

3 Quantumfysische verschijnselen in het universum

3.1 Stervorming

Sterren condenseren uit gaswolken die voornamelijk uit waterstof bestaan. Als een gaswolk voldoende dichtheid heeft of koud genoeg is, dan kunnen delen ervan condenseren en sterren vormen. Het gebied dat condenseert dient een minimum afmeting te hebben, zodat er voldoende massa en gravitatie is om de gasdruk in de wolk te overwinnen. Deze minimum lengte heet de *Jeans lengte*¹⁹ en bedraagt

$$\lambda_{\text{Jeans}} = \left(\frac{\pi kT}{G\rho m} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (38)$$

met T en m respectievelijk de temperatuur en massa van het molecuul en ρ de dichtheid van de condenserende gaswolk. Elk deel van de gaswolk groter dan de Jeans lengte heeft voldoende zelf-gravitatie en kan condenseren. De massa van een dergelijk gebied is $\frac{4}{3}\pi\rho\lambda_{\text{Jeans}}^3$ en wordt de Jeans massa genoemd,

$$M_J = \frac{4}{3}\pi\rho\lambda_{\text{Jeans}}^3 = \frac{4\pi^{\frac{5}{2}}}{3} \left(\frac{kT}{Gm} \right)^{\frac{3}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}. \quad (39)$$

Het is belangrijk om in te zien dat M_J afneemt als ρ toeneemt. Als dus een instabiel gebied initieel ter grootte λ_{Jeans} condenseert, neemt de dichtheid toe. Dit verlaagt de Jeans massa en dat maakt kleinere delen van het gebied instabiel voor condensatie. Indien de dichtheid in de gaswolk niet homogeen is, dan is het waarschijnlijk dat de samentrekkende gaswolk fragmenteert in kleinere gebieden. Sterrenkundigen noemen een dergelijk gebied een *protoster*.

De gravitationele potentiële energie van de moleculen wordt tijdens de contractie van de gaswolk omgezet in warmte²⁰. Hierdoor neemt de temperatuur van het gas toe tijdens de contractie. Gedurende contractie van de protoster wordt de dichtheid uiteindelijk voldoende hoog om straling gevangen te houden en begint de protoster zich te gedragen als een zwart lichaam. Op dat moment neemt de temperatuur scherp toe en begint de protoster te schijnen in het zichtbare licht. De energie van contractie is voldoende om de protoster enkele miljoenen jaren te laten schijnen.

3.2 Energiehuishouding in sterren

De verhitte tijdens contractie van de protoster is voldoende om kernfusie te initiëren. Het mechanisme van energieproductie in de zon is fusie van waterstofatomen tot helium en fusie is de energiebron van sterren. De constructie van een fusiereactor op aarde is ingewikkeld, het grootste probleem is de zogenaamde ‘confinement’ (opsluiting) van het plasma. Een plasma met een temperatuur van ongeveer 10^8 K dient in een eindig volume opgesloten te worden. Vaste wanden zijn niet mogelijk en we dienen toevlucht te nemen tot magnetische opsluiting of opsluiting met behulp van lasers. Het volume van het magnetisch veld dient relatief klein te zijn, enkele kubieke

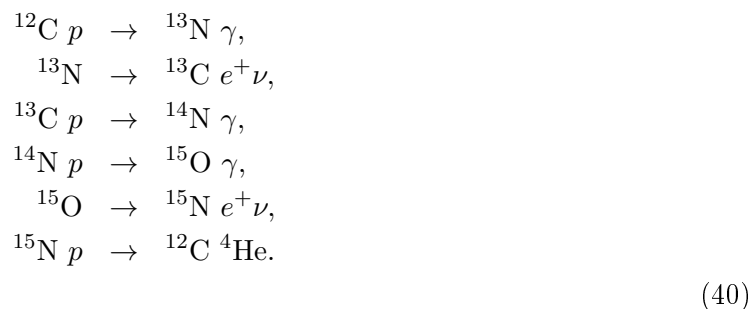
¹⁹Naar de Britse astrofysicus Sir James Jeans (1877 - 1946). We kunnen de grootte R van een sferisch gebied dat instabiel is voor stervorming bij benadering vinden door de gemiddelde kinetische energie $\frac{3}{2}kT$ van een molecuul met massa m gelijk te stellen aan de absolute waarde van de gravitationele potentiële energie $\frac{GmM}{R}$. Vervolgens vervangen we de massa M van dit gebied door haar dichtheid ρ via de substitutie $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$. Dit levert dan de benadering $\frac{3}{2}kT = \frac{GmM}{R} \rightarrow \frac{3}{2}kT = \frac{4}{3}\pi Gm\rho R^2 \rightarrow R = \left(\frac{9kT}{8\pi G\rho m} \right)^{\frac{1}{2}}$. Een exacte berekening die de geluidssnelheid in de gaswolk in rekening brengt, levert vergelijking (38).

²⁰Ook onze zon is uit een dergelijke protoster ontstaan. De zon heeft een massa $M_{\odot} = 2 \times 10^{30}$ kg en bestaat uit ongeveer 10^{57} waterstofatomen met elk een massa van $m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg. De huidige luminositeit van de zon bedraagt $L_{\odot} = 3,8 \times 10^{26}$ W. We hebben gezien dat de ontsnappingssnelheid van de zon gelijk is aan $v_{\text{ontsnapping}} = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{R_{\odot}}}$. De kinetische energie van een atoom als het de zon bereikt is dus $\frac{1}{2}mv_{\text{ontsnapping}}^2 = \frac{GM_{\odot}m}{R_{\odot}} = 3 \times 10^{-16}$ J. Hieruit volgt dat de gravitationele potentiële energie voldoende is om de protoster enkele miljoenen jaren te laten schijnen.

meters, want anders wordt het vermogen, maar worden ook de constructiekosten, onoverkomelijk. In de zon zijn deze problemen opgelost, alhoewel niet al te efficiënt. De buitentemperatuur is ongeveer 6000 K, terwijl de temperatuur in het centrum van de zon ongeveer $1,6 \times 10^7$ K is. Kernfusie verloopt relatief traag, maar de totale energieproductie is groot, omdat het volume zo groot is.

Gravitatie reguleert het fusieproces in sterren: als om een of andere reden de reacties sneller verlopen, dan heeft dat een temperatuurstijging tot gevolg. Dit leidt direct tot expansie van het centrale deel van de ster, waardoor de reactiesnelheid vermindert en de energieproductie afneemt. Evenzo als het tegenovergestelde gebeurt en de temperatuur en dus ook de gasdruk afneemt, dan krimpt de kern van de ster en neemt de reactiesnelheid weer toe. Op deze wijze kan een ster miljarden jaren een stabiele energieproductie leveren. Hetzelfde proces maakt ook dat als de massa van de ster groot is, de centrale druk en temperatuur relatief hoog is, waardoor de energieproductie groot is. Dit heeft ook tot gevolg dat zware sterren een relatief korte levensduur hebben.

Vóór de ontdekking van kernreacties kon de energieproductie in de zon niet verklaard worden: er was geen bron bekend die een dergelijke hoeveelheid energie gedurende langere tijd kon produceren. Geologische studies tonen aan dat de zon ongeveer dezelfde temperatuur heeft gehad voor een periode van minstens 10^9 jaar. Eddington was een van de eersten die erop wezen, dat met de fusie van vier waterstofatomen tot een ${}^4\text{He}$ -aatom, er ongeveer 7 MeV/nucleon aan energie vrijkomt. Dit proces levert miljoenen keren meer energie op dan een chemische reactie. Er blijft echter een probleem: klassiek kan fusie niet optreden in sterren, omdat de thermische energie van de protonen onvoldoende is om de Coulombafstoting te overwinnen. Het quantummechanisch tunnелеffect maakt dergelijke reacties ook bij lagere temperatuur mogelijk. Men kan nu specifieke reacties, verantwoordelijk voor stellaire energieproductie, vaststellen. De eerste sequentie die werd voorgesteld was de zogenaamde koolstof of CNO cyclus weergegeven in Fig. 8, waarin ${}^{12}\text{C}$ en $4p$ getransformeerd worden in een α -deeltje en ${}^{12}\text{C}$. De CNO-cyclus verloopt als volgt,



In deze sequentie fungeert het koolstof als een katalysator. Het ondergaat veranderingen, maar het wordt niet verbruikt. De totale reactie kan dus geschreven worden als



De totale energie Q die in deze reactie vrijkomt, kan eenvoudig gevonden worden uit de bekende massa's (via $E = mc^2$). Er geldt

$$Q(4p \rightarrow {}^4\text{He}) = 26,7 \text{ MeV}. \tag{42}$$

Van deze energie wordt ongeveer 25 MeV gebruikt om de ster te verhitten, de rest wordt afgevoerd door de neutrino's. De CNO-cyclus is dominant in *hete* sterren. In *koude* sterren zoals de zon,

is de pp -cyclus belangrijker. De essentiële stappen in de pp -cyclus zijn

$$\left. \begin{array}{l} pp \rightarrow de^+\nu \\ \text{of} \\ ppe^- \rightarrow d\nu \end{array} \right\} dp \rightarrow {}^3\text{He}\gamma \quad (43)$$

en

$${}^3\text{He} {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} 2p, \quad (44)$$

of

$${}^3\text{He} {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} \gamma. \quad (45)$$

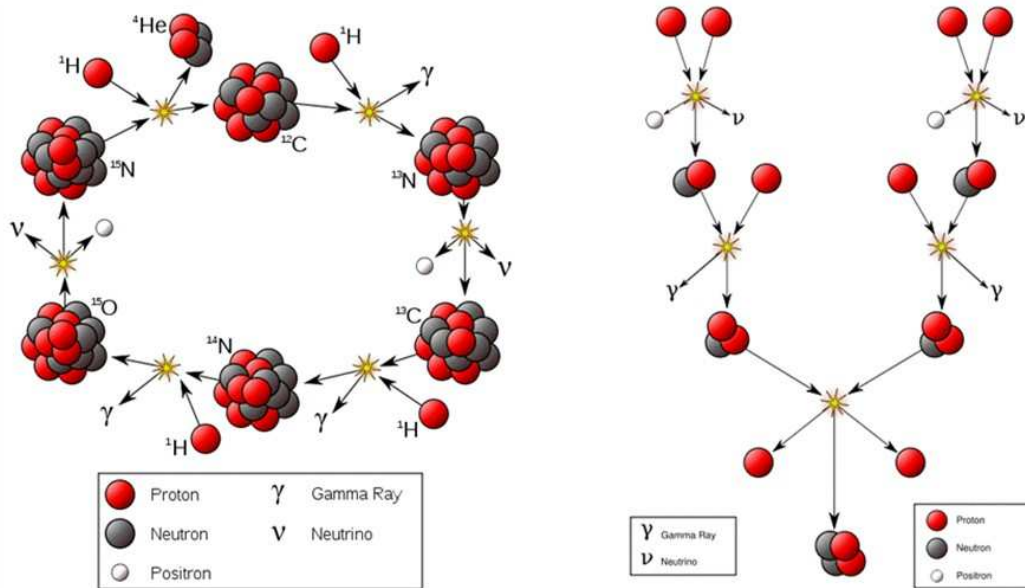
In vergelijking (44) is de reactie $4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu$ reeds gerealiseerd. In vergelijking (45) wordt ${}^7\text{Be}$ gevormd en dit leidt tot ${}^4\text{He}$ via twee sequenties,

$${}^7\text{Be} e^- \rightarrow {}^7\text{Li} \nu; \quad {}^7\text{Li} p \rightarrow 2 {}^4\text{He}, \quad (46)$$

of

$${}^7\text{Be} p \rightarrow {}^8\text{B} \gamma; \quad {}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be}^* e^+ \nu; \quad {}^8\text{Be}^* \rightarrow 2 {}^4\text{He}. \quad (47)$$

De pp -cyclus heeft dezelfde energieopbrengst als de CNO-cyclus. Om de reactiesnelheden te



Figuur 8: CNO en pp -cyclus voor het fusieproces van een ster. De pp -cyclus is dominant in de zon (de CNO-cyclus verzorgt slechts 1,6 % van de energie productie in de zon). De CNO-cyclus is belangrijk in massieve waterstof-brandende sterren met een hoge centrale temperatuur, zoals Sirius A.

kunnen berekenen, zijn er twee verschillende soorten input nodig. Ten eerste, de temperatuurverdeling van het inwendige van de zon dient bekend te zijn. Het originele werk gaat terug tot Eddington en verbeterde versies lijken betrouwbaar te zijn (astronomen zijn van mening dat de temperatuur in het inwendige van de zon ongeveer 16 miljoen K is). Ten tweede dienen de

werkzame doorsneden²¹ voor de genoemde reacties bekend te zijn voor temperaturen in de orde van 16 miljoen K. Deze temperatuur correspondeert met kinetische energieën van slechts enkele keV, en de bijbehorende werkzame doorsneden zijn uitermate klein. De vergelijkingen tonen dat er twee typen reacties een rol spelen: hadronische en zwakke reacties (alle reacties met neutrino's zijn zwak). De gemiddelde levensduur van het verval ${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be}^* e^+ \nu$ is gemeten. De twee zwakke reacties in vergelijking (43) verlopen echter zo traag, dat ze niet in het laboratorium gemeten kunnen worden: ze worden berekend door gebruik te maken van de Hamiltoniaan voor de zwakke wisselwerking. Teneinde de werkzame doorsneden voor de hadronische reacties te vinden, worden de waarden die bij hogere energieën gemeten zijn, geëxtrapoleerd naar enkele keV. Experimentatoren (zoals W.A. Fowler van Caltech) en diverse theoretici zijn van mening dat hun schattingen stabiel zijn en dat zowel de structuur van sterren als de kernfysische aspecten van de productie van zonne-energie goed begrepen zijn.

