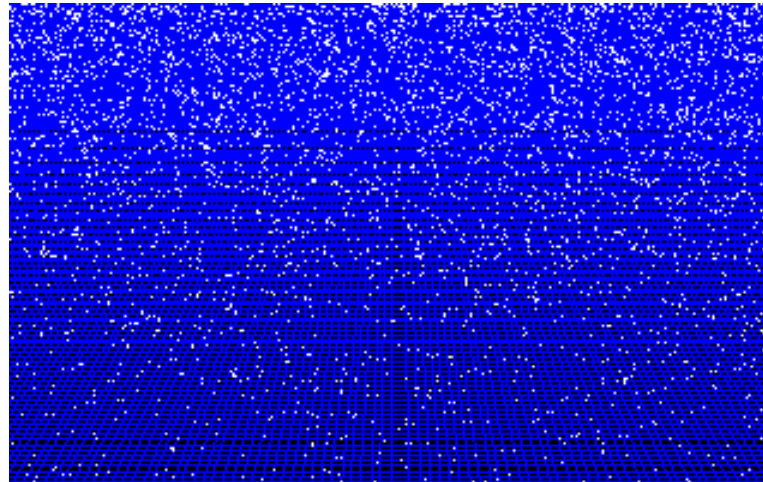


Algemene relativiteitstheorie

HOVO cursus



Jo van den Brand

Les 2: 12 november 2015

Copyright (C) Vrije Universiteit 2015

Differentiaaltopologie

Ruimte: verzameling met structuur

3D variëteit kan lokaal Euclidisch zijn

4D ruimtetijd in ART met lokaal een

Minkowski structuur

Topologische objecten in een ruimte

Scalarveld

Vectorveld

In het algemeen: tensorveld

Tensoren: geometrische grootheden, los
staand van eventuele referentiesystemen

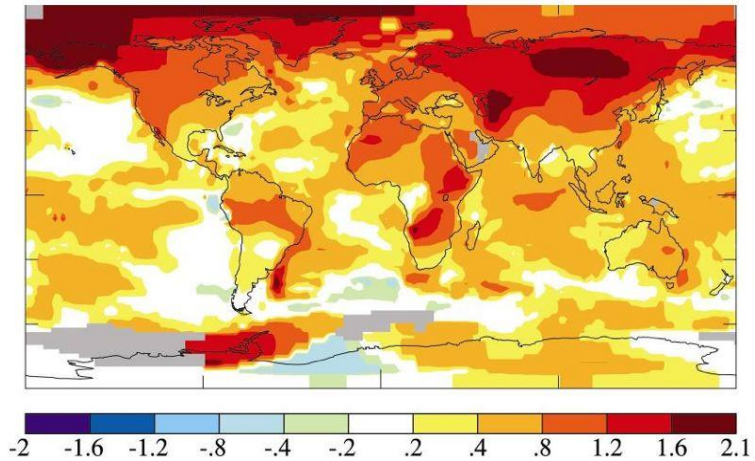
Relativiteitsprincipe: de natuurwetten zijn
onafhankelijk van de keuze van het
referentiesysteem

Door gebruik te maken van tensoren kan een
beschrijving verkregen worden die
onafhankelijk is van het referentiesysteem

Ruimtetijd heeft additionele structuur: metrische
tensor, waardoor we inproduct kunnen definiëren

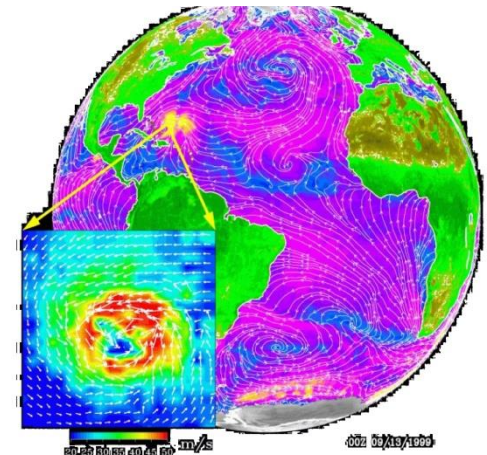
Temperatuur als scalarveld

Surface T in 2001-2005 vs 1951-80, averaging 0.53°C increase



J. Hansen et al., *PNAS* 103: 14288-293 (2006)

Oppervlaktewind als vectorveld



Differentieerbare variëteit

Puntgebeurtenis (event) is een primitief object
Vergelijk met *punt* in Euclidische meetkunde

Limietgeval van een gebeurtenis die op een
oneindig klein gebied plaats heeft en oneindig kort
duurt

