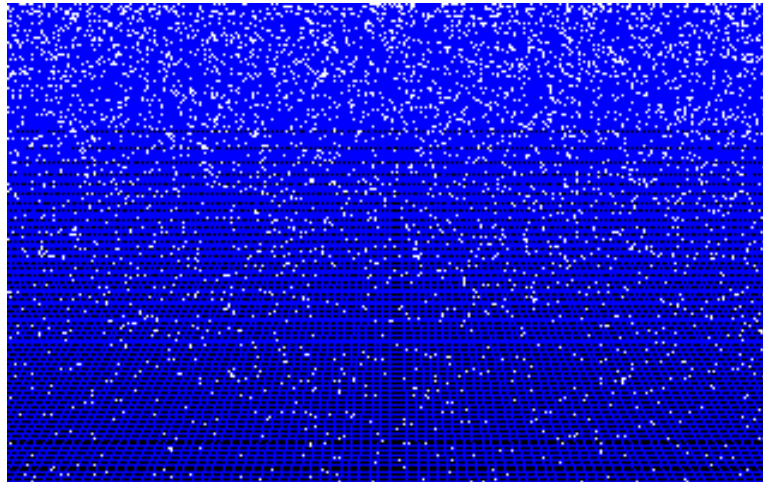


GRAVITATIE EN KOSMOLOGIE

FEW cursus



Jo van den Brand & Laura van der Schaaf
Differentiaaltopologie: 15 september 2014

INHOUD

- Inleiding
 - Overzicht
- Klassieke mechanica
 - Galileo, Newton
 - Lagrange formalisme
- Quantumfenomenen
 - Neutronensterren
- Wiskunde I
 - Tensoren
- Speciale relativiteitstheorie
 - Minkowski
 - Ruimtetijd diagrammen
- Wiskunde II
 - Algemene coördinaten
 - Covariante afgeleide
- Algemene relativiteitstheorie
 - Einsteinvergelijkingen
 - Newton als limiet
- Kosmologie
 - Friedmann
 - Inflatie
- Gravitatiestraling
 - Theorie
 - Experiment

DIFFERENTIAALTOPOLOGIE

Ruimte: verzameling met structuur

3D variëteit kan lokaal Euclidisch zijn

4D ruimtetijd in ART met lokaal een

Minkowski structuur

Topologische objecten in een ruimte

Scalarveld

Vectorveld

In het algemeen: tensorveld

Tensoren: geometrische grootheden, los
staand van eventuele referentiesystemen

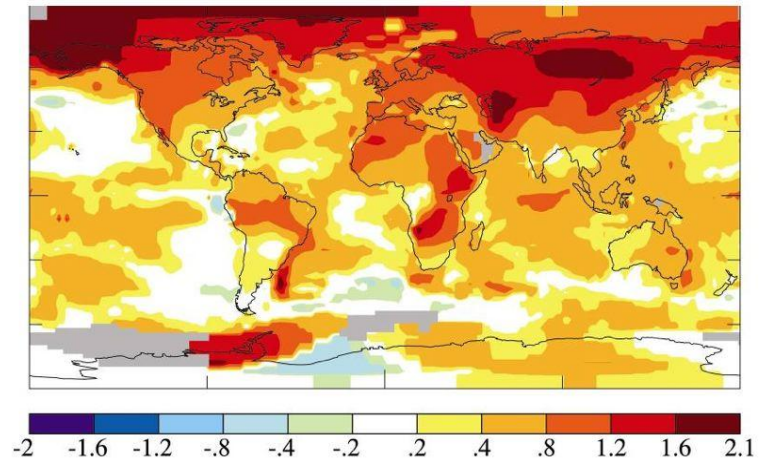
Relativiteitsprincipe: de natuurwetten zijn
onafhankelijk van de keuze van het
referentiesysteem

Door gebruik te maken van tensoren kan een
beschrijving verkregen worden die
onafhankelijk is van het referentiesysteem

Ruimtetijd heeft additionele structuur: metrische
tensor, waardoor we inproduct kunnen definiëren

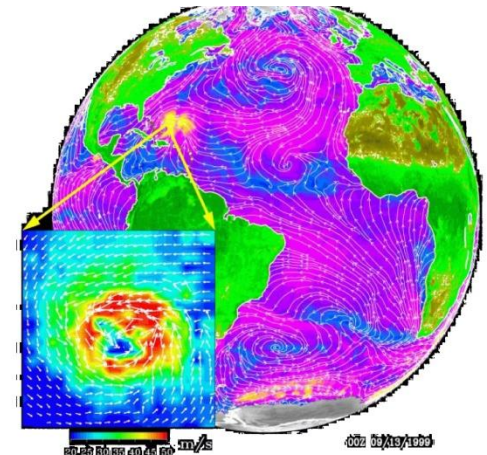
Temperatuur als scalarveld

Surface T in 2001-2005 vs 1951-80, averaging 0.53°C increase



J. Hansen et al., *PNAS* 103: 14288-293 (2006)

Oppervlaktewind als vectorveld



DIFFERENTIEERBARE VARIËTEIT

Puntgebeurtenis (event) is een primitief object
Vergelijk met *punt* in Euclidische meetkunde

Limietgeval van een gebeurtenis die op een
oneindig klein gebied plaats heeft en oneindig kort
duurt

Ruimtetime: de verzameling van alle mogelijke
puntgebeurtenissen

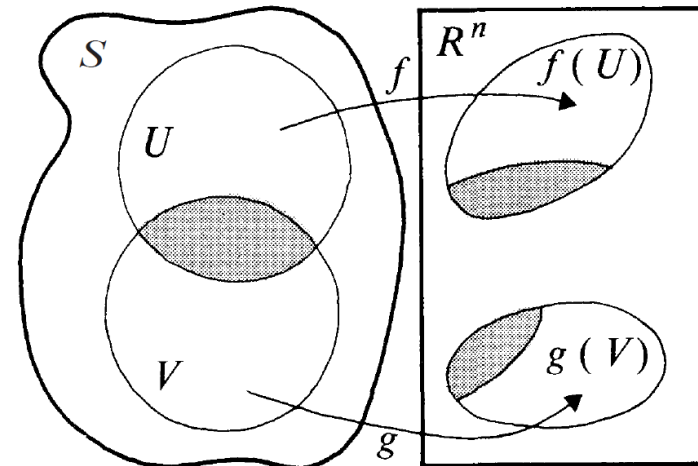
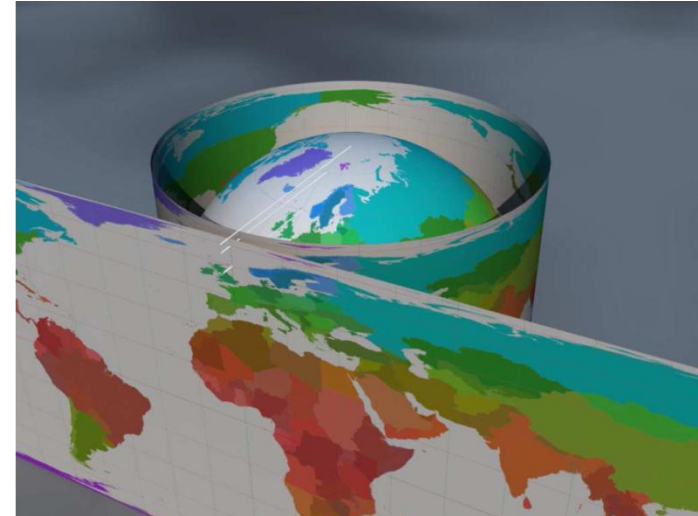
Kaart: beschrijving van het 'aardoppervlak' met een
stukje R^2 *Atlas*: verzameling kaarten van S

Kaarten kunnen verschillende afbeeldingen
geven in het overlapgebied

De relatie tussen deze coördinaten karakteriseert de
differentieerbaarheidsklasse van de variëteit

Variëteit lijkt lokaal op de Euclidische ruimte: hij is
'glad' en heeft een bepaald aantal dimensies

Differentieerbare variëteit: S kan overdekt worden met (overlappende)
deelgebiedjes. De overgangen tussen de verschillende coördinatenstelsels zijn
voldoende vaak differentieerbaar