3.3 Nucleosynthese in sterren

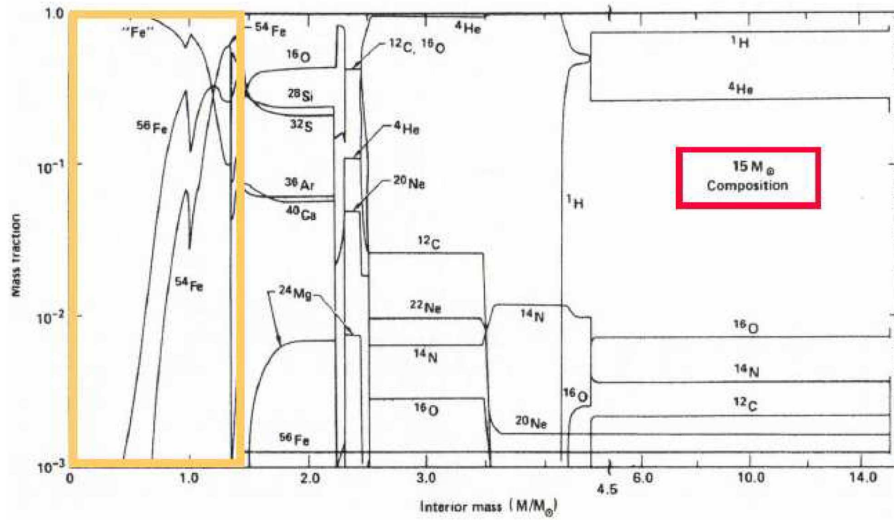
Verschillende lichte elementen zijn gevormd tijdens de Big Bang. Deze zogenaamde primordiale productie is niet mogelijk voor zware elementen, omdat neutron- of protonvangst van ${}^4\text{He}$ niet tot stabiele kernen leidt en vanwege het trage verloop van andere reacties. Neutronvangst bijvoorbeeld, leidt tot ${}^5\text{He}$, hetgeen instabiel is en weer direct vervalt naar ${}^4\text{He}$. Ook de vangst van α -deeltjes via ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^8\text{Be}$, vormt alleen het instabiele ${}^8\text{Be}$, dat weer onmiddellijk opbreekt in twee α -deeltjes. Als de temperatuur van het universum gedaald is tot ongeveer 3×10^8 K, ongeveer een half uur na haar geboorte, stopt nucleosynthese, omdat Coulomb repulsie verdere kernreacties verhindert. De abundanties van de diverse elementen gevormd in de Big Bang zijn nu ingevroren, zodat de abundanties van de lichte elementen d , ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$ en ${}^7\text{Li}$, zoals die tegenwoordig worden waargenomen, nog steeds de toestand van een universum van een half uur oud reflecteren.

Lichte kernen kunnen ook in sterren geproduceerd worden. In het geval van ${}^4\text{He}$ verklaart dit productieproces echter slechts ongeveer 10 % van de waargenomen abundantie van dit element. Deuterium kan al helemaal niet in significante hoeveelheden in sterren geproduceerd worden, omdat het bij dergelijke hoge dichtheden direct in zware elementen geconverteerd wordt. Deze conversie beperkt de huidige baryondichtheid in het universum tot minder dan ongeveer 5×10^{-28} kg/m³. De productie van lithium in sterren wordt positief beïnvloed door neutrino interacties met ${}^4\text{He}$. Deze reacties produceren ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, protonen en neutronen. Een van de successen van het standaard model is haar vermogen om de abundanties van de lichte elementen te voorspellen, zelfs al verschillen die een factor miljard van elkaar. Echter, de gemeten abundanties van zware elementen kan niet verklaard worden door Big Bang nucleosynthese. Klaarblijkelijk werden de zware elementen in een later stadium geproduceerd, nadat stervorming reeds plaatsgevonden had. Nucleosynthese, de verklaring van de abundantie van de elementen, is dus onlosmakelijk verbonden met sterstructuur en stervolutie.

Druk en temperatuur in een ster zijn immens. In de zon bijvoorbeeld, is de druk in het centrum 2×10^{10} bar en de temperatuur 16×10^6 K. Atomen zijn onder deze omstandigheden bijna volledig geïoniseerd, waardoor er een plasma van vrije elektronen en naakte atoomkernen ontstaat. De interne druk wordt in stand gehouden door kernreacties die voor de stralingsenergie van de ster zorgen. Zolang deze reacties plaatsvinden, zullen gravitationele en interne druk elkaar in balans houden en is de ster in een evenwichtstoestand. Wat gebeurt er echter als de brandstof opgebruikt is? Wat gebeurt er met onze zon als alle waterstof opgebruikt is en de *pp*-cyclus

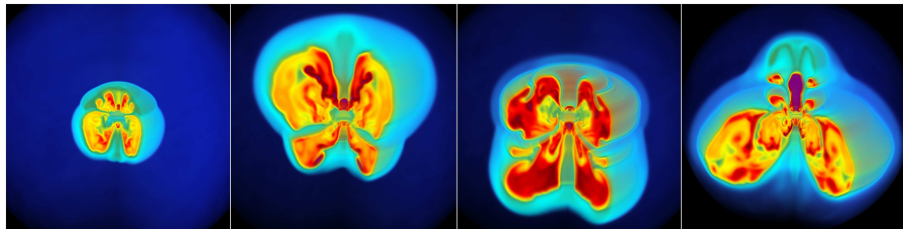
²¹De werkzame doorsnede is een maat voor de waarschijnlijkheid dat een bepaalde wisselwerking tussen deeltjes plaatsvindt (bijvoorbeeld verstrooiing of een kernreactie). Deze waarschijnlijkheid is vaak sterk afhankelijk van de energie van de deeltjes of de samenstelling van een target dat wordt beschoten. De werkzame doorsnede wordt aangeduid met σ en heeft de dimensie van oppervlakte.

stopt? De ster zal dan onder gravitatie samentrekken, waardoor de centrale druk en temperatuur zullen toenemen. Bij hogere temperatuur zullen nieuwe kernreacties plaatsvinden en een nieuwe evenwichtstoestand wordt bereikt. Onder die omstandigheden zullen nieuwe elementen worden gevormd. Er zijn dus verschillende stadia van kernfusie en contractie. In alle stadia zullen zware elementen gegenereerd worden. Fig. 9 geeft de resultaten van de berekening van de samenstelling



Figuur 9: Resultaten van de berekening van de samenstelling van een ster met een massa van 15 zonnemassa's. De abundanties van de diverse elementen worden gegeven als functie van massa (in zonnemassa's).

van een ster met een massa van 15 zonnemassa's. Deze ster bevindt zich aan het eind van de diverse stadia van verbranding. Een dergelijke ster zal dan de supernova-fase ondergaan, waarna zij zich tot een neutronenster zal ontwikkelen. Ook voor de berekening van de supernova-fase bestaan er nauwkeurige modellen. Figuur 10 toont de resultaten van een dergelijke berekening.



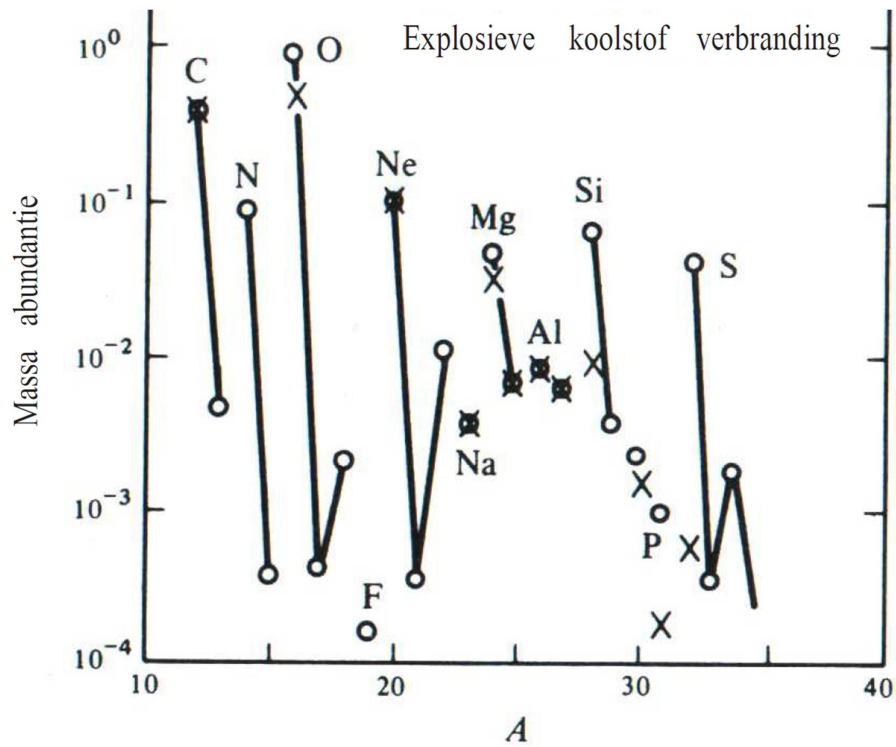
Figuur 10: Resultaat van een computersimulatie van een supernova. De massaverdeling wordt gegeven als functie van de tijd, voor de eerste 0,7 seconde van het proces.

De volgende belangrijke stap, na de vorming van ${}^4\text{He}$, is de productie van ${}^{12}\text{C}$. Het ${}^8\text{Be}$, gevormd in de reactie ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^8\text{Be}$, is instabiel. Echter, indien de ${}^4\text{He}$ dichtheid hoog genoeg is, kunnen meetbare hoeveelheden ${}^8\text{Be}$ aanwezig zijn in de evenwichtsreactie



Vangst van een alfa deeltje kan dan plaatsvinden,





Figuur 11: Residu van koolstofverbranding in een exploderende ster. De cirkels stellen zonnestelsel abundanties voor, terwijl de berekende waarden door kruisen gerepresenteerd worden. De lijnen verbinden stabiele isotopen van een gegeven element. De aangenomen piektemperatuur is 2×10^9 K en de dichtheid is 10^8 kg/m³.

waardoor koolstof gevormd wordt. Deze vangst-reactie wordt versterkt, omdat de vorming van ^{12}C voornamelijk verloopt via een resonantie met een aangeslagen toestand, $^{12}\text{C}^*$.

De vorming van ^{16}O vindt plaats via



Bovenstaande sequentie kan herhaald worden voor zwaardere elementen, terwijl proton- en neutronvangst de elementen kunnen vormen die tussen de alfa-achtige nucleïden liggen. Fusiereacties, zoals koolstofverbranding, zijn van vitaal belang om rekenschap te kunnen geven van de abundantie van elementen in het gebied $20 \leq A \leq 32$. De reacties,



vereisen een temperatuur hoger dan ongeveer 10^9 K. Dergelijke temperaturen komen slechts voor in enkele zeer massieve sterren en men denkt dat koolstofverbranding voornamelijk plaatsvindt in massieve, zogenaamde exploderende sterren. Men neemt aan dat de temperatuur in exploderende sterren ongeveer 2×10^9 K is. Figuur 11 laat zien dat de abundantie van de geproduceerde elementen goed overeenkomt met de resultaten van stermodellen. Op dezelfde manier kan zuur-

stofverbranding,



rekenschap geven van de abundantie van elementen met $32 \leq A \leq 42$, maar vereist een temperatuur van ongeveer $3,6 \times 10^9$ K. Verbranding van silicium draagt bij tot de verklaring van de vorming van veel elementen tot Ni.

Een nieuw aspect komt aan de orde als de vorming van ijzer bereikt wordt. De bindingsenergie per nucleon heeft een maximum in de buurt van de Fe-groep. Voor atoomgetallen groter dan dat van ijzer, neemt de bindingsenergie per nucleon af. Om die reden kan de Fe-groep niet dienst doen als brandstof en de verbranding stopt als ijzer gevormd is. Dit verklaart ook waarom de elementen in de buurt van Fe meer abundant zijn dan andere. Elementen zwaarder dan ijzer zijn waarschijnlijk gevormd door neutron- en protonvangst reacties. Deze processen vinden plaats zolang de ster brandt of wanneer explosies protonen en neutronen produceren. Op het moment dat de kernreacties die de energie van de ster leveren stoppen, stopt ook de productie van zware elementen.

3.4 Standaard zonnemodel

Het standaard zonnemodel (standard solar model - SSM) is een van de meest complete en succesvolle theorieën van de moderne sterrenkunde. We zullen de basisgedachten achter dit model en de consequenties ervan kort bespreken. Het SSM is gebaseerd op vier aannamen:

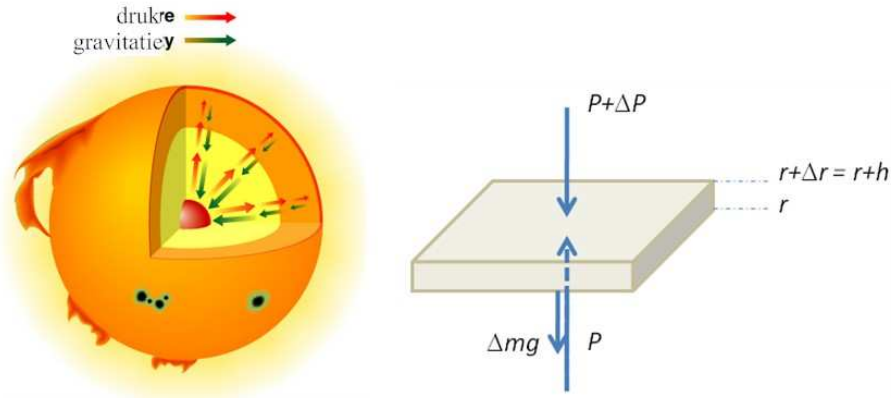
- De zon is sferisch symmetrisch.
- De zon is in hydrostatisch evenwicht.
- Energie wordt overgebracht door straling en convectie alsook door neutrino's.
- Fusie van waterstof tot helium is de energiebron.