Ruimtetiijd: de verzameling van alle mogelijke
puntgebeurtenissen

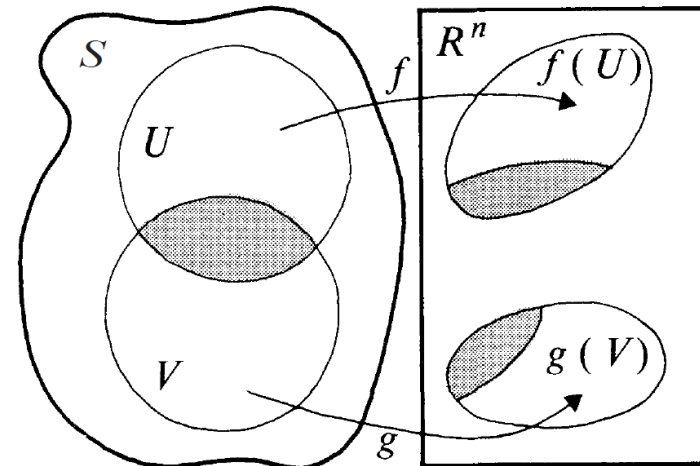
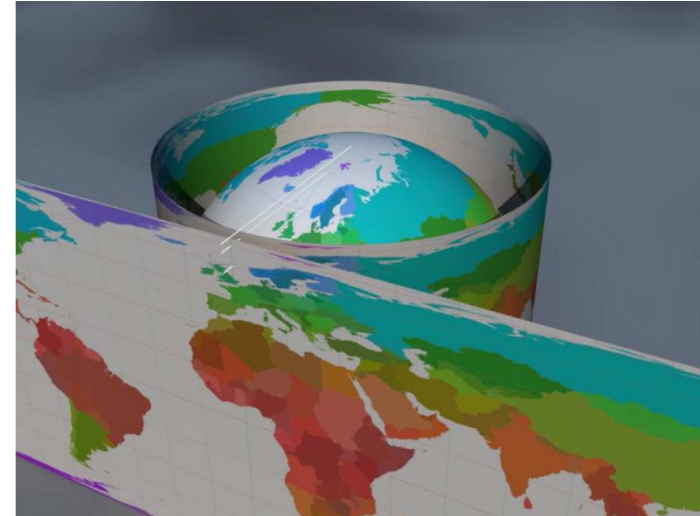
Kaart: beschrijving van het 'aardoppervlak' met een
stukje R^2 *Atlas*: verzameling kaarten van S

Kaarten kunnen verschillende afbeeldingen
geven in het overlapgebied

De relatie tussen deze coördinaten karakteriseert de
differentieerbaarheidsklasse van de variëteit

Variëteit lijkt lokaal op de Euclidische ruimte: hij is
'glad' en heeft een bepaald aantal dimensies

Differentieerbare variëteit: S kan overdekt worden met (overlappende)
deelgebiedjes. De overgangen tussen de verschillende coördinatenstelsels zijn
voldoende vaak differentieerbaar



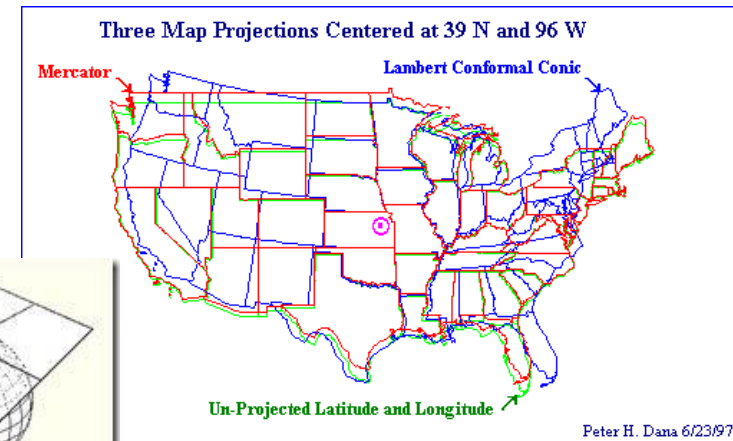
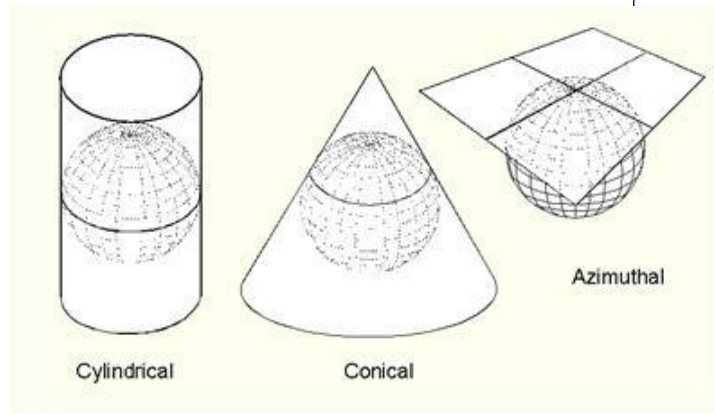
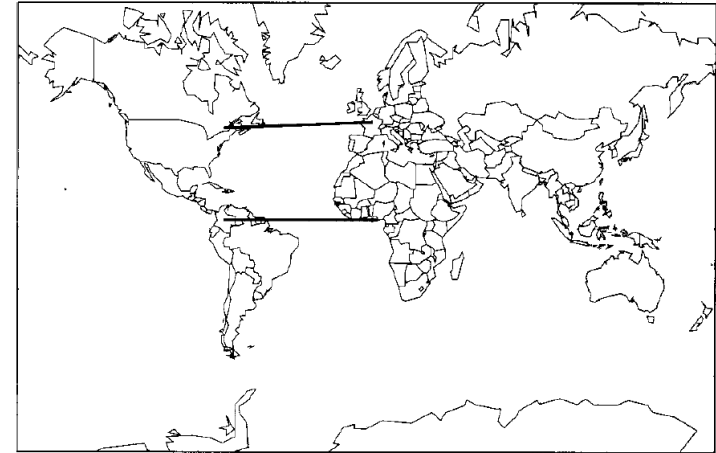
Metriek