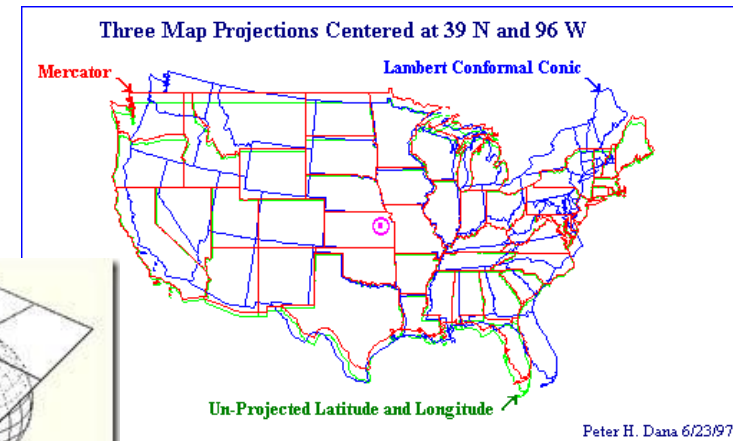
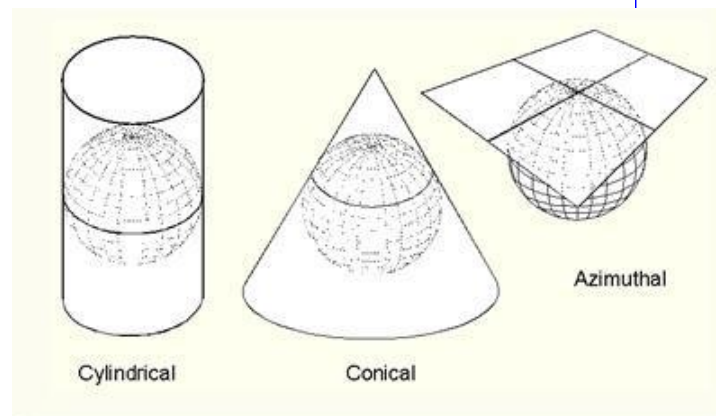
METRIEK

Differentieerbare variëteit geeft ordening van de verzameling

Berekenen van afstanden is echter niet mogelijk zonder additionele informatie: de afstand tussen Montreal en Parijs lijkt even groot als die tussen Bogota en Lagos

Metriek: extra structuur die nodig is om afstanden te bepalen

In de ART gebruiken we hiervoor de *metrische tensor*



COÖRDINATENTRANSFORMATIES

Om P te labelen, gebruiken we n coördinaten

P is topologisch object

Coördinaten: keuze is arbitrair

We mogen herlabelen $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$

Merk op: gebruik bovenindex

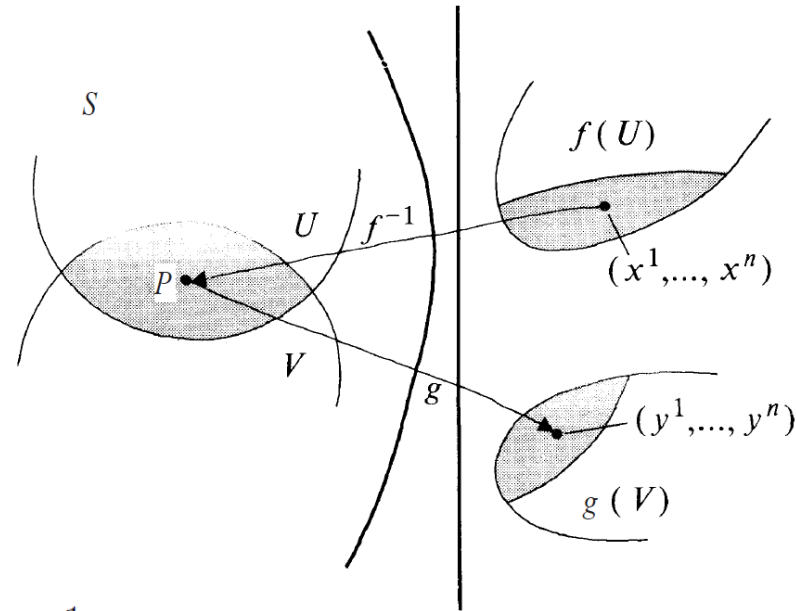
Coördinatentransformatie

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^0, x^1, \dots, x^{n-1}) \quad \text{met } \alpha' = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Merk op: accent op de index

We kennen nieuwe coördinaten $(x^{0'}, x^{1'}, \dots, x^{(n-1)'})$
toe aan een punt, waarvan oude coördinaten gegeven
worden door $(x^0, x^1, \dots, x^{n-1})$

Neem aan dat transformatiefuncties een-op-een,
continue en differentieerbaar zijn. Dit levert de
transformatiematrix



$$\Lambda^{\alpha'}_{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^{n-1}} \\ \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^{(n-1)'}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{(n-1)'}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial x^{(n-1)'}}{\partial x^{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$J = \det \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} \right)$$

COÖRDINATENTRANSFORMATIES

Stel $J \neq 0$, dan kunnen we inverteren

Inverse transformatievergelijkingen $x^\alpha = x^\alpha(x^{0'}, x^{1'}, \dots, x^{(n-1)'})$ met $\alpha = 0, 1, \dots, n-1$

Inverse transformatiematrix $\Lambda^{\alpha}_{\beta'} = \partial x^\alpha / \partial x^{\beta'}$: $J' = \det(\partial x^\alpha / \partial x^{\beta'})$

Kettingregel $\sum_{\beta=0}^{n-1} \Lambda^{\alpha'}_{\beta} \Lambda^{\beta}_{\gamma'} = \sum_{\beta=0}^{n-1} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\gamma'}} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\gamma'}} = \delta^{\alpha}_{\gamma'} = \begin{cases} 1 & \text{als } \alpha = \gamma, \\ 0 & \text{als } \alpha \neq \gamma, \end{cases}$

waarbij we gebruiken dat $\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\gamma'}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} = 0$ als $\alpha \neq \gamma$,

Omdat de transformaties elkaars inverse zijn, geldt $J' = 1/J$

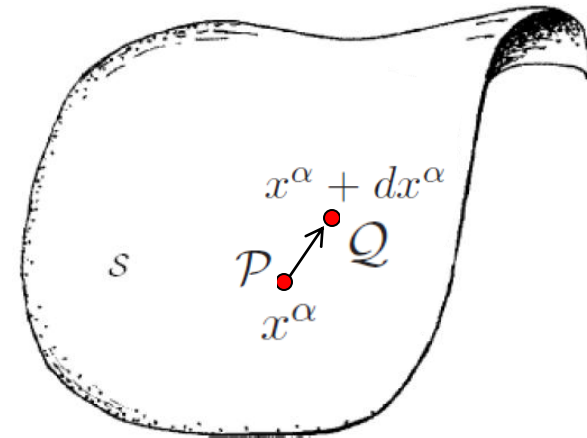
Beschouw naburige punten P en Q in variëteit

In een nieuw coördinatensysteem vinden we voor de afstand

$$dx^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{n-1}} dx^{n-1}$$

We schrijven dit met sommatieconventie als

We zien vrije en dummy indices $dx^{\alpha'} = \sum_{\beta=0}^{n-1} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta} = \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} \right) dx^{\beta}$



CURVE

Pad: reeks verbonden punten in ruimtetijd

Curve: geparametriseerd pad

De afbeelding van een interval in $\mathbb{R}^1$ naar een pad in ruimtetijd

Er geldt $\text{Curve} : \{x^0 = f(\lambda), x^1 = g(\lambda), x^2 = h(\lambda), x^3 = k(\lambda), a \leq \lambda \leq b\}$