De centripetale versnelling op de equator van de zon is $a = v^2/R \approx 5 \times 10^{-3}$ m/s² en dat is verwaarloosbaar ten opzichte van haar gravitatie van $g = GM/R^2 \approx 274$ m/s². Sferische symmetrie is dus een goede aanname en we mogen toestandvariabelen, zoals temperatuur en druk, schrijven als functie van de afstand tot het centrum van de zon, bijvoorbeeld $T(r)$ en $P(r)$. Indien de lokale compositie (voornamelijk waterstof en helium) bekend is, dan geven deze twee grootheden ook de dichtheid. Als we aannemen dat de gasdruk²² dominant is over de stralingsdruk dan kunnen we deze laatste verwaarlozen. Er geldt $P_{\text{gas}} = \frac{\rho kT}{\mu}$ en $P_{\text{straling}} = \frac{4\sigma T^4}{3c}$, met ρ de dichtheid, μ de deeltjesmassa ($3,345 \times 10^{-27}$ kg voor waterstofmoleculen), σ de Stefan-Boltzmann constante en c de lichtsnelheid. Diep in de zon bedraagt de dichtheid $\rho \sim 10^4$ kg/m³ en temperatuur $T \sim 10^7$ K en onder deze condities vinden we $P_{\text{gas}} \sim 1,4 \times 10^{15}$ N/m² en $P_{\text{straling}} \sim 2,5 \times 10^{12}$ N/m². We zien dat de stralingsdruk inderdaad verwaarloosbaar is²³.

We stellen ons voor dat de zon is opgebouwd uit sferische schillen. Op de bodem van een volume element werkt een kracht ter grootte $F_{\text{bodem}} = P(r)A$, terwijl op de top een kracht werkt ter

²²We vinden de uitdrukking voor de gasdruk uit de ideale gaswet, $PV = NkT$, met P de gasdruk, V het volume, N het aantal moleculen, k de constante van Boltzmann en T de temperatuur. Omdat de deeltjesdichtheid, $\frac{N}{V} = \frac{\rho}{\mu}$, met ρ de massadichtheid, μ het moleculaire massa ($\mu = 2m_p$ voor waterstofmoleculen, H₂) en m_p de massa van het proton, kunnen we de gasdruk ook schrijven als $P = \frac{\rho kT}{\mu}$.

²³Voor massieve sterren met hogere temperatuur kan stralingsdruk wel een belangrijke rol spelen.



Figuur 12: In de zon is er evenwicht tussen gravitatie en de gasdruk ten gevolge van de energie opgewekt door kernfusie. Rechts: op een schil met oppervlakte A en dikte h is er hydrostatisch evenwicht tussen de krachten.

grootte $F_{\text{top}} = -(P + \Delta P)A$. Het minteken geeft aan dat deze kracht naar het centrum van de zon wijst. Verder werkt er nog de gravitatie op de massa van het volume element. Het gewicht is gelijk aan $F_{\text{gravitatie}} = -\Delta mg$, met Δm de massa van het element en g de lokale gravitatie versnelling. We vinden $F_{\text{gravitatie}} = -\rho Ahg$. De lokale gravitatie wordt gegeven door $g = \frac{GM_I}{r^2}$, waarbij M_I de totale massa binnen de bol is die begrensd wordt door de sferische schil. Deze krachten zijn in hydrostatisch evenwicht, $P(r)A - (P + \Delta P)A - \rho Ah \frac{GM_I}{r^2} = 0$, en er geldt voor een dunne sferische schil (met $\Delta P \rightarrow dP$ en $\Delta r = h \rightarrow dr$)

$$P - (P + dP) - \frac{GM_I \rho dr}{r^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{dr} = -\frac{GM_I \rho}{r^2} = -\frac{GM_I P \mu}{kT r^2}. \quad (53)$$

Als randvoorwaarde hebben we dat de druk nul moet zijn aan de rand van de ster, waar $\rho \sim 0$. De massa binnen de bol bedraagt M_I en de sferische schil levert een bijdrage

$$dM_I = 4\pi r^2 \rho dr = \frac{4\pi r^2 P \mu}{kT} dr \quad \rightarrow \quad \frac{dM_I}{dr} = \frac{4\pi r^2 P \mu}{kT}. \quad (54)$$

Hier geldt de randvoorwaarde dat $M_I = 0$ als $r = 0$. Verder geldt dat $M_I = M_\odot$ als $r = R_\odot$, de straal van de ster.

In de evenwichtstoestand is de energie binnen het volume element, tussen r en $r + dr$ constant. De stralingsflux door het buitenoppervlak is dan gelijk aan de som van de flux door het binnen oppervlak en het vermogen dat binnen de sferische schil wordt gegenereerd. Dit geeft

$$L + dL = L + 4\pi r^2 \epsilon \rho dr \quad \rightarrow \quad \frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon \rho = \frac{4\pi r^2 P \mu \epsilon}{kT}, \quad (55)$$

met L de *luminositeit* ofwel de flux van uitgestraalde energie per tijdseenheid, en ϵ de functie van intrinsieke energie generatie (in W/kg). Bij een hogere temperatuur zal er meer energie in de ster worden gegenereerd. Als randvoorwaarden gebruiken we $L = 0$ en $r = 0$, terwijl voor $r = R_\odot$ we de luminositeit $L = L_\odot$ van de zon dienen te vinden.

Tenslotte stellen we een vergelijking op voor de temperatuurverdeling van de zon. Hiertoe beschouwen we de intensiteit (J/(m²s)) door een sferische schil. Straling passeert deze schil, terwijl er ook straling door kernfusie in de schil kan worden gegenereerd. Als de gemiddelde intensiteit van de straling binnen de schil gelijk is aan I , dan is de energie die geabsorbeerd wordt per tijdseenheid voor straling die de schil passeert gelijk aan $-I\kappa\rho dr$, met κ de *opaciteit*

gedefinieerd als $\kappa = \frac{\zeta}{\rho}$, met ζ de *lineaire absorptie coëfficiënt*. De geabsorbeerde intensiteit bedraagt $dI = -\zeta I dr = -\kappa \rho I dr$. De intensiteit van de straling die de schil passeert is gerelateerd aan de lokale luminositeit volgens $I = \frac{L}{4\pi r^2}$. Vanwege de relatie tussen energie (E) en impuls (p voor straling geldt $E = pc$), kunnen we de impulsverandering per tijdseenheid van de straling tussen binnen- en buitenoppervlak schrijven als

$$dp = -\frac{I\kappa\rho}{c}dr = -\frac{L\kappa\rho}{4\pi r^2 c}dr. \quad (56)$$

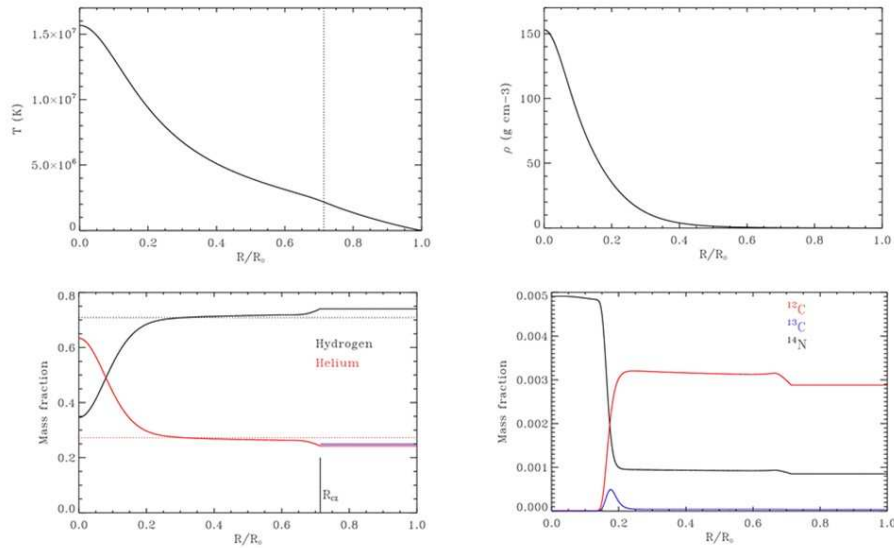
De impulsverandering in een sectie met eenheidsoppervlak vertegenwoordigt een krachtverschil per eenheid van oppervlakte, of stralingsdruk tussen binnen- en buitenoppervlak van het element. Er geldt

$$\frac{dP_{\text{straling}}}{dr} = -\frac{L\kappa\rho}{4\pi r^2 c}. \quad (57)$$

Omdat de stralingsdruk gegeven wordt door $P_{\text{straling}} = \frac{4\sigma T^4}{3c}$, kunnen we dit differentiëren naar r en in bovenstaande vergelijking invullen. We vinden dan

$$\frac{dP_{\text{straling}}}{dr} = \frac{16\sigma T^3}{3c} \frac{dT}{dr} \rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{3L\kappa\rho}{64\pi\sigma T^3 r^2}. \quad (58)$$

Voor de temperatuur nemen we als randvoorwaarde $T = T_{\text{oppervlak}}$ als $r = R_{\odot}$. Dat is de conventionele temperatuur van een ster, die men kan waarnemen; het is de temperatuur van de fotosfeer, de zichtbare buitenkant van de ster.



Figuur 13: Resultaten van het standaard model voor de zon. Boven: temperatuur en dichtheidsverdeling; onder: massafracties van diverse elementen.

Bovenstaande differentiaalvergelijkingen kunnen iteratief worden opgelost en Fig. 13 geeft de berekende temperatuur en dichtheidsverdeling in de zon. We zien dat in het centrum van de zon een temperatuur van 16 miljoen graden wordt bereikt.

We kunnen een gevoel krijgen voor het verband tussen massa (M), grootte (R) en de druk (P_C) in het binnenste van de ster. Hiervoor gebruiken we vergelijking (53) om bij grove benadering de druk in de ster (in één stap met $dr \rightarrow R$ en $M_I \rightarrow M$) te schrijven als $\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_I\rho}{r^2} \rightarrow P_C \approx \frac{GM\rho_C}{R}$. We benaderen de massa met $M \approx \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_C$. Combineren levert $P_C \approx \frac{3GM^2}{4\pi R^4}$. Op dezelfde wijze vinden we dat de centrale temperatuur schaalte als $T_C \sim \frac{M}{R}$.

Als we sterren met globaal dezelfde massa M beschouwen, dan geldt $M \sim \rho_C R^3 = \text{constant}$. Omdat dus geldt dat $R \sim \rho_C^{-\frac{1}{3}}$, vinden we de toestandsvergelijking voor de centrale druk

$$P_C \sim \rho_C^{\frac{4}{3}}. \quad (59)$$

Dit is de toestandsvergelijking voor een ster waarbij de druk precies in balans is met de gravitatie. Toestandsvergelijking van de vorm $P \sim \rho^\gamma$ worden polytropische toestandsvergelijkingen genoemd. Als de polytropische index γ groter is dan $4/3$ dan neemt de druk sneller toe bij compressie en stoot de ster terug, de ster is stabiel. Toestandsvergelijkingen met $\gamma < 4/3$ zijn niet stabiel.

3.5 Witte dwergen, supernovae en neutronensterren

In het voorgaande hebben we diverse verbrandingsprocessen die zich in sterren afspelen beschreven. In deze fusiereacties worden elementen geproduceerd en tegelijkertijd wordt meer en meer kernbrandstof opgebruikt. Wat gebeurt er wanneer er geen brandstof meer is? Volgens de gangbare theorieën kan een ster op vier manieren aan zijn einde komen: het kan een zwart gat, een witte dwerg, of een neutronenster worden, of het kan volledig fragmenteren. Haar uiteindelijke lot wordt bepaald door de beginmassa van de ster. Als deze massa minder is dan ongeveer vier zonnemassa's, dan zal de ster een witte dwerg worden. Als deze massa echter groter is dan ongeveer vier zonnemassa's, kan een supernova ontstaan die resulteert in een neutronenster, een zwart gat of in volledige fragmentatie. Zwarte gaten trekken zich oneindig lang samen en benaderen, maar zullen dit nooit bereiken, een straal van ongeveer 3 km en een dichtheid van meer dan 10^{19} kg/m^3 . Neutronensterren hebben een straal van ongeveer 10 km en een centrale dichtheid die groter is dan die van kernmaterie, ongeveer 10^{17} kg/m^3 . In het volgende bespreken we de vorming en eigenschappen van neutronensterren.

Stel dat het fusieproces ten einde loopt en de ster begint te contraheren onder zijn eigen gravitatie. Volgens het Pauliprincipe dient een systeem dat N_e elektronen bevat spinparen te vormen met impulsen die minstens $\Delta p_{\text{minimum}}$ verschillen. Dit betekent dat in drie dimensies de grootste impuls in elke richting minstens de waarde $N_e^{\frac{1}{3}} \Delta p_{\text{minimum}}$ dient te hebben. Merk op dat in deze bespreking we ons niet druk maken over factoren 2 of π , etc. De minimum impuls kunnen we vinden uit Heisenbergs onzekerheidsrelatie en is geassocieerd met de maximale onzekerheid in de plaats van het deeltje, hetgeen de grootte $(2R)$ van de ster is. We vinden hiermee voor de minimum impuls in de x -richting $\Delta p_{\text{minimum } x} = \frac{h}{2R}$, met h de constante van Planck. We kunnen nu het effect van het Pauliprincipe in rekening brengen door te vermenigvuldigen met $N_e^{\frac{1}{3}}$ en vinden de minimum waarde die de grootste impuls in de x -richting dient te hebben. De drie richtingen combineren om een kinetische energie te leveren van

$$\langle K \rangle_{\text{gemiddeld}} = 3 \frac{\left(N_e^{\frac{1}{3}} \Delta p_{\text{minimum } x} \right)^2}{2m_e} = N_e^{\frac{2}{3}} \frac{3h^2}{8m_e R^2} \quad (60)$$

waarbij we de klassieke relatie tussen kinetische energie en impuls gebruikt hebben ($K = \frac{p^2}{2m}$). Deze random kinetische energie leidt direct tot de gasdruk via relatie $PV = NkT$ waarbij we de thermische energie kT vervangen door $kT = \frac{2}{3} \langle K \rangle_{\text{gemiddeld}}$. We vinden dan

$$P_{\text{Fermi}} = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle K \rangle_{\text{gemiddeld}} = \frac{h^2 N_e^{\frac{5}{3}}}{4m_e V R^2}. \quad (61)$$

Vervolgens gebruiken we de benadering die een relatie geeft tussen druk, massa en grootte van een ster $P = \frac{3GM^2}{4\pi R^4}$ en stellen dit gelijk aan de Fermi gasdruk P_{Fermi} . Verder geldt dat $M = N_e \mu \approx 2m_p N_e$ en $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. We vinden

$$R = N_e^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{8Gm_p m_e M}, \quad (62)$$

en als we hiervoor de massa van de zon gebruiken ($M = M_\odot$) vinden we een straal $R = 10^7$ m. Dat is een straal in de orde van de straal van de aarde. Een exacte berekening geeft als uitkomst dat een witte dwerg met een massa van 1 zonnemassa een straal heeft die ongeveer 90 % is van de straal van de aarde.