Differentieerbare variëteit geeft ordening van de verzameling

Berekenen van afstanden is echter niet mogelijk zonder additionele informatie: de afstand tussen Montreal en Parijs lijkt even groot als die tussen Bogota en Lagos

Metriek: extra structuur die nodig is om afstanden te bepalen

In de ART gebruiken we hiervoor de *metrische tensor*



Curve

Pad: reeks verbonden punten in ruimtetijd

Curve: geparametriseerd pad

De afbeelding van een interval in $\mathbb{R}^1$ naar een pad in ruimtetijd

Er geldt Curve : $\{x^0 = f(\lambda), x^1 = g(\lambda), x^2 = h(\lambda), x^3 = k(\lambda), a \leq \lambda \leq b\}$

Als we de parameter vervangen door $\lambda' = \lambda'(\lambda)$

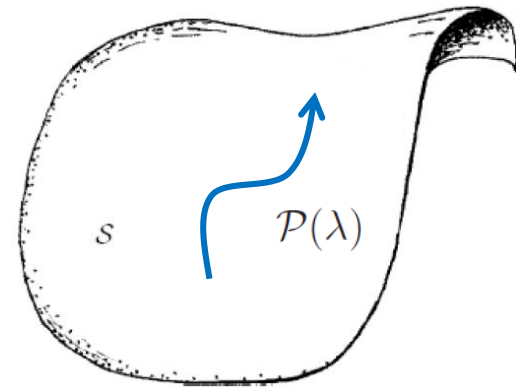
Krijgen we een nieuwe curve

$$\{x^0 = f'(\lambda'), x^1 = g'(\lambda'), x^2 = h'(\lambda'), x^3 = k'(\lambda'), a' \leq \lambda' \leq b'\}$$

Deze curve beschrijft hetzelfde pad in ruimtetijd

Er zijn dus oneindig veel curven die hetzelfde pad beschrijven

Als parameter wordt typisch de tijd op de klok van een meereizende waarnemer gebruikt (de eigentijd τ)



Scalairveld

We definiëren een scalairveld Φ op elk punt van de variëteit

Neem aan dat deze functie overal gedifferentieerd kan worden

Denk aan de temperatuurverdeling van het aardoppervlak

We brengen een deel in kaart,
en op die kaart geldt $\Phi = f(x, y)$

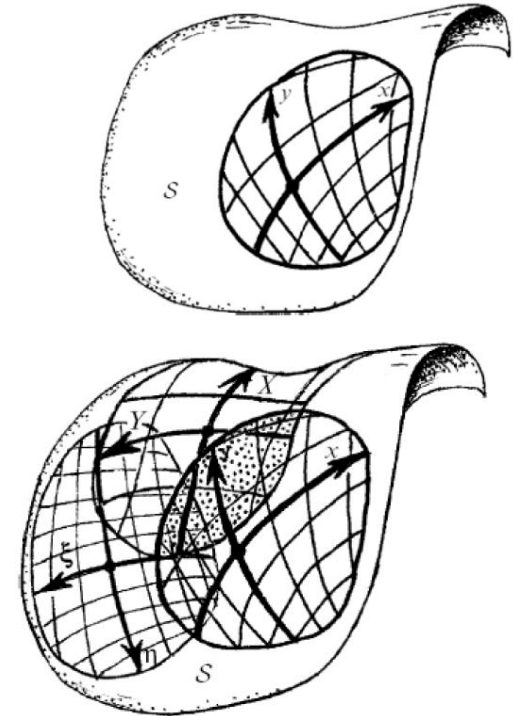
Voor een andere kaart geldt bijvoorbeeld $\Phi = F(X, Y)$

Het veld in elk punt in het overlapgebied verandert niet
Er geldt $f(x, y) = F(X, Y)$