Als we de parameter vervangen door $\lambda' = \lambda'(\lambda)$

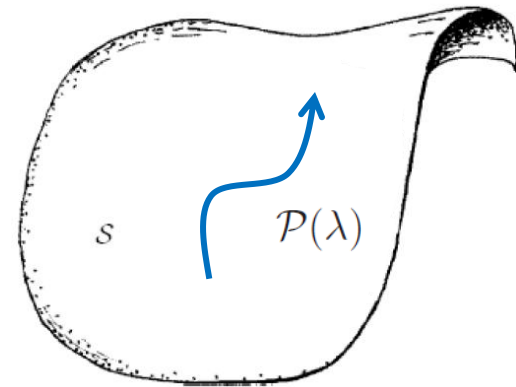
Krijgen we een nieuwe curve

$$\{x^0 = f'(\lambda'), x^1 = g'(\lambda'), x^2 = h'(\lambda'), x^3 = k'(\lambda'), a' \leq \lambda' \leq b'\}$$

Deze curve beschrijft hetzelfde pad in ruimtetijd

Er zijn dus oneindig veel curven die hetzelfde pad beschrijven

Als parameter wordt typisch de tijd op de klok van een meereizende waarnemer gebruikt (de eigentijd τ)



SCALAIRVELD

We definiëren een scalaïr veld Φ op elk punt van de variëteit

Neem aan dat deze functie overal gedifferentieerd kan worden

Denk aan de temperatuurverdeling van het aardoppervlak

We brengen een deel in kaart,
en op die kaart geldt $\Phi = f(x, y)$

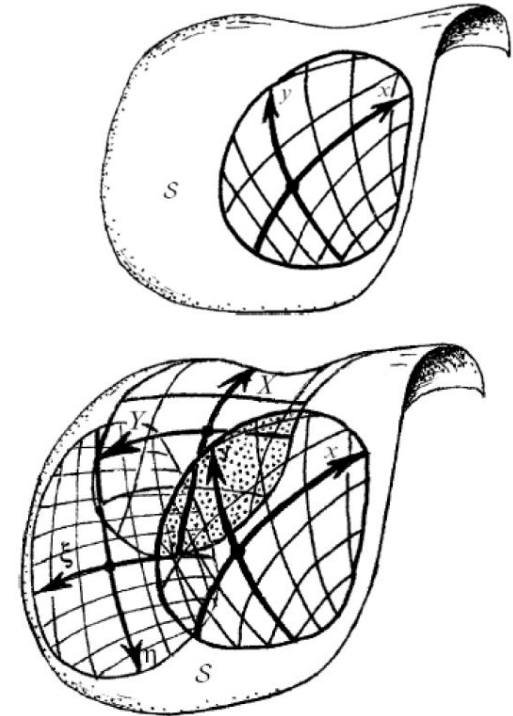
Voor een andere kaart geldt bijvoorbeeld $\Phi = F(X, Y)$

Het veld in elk punt in het overlapgebied verandert niet
Er geldt $f(x, y) = F(X, Y)$

In het algemeen geldt $X = X(x, y)$ en $Y = Y(x, y)$

En de inverse *overgangsfuncties* $x = x(X, Y)$ en $y = y(X, Y)$

Bestudeer het voorbeeld op bladzijde 69 van het dictaat



VECTORVELD

Vectoren: bekend van begrippen als snelheid en versnelling

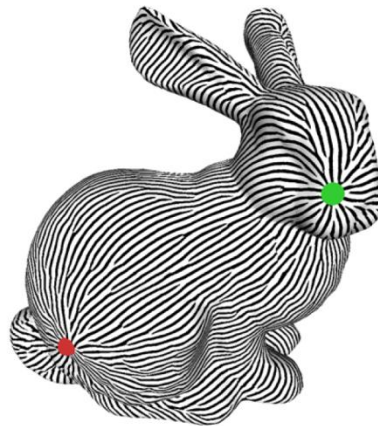
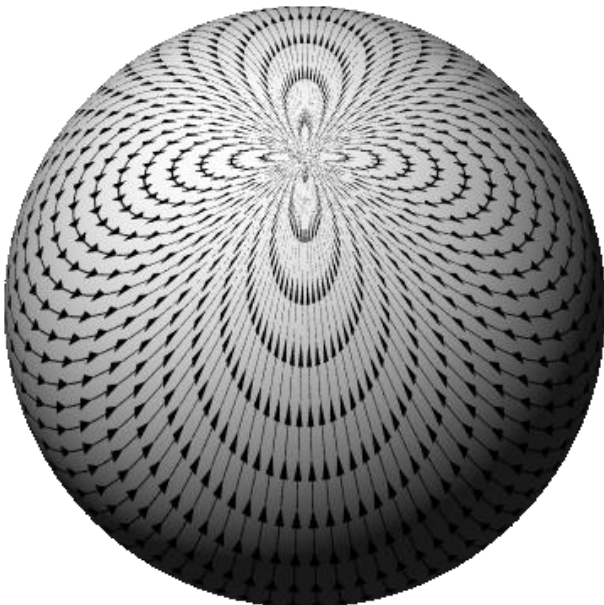
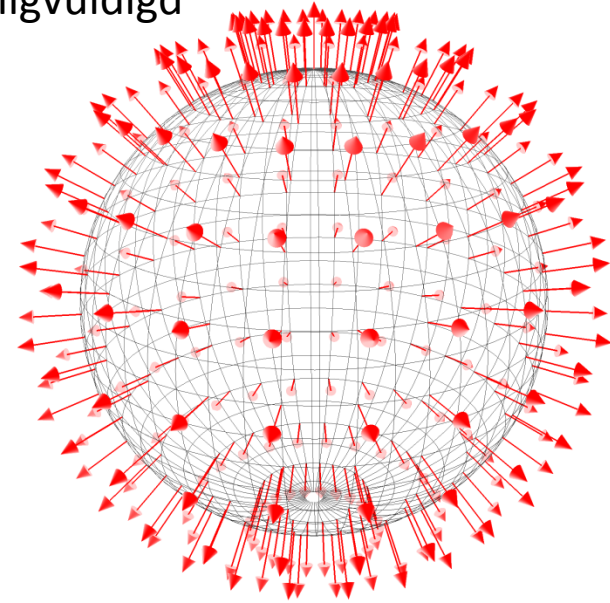
Kunnen worden opgeteld en met een getal worden vermenigvuldigd

Topologisch object: onafhankelijk van referentiesysteem

Vectorveld dient in de variëteit te liggen, dus niet erbuiten

Vectorveld: horizontale windsnelheid op aardoppervlak

Hairy ball theorema



VECTORVELD

De vectoren zijn gebonden aan hun plaats

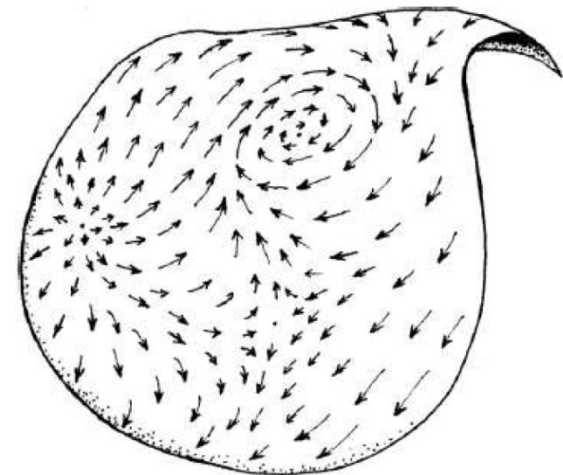
We kunnen vectoren expanderen in een basis

We schrijven $\vec{V} \xrightarrow{\mathcal{O}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

De vector $\vec{V}$ heeft componenten a en b in het referentiesysteem van waarnemer $\mathcal{O}$ bijvoorbeeld het (x, y) systeem

We kunnen ook schrijven $\vec{V} = a\vec{e}_{x(\mathcal{O})} + b\vec{e}_{y(\mathcal{O})}$

Voor een andere waarnemer, $\mathcal{O}'$, geldt dan $\vec{V} = p\vec{e}_{X(\mathcal{O}')} + q\vec{e}_{Y(\mathcal{O}')}$



VECTORVELD

Basis: elke complete set kan gebruikt worden

De vector verandert niet als we een andere basis kiezen $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_O = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_{O'}$

Natuurlijke basis: gebruik richtingsafgeleiden $\partial_\alpha \equiv \partial_{\vec{e}_\alpha}$ langs de coördinaten

