is geometrisch effect in 4D ruimtetijd

Tijd tussen twee gebeurtenissen verstrijkt het snelst voor een waarnemer die in rust is ten opzichte van deze gebeurtenissen: eigentijd

LORENTZCONTRACTIE

Het invariante lijnelement $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

Kies x-as als bewegingsrichting

Er geldt $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 = -c^2 dt'^2 + dx'^2$



O' beweegt t.o.v. lat

O staat stil t.o.v. lat

Lat passeert waarnemer O' (dus geldt $dx' = 0$ en $L' = v dt'$)

We vinden $-c^2 dt^2 + dx^2 = -\frac{c^2 L'^2}{v^2}$

Waarnemer O beweegt met de lat mee: lengte lat is L

Voor hem vinden de twee gebeurtenissen (passeren van begin en eind van de lat bij O') op verschillende tijden, gescheiden door dt

We hebben te maken met tijddilatatie $dt' = \gamma^{-1} dt$

Invullen levert $-c^2 \gamma^2 \frac{L'^2}{v^2} + L^2 = -\frac{c^2 L'^2}{v^2}$  $L = \gamma L'$

LORENTZTRANSFORMATIES

Minkowski meetkunde: het invariante lijnelement $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

Welke transformaties laten dit element invariant?

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

Translaties $t' = t + a_t, \quad x' = x + a_x, \quad y' = y + a_y, \quad z' = z + a_z$

Rotaties, bijvoorbeeld $dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2$

Dit is een rotatie rond de z-as (met t en z constant, terwijl x en y mengen)

Schrijf $x' = A_x x + A_y y \quad y' = B_x x + B_y y$

Invullen levert $A_x^2 + B_x^2 = 1, \quad A_y^2 + B_y^2 = 1 \quad A_x A_y = -B_x B_y$

$$\begin{aligned} A_x &= \cos \alpha, B_x = \sin \alpha \\ A_y &= \cos \beta, B_y = \sin \beta \\ \beta &= -\alpha \end{aligned}$$

We vinden $x' = (\cos \alpha)x + (\sin \alpha)y, \quad y' = (\sin \alpha)x - (\cos \alpha)y$

Rotatie rond de z-as

$$\Lambda(\{x, y\}, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Evenzo voor rotaties rond de x- en y-as

LORENTZTRANSFORMATIES

Welke transformaties laten dit element invariant?

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

Boost, bijvoorbeeld $-c^2 dt'^2 + dx'^2 = -c^2 dt^2 + dx^2$

Dit is een boost langs de x-as (met y en z constant, terwijl t en x mengen)

Schrijf $ct' = A_t ct + A_x x$, $x' = B_t ct + B_x x$,

Invullen levert $A_t^2 - B_t^2 = 1$, $-A_x^2 + B_x^2 = 1$ $A_t A_x = B_t B_x$

$$\begin{aligned}\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta &= 1 \\ A_t &= \cosh \eta, B_t = \sinh \eta \\ A_x &= \sinh \rho, B_x = \cosh \rho \\ \rho &= \eta\end{aligned}$$

We vinden $ct' = (\cosh \eta)ct + (\sinh \eta)x$, $x' = (\sinh \eta)ct + (\cosh \eta)x$

Boost langs de z-as

$$\Lambda(\{t, z\}, y_u) = \begin{pmatrix} \cosh y_u & 0 & 0 & -\sinh y_u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh y_u & 0 & 0 & \cosh y_u \end{pmatrix}$$

Evenzo voor boosts langs de x- en y-as

Wat is die hyperbolische hoek η ?

RAPIDITY

We hadden $ct' = (\cosh \eta)ct + (\sinh \eta)x$, $x' = (\sinh \eta)ct + (\cosh \eta)x$

Neem differentiaalvorm, kies $dt' = d\tau$ en schrijf

$$d\tau = (\cosh \eta)dt + (\sinh \eta)\frac{1}{c}dx$$

Kwadrateren, delen door dt^2 en vergelijken met tijddilatatie

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}$$

 $\cosh^2 \eta + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sinh^2 \eta + 2 \left(\frac{v}{c}\right) \cosh \eta \sinh \eta = 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2$

Dat is een kwadratische vergelijking in $\frac{v}{c}$

Manipuleer $\left(\frac{v}{c}\right)^2 (1 + \sinh^2 \eta) + 2 \left(\frac{v}{c}\right) (\cosh \eta \sinh \eta) + (\cosh^2 \eta - 1) = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 (\cosh^2 \eta) + 2 \left(\frac{v}{c}\right) (\cosh \eta \sinh \eta) + (\sinh^2 \eta) = 0$$

Gebruik de *abc*-formule $\left(\frac{v}{c}\right) = -\frac{\sinh \eta}{\cosh \eta} \equiv -\tanh \eta \Rightarrow \eta = -\operatorname{arctanh} \left(\frac{v}{c}\right)$

Ook geldt

$$\begin{aligned} \cosh \left(-\operatorname{arctanh} \left(\frac{v}{c}\right)\right) &= \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma \\ \sinh \left(-\operatorname{arctanh} \left(\frac{v}{c}\right)\right) &= -\left(\frac{v}{c}\right) \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = -\left(\frac{v}{c}\right) \gamma \end{aligned} \quad \text{  } \quad \begin{pmatrix} dx^{0'} \\ dx^{1'} \\ dx^{2'} \\ dx^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}$$