We kunnen voor een witte dwerg de toestandsvergelijking afleiden door op te merken dat $R \sim V^{\frac{1}{3}}$ en we zien dat de Fermi gasdruk alleen afhangt van de verhouding N_e/V , het aantal elektronen per volume eenheid. Deze elektronendichtheid is evenredig met de massadichtheid $\rho = \mu N_e/V$ en we vinden hiermee de Fermi toestandsvergelijking

$$P_{\text{Fermi}} = \beta \rho^{\frac{5}{3}}, \quad (63)$$

waarbij de constante β afhangt van h , m_e en m_p . De polytropische index $\gamma = \frac{5}{3}$ en dat betekent dat een niet-relativistisch ontaard Fermigas stabiel is onder kleine verstoringen²⁴.

Een ster die gedragen wordt door elektron ontaarding wordt een witte dwerg genoemd. Ook de protonen in het plasma van de ster zijn onderhevig aan de onzekerheidsrelatie en het Pauliprincipe. Derhalve vormen de protonen ook een ontaard gas en leveren ze een bijdrage tot de gasdruk van de ster. Omdat de kinetische energie gegeven wordt door $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ leveren protonen bij dezelfde waarde van impuls een beduidend kleinere bijdrage tot de kinetische energie en daarmee de gasdruk (het schaalt omgekeerd evenredig met de massa). Witte dwergen worden waargenomen door sterrenkundigen en komen relatief veel voor: typisch 1 op de 10 sterren is een witte dwerg.

Als een ster massief is, dan worden de elektronen in een klein volume gedwongen door de gravitatiekracht. Hierdoor wordt hun typische snelheid groot, in de orde van de lichtsnelheid. Om te begrijpen wat er dan fysisch gebeurt, dienen we een *relativistisch* ontaard elektronengas te beschouwen. We nemen hierbij aan dat de elektronen een gas vormen van ultra-relativistische vrije fermionen, die zich in een volume V bevinden. Alle beschikbare toestanden zijn bezet tot de Fermi energie E_F . Dit ontaarde elektronengas levert de druk die in evenwicht is met de gravitationele aantreking. Voor ultra-relativistische deeltjes wordt het verband tussen energie en impuls gegeven door $E = |\vec{p}|c$. Analooq aan vergelijking (61) wordt de druk voor een ontaard relativistisch elektrongas gegeven door

$$P = \frac{hcN_e^{\frac{4}{3}}}{3RV}. \quad (64)$$

Als we dit weer gelijkstellen aan $\frac{3GM^2}{4\pi R^4}$ en het volume vervangen door $\frac{4}{3}\pi R^3$ krijgen we

$$\frac{hcN_e^{\frac{4}{3}}}{4\pi R^4} = \frac{3GM^2}{4\pi R^4}. \quad (65)$$

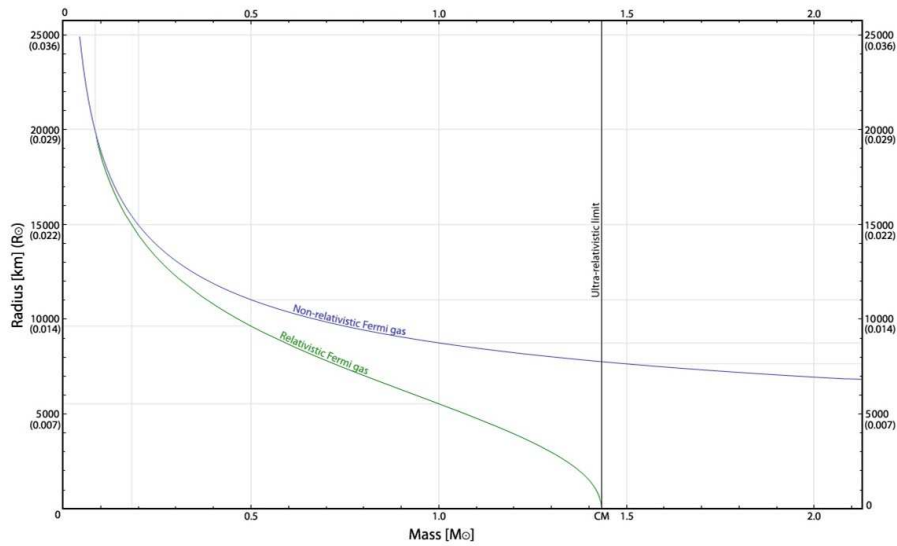
In bovenstaande vergelijking gebeurt er iets verrassends, want de straal van de ster valt uit de vergelijking. Wat we overhouden is een uitdrukking voor de massa. Klaarblijkelijk heeft een

²⁴Met ontaarde materie bedoelen we materie waarbij de dichtheid dermate groot is dat de belangrijkste bijdrage tot de druk komt van het Pauliprincipe. Compressie van ontaarde materie dwingt deeltjes over te gaan naar quantumtoestanden met hogere energie.

relativistische witte dwerg een *unieke* massa. Deze massa noemen we de Chandrasekhar massa²⁵ en deze wordt gegeven door

$$M_{\text{Ch}} = \left(\frac{hc}{3G} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\mu} \right)^2 = \left(\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}} \frac{m_{\text{Pl}}^3}{m_p^2} \right) \approx 1,4 M_{\odot}. \quad (66)$$

We hebben we in vergelijking (65) de relatie $M = N_e \mu$ gebruikt, en in de laatste stap hebben we $\mu = m_p$ genomen. Verder is m_{Pl} de zogenaamde Planck massa, die wordt gegeven door $m_{\text{Pl}} = \left(\frac{hc}{G} \right)^{\frac{1}{2}} = 5,5 \times 10^{-8} \text{ kg}$.



Figuur 14: Relatie tussen straal en massa voor een witte dwerg voor een (niet-)relativistisch elektrongas. In de limiet van een ultra-relativistisch elektrongas wordt de Chandrasekhar limiet bereikt.

Uit vergelijking (64) kunnen we de toestandsvergelijking van een ultra-relativistische witte dwerg vinden. Omdat $R \sim V^{\frac{1}{3}}$ zien we dat

$$P = \beta \rho^{\frac{4}{3}} \quad (67)$$

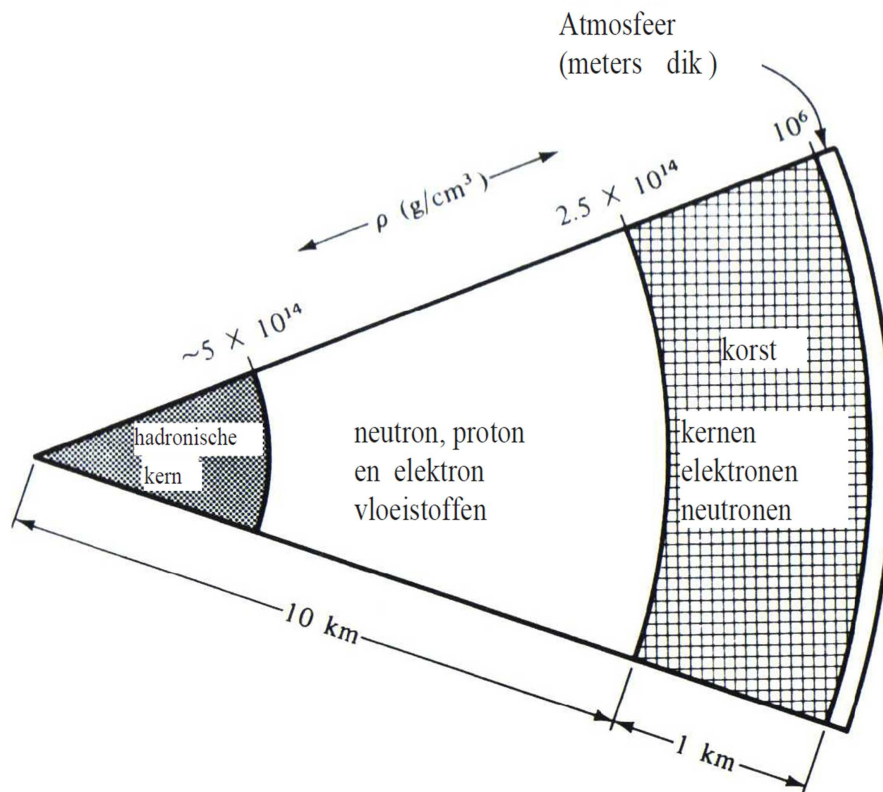
Zoals we besproken hebben in vergelijking (59) is een index $\gamma = \frac{4}{3}$ slechts marginaal stabiel voor gravitationele ineenstorting. Elke kleine correctie op de eigenschappen van een ultra-relativistische witte dwerg kan instabiliteit tot gevolg hebben.

Men neemt aan dat neutronensterren zich ontwikkelen uit de gravitationele samenstorting van sterren die massiever zijn dan ongeveer acht zonnemassa's. Tegen het einde van de diverse stadia van kernverbranding heeft de temperatuur een waarde van ongeveer $8 \times 10^9 \text{ K}$ bereikt in een centrale, voornamelijk uit ijzer bestaande, kern ter grootte van ongeveer 1,5 zonnemassa. Het element ^{56}Fe heeft de meest stabiele kern bij lage temperatuur en druk. Bij de druk, dichtheid en temperatuur van de centrale kern zullen de atomen volledig geïoniseerd zijn, waarbij de vrije elektronen een ontaard gas vormen. Het gedrag van deze elektronen bepaalt de verdere evolutie van de ster.

²⁵Subrahmanyan Chandrasekhar (1910 - 1995) heeft deze limiet afgeleid, die bepaalt of een instortende ster een witte dwerg wordt of een exotischer object: neutronenster of zwart gat. Ook quarksterren bestaande uit quarkmaterie (met name *s*-quarks) behoren tot de theoretische mogelijkheden.

De ultra-relativistische witte dwerg is niet stabiel voor gravitationele ineenstorting. De sterkern verliest elektronen vanwege elektronvangst²⁶ door het ijzer, waarbij neutrino's worden uitgezonden. Als elektronen niet langer weerstand kunnen bieden aan de massa van de kern, stort de ster in. De gravitationele energie die hierbij vrijkomt wordt in warmte en kinetische energie omgezet. Kernen gaan hierbij over tot een gas van nucleonen en de dichtheid van de kern van de ster neemt toe tot waarden die ongeveer twee keer zo groot zijn als die van kernmaterie. Op dit punt aangekomen, stopt de compressie omdat het nucleongas nu de druk levert die nodig is om verdere ineenstorting te voorkomen. In het geval van niet al te grote massieve sterren, stuitert de kern wat op en neer als de compressie stopt, waardoor uitgaande drukgolven ontstaan die resulteren in een schokgolf. Deze schokgolf zal de mantel van de ster doen scheuren waardoor er een explosie volgt. Op deze wijze wordt een type II supernova geboren. De energie van de ineengestorte kern, ongeveer 3×10^{46} J, wordt in een tijdsparre van ongeveer 10 s uitgezonden in de vorm van neutrino's, waarbij er een neutronenster resteert. De neutrino's van SN1987a zijn op aarde waargenomen door het Superkamiokande en IMB experiment, waarbij de energie- en tijdverdeling van deze neutrino's gemeten is.

Neutrino emissie is een efficiënt koelproces voor de resterende neutronenster. De ster koelt al fors binnen een paar seconden en heeft na een paar dagen een interne temperatuur van ongeveer 10^{10} K bereikt. Deze interne temperatuur blijft zeker boven de 10^9 K gedurende de eerste duizend jaar, met neutrino emissie als het belangrijkste koelproces. Daarna wordt foton-emissie het dominante koelproces en bereikt de neutronenster een temperatuur van ongeveer 10^8 K. Fig. 15



Figuur 15: Doorsnede van een typische neutronenster. De hadronische kern kan quarkmaterie of een pion-condensaat bevatten.

²⁶Elektronvangst is de reactie $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$. Hierdoor worden protonen omgezet in neutronen, terwijl de ster neutrino's uitzendt.

toont een doorsnede van een typische neutronenster. Hierbij zijn de volgende vragen relevant: Hoe heeft de ster deze eindtoestand bereikt? Waarom stort de ster niet volledig in? Veel vakgebieden zijn betrokken bij een formulering van antwoorden op deze vragen: relativiteitstheorie, quantummechanica, kern- en deeltjesfysica en vastestof fysica. In het volgende bespreken we een aantal subatomaire fysica aspecten.