Tangentenruimte: raakruimte in punt P

Voorbeeld: Euclidische ruimte

Cartesische coördinaten (x, y, z) met basis $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$
 Niet-cartesische coördinaten (u, v, w)

Er geldt $x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w),$

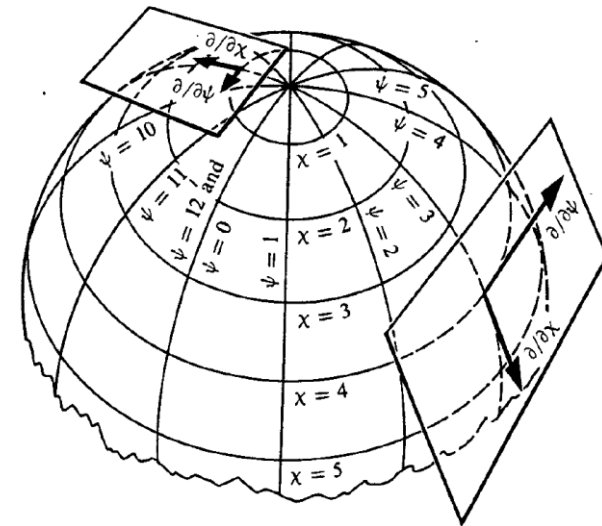
En ook $\vec{r} = x(u, v, w)\vec{i} + y(u, v, w)\vec{j} + z(u, v, w)\vec{k}$

Natuurlijke basis $\vec{e}_u \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{e}_v \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \quad \vec{e}_w \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial w},$

Vectorveld $\vec{\lambda}$ uitdrukken als $\vec{\lambda} = \lambda^u \vec{e}_u + \lambda^v \vec{e}_v + \lambda^w \vec{e}_w$

Notatie u^i ($i = 1, 2, 3$) in plaats van (u, v, w)

$\{\vec{e}_i\}$ ($i = 1, 2, 3$) in plaats van $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w\}$



$$\vec{\lambda} = \lambda^1 \vec{e}_1 + \lambda^2 \vec{e}_2 + \lambda^3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 \lambda^i \vec{e}_i = \lambda^i \vec{e}_i$$

TRANSFORMATIE VECTORCOMPONENTEN

Beschouw verplaatsingsvector $\Delta \vec{x} \xrightarrow{\mathcal{O}} (\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$

Notatie $\Delta \vec{x} \xrightarrow{\mathcal{O}} \{\Delta x^\alpha\}$

In systeem $\mathcal{O}'$ geldt $\Delta \vec{x} \xrightarrow{\mathcal{O}'} \{\Delta x^{\alpha'}\}$

Transformatiegedrag

$$\Delta x^{\alpha'} = \sum_{\beta=0}^3 \Lambda^{\alpha'}_{\beta} \Delta x^{\beta} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta} \Delta x^{\beta}$$

Notatie: index *boven* voor vectorcomponent

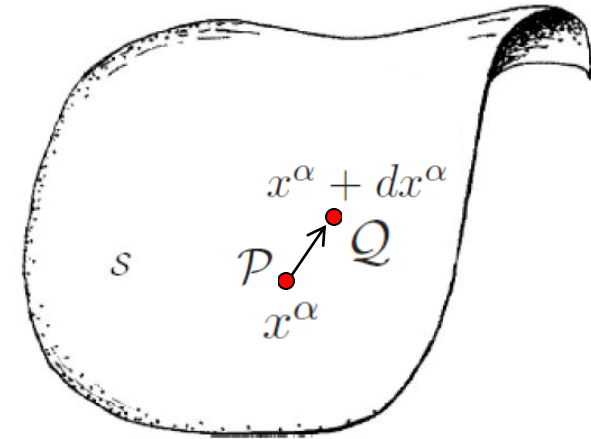
Definitie: een vector is een verzameling getallen $\vec{V} \xrightarrow{\mathcal{O}} (V^0, V^1, V^2, V^3) = \{V^\alpha\}$
(de componenten in basis $\mathcal{O}$) die transformeren volgens

$$V^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta} V^{\beta}$$

Componenten in basis $\mathcal{O}'$ zijn dus $V^{\alpha'}$

De componenten V^α van een vector $\vec{V}$ t.o.v. de natuurlijke basis $\{\vec{e}_\alpha\}$ worden de contravariante componenten genoemd

Een dergelijk object noemen we ook een $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tensor



TRANSFORMATIE VAN DE BASIS

Er geldt $\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha = V^{\alpha'} \vec{e}_{\alpha'}$

Ook geldt $V^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_\beta V^\beta$

Hiermee vinden we de transformatiewet voor basisvectoren

Dat is de relatie tussen $\{\vec{e}_\alpha\}$ en $\{\vec{e}_{\alpha'}\}$

We schrijven $\Lambda^{\alpha'}_\beta V^\beta \vec{e}_{\alpha'} = V^\alpha \vec{e}_\alpha \rightarrow V^\beta \Lambda^{\alpha'}_\beta \vec{e}_{\alpha'} = V^\alpha \vec{e}_\alpha \rightarrow V^\alpha \Lambda^{\beta'}_\alpha \vec{e}_{\beta'} = V^\alpha \vec{e}_\alpha \rightarrow V^\alpha (\Lambda^{\beta'}_\alpha \vec{e}_{\beta'} - \vec{e}_\alpha) = 0$

We vinden $\vec{e}_\alpha = \Lambda^{\beta'}_\alpha \vec{e}_{\beta'}$

Notatie: index *beneden* voor basisvectoren

Basisvectoren transformeren *tegengesteld* aan vectorcomponenten

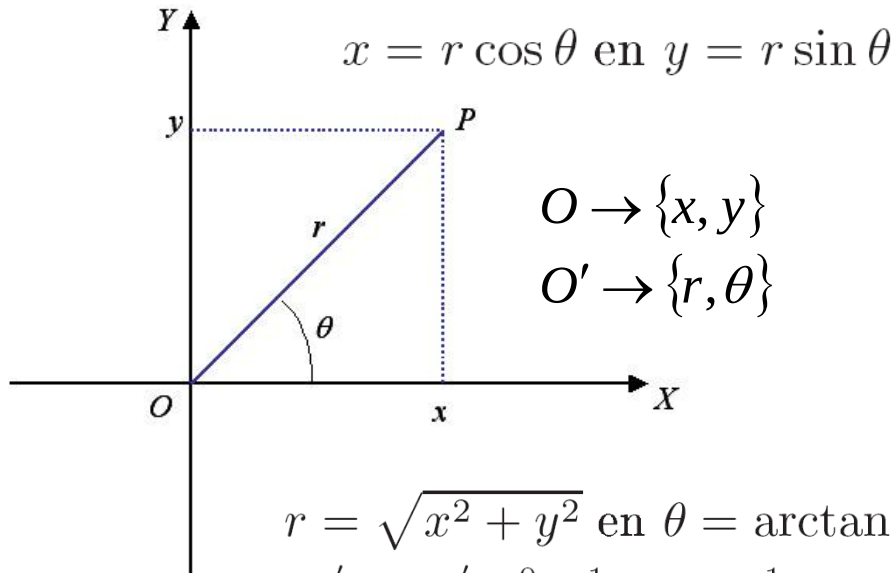
Hier komt het woord '*contravariant*' vandaan

Voor de inverse transformaties geldt $\vec{e}_{\beta'} = \Lambda^\alpha_{\beta'} \vec{e}_\alpha$, en $V^\alpha = \Lambda^\alpha_{\beta'} V^{\beta'}$

Deze notatie is van Jan Arnoldus Schouten
(een van de oprichters CWI in Amsterdam)

Verder nog $\Lambda^\nu_{\beta'} \Lambda^{\beta'}_\alpha = \delta^\nu_\alpha$

VOORBEELD: POOLCOÖRDINATEN



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ en } \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^0, x^1, \dots, x^{n-1}) \quad \text{met } \alpha = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\Delta r = \frac{x}{r} \Delta x + \frac{y}{r} \Delta y = \cos \theta \Delta x + \sin \theta \Delta y,$$

$$\Delta \theta = -\frac{y}{r^2} \Delta x + \frac{x}{r^2} \Delta y = -\frac{1}{r} \sin \theta \Delta x + \frac{1}{r} \cos \theta \Delta y,$$