In het algemeen geldt $X = X(x, y)$ en $Y = Y(x, y)$

En de inverse *overgangsfuncties* $x = x(X, Y)$ en $y = y(X, Y)$

Bestudeer het voorbeeld op bladzijde 69 van het dictaat
(zie <http://www.nikhef.nl/~jo/quantum/qm/gw/dictaat.pdf>)



Vectorveld

Vectoren: bekend van begrippen als snelheid en versnelling

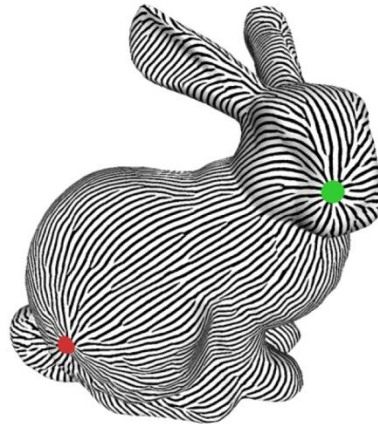
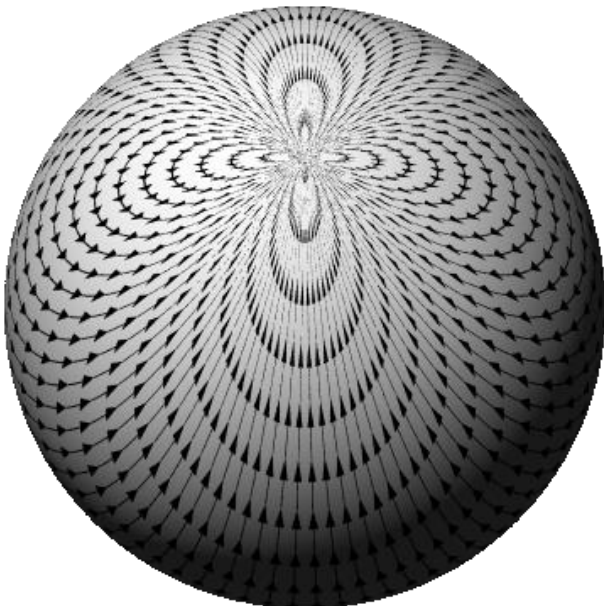
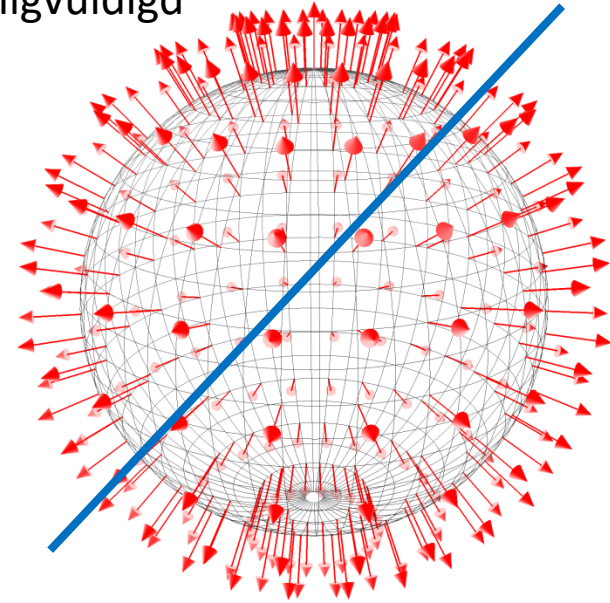
Kunnen worden opgeteld en met een getal worden vermenigvuldigd

Topologisch object: onafhankelijk van referentiesysteem

Vectorveld dient in de variëteit te liggen, dus niet erbuiten

Vectorveld: horizontale windsnelheid op aardoppervlak

“Hairy ball” theorema



Vectorveld

De vectoren zijn gebonden aan hun plaats

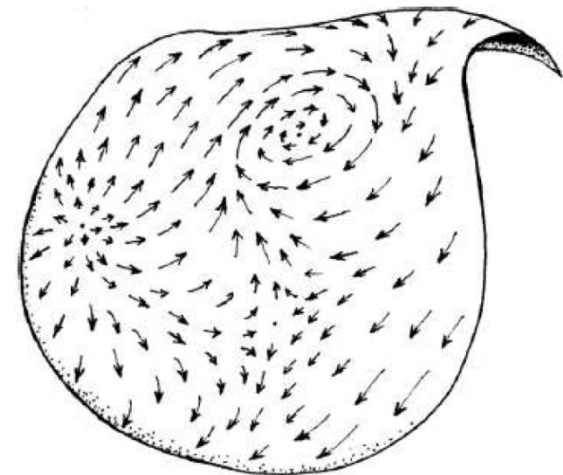
We kunnen vectoren expanderen in een basis

We schrijven $\vec{V} \xrightarrow{\mathcal{O}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