We beschouwen als eerste de dichtheid en samenstelling van de ster. Voor een gegeven massa van de neutronenster, kunnen we de straal en dichtheidsverdeling uitrekenen²⁷. Voor een ster met een straal van 10 km is de centrale dichtheid ongeveer $10^{17} - 10^{18}$ kg/m³. De dichtheid neemt toe van nul, aan de top van de ‘atmosfeer’, tot een waarde die groter is dan die van kernmaterie in het centrum. Uit de dichtheid kunnen we de samenstelling op een gegeven diepte afleiden. De buitenste laag bestaat voornamelijk uit ⁵⁶Fe, het eindresultaat van het proces van kernverbranding. De dichtheid neemt toe als we in de richting van het centrum van de ster gaan en de Fermi energie wordt dusdanig groot, dat elektronvangst kan optreden, net zoals dat het geval was bij het ontstaan van een neutronenster in de pre-supernova fase. Bij deze hogere temperatuur worden meer neutronen-rijke isotopen gevormd. Elektronvangst blijft toenemen en bij een dichtheid van ongeveer 4×10^{14} kg/m³ zullen kernen met 82 neutronen, zoals ¹¹⁸Kr, het meest stabiel zijn. Merk op dat gewoon krypton op aarde een atoomgetal $A = 84$ heeft. De meest stabiele nucleïden bij dergelijke hoge drukken zijn dus zeer neutronen-rijk. Onder normale toestanden zouden dergelijke kernen direct vervallen door elektron-emissie. Echter bij drukken die heersen in een neutronenster, zijn alle beschikbare toestanden reeds door elektronen bezet en verbiedt het Pauliprincipe een dergelijk beta-verval.

Het buitenste neutron van ¹¹⁸Kr is nauwelijks gebonden. Als de dichtheid groter wordt dan 4×10^{14} kg/m³, beginnen de neutronen uit de kernen te lekken en ontstaat er een ontaarde vloeistof. Als de druk verder toeneemt, zullen de kernen in deze zogenaamde ‘neutron drip line’ meer en meer neutronen-rijk worden en in grootte groeien. Bij een dichtheid van ongeveer 2.5×10^{17} kg/m³, beginnen de kernen elkaar te raken en gaan ze in elkaar over om een continue vloeistof van neutronen, protonen en elektronen te vormen. Neutronen zijn hierbij in de meerderheid en de fractie protonen wordt geraamd op ongeveer 4 % van alle materie. De neutronen kunnen niet vervallen in protonen, omdat de energie van het vrijkomende elektron kleiner zou zijn dan de Fermi energie van het elektrongas. Het verval is derhalve verboden door het Pauliprincipe.

Als de energie nog groter wordt, is het energetisch mogelijk om via elektronvangst meer massieve elementaire deeltjes te vormen, zoals bijvoorbeeld

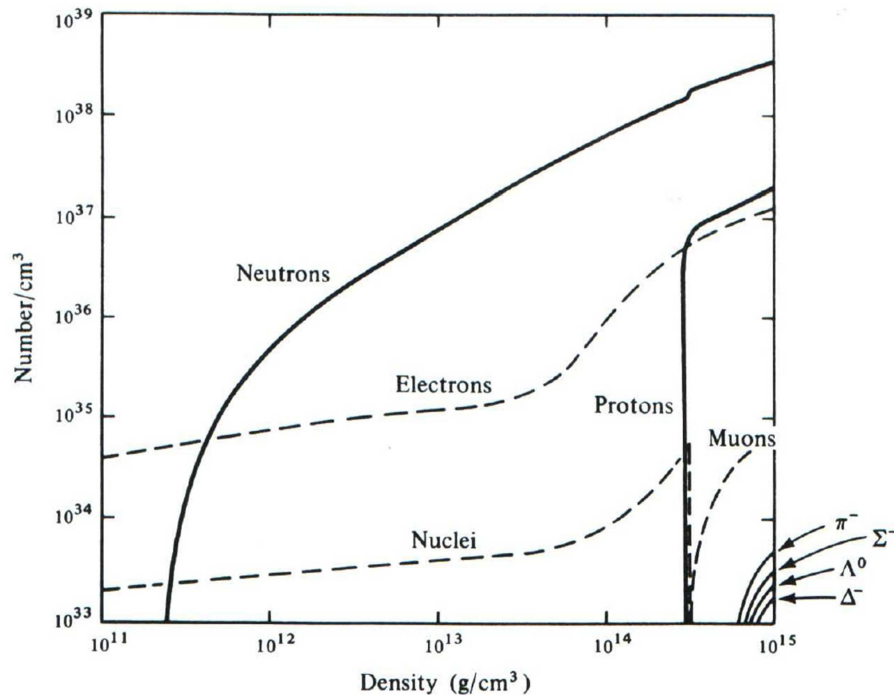
$$e^- n \rightarrow \nu \Sigma^-, \quad (68)$$

waarbij dergelijke deeltjes weer stabiel zijn vanwege het Pauliprincipe. Fig. 16 toont resultaten van een berekening²⁸ van de samenstelling van een neutronenster als functie van de dichtheid.

Als we onze aandacht nog een keer richten op de druk in een neutronenster, dan hebben we reeds gezien dat het ontaarde elektronengas bij relatief lage drukken, de tegendruk levert die ineenstorting van de ster voorkomt. Bij hogere drukken wordt volledige ineenstorting voorkomen door een combinatie van twee effecten, de afstotende kracht in de nucleon-nucleon interactie en de energie ontaardheid van de neutronen. Fig. 16 toont dat neutronen domineren bij de hoogste drukken. Ze vormen een ontaard Fermigas en we kunnen de argumenten die geleid hebben tot vergelijking (62) herhalen voor het niet-relativistische geval. We vervangen in vergelijking (62) m_e door m_n en stellen $\mu = m_p$ (dus vermenigvuldigen met een factor 2). Dit betekent dat de straal van een neutronenster ongeveer 600 keer kleiner is dan die van een witte dwerg, of wel ongeveer 17 km. We vinden dan weer dat de druk toeneemt met afnemend volume totdat het,

²⁷G. Baym en C. Pethick, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **25**, 27 (1975); S. Tsuruta, *Comm. Astrophys.* **11**, 151 (1986).

²⁸M.A. Ruderman, *Sci. Amer.* **224**, 24 (februari 1971).



Figuur 16: Aantal materiedeeltjes als functie van de dichtheid. Het ‘neutron drip regime’, waarbij neutronen uit kernen lekken, begint bij $4 \times 10^{14} \text{ kg/m}^3$. Bij een dichtheid van ongeveer $2,5 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$ beginnen de kernen op te lossen. Bij hogere dichtheden kunnen muonen en vreemde deeltjes ontstaan.

samen met de afstotende kracht tussen nucleonen op korte afstand (de zogenaamde harde-pit repulsie van de nucleon-nucleon (NN) kracht), in evenwicht is met de gravitationele aantrekking.

Het bestaan van neutronensterren is reeds in de jaren dertig van de vorige eeuw voorspeld. Hun ontdekking kwam onverwacht in 1967 toen een nieuwe klasse hemellichamen werd waargenomen. Deze objecten zijn puntvormig, staan buiten ons zonnestelsel en zenden periodieke radiogolven uit. Ze werden pulsars genoemd en op dit moment zijn er meer dan 1000 bekend. Hun periode varieert van ongeveer 1,5 ms tot 4 s. In 1968 suggereerde Gold²⁹ dat een pulsar een neutronenster is. De periode van de pulsar wordt geassocieerd met de rotatiefrequentie van de neutronenster. De frequentie neemt geleidelijk af vanwege het verlies aan rotatie-energie. Dit energieverlies is aanzienlijk, zo is het verlies van rotatie-energie van de Krabpulsar ongeveer even groot als de totale energie uitgezonden door deze nevel. De neutronenster is dus de energiebron van de enorme Krabnevel.

Men heeft pulsars niet alleen waargenomen als radiosterren, maar ook is periodieke emissie van licht gemeten. De perioden, de vertragingssnelheden, en de plotselinge veranderingen van de perioden zijn zorgvuldig bestudeerd. Hiermee zijn diverse eigenschappen van neutronensterren vastgesteld en weten we meer van het gedrag van kernmaterie bij dichtheden groter dan 10^{18} kg/m^3 .

3.6 Neutrino astronomie

Er is één deeltje dat kan ontsnappen uit het inwendige van een dichte ster: het neutrino. Neutrino astronomie, alhoewel uitermate ingewikkeld, maakt het mogelijk om in het inwendige van sterren,

²⁹T. Gold, *Nature* **218**, 731 (1968).

bijvoorbeeld de zon, te kijken. De eigenschappen die het neutrino uniek maken, kunnen als volgt worden samengevat:

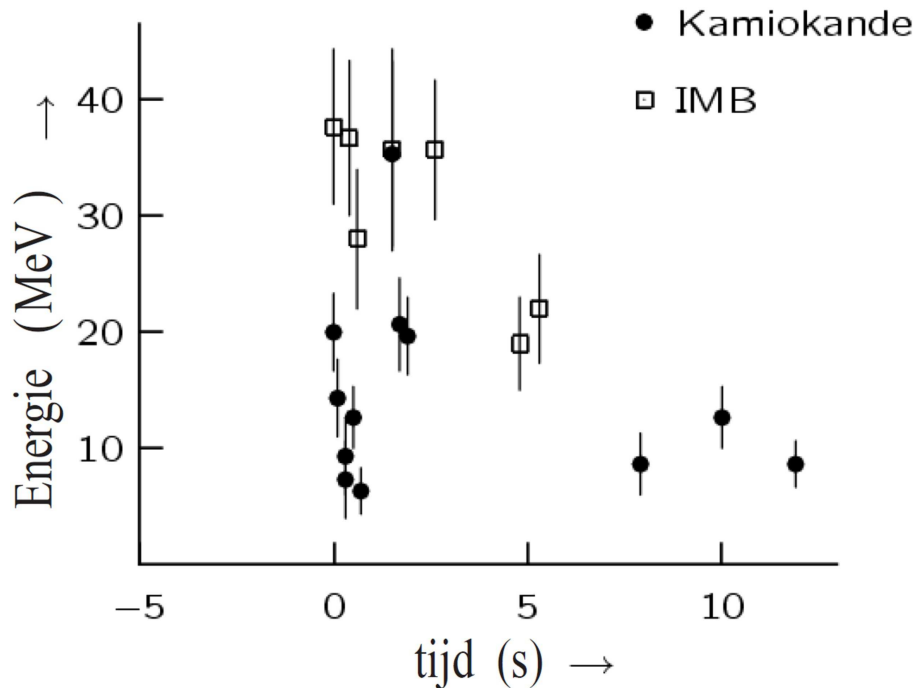
1. De absorptie van neutrino's en antineutrino's in materie is klein. De werkzame doorsnede voor absorptie kan geschreven worden als

$$\sigma \text{ (cm}^2\text{)} = 2,3 \times 10^{-44} \frac{p_e}{m_e c^2} \frac{E_e}{m_e c^2}, \quad (69)$$

met p_e en E_e de impuls en energie van het elektron in de eindtoestand in de reactie $\nu N \rightarrow e N'$. We vinden dat de gemiddelde vrije weglengte van een 1 MeV neutrino in water ongeveer 10^{19} m is. Dit is vele malen groter dan de lineaire afmetingen van sterren, die in het algemeen kleiner zijn dan 10^{11} m.

2. Men kan neutrino's en antineutrino's onderscheiden door verschillen in wisselwerkingen met water. De luminositeit van neutrino's op aarde wordt gedomineerd door de zon, omdat die zo dichtbij staat. We geloven echter dat de primaire galactische bronnen van neutrino's supernovae en hun restanten zijn. In het koelproces van supernovae worden neutrino en antineutrino paren van alle flavors³⁰ uitgezonden via reacties met neutrale stromen³¹, zoals $e^+ e^- \rightarrow \nu \bar{\nu}$. Verder worden elektron neutrino's en antineutrino's gegenereerd door kernreacties met geladen stromen, zoals $e^- p \rightarrow n \nu_e$.

Figuur 17 toont dat de neutrino's van SN1987a zijn waargenomen. In het volgende zullen we



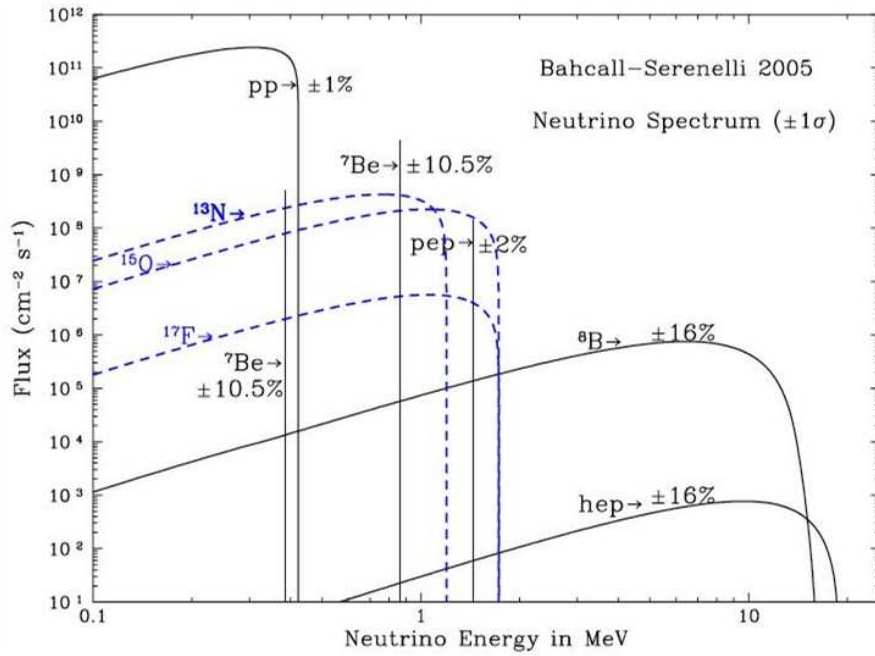
Figuur 17: Tijd- en energieverdeling van neutrino's waargenomen met het Kamiokande en het IMB experiment.

de zonneneutrino's nader beschouwen. We hebben in sectie 3.2 gezien dat vier reacties van de

³⁰In de natuur komen er drie soorten neutrino's voor: elektron neutrino ν_e , muon neutrino ν_μ en tau neutrino ν_τ .