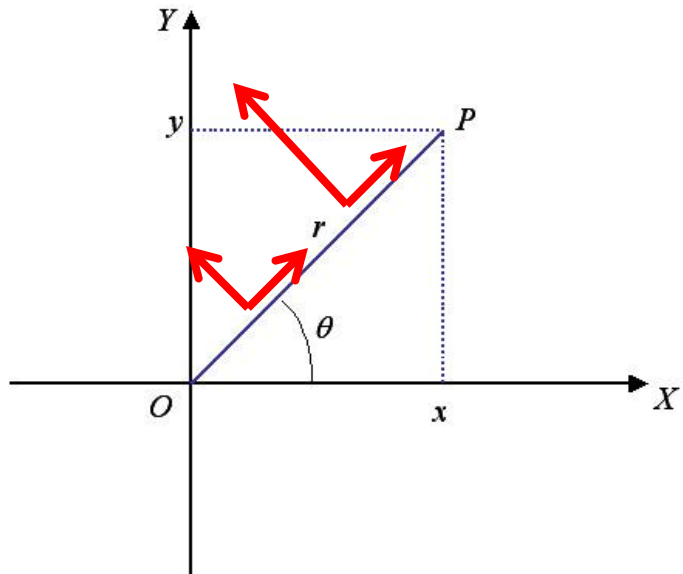
$$\left. \begin{array}{l} \Delta r \\ \Delta \theta \end{array} \right\} V^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta} V^{\beta}$$

$$\Lambda^{\alpha'}_{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^{n-1}} \\ \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^{(n-1)'}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{(n-1)'}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{(n-1)'}}{\partial x^{n-1}} \end{pmatrix} \rightarrow \Lambda^{\alpha'}_{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix}$$

We hadden ook

$$\vec{e}_{\alpha'} = \Lambda^{\beta}_{\alpha'} \vec{e}_{\beta}$$

VOORBEELD: POOLCOÖRDINATEN



$$\Lambda^{\alpha'}_{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix} \rightarrow \Lambda^{\mu}_{\nu'} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & -y \\ \frac{y}{r} & x \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

We hadden ook

$$\vec{e}_{\alpha'} = \Lambda^{\beta}_{\alpha'} \vec{e}_{\beta} \quad \vec{e}_1 = \vec{e}_x = \vec{i}, \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_y = \vec{j}$$

$$\vec{e}_r = \Lambda^x_r \vec{e}_x + \Lambda^y_r \vec{e}_y = \frac{\partial x}{\partial r} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{e}_y = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_{\theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} \vec{e}_y = -r \sin \theta \vec{e}_x + r \cos \theta \vec{e}_y$$

Vector $\vec{V}$ is onafhankelijk van coördinatenstelsel

$$\vec{V} = V^{\alpha} \vec{e}_{\alpha} = V^{\alpha'} \vec{e}_{\alpha'}$$

1- VORMEN

Lineaire functionaal, 1 – vorm, covector, covariante vector, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tensor

1 – vorm $\tilde{p}$ neemt vector als argument en beeldt af op reëel getal $\tilde{p}(\vec{V})$

Vormen een vectorruimte: *duale vectorruimte*

Componenten van $\tilde{p}$ noemen we p_α

Er geldt $p_\alpha \equiv \tilde{p}(\vec{e}_\alpha)$

Notatie: index *beneden* voor componenten van 1 – vorm

Voor het getal $\tilde{p}(\vec{V})$ geldt $\tilde{p}(\vec{V}) = \tilde{p}(V^\alpha \vec{e}_\alpha) = V^\alpha \tilde{p}(\vec{e}_\alpha) = V^\alpha p_\alpha = V^0 p_0 + V^1 p_1 + V^2 p_2 + V^3 p_3$
We gebruiken lineariteit Ruimtetijd

We noemen $\tilde{p}(\vec{V})$ de *contractie* van $\vec{V}$ en $\tilde{p}$

De componenten van $\tilde{p}$ op een andere basis $\{\vec{e}_{\alpha'}\}$ zijn

$$p_{\alpha'} \equiv \tilde{p}(\vec{e}_{\alpha'}) = \tilde{p}(\Lambda^\beta_{\alpha'} \vec{e}_\beta) = \Lambda^\beta_{\alpha'} \tilde{p}(\vec{e}_\beta) = \Lambda^\beta_{\alpha'} p_\beta$$

TRANSFORMATIE VAN 1- VORMEN

Transformatiegedrag van componenten van 1 – vorm

$$p_{\alpha'} \equiv \tilde{p}(\vec{e}_{\alpha'}) = \tilde{p}(\Lambda^{\beta}_{\alpha'} \vec{e}_{\beta}) = \Lambda^{\beta}_{\alpha'} \tilde{p}(\vec{e}_{\beta}) = \Lambda^{\beta}_{\alpha'} p_{\beta}$$

Transformeert als basisvectoren

Tegengesteld als vectorcomponenten. Daarom $V^{\alpha} p_{\alpha}$ *systeemonafhankelijk*

Dit inverse transformatiegedrag leidt tot het woord *duaal*

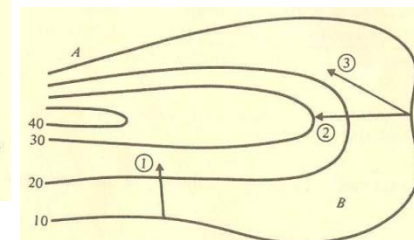
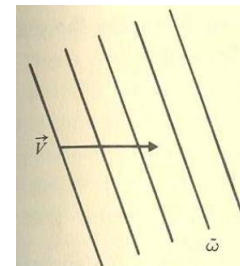
Transformeren *met* basisvectoren leidt tot *co* in *covariante* vector

Componenten van normale vectoren transformeren tegengesteld: *contravariant*

Alle 1 – vormen bouwen een vectorruimte op: duale vectorruimte

Bij vectoren denken we aan een pijl op punt P

Bij 1 – vormen kunnen we denken aan een aantal parallelle vlakken op punt P . Hierbij is $V^{\alpha} p_{\alpha}$ het aantal vlakken dat door de vector doorboord wordt



BASIS VOOR 1- VORMEN

Basis van vectoren $\{\vec{e}_\alpha\}$ gebruikt om componenten van 1 – vorm te vinden

Geassocieerde 1 – vorm basis $\tilde{\omega}^\alpha, \alpha = 0, \dots, 3$

We kiezen $\{\tilde{\omega}\}$ zo dat geldt $\tilde{p} = p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha$

Er geldt dan $\tilde{p}(\vec{V}) = p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha(\vec{V}) = p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha(V^\beta \vec{e}_\beta) = p_\alpha V^\beta \tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta)$

Dit is gelijk aan $V^\alpha p_\alpha$ en dus geldt $\tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta) = \delta^\alpha_\beta$

De vectorbasis induceert dus een unieke 1 – vorm basis

Het dualisme is compleet. Er geldt ook $\vec{V}(\tilde{p}) \equiv \tilde{p}(\vec{V}) \equiv p_\alpha V^\alpha$

Een vector is dus ook een lineaire functionaal van 1 – vormen naar reële getallen

Vectoren en 1 – vormen hebben een symmetrische basis

Beeld van een 1 – vorm: apparaat met een sleuf. Als je er een vector in plaatst, dan rolt er een reëel getal uit het apparaat

GRADIËNT ALS 1- VORM

Beschouw wereldlijn van een waarnemer

Beschouw een scalairveld $\phi(\vec{x}) = \phi(t, x, y, z)$

Parametriseer wereldlijn met de eigentijd

Er geldt dan $[t = t(\tau), x = x(\tau), y = y(\tau), z = z(\tau)]$

De viersnelheid is $\vec{U} \rightarrow \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right)$

Duidelijk een viervector (verplaatsingsvector gedeeld door een getal)

Er geldt ook $\phi(\tau) = \phi[t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau)]$