De vector $\vec{V}$ heeft componenten a en b in het referentiesysteem van waarnemer $\mathcal{O}$ bijvoorbeeld het (x, y) systeem

We kunnen ook schrijven $\vec{V} = a\vec{e}_{x(\mathcal{O})} + b\vec{e}_{y(\mathcal{O})}$

Voor een andere waarnemer, $\mathcal{O}'$, geldt dan $\vec{V} = p\vec{e}_{X(\mathcal{O}')} + q\vec{e}_{Y(\mathcal{O}')}$



Vectorveld

Basis: elke complete set kan gebruikt worden

De vector verandert niet als we een andere basis kiezen $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_O = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_{O'}$

Natuurlijke basis: gebruik richtingsafgeleiden $\partial_\alpha \equiv \partial_{\vec{e}_\alpha}$ langs de coördinaten

Tangentenruimte: raakruimte in punt P

Voorbeeld: Euclidische ruimte

Cartesische coördinaten (x, y, z) met basis $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$
 Niet-cartesische coördinaten (u, v, w)

Er geldt $x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w),$

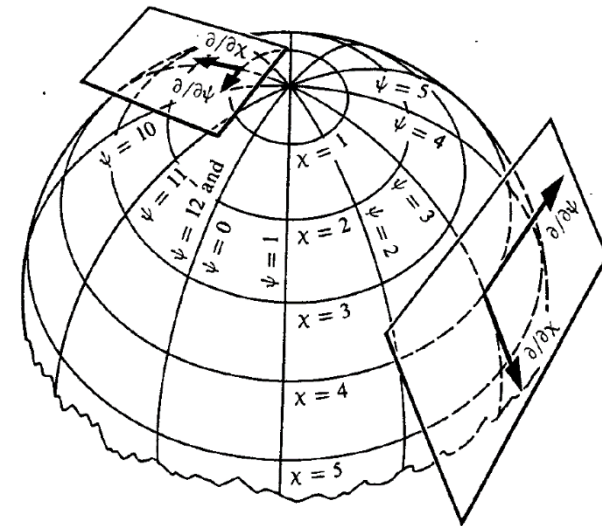
En ook $\vec{r} = x(u, v, w)\vec{i} + y(u, v, w)\vec{j} + z(u, v, w)\vec{k}$

Natuurlijke basis $\vec{e}_u \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{e}_v \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \quad \vec{e}_w \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial w},$

Vectorveld $\vec{\lambda}$ uitdrukken als $\vec{\lambda} = \lambda^u \vec{e}_u + \lambda^v \vec{e}_v + \lambda^w \vec{e}_w$

Notatie u^i ($i = 1, 2, 3$) in plaats van (u, v, w)

$\{\vec{e}_i\}$ ($i = 1, 2, 3$) in plaats van $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w\}$



$$\vec{\lambda} = \lambda^1 \vec{e}_1 + \lambda^2 \vec{e}_2 + \lambda^3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 \lambda^i \vec{e}_i = \lambda^i \vec{e}_i$$

Transformatie vectorcomponenten

Beschouw verplaatsingsvector $\Delta \vec{x} \xrightarrow{\mathcal{O}} (\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$

Notatie $\Delta \vec{x} \xrightarrow{\mathcal{O}} \{\Delta x^\alpha\}$

In systeem $\mathcal{O}'$ geldt $\Delta \vec{x} \xrightarrow{\mathcal{O}'} \{\Delta x^{\alpha'}\}$

Transformatiegedrag

$$\Delta x^{\alpha'} = \sum_{\beta=0}^3 \Lambda^{\alpha'}_{\beta} \Delta x^{\beta} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta} \Delta x^{\beta}$$

Notatie: index *boven* voor vectorcomponent

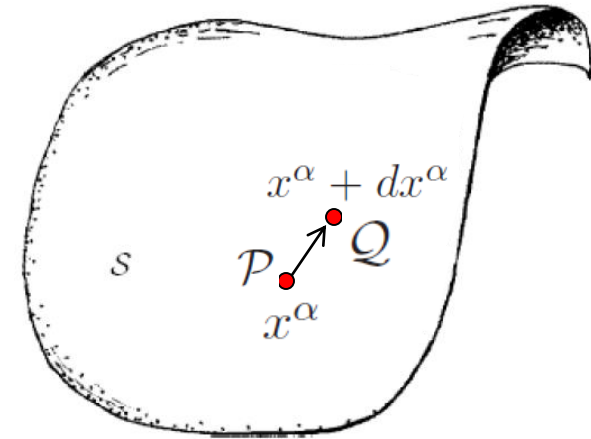
Definitie: een vector is een verzameling getallen $\vec{V} \xrightarrow{\mathcal{O}} (V^0, V^1, V^2, V^3) = \{V^\alpha\}$
(de componenten in basis $\mathcal{O}$) die transformeren volgens

$$V^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta} V^{\beta}$$

Componenten in basis $\mathcal{O}'$ zijn dus $V^{\alpha'}$

De componenten V^α van een vector $\vec{V}$ t.o.v. de natuurlijke basis $\{\vec{e}_\alpha\}$ worden de contravariante componenten genoemd