³¹In de zwakke wisselwerking worden Z bosonen of W bosonen uitgewisseld. Omdat het Z boson ongeladen is, spreekt men van neutrale stromen. De W bosonen zijn geladen.

pp -cyclus neutrino's produceren. Fig. 18 geeft de voorspelling van het SSM voor deze neutrino's. Bahcall en Davis hebben erop gewezen dat het mogelijk zou moeten zijn het bestaan van de pp



Figuur 18: Energieverdeling van het SSM voor reacties van de pp -cyclus waarbij zogenaamde zonneneutrino's worden geproduceerd.

fusioreacties in de zon te bewijzen, door zonneneutrino's te detecteren met behulp van de reactie



Elektron neutrino's, maar niet de antineutrino's, met een energie van meer dan 0,814 MeV kunnen worden ingevangen door ^{37}Cl . Dit resulteert in ^{37}Ar en een elektron. Hoewel de werkzame doorsnede voor dit proces klein is, is het zeer wel mogelijk om een dergelijk experiment uit te voeren. De redenen hiervoor zijn als volgt samen te vatten:

1. De neutrinoflux van de zon is zeer groot, in de orde van 10^{15} neutrino's/m²-s, op het aardoppervlak. Uit Fig. 18 volgt dan een flux van energetische neutrino's van ongeveer 6×10^{10} neutrino's/m²-s.
2. Men kan de detectoren zeer groot maken. Op dit moment worden detectoren ontworpen ter grootte van 1 kubieke kilometer. Icecube is het vervolg van het Amanda experiment op Antarctica, terwijl KM3Net het vervolg wordt van het Antares experiment in de Middellandse zee. De beide detectoren zijn weergegeven in figuur 19.
3. Het ^{37}Ar kan in uiterst kleine hoeveelheden worden waargenomen, omdat het radioactief is. Het vervalst door elektronvangst,



met een halfwaardetijd van 35 dagen. Het elektron wordt gewoonlijk gevangen uit de K -schil en laat daar een gat achter. De energie die vrijkomt als een ander elektron van hoger gelegen schillen het gat opvult, wordt uitgezonden als een X -foton of het wordt gebruikt

om een elektron uit een hoger gelegen schil te emitteren (men noemt het dan een Auger elektron). Het Auger elektron heeft een goed-gedefinieerde energie van 2,8 keV en kan relatief eenvoudig worden waargenomen.

4. Argon is een edelgas. We kunnen het daarom relatief eenvoudig scheiden van het chloor om het vervolgens in een klein volume te concentreren.

Het experiment van Davis *et al.* maakte gebruik van een tank met 390.000 liter C_2Cl_4 (tetrachloorethyleen, een schoonmaakvloeistof). De tank werd 1,5 km ondergronds geplaatst in de Homestake goudmijn in Lead, Zuid Dakota. De 1,5 km rots boven het experiment diende als afscherming om de kosmische straling te reduceren. De abundantie van de cruciale isotoop ^{37}Cl is 25 %. Een neutrino interactie met dit chlooratoom produceert ^{37}Ar . Het radioactieve argon werd over een periode van 2 maanden verzameld en dan verwijderd door helium door de tank te stromen. Het argon werd van het helium gescheiden door absorptie op een gekoelde koolstofval. Vervolgens werd het in een volume van $0,5 \text{ cm}^3$ geteld met een proportionele teller. Het resultaat wordt uitgedrukt in zogenaamde solar neutrino units, uitgesproken als ‘snew’, waarbij $1 \text{ SNU} = 10^{-36}$ gebeurtenissen/s chloor atoom. De verwachting was dat Davis *et al.* ongeveer 8 SNU zouden moeten meten. Het experiment bepaalde $2,4 \pm 0,3 \text{ SNU}$. Dit resultaat werd bevestigd door een experiment in de Kamiokande mijn, waarbij een fractie van $0,46 \pm 0,21$ werd gemeten van de voorspelling door het standaard zonnemodel.

Lange tijd heeft men gezocht naar verklaringen voor de puzzel van de zonneneutrino’s. De oplossing is onlangs gevonden en heeft te maken met de transformatie van elektron neutrino’s naar muon (en tau) neutrino’s in het inwendige van de zon. Als de neutrinomassa niet gelijk is aan nul, dan kan een dergelijke transformatie plaatsvinden. In het inwendige van de zon wordt een dergelijke conversie geholpen door de aanwezigheid van elektronen. Door de geladen-stromen interactie krijgen de neutrino’s effectief een verandering in hun massa en deze verandering maakt de transformatie in muon neutrino’s mogelijk. Dergelijke veranderingen staan bekend als neutrino oscillaties en zijn onlangs ontdekt. De neutrale-stroom interactie draagt niet tot een dergelijke versterking bij, omdat de resulterende werkzame doorsnede van lage-energie neutrino’s niet van de neutrino-soort afhangt.

3.7 Neutrino oscillaties

We beperken de discussie tot twee flavors, het elektron neutrino ν_e en het muon neutrino ν_μ . De flavor eigentoestanden, ν_e en ν_μ , zijn echter geen massa eigentoestanden, ν_1 en ν_2 , maar zijn hieraan gerelateerd door een zogenaamde menghoek θ ,

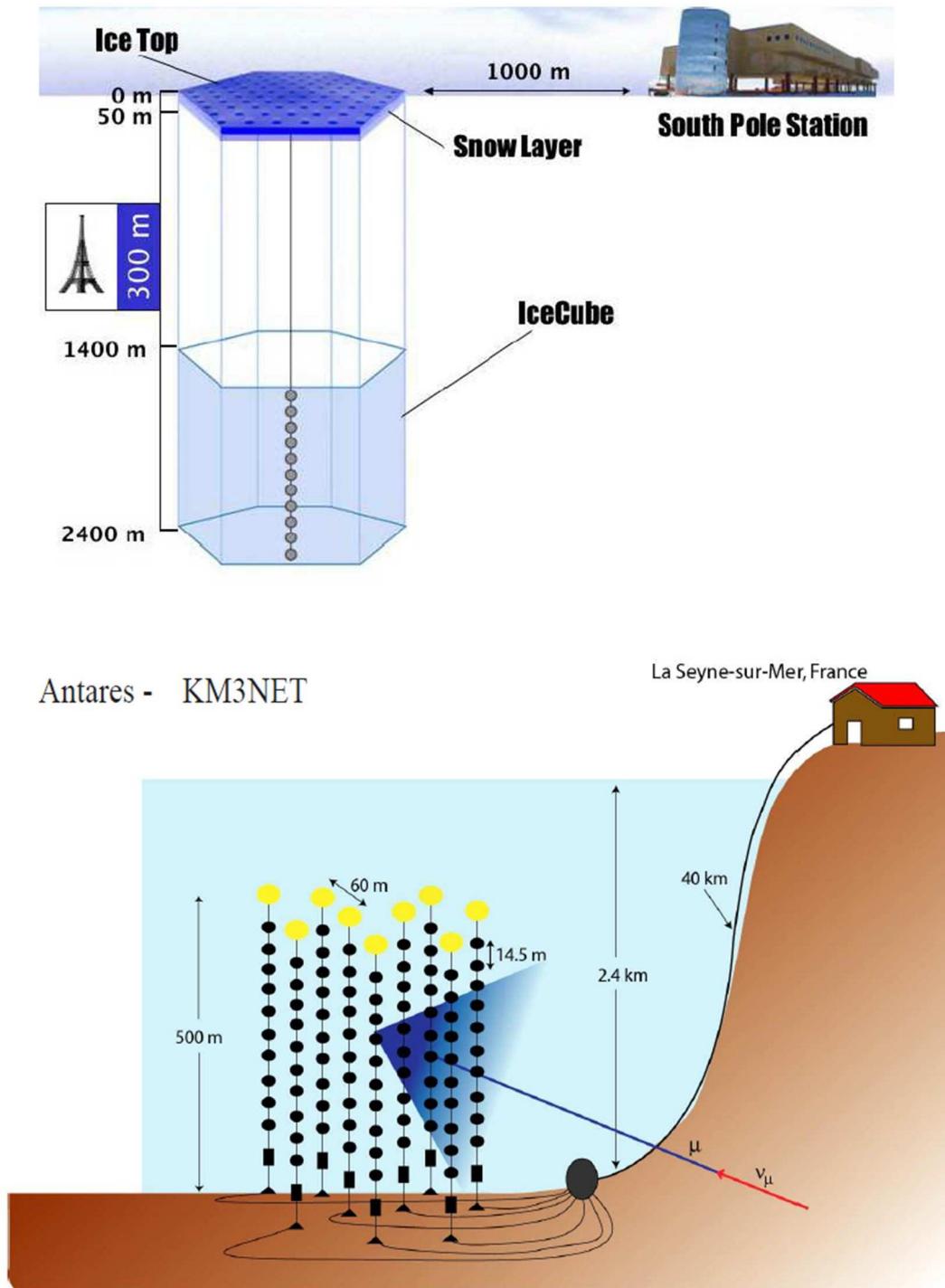
$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}. \quad (72)$$

We nemen aan dat we een bundel ν_e ’s geproduceerd hebben met een precieze impuls, waarbij alle deeltjes in de x -richting bewegen en de bron zich op $x = 0$ bevindt. We vragen ons af wat de waarschijnlijkheid is om een ν_e te detecteren op positie $x \neq 0$?

Neem aan dat we op tijdstip $t = 0$ een zuivere ν_e toestand hebben. Omdat ν_1 en ν_2 massa eigentoestanden zijn, en omdat de bundel bestaat uit eigentoestanden van impuls, vertelt de relatie

$$E_i^2 = p^2 c^2 + m_i^2 c^4 \quad \text{voor } i = 1, 2 \quad (73)$$

ons, dat dit ook eigentoestanden van energie zijn. De tijdevolutie wordt daarom gegeven door



Figuur 19: Boven: schematische voorstelling van het Icecube experiment op Antartica. Beneden: weergave van het Antares experiment in de Middellandse zee.

de uitdrukkingen

$$\begin{aligned}\nu_1(t) &= \nu_1 e^{-iE_1 t/\hbar}, \\ \nu_2(t) &= \nu_2 e^{-iE_2 t/\hbar}.\end{aligned}$$

Vervolgens gebruiken we de gegeven relatie tussen ν_e en ν_i en vinden dat de golffunctie op $t = 0$ geschreven kan worden als

$$\psi(0) = \nu_e = \cos \theta \cdot \nu_1 + \sin \theta \cdot \nu_2. \quad (75)$$

We gebruiken de tijdafhankelijkheid van de ν_i en kunnen de volledige oplossing van de Schrödingervergelijking met als begintoestand $\psi(0) = \nu_e$ schrijven als

$$\psi(t) = \cos \theta \cdot \nu_1(t) + \sin \theta \cdot \nu_2(t) = \cos \theta \cdot e^{-iE_1 t/\hbar} \cdot \nu_1 + \sin \theta \cdot e^{-iE_2 t/\hbar} \cdot \nu_2. \quad (76)$$

De waarschijnlijkheid om een ν_e te detecteren is het kwadraat van de projectie van $\psi(t)$ op de flavoreigentoestand ν_e . We maken gebruik van de orthonormaliteitsrelaties voor de massa eigentoestanden,

$$\nu_i^\dagger \cdot \nu_j = \delta_{ij} \quad (77)$$

en berekenen de projectie als

$$\begin{aligned} \nu_e^\dagger \cdot \psi(t) &= \left(\cos \theta \cdot \nu_1^\dagger + \sin \theta \cdot \nu_2^\dagger \right) \cdot \left(\cos \theta \cdot e^{-iE_1 t/\hbar} \cdot \nu_1 + \sin \theta \cdot e^{-iE_2 t/\hbar} \cdot \nu_2 \right) \\ &= \cos^2 \theta \cdot e^{-iE_1 t/\hbar} + \sin^2 \theta \cdot e^{-iE_2 t/\hbar}. \end{aligned} \quad (78)$$

Als we het kwadraat nemen van bovenstaande uitdrukking vinden we

$$\begin{aligned} P(\nu_e) &= |\cos^2 \theta \cdot e^{-iE_1 t/\hbar} + \sin^2 \theta \cdot e^{-iE_2 t/\hbar}|^2 \\ &= \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos[(E_1 - E_2)t/\hbar]. \end{aligned} \quad (79)$$

We zien dat de periode van oscillatie gegeven wordt door

$$T = \frac{2\pi\hbar}{E_1 - E_2}. \quad (80)$$

Als we aannemen dat de neutrino's ultra-relativistisch zijn, dus $E \approx pc \gg mc^2$, dan geldt

$$E_i = \sqrt{p^2 c^2 + m_i^2 c^4} \approx pc + \frac{m_i^2 c^3}{2p} + \dots \quad (81)$$