De verandering van het veld op de wereldlijn (dat is de afgeleide) is

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\partial\phi}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial\phi}{\partial t} U^t + \frac{\partial\phi}{\partial x} U^x + \frac{\partial\phi}{\partial y} U^y + \frac{\partial\phi}{\partial z} U^z = \tilde{d}\phi(\vec{U})$$

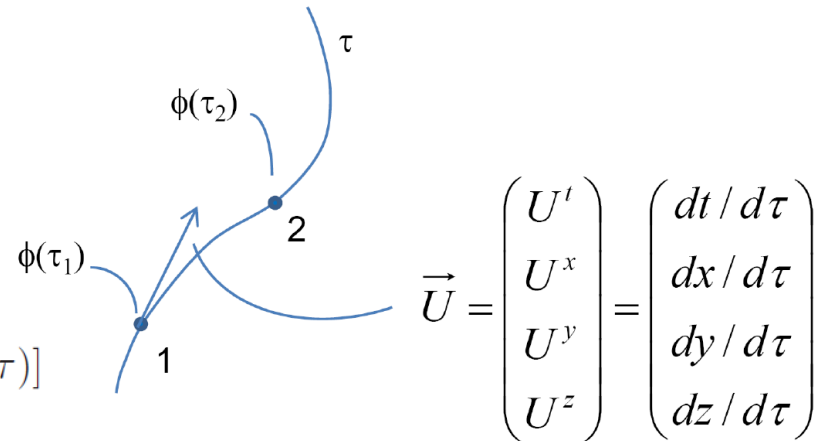
Dit is de definitie van de gradient, de 1 – vorm met componenten

$$\tilde{d}\phi \rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial\phi}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}} = \Lambda^{\beta}_{\alpha'} \frac{\partial\phi}{\partial x^{\beta}}$$

Notatie:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^{\alpha}} \equiv \phi_{,\alpha}$$



ALGEMENE TENSORVELDEN

De $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor heeft 2 vectorargumenten

Voorbeeld: inproduct van 2 vectoren (metrische tensor)

Voorbeeld: product van twee 1 – vormen

Als $\tilde{p}$ en $\tilde{q}$ de 1 – vormen zijn, dan is $\tilde{p} \otimes \tilde{q}$ de gezochte $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor

Met argumenten $\vec{A}$ en $\vec{B}$ levert dit het getal $\tilde{p}(\vec{A}) \tilde{q}(\vec{B})$

Dit noemen we het tensorproduct

Tensorproduct is niet commutatief: $\tilde{p} \otimes \tilde{q} \neq \tilde{q} \otimes \tilde{p}$

De meest algemene $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor $\mathbf{f}$ is geen eenvoudig tensorproduct

We kunnen het altijd schrijven als de som van dergelijke producten

Er geldt $f_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)$

De waarden zijn dan $\mathbf{f}(\vec{A}, \vec{B}) = \mathbf{f}(A^\alpha \vec{e}_\alpha, B^\beta \vec{e}_\beta) = A^\alpha B^\beta \mathbf{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = A^\alpha B^\beta f_{\alpha\beta}$

In totaal heeft $\mathbf{f}$ dus 16 componenten

TENSORBASIS

Kunnen we een basis vormen voor deze $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor?

Kunnen we 16 verschillende $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensoren definiëren, zodat $\mathbf{f} = f_{\alpha\beta} \tilde{\omega}^{\alpha\beta}$

Dan dient te gelden $f_{\mu\nu} = \mathbf{f}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = f_{\alpha\beta} \tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu)$

Dan moet dus gelden $\tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta$

We concluderen $\tilde{\omega}^{\alpha\beta} = \tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta$

De tensoren $\tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta$ vormen de basis voor alle $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensoren

Er geldt dus $\mathbf{f} = f_{\alpha\beta} \tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta$

Een algemene $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor is een som over eenvoudige tensorproduct tensoren

Een $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ tensor is een lineaire afbeelding van M 1 – vormen en N vectoren naar de reële getallen (zie het weer als een apparaat met $M+N$ sleuven)

De tensor is een topologisch object, met componenten op de basis $\{\vec{e}^\alpha\}$ en $\{\vec{e}_\alpha\}$

METRISCHE TENSOR

Tot nu toe is onze variëteit een amorse verzameling van topologische objecten

Er is geen connectie tussen vectorruimte en zijn duale.

Ook is er geen inproduct gedefinieerd: er is geen meetkunde

De $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor $\mathbf{g}$ (van gravitatie) gaat dienst doen als metriek van de variëteit

Dan verkrijgen we een *Riemannse* variëteit

Definitie $g(\vec{A}, \vec{B}) \equiv \vec{A} \cdot \vec{B}$

Metrische tensor is symmetrisch $g(\vec{A}, \vec{B}) = g(\vec{B}, \vec{A})$

en lineair in zijn argumenten $g(\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}, \vec{C}) = \alpha g(\vec{A}, \vec{C}) + \beta g(\vec{B}, \vec{C})$

De definitie maakt geen gebruik van componenten van vectoren

De metriek is weer een topologisch object

In basis $\{\vec{e}_\alpha\}$ zijn de componenten van de metriek $g(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = g_{\alpha\beta}$

METRIEK ALS AFBEELDING

Metriek is een afbeelding tussen 1 – vormen en vectoren

Beschouw metrische tensor g en vector $\vec{V}$

Dan is $g(\vec{V}, \cdot)$ een functie van vectoren: een afbeelding naar reële getallen

We noemen het de 1 – vorm $\tilde{V}$

Er geldt $g(\vec{V}, \cdot) \equiv \tilde{V}(\cdot)$

Voor vector $\vec{A}$ vinden we dan $\tilde{V}(\vec{A}) \equiv g(\vec{V}, \vec{A}) = \vec{V} \cdot \vec{A} = V^\alpha A_\alpha = V_\alpha A^\alpha$

De componenten van $\tilde{V}$ zijn $V_\alpha \equiv \tilde{V}(\vec{e}_\alpha) = \vec{V} \cdot \vec{e}_\alpha = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{V} = \vec{e}_\alpha \cdot (V^\beta \vec{e}_\beta) = (\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta) V^\beta = g_{\alpha\beta} V^\beta$

De relatie tussen vector en 1 – vorm is dus $V_\alpha = g_{\alpha\beta} V^\beta$ in basis $\{\vec{e}_\alpha\}$

We onderscheiden de componenten van de vector van die van de 1 – vorm enkel door de positie van de index

De inverse van de metriek bestaat ook $g^\alpha_\beta \equiv g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta^\alpha_\beta$

Hiermee vinden we

$$V^\alpha = g^{\alpha\beta} V_\beta$$

OPGAVEN

Opgave 1 Er geldt $n = 3$ en we hebben de compacte uitdrukking $y_i = a^r_i x_r$, waarbij we gebruik maken van de Einsteinsommatieconventie.

- (a) Schrijf expliciet de vergelijkingen op die worden voorgesteld door de uitdrukking $y_i = a^r_i x_r$.
- (b) Verklaar waarom een uitdrukking als $a_{ii}x^i$ zonder enige betekenis is.
- (c) Gebruik de sommatieconventie om

$$a_{11}b^{11} + a_{21}b^{12} + a_{31}b^{13} + a_{41}b^{14}$$

compact weer te geven (ken ook een waarde toe aan n).

- (d) Idem voor

$$a_{11}b^{11} + a_{12}b^{12} + a_{13}b^{13} + a_{14}b^{14} + a_{15}b^{15}.$$

- (e) Idem voor

$$c^1_{i1} + c^2_{i2} + c^3_{i3} + c^4_{i4} + c^5_{i5} + c^6_{i6} + c^7_{i7} + c^8_{i8}.$$

OPGAVEN

Opgave 2 Als a_{ij} constanten zijn, bereken dan de partiële afgeleiden

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(a_{ij}x^i x^j).$$

Opgave 3 We bekijken nu wat lineaire algebra met tensoren.

(a) Toon aan dat geldt

$$(x^1, x^2, x^3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = a_{ij}x^i x^j.$$

(b) Schrijf de kwadratische vorm $3x^2 + y^2 - 2z^2 - 5xy - 6yz = 10$ door gebruik te maken van een symmetrische matrix.