Een dergelijk object noemen we ook een $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tensor



Transformatie van de basis

Er geldt $\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha = V^{\alpha'} \vec{e}_{\alpha'}$

Ook geldt $V^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_\beta V^\beta$

Hiermee vinden we de transformatiewet voor basisvectoren

Dat is de relatie tussen $\{\vec{e}_\alpha\}$ en $\{\vec{e}_{\alpha'}\}$

We schrijven $\Lambda^{\alpha'}_\beta V^\beta \vec{e}_{\alpha'} = V^\alpha \vec{e}_\alpha \rightarrow V^\beta \Lambda^{\alpha'}_\beta \vec{e}_{\alpha'} = V^\alpha \vec{e}_\alpha \rightarrow V^\alpha \Lambda^{\beta'}_\alpha \vec{e}_{\beta'} = V^\alpha \vec{e}_\alpha \rightarrow V^\alpha (\Lambda^{\beta'}_\alpha \vec{e}_{\beta'} - \vec{e}_\alpha) = 0$

We vinden $\vec{e}_\alpha = \Lambda^{\beta'}_\alpha \vec{e}_{\beta'}$

Notatie: index *beneden* voor basisvectoren

Basisvectoren transformeren *tegengesteld* aan vectorcomponenten

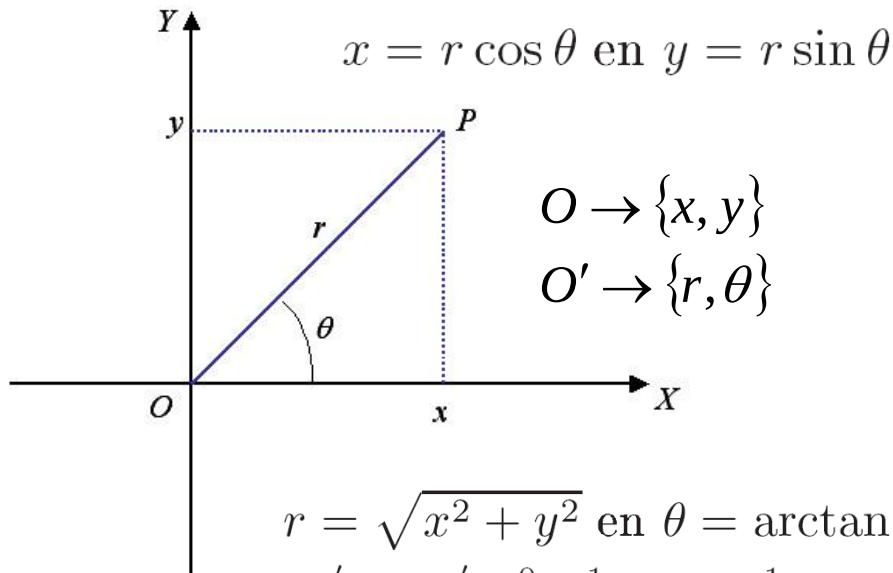
Hier komt het woord '*contravariant*' vandaan

Voor de inverse transformaties geldt $\vec{e}_{\beta'} = \Lambda^\alpha_{\beta'} \vec{e}_\alpha$, en $V^\alpha = \Lambda^\alpha_{\beta'} V^{\beta'}$

Deze notatie is van Jan Arnoldus Schouten
(een van de oprichters CWI in Amsterdam)

Verder nog $\Lambda^\nu_{\beta'} \Lambda^{\beta'}_\alpha = \delta^\nu_\alpha$

Voorbeeld: poolcoördinaten



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ en } \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^0, x^1, \dots, x^{n-1}) \quad \text{met } \alpha = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\Delta r = \frac{x}{r} \Delta x + \frac{y}{r} \Delta y = \cos \theta \Delta x + \sin \theta \Delta y,$$

$$\Delta \theta = -\frac{y}{r^2} \Delta x + \frac{x}{r^2} \Delta y = -\frac{1}{r} \sin \theta \Delta x + \frac{1}{r} \cos \theta \Delta y,$$