Als we dit invullen vinden we

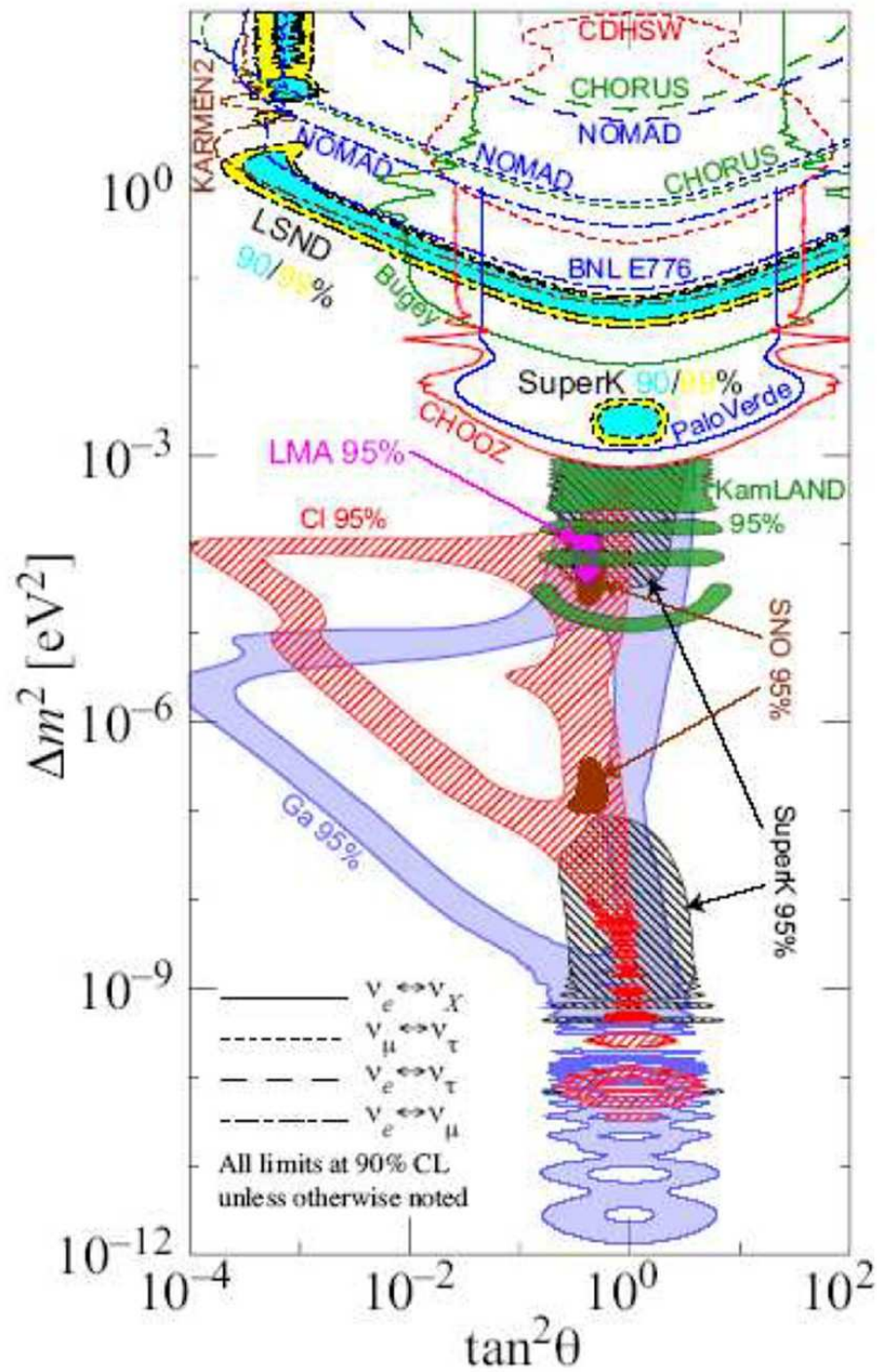
$$T = \frac{2\pi\hbar}{E_1 - E_2} \approx \frac{4\pi\hbar p}{m_1^2 c^3 - m_2^2 c^3} \approx \frac{4\pi\hbar E}{(m_1 c^2)^2 - (m_2 c^2)^2}. \quad (82)$$

Omdat de neutrino's ultra-relativistisch bewegen, bewegen ze zich met praktisch de lichtsnelheid. De afgelegde weg bedraagt dus $x = c \cdot t$. We zien dat de flavor oscillatie in de tijd, zich vertaalt in een oscillatie van de neutrino flavor als functie van de afstand tot de bron. De afstand die correspondeert met een oscillatieperiode wordt de oscillatielengte, L_{osc} , genoemd. We vinden hiermee de relatie

$$L_{\text{osc}} = c \cdot T = \frac{4\pi\hbar c E}{(m_1 c^2)^2 - (m_2 c^2)^2} = \frac{4\pi E \hbar c}{\Delta m^2 c^4}, \quad (83)$$

met $\Delta m^2 = |m_1^2 - m_2^2|$. Als we de juiste conversiefactoren gebruiken vinden we

$$\begin{aligned} L_{\text{osc}} &= \frac{4\pi \cdot (1,6 \times 10^{-13} \text{ J/MeV}) \cdot (3 \times 10^8 \text{ m/s}) \cdot (1,054 \times 10^{-45} \text{ Js}) \cdot E}{(1,6 \times 10^{-19} \text{ J/eV})^2 \cdot \Delta m^2} \\ &= 2,483 \text{ m} \cdot \text{eV}^2 \cdot \text{MeV}^{-1} \cdot \frac{E}{\Delta m^2} \\ &\approx 2,5 \text{ km} \frac{E \text{ (GeV)}}{\Delta m^2 \text{ (eV)}^2}. \end{aligned} \quad (84)$$



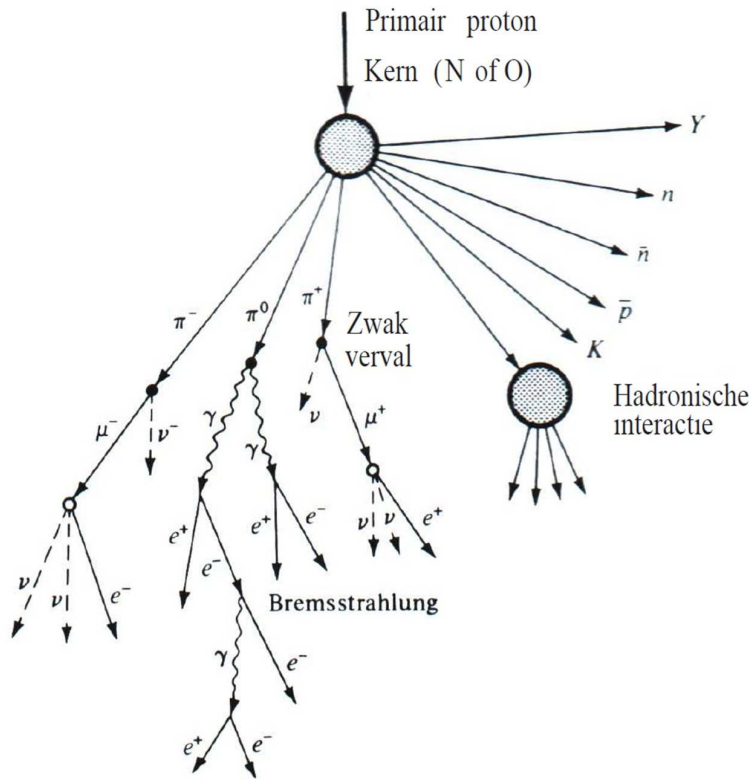
Figuur 20: Gebieden in de neutrino parameterruimte opgespannen door Δm^2 en menghoek θ die worden uitgesloten of die waarvoor er een voorkeur voor de waarden van deze parameters bestaat.

Er zijn diverse experimenten uitgevoerd om neutrino oscillaties te observeren. Hierbij werden neutrino's van zowel de zon, als kernreactoren alsook de neutrino's geproduceerd in atmosferische showers van kosmische straling gebruikt. Fig. 20 toont de gebieden in de neutrino parameter-ruimte opgespannen door Δm^2 en menghoek θ die worden uitgesloten of die waarvoor er een

voorkeur bestaat. De huidige consensus is dat neutrino oscillaties zijn waargenomen met een significantie van ongeveer 5σ .

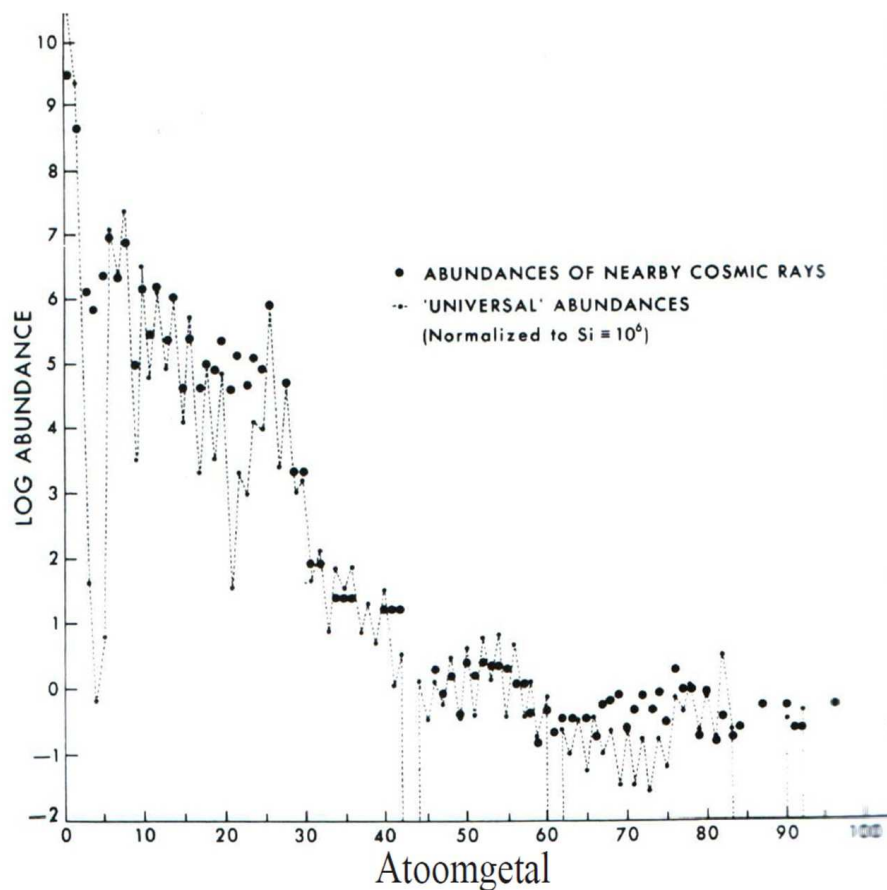
3.8 Kosmische straling

Op dit moment worden we gebombardeerd door energetische deeltjes uit de kosmos. Gemiddeld is de flux ongeveer 150 geladen deeltjes per vierkante meter en per seconde (voor een groot deel muonen met een energie van ongeveer 2 GeV). Kosmische straling werd ontdekt door de Limburgse geestelijke Theodore Wulf in het begin van de twintigste eeuw. Theodore Wulf fabriceerde uiterst nauwkeurige elektrometers. Hij nam echter waar dat hoe goed hij een elektrometer ook isoleerde, na verloop van tijd de aangebrachte lading geneutraliseerd werd. De gangbare theorie, geformuleerd door Ernest Rutherford, was dat dit veroorzaakt werd door de straling van radioactieve elementen in de aardbodem. Theodore Wulf trachtte deze bijdrage te elimineren, door zijn elektrometers te plaatsen op het hoogste gebouw ter wereld, op dat moment de 324 m hoge Eiffeltoren in Parijs. Metingen toonden aan dat het ontladen van de elektrometers met dezelfde snelheid doorging. Hierop nam Victor Hess in 1912 enkele elektrometers, vervaardigd door Theodore Wulf, mee in ballonvluchten. Het was duidelijk dat voor hoogten groter dan 1 km de ontlading toenam en zelfs verdubbelde bij 4 km. Dit was het moment van de ontdekking van kosmische straling. Sinds die tijd is de samenstelling, het energiespectrum en de ruimtelijke en tijdverdeling van deze straling uitvoerig bestudeerd. Kosmische straling vormt een belangrijke component van ons sterrenstelsel: haar energiedichtheid, ongeveer 1 eV/cm^3 , is van dezelfde orde van grootte als de energiedichtheid van het galactisch magnetisch veld en de thermische beweging van het gas.



Figuur 21: Een invallend hoog-energetisch proton raakt de top van de aardatmosfeer en produceert een zogenaamde 'cascade shower'.

Kosmische straling is bestudeerd op verschillende hoogten, met ballonnen, raketten en satellieten in de atmosfeer, maar ook in mijnen diep ondergronds. De straling die op de aardatmosfeer invalt bestaat uit kernen, elektronen, positronen, fotonen en neutrino's. Het is gebruikelijk om alleen de geladen deeltjes kosmische straling te noemen. Zo wordt X -ray en γ -ray astronomie bedreven. Het lot van een kosmisch proton, dat met een hoge energie op de aardatmosfeer invalt, wordt geschetst in figuur 21. Het proton gaat een interactie aan met een stikstof- of zuurstofkern en dat heeft een reeks van gebeurtenissen tot gevolg. In eerste instantie wordt een groot aantal hadronen geproduceerd, waarbij pionen domineren. Er kunnen echter ook antinucleonen, kaonen en hyperonen geproduceerd worden. Deze hadronen zullen op hun beurt weer wisselwerken met de stikstof- en zuurstofkernen in de atmosfeer, terwijl de onstabiele deeltjes ook via de zwakke wisselwerking kunnen vervallen. Merk op dat hierbij de verhouding van elektron tot muon (anti)neutrino's 1:2 is. De vervalproducten bestaan bijvoorbeeld uit elektronen, muonen, neutrino's en fotonen. De fotonen kunnen aanleiding geven tot paarproductie van deeltjes. De muonen zijn instabiel, maar kunnen veelal vanwege tijddilatatie toch het aardoppervlak bereiken. Samenvattend, kan een hoog-energetisch proton een 'cascade shower' initiëren, waarbij een groot aantal deeltjes, verspreid over een oppervlak van vele vierkante kilometers, het aardoppervlak kan bereiken. In tegenstelling tot een proton, zal een hoog-energetisch foton meestal slechts een klein aantal muonen produceren. In het volgende zullen we ons concentreren op de primaire kosmische straling en de compositie van de 'shower' niet verder bespreken.



Figuur 22: Samenstelling van de nucleaire component van de primaire kosmische straling. De stippellijn toont de universele referentieverdeling.