OPGAVEN

Opgave 4 Welke van de onderstaande uitdrukkingen zijn consistent met de sommatieconventie en welke niet. Geef altijd de reden voor uw keuze. Laat u niet afleiden door de keuze voor de symbolen.

1. $g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\gamma$

2. $g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta = g_{\beta\gamma}a^\beta b^\gamma$

3. $g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta = g_{\alpha\beta}a^\alpha c^\beta$

4. $T_{\alpha\gamma}^\alpha a^\gamma = g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta$

5. $T_{\beta\gamma}^\alpha a^\alpha c^\beta c^\gamma = b^\alpha$

6. $\partial x^\alpha / \partial x^\beta = \delta_\beta^\alpha$

7. $\partial g_{\alpha\beta} / \partial x^\gamma = 0$

8. $g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\delta'}} = g_{\gamma\delta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\beta'}}$

9. $g'_{\alpha\beta} a^{\alpha'} b^{\beta'} = g_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta$

10. $a^\alpha (g_{\beta\gamma} b^\beta b^\gamma) = b^\gamma$

11. $T_{\alpha\beta}^\alpha = T_{\beta\beta}^\beta$

12. $g_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}$

OPGAVEN

Opgave 5 Deze opgave is bedoeld om uit te vinden of u op correcte wijze indices naar boven of beneden kunt halen. We beschouwen twee dimensies, waarbij de indices $A, B, \dots$ de waarden 1 of 2 kunnen aannemen. De metrische tensor wordt gegeven door

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} F & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

met F een constante. Beschouw de vectoren

$$a_A = (1, 0), \quad b_A = (0, 1), \quad c^A = (1, 0), \quad d^A = (0, 1).$$

(a) Bepaal de inverse van de metrische tensor g^{AB} .

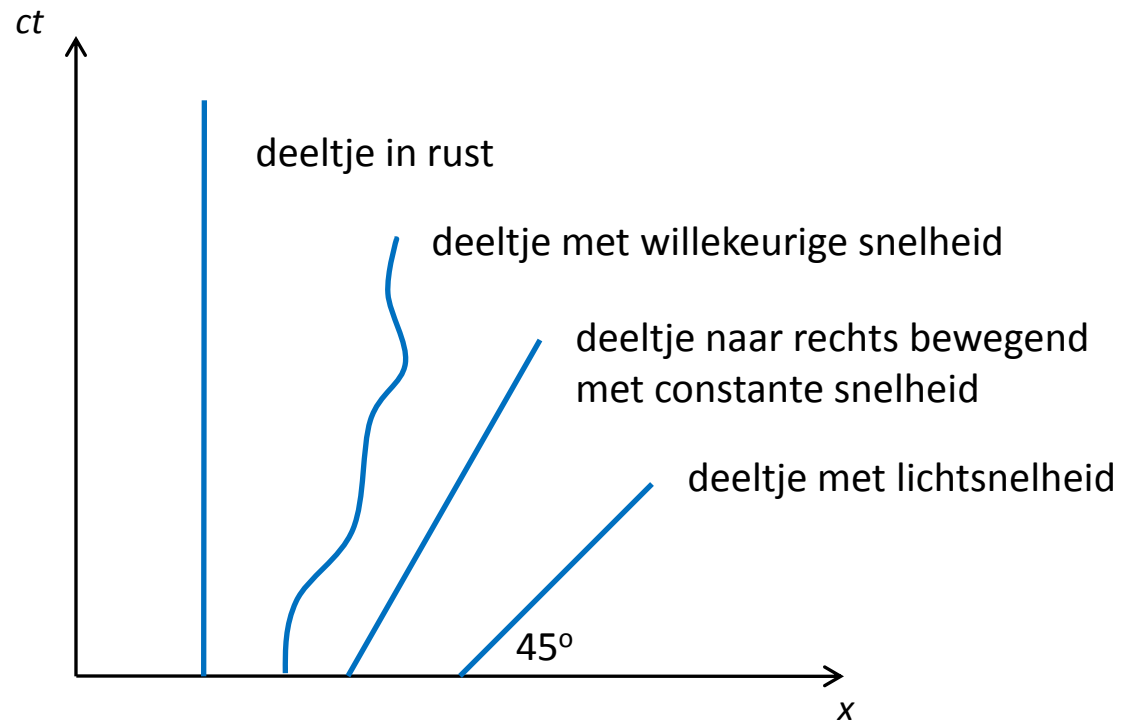
(b) Bepaal $a^A, b^A, c_A, d_A, \vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a} \cdot \vec{c}$ en $\vec{a} \cdot \vec{d}$.

RUIMTETIJD VAN DE ART

Het belang van *fotonen* m.b.t. structuur van ruimte
tijd: empirisch vastgestelde *universaliteit van de
voortplanting* in vacuüm

Onafhankelijk van

- bewegingstoestand van de bron
- golflengte
- intensiteit
- polarisatie van EM golven



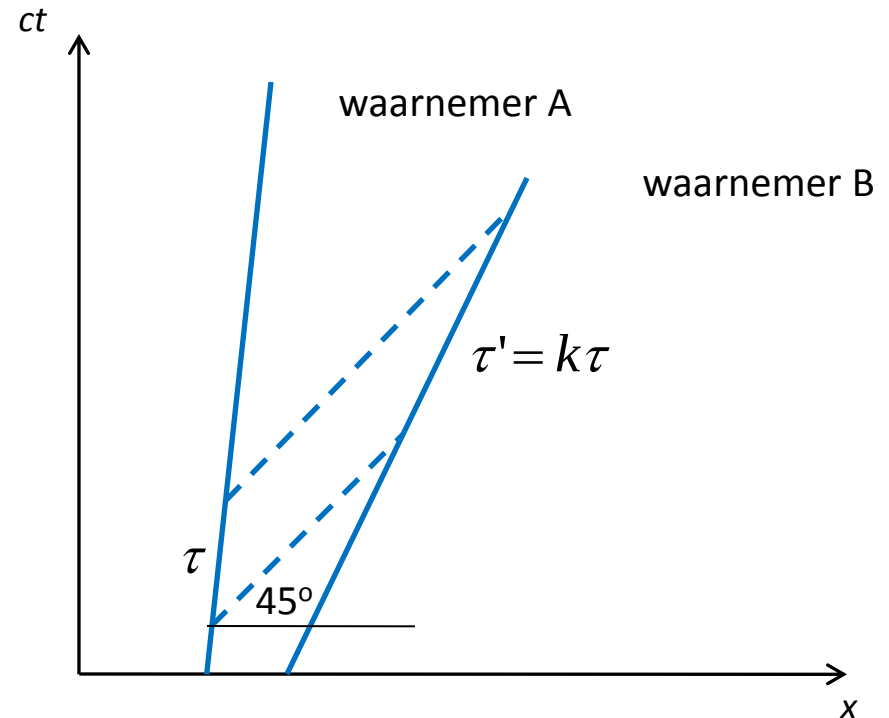
MINKOWSKIRUIMTE — DOPPLERFACTOR

Waarnemers A en B hebben geijkte standaardklokken en lampjes

τ = tijd tussen pulsen van lampje van A, gemeten met de klok van A

τ' = tijd tussen pulsen van lampje van A, gemeten met de klok van B

$\tau' = k\tau$ met dopplerfactor k



MINKOWSKIRUIMTE — DOPPLERFACTOR

Vanuit punt P bewegen waarnemers A en B ten opzichte van elkaar (constante snelheid v van B tov A)

Lampje van A flitst na tijd τ gemeten met de klok van A (in E)

B ziet de flits van A na tijd $k\tau$ (in Q)