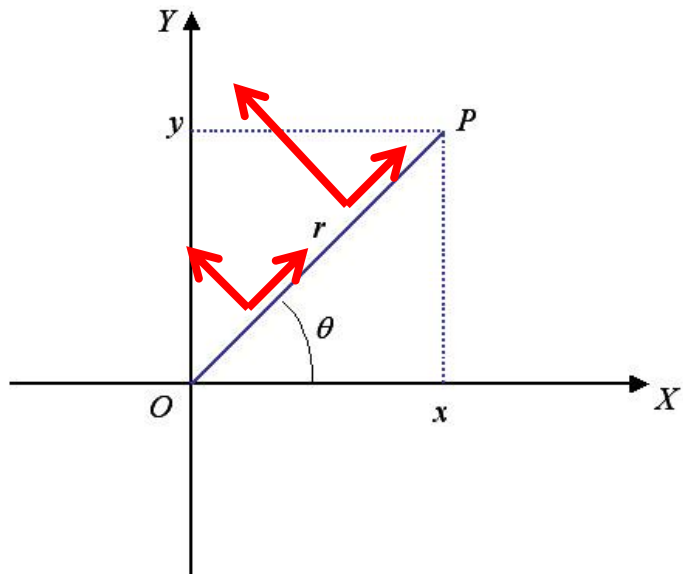
$$\left. \begin{array}{l} \Delta r \\ \Delta \theta \end{array} \right\} V^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta} V^{\beta}$$

$$\Lambda^{\alpha'}_{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^{n-1}} \\ \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^{(n-1)'}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{(n-1)'}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{(n-1)'}}{\partial x^{n-1}} \end{array} \right) \rightarrow \Lambda^{\alpha'}_{\beta} = \left(\begin{array}{cc} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{array} \right)$$

We hadden ook

$$\vec{e}_{\alpha'} = \Lambda^{\beta}_{\alpha'} \vec{e}_{\beta}$$

Voorbeeld: poolcoördinaten



$$\Lambda^{\alpha'}_{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix} \rightarrow \Lambda^{\mu}_{\nu'} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & -y \\ \frac{y}{r} & x \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

We hadden ook

$$\vec{e}_{\alpha'} = \Lambda^{\beta}_{\alpha'} \vec{e}_{\beta} \quad \vec{e}_1 = \vec{e}_x = \vec{i}, \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_y = \vec{j}$$

$$\vec{e}_r = \Lambda^x_r \vec{e}_x + \Lambda^y_r \vec{e}_y = \frac{\partial x}{\partial r} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{e}_y = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_{\theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} \vec{e}_y = -r \sin \theta \vec{e}_x + r \cos \theta \vec{e}_y$$

Vector $\vec{V}$ is onafhankelijk van coördinatenstelsel

$$\vec{V} = V^{\alpha} \vec{e}_{\alpha} = V^{\alpha'} \vec{e}_{\alpha'}$$

Gradiënt als 1- vorm

Beschouw wereldlijn van een waarnemer

Beschouw een scalairveld $\phi(\vec{x}) = \phi(t, x, y, z)$

Parametriseer wereldlijn met de eigentijd

Er geldt dan $[t = t(\tau), x = x(\tau), y = y(\tau), z = z(\tau)]$

De viersnelheid is $\vec{U} \rightarrow \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right)$

Duidelijk een viervector (verplaatsingsvector gedeeld door een getal)

Er geldt ook $\phi(\tau) = \phi[t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau)]$

De verandering van het veld op de wereldlijn (dat is de afgeleide) is

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\partial\phi}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial\phi}{\partial t} U^t + \frac{\partial\phi}{\partial x} U^x + \frac{\partial\phi}{\partial y} U^y + \frac{\partial\phi}{\partial z} U^z = \tilde{d}\phi(\vec{U})$$

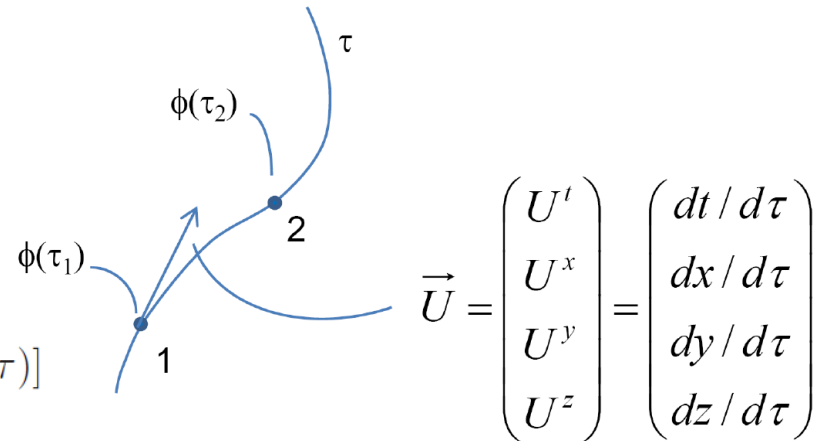
Dit is de definitie van de gradient, de 1 – vorm met componenten

$$\tilde{d}\phi \rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial\phi}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}} = \Lambda^{\beta}_{\alpha'} \frac{\partial\phi}{\partial x^{\beta}}$$

Notatie:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^{\alpha}} \equiv \phi_{,\alpha}$$