De samenstelling van de nucleaire component van de primaire kosmische straling wordt getoond

in figuur 22. De figuur toont ook de zogenaamde universele distributie van elementen zoals waargenomen in de zonneatmosfeer en in meteorieten. De data tonen een aantal opvallende feiten:

1. De elementen Li, Be en B zijn ongeveer 10^5 keer meer abundant in kosmische straling dan universeel waargenomen.
2. De verhouding $^3\text{He}/^4\text{He}$ is ongeveer 300 keer groter in kosmische straling.
3. Zeer zware kernen komen vaker in kosmische straling voor.
4. Er zijn geen antihadronen aangetroffen in de primaire kosmische straling.
5. Elektronen zijn ongeveer 1 % keer zo abundant als kernen in hetzelfde energie interval; positronen vormen ongeveer 10 % van de elektron component.

De eerste twee feiten kunnen worden verklaard door aan te nemen dat de kosmische straling enkele g/cm^2 moeten passeren tussen de bron en de top van de aardatmosfeer. In een dergelijke hoeveelheid materie produceren kernreacties de geobserveerde verdeling. Omdat de interstellaire dichtheid ongeveer $10^{-22} \text{ kg}/\text{m}^3$ is, zijn de kosmische stralen ongeveer $10^6 - 10^7$ jaar onderweg geweest. Het energiespectrum, dat is het aantal primaire deeltjes als functie van de energie, is gemeten over een enorm gebied. Voor de nucleaire component wordt dit getoond in Fig. 23, waarbij de meetgegevens zich uitstrekken over 14 decaden in energie en 32 decaden in intensiteit. De energie van het meest energetische deeltje is $4 \times 10^{21} \text{ eV}$ of ongeveer 60 J.

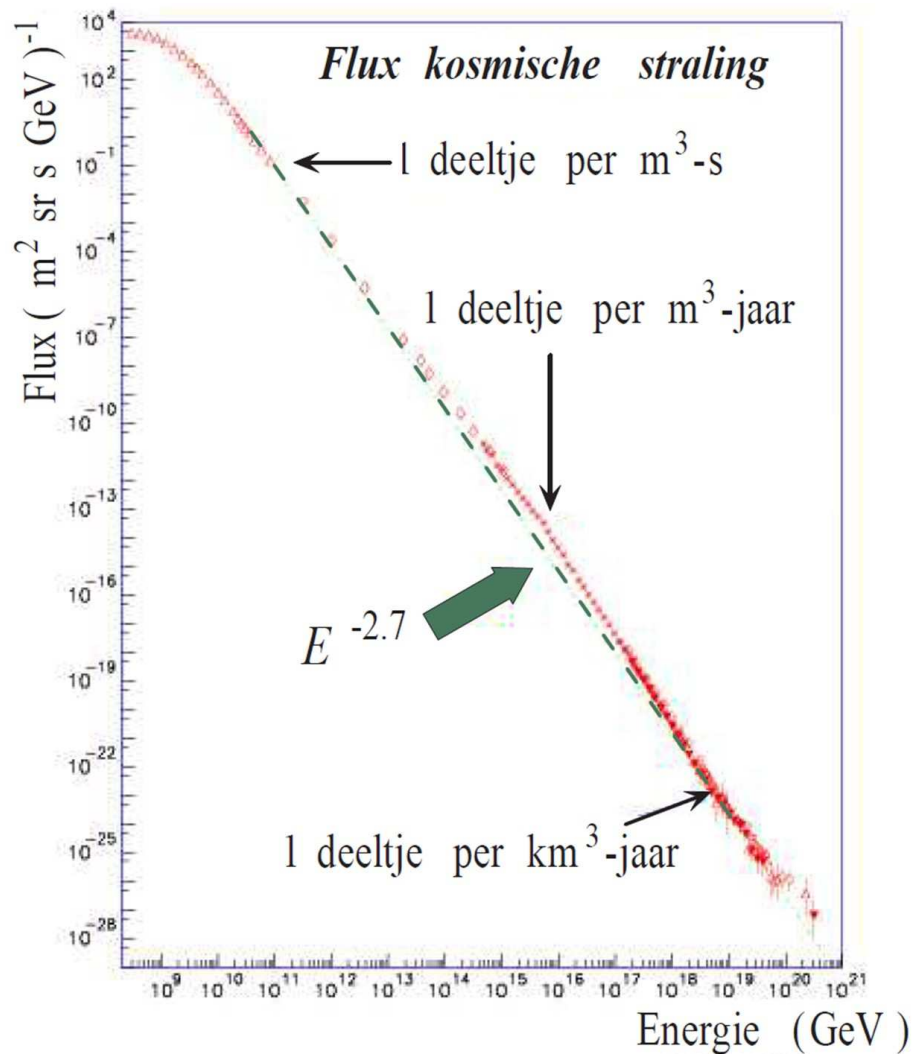
Het is duidelijk dat het energiespectrum geen thermische verdeling heeft: het is niet exponentieel, maar valt minder steil af. Een redelijke fit aan de meetgegevens, afgezien van de laagste energieën, geeft

$$I(E) \sim E^{-2,7}, \quad (85)$$

met $I(E)$ de intensiteit van de nucleaire component met energie E . Er is een ‘knie’ bij ongeveer 10^{15} eV , die men niet goed kan zien in Fig. 23, maar die zichtbaar gemaakt kan worden door het spectrum te normeren op de fit. Het resultaat wordt getoond in Fig. 24. Men denkt dat de ‘knie’ veroorzaakt wordt door propagatie effecten of door een nieuw mechanisme van versnellen van geladen kosmische deeltjes. Boven ongeveer 10^{18} eV , waar het spectrum enigszins vlak wordt, neemt men aan dat de bijbehorende deeltjes van buiten ons sterrenstelsel afkomstig zijn (extragalactische straling), omdat het galactisch magneetveld onvoldoende is om dergelijke deeltjes op te sluiten. Het spectrum van elektronen lijkt voor energieën boven de 1 GeV op dat van figuur 23, maar is steiler boven de 100 GeV vanwege elektromagnetische interacties gedurende de vlucht van deze deeltjes. Hierdoor biedt het elektronspectrum een mogelijkheid om propagatiemodellen nauwkeurig te testen.

Er zijn nog twee factoren van belang in de discussie van de energiespectra van kosmische straling. De eerste is de isotropie van de straling, de tweede de constantheid in de tijd. Metingen geven aan dat de flux van kosmische straling isotroop is voor energieën kleiner dan 10^{15} eV . Er zijn aanwijzingen dat de flux uit het centrum van ons melkwegstelsel ongeveer 1 % groter is dan gemiddeld. De tijdafhankelijkheid van de intensiteit over langere perioden is bestudeerd door te kijken naar de abundantie van nucleïden in maangesteente en meteorieten. Hieruit kan men afleiden dat de intensiteit van kosmische straling constant is geweest over een periode van 1 miljard jaar.

De hierboven beschreven experimentele aanwijzingen impliceren dat de bron van kosmische straling de volgende eigenschappen dient te bezitten: hij dient deeltjes met energieën tot bijna 10^{22} eV te produceren met een spectrum zoals gegeven door vergelijking (85). De totale energie geproduceerd in ons melkwegstelsel dient ongeveer 10^{42} J/jaar te zijn; de straling dient isotroop

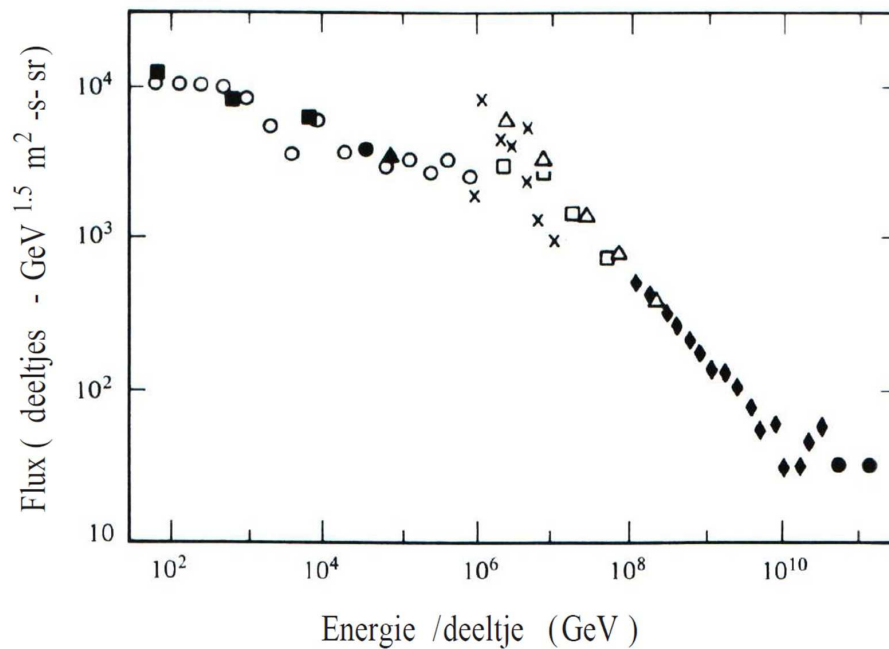


Figuur 23: Energiespectrum van de nucleaire component van de primaire kosmische straling.

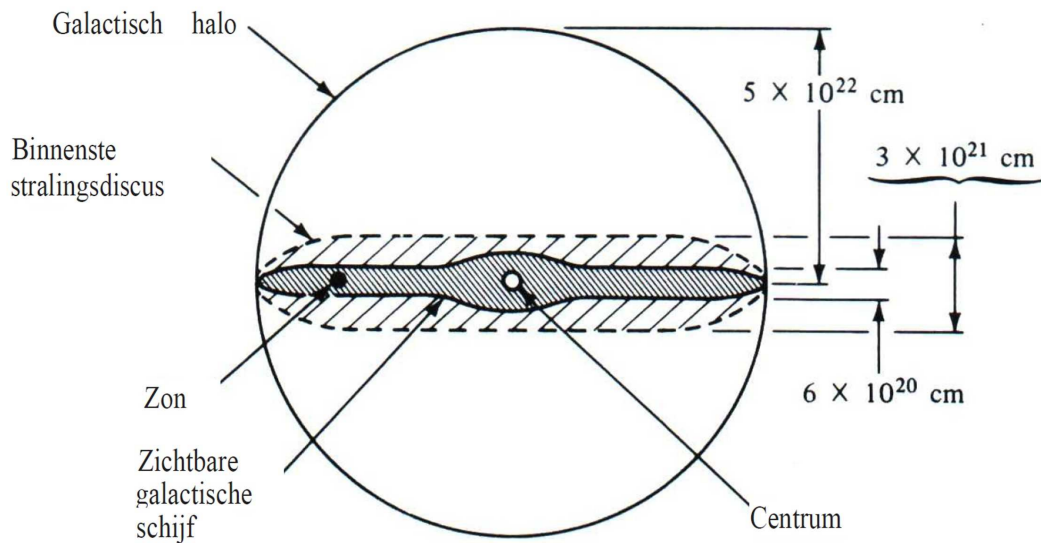
en constant te zijn over minstens 10⁹ jaar. Het primaire spectrum dient zware elementen te bevatten tot ongeveer $Z = 100$, maar met minder dan 1 % antihadronen.

Er is nog geen model geformuleerd dat in staat is alle meetgegevens uniek en bevredigend te beschrijven. De drie belangrijkste openstaande vragen zijn (1) Waar komen de kosmische stralen vandaan? (2) Hoe worden de kosmische deeltjes geproduceerd? (3) Hoe worden ze versneld? In het volgende zullen we enkele opmerkingen hierover maken.

1. We kunnen de eerste vraag nauwkeuriger formuleren door een schematische tekening te maken van een doorsnede door ons melkwegstelsel. Dit is weergegeven in figuur 25. Kosmische straling kan geproduceerd worden in de binnenste stralingsdiscus, in de galactische halo, of ze kunnen ons melkwegstelsel van buitenaf binnenvliegen. De meeste natuurkundigen zijn van mening dat kosmische straling met een energie $< 10^{18}$ eV van ons melkwegstelsel afkomstig is.
2. Men neemt aan dat supernovae en neutronensterren kosmische straling kunnen produceren. In ons melkwegstelsel komt een supernova gemiddeld eens in de 40 jaar voor, waarbij een supernova tussen de 10^{43} en $10^{45,5}$ J aan energie produceert. Een recente extragalactische



Figuur 24: Energiespectrum van hoog-energetische kosmische straling gemeten door verschillende groepen. Er is een 'knie' zichtbaar bij 10^6 GeV, terwijl er een 'enkel' te zien is bij 10^{10} GeV.



Figuur 25: Schematische weergave van een doorsnede door ons melkwegstelsel.

supernova werd in 1987 waargenomen, SN1987 genoemd, en deze supernova wordt uitvoerig bestudeerd. Studies van supernovae tonen aan dat deze de voor kosmische straling benodigde energie van 10^{42} J/jaar kunnen leveren. Het is echter moeilijk gebleken om met versnellingsmodellen gebaseerd op supernovaschokgolven rekenschap te geven van deeltjes met energieën groter dan 10^{15} eV. Recente waarneming van kosmische straling van het binaire systeem Cygnus X-3 en Hercules X-1 suggereren dat voor energieën boven de 'knie', de meeste kosmische straling afkomstig is van pulsars of binaire systemen die bestaan uit

een neutronenster en een grote ster.

3. Het is mogelijk dat bronnen kosmische straling uitzenden met een energiespectrum, zoals gegeven door vergelijking (85). Daarentegen, is het ook mogelijk dat de natuur dezelfde techniek gebruikt als we nu in versnellers toepassen: versnellen in stappen. Een mechanisme voor deeltjesversnelling in de interstellaire ruimte, botsing van deeltjes met een bewegend magnetisch veld, werd voorgesteld door Fermi³². Echter, in het algemeen is men de mening toegedaan dat de primaire bronnen van kosmische straling gevormd worden door supernovae explosies en hun restanten.

³²E. Fermi, *Phys. Rev.* **75**, 12 (1949).