B flitst zijn lampje in Q. Waarnemer A ziet dat in R, op tijd $k^2\tau$

Afstand van Q tot A:
(vluchttijd radarpuls x lichtsnelheid)/2

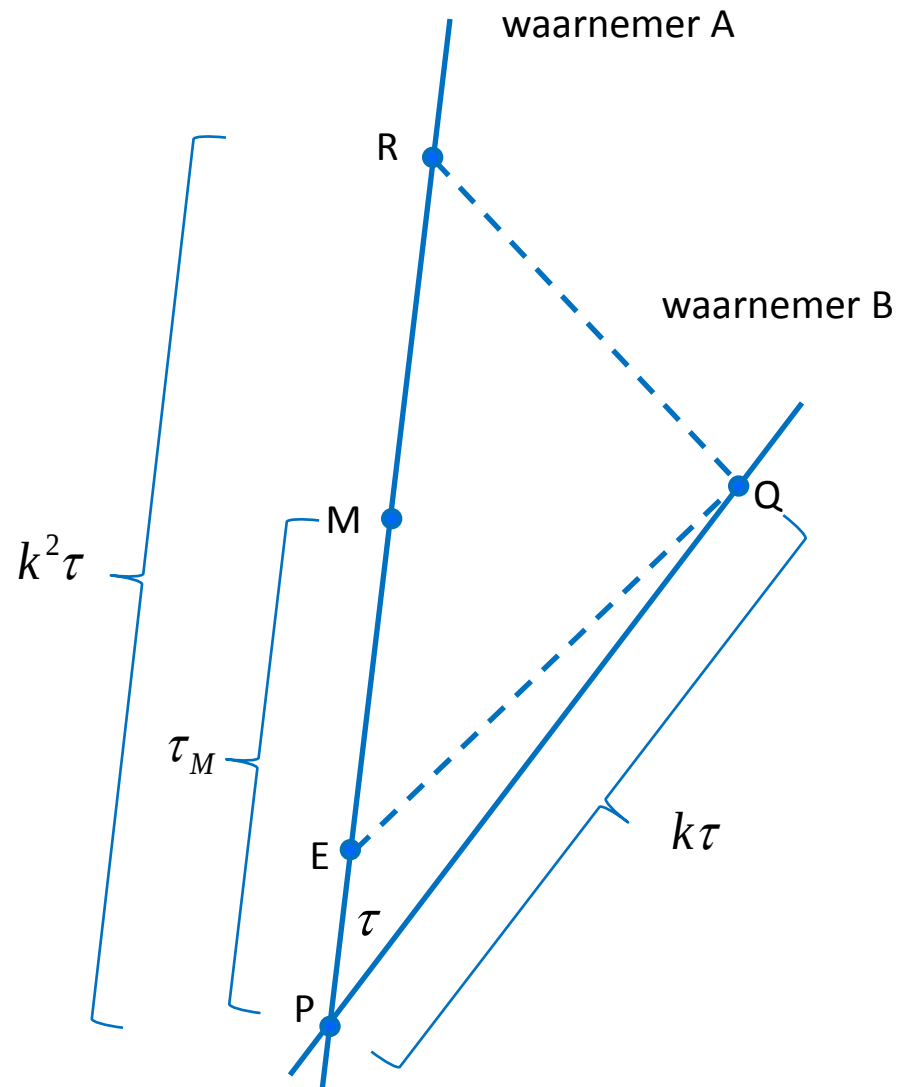
$$\Rightarrow d = \frac{\tau_{ER} \times c}{2} = \frac{c\tau(k^2 - 1)}{2}$$

M is gelijktijdig met Q als $\tau_{EM} = \tau_{RM}$

$$\tau_{EM} = \tau_M - \tau \quad \tau_{RM} = k^2\tau - \tau_M$$

$$\tau_M - \tau = k^2\tau - \tau_M \quad \tau_M = \frac{\tau}{2}(k^2 + 1)$$

$$v = \frac{\text{afstand}}{\text{tijd}} = \frac{d}{\tau_M} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$



MINKOWSKIRUIMTE — INPRODUCT

We kennen de vector $\overrightarrow{PQ}$ toe aan de geordende events P en Q

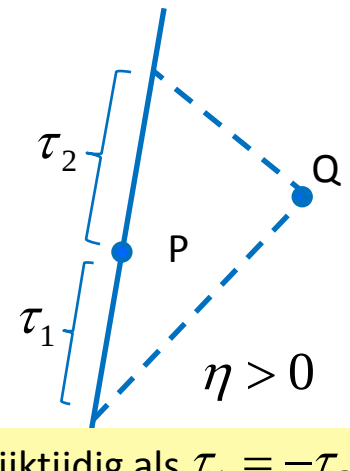
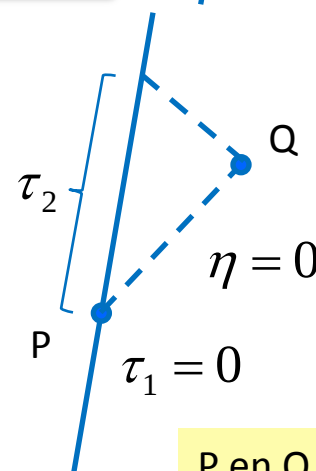
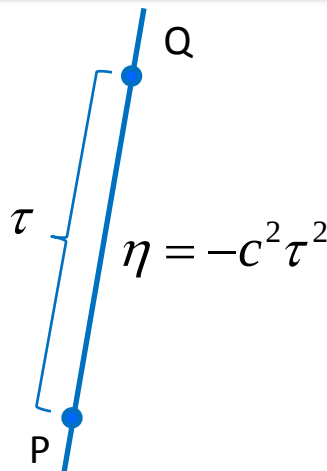
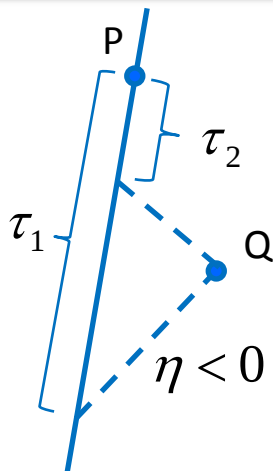
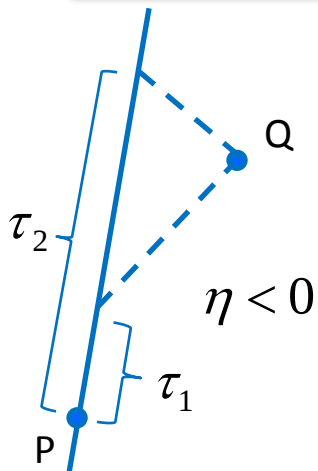
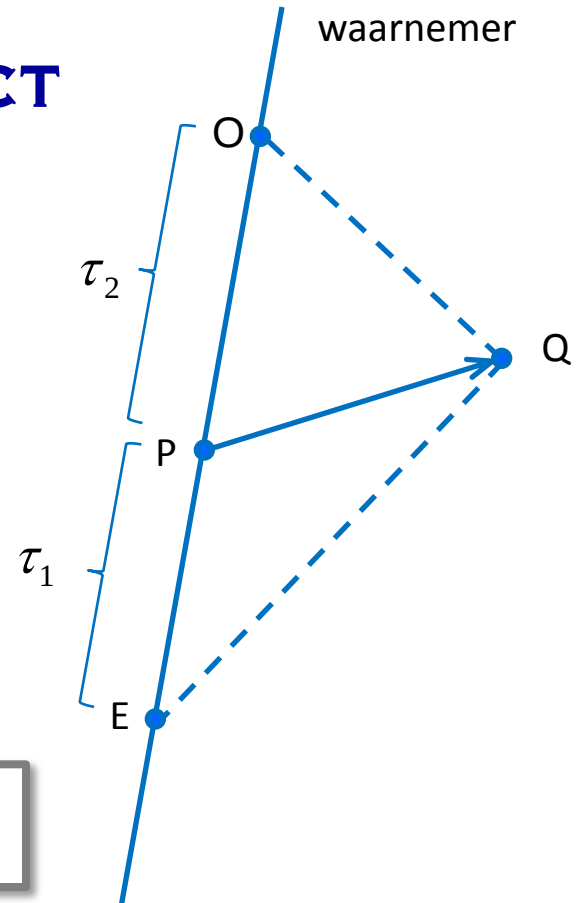
Definitie: $\eta(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) \equiv -c^2 \tau_1 \tau_2$

Afspraak:

tijden voor P negatief

tijden na P positief

Dankzij het bestaan van een metriek (inproduct) kunnen we nu afstanden bepalen. Ruimtetijd heeft een metriek



P en Q gelijktijdig als $\tau_1 = -\tau_2$