Algemene tensorvelden

De $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor heeft 2 vectorargumenten

Voorbeeld: inproduct van 2 vectoren (metrische tensor)

Voorbeeld: product van twee 1 – vormen

Als $\tilde{p}$ en $\tilde{q}$ de 1 – vormen zijn, dan is $\tilde{p} \otimes \tilde{q}$ de gezochte $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor

Met argumenten $\vec{A}$ en $\vec{B}$ levert dit het getal $\tilde{p}(\vec{A}) \tilde{q}(\vec{B})$

Dit noemen we het tensorproduct

Tensorproduct is niet commutatief: $\tilde{p} \otimes \tilde{q} \neq \tilde{q} \otimes \tilde{p}$

De meest algemene $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor $\mathbf{f}$ is geen eenvoudig tensorproduct

We kunnen het altijd schrijven als de som van dergelijke producten

Er geldt $f_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)$

De waarden zijn dan $\mathbf{f}(\vec{A}, \vec{B}) = \mathbf{f}(A^\alpha \vec{e}_\alpha, B^\beta \vec{e}_\beta) = A^\alpha B^\beta \mathbf{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = A^\alpha B^\beta f_{\alpha\beta}$

In totaal heeft $\mathbf{f}$ dus 16 componenten

Tensorbasis

Kunnen we een basis vormen voor deze $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor?

Kunnen we 16 verschillende $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensoren definiëren, zodat $\mathbf{f} = f_{\alpha\beta} \tilde{\omega}^{\alpha\beta}$

Dan dient te gelden $f_{\mu\nu} = \mathbf{f}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = f_{\alpha\beta} \tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu)$

Dan moet dus gelden $\tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta$

We concluderen $\tilde{\omega}^{\alpha\beta} = \tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta$

De tensoren $\tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta$ vormen de basis voor alle $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensoren

Er geldt dus $\mathbf{f} = f_{\alpha\beta} \tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta$

Een algemene $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor is een som over eenvoudige tensorproduct tensoren

Een $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ tensor is een lineaire afbeelding van M 1 – vormen en N vectoren naar de reële getallen (zie het weer als een apparaat met $M+N$ sleuven)

De tensor is een topologisch object, met componenten op de basis $\{\vec{e}^\alpha\}$ en $\{\vec{e}_\alpha\}$

Metrische tensor

Tot nu toe is onze variëteit een amorse verzameling van topologische objecten
Er is geen connectie tussen vectorruimte en zijn duale.
Ook is er geen inproduct gedefinieerd: er is geen meetkunde

De $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor $\mathbf{g}$ (van gravitatie) gaat dienst doen als metriek van de variëteit

Dan verkrijgen we een *Riemannse* variëteit

Definitie $g(\vec{A}, \vec{B}) \equiv \vec{A} \cdot \vec{B}$

Metrische tensor is symmetrisch $g(\vec{A}, \vec{B}) = g(\vec{B}, \vec{A})$
en lineair in zijn argumenten $g(\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}, \vec{C}) = \alpha g(\vec{A}, \vec{C}) + \beta g(\vec{B}, \vec{C})$

De definitie maakt geen gebruik van componenten van vectoren
De metriek is weer een topologisch object

In basis $\{\vec{e}_\alpha\}$ zijn de componenten van de metriek $g(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = g_{\alpha\beta}$

Metriek als afbeelding

Metriek is een afbeelding tussen 1 – vormen en vectoren

Beschouw metrische tensor g en vector $\vec{V}$

Dan is $g(\vec{V}, \cdot)$ een functie van vectoren: een afbeelding naar reële getallen

We noemen het de 1 – vorm $\tilde{V}$

Er geldt $g(\vec{V}, \cdot) \equiv \tilde{V}(\cdot)$

Voor vector $\vec{A}$ vinden we dan $\tilde{V}(\vec{A}) \equiv g(\vec{V}, \vec{A}) = \vec{V} \cdot \vec{A} = V^\alpha A_\alpha = V_\alpha A^\alpha$

De componenten van $\tilde{V}$ zijn $V_\alpha \equiv \tilde{V}(\vec{e}_\alpha) = \vec{V} \cdot \vec{e}_\alpha = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{V} = \vec{e}_\alpha \cdot (V^\beta \vec{e}_\beta) = (\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta) V^\beta = g_{\alpha\beta} V^\beta$

De relatie tussen vector en 1 – vorm is dus $V_\alpha = g_{\alpha\beta} V^\beta$ in basis $\{\vec{e}_\alpha\}$

We onderscheiden de componenten van de vector van die van de 1 – vorm enkel door de positie van de index

De inverse van de metriek bestaat ook $g^\alpha_\beta \equiv g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta^\alpha_\beta$

Hiermee vinden we

$$V^\alpha = g^{\alpha\beta} V_\beta$$