

2 Klassieke mechanica

2.1 Inleiding

In de mechanica willen we de banen van deeltjes (of meer algemeen objecten, dat wil zeggen verzamelingen van deeltjes) beschrijven. Om een dergelijke beschrijving mogelijk te maken kiezen we een willekeurig coördinatenstelsel in de drie-dimensionale (3D) ruimte. Dit stelsel bevat een oorsprong en drie veelal onderling loodrecht gekozen richtingen die we vervolgens de x , y en z -richting noemen en aangeven met respectievelijk de vectoren $\vec{i}$, $\vec{j}$ en $\vec{k}$. Verder brengen we een afstandsverdeling aan op de x , y en z -as. Tijd wordt gemeten met een universeel lopende klok en een willekeurig tijdstip wordt gekozen als $t = 0$. Vervolgens worden tijden van gebeurtenissen relatief gemeten ten opzichte van $t = 0$.

We beschrijven de positie waarop een object zich bevindt in de 3D ruimte met de plaatsvector (of positievector)

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (1)$$

Deze plaatsvector wijst van de oorsprong van het coördinatenstelsel naar de positie van het deeltje. De instantane snelheidsvector $\vec{v}$ is de mate van verandering van de plaatsvector. De grootte van deze vector noemen we de snelheid en deze vector wijst in de bewegingsrichting. Er geldt

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2)$$

Gerelateerd aan de snelheid is de impuls. Er geldt $\vec{p} = m\vec{v}$. De totale impuls van een systeem, $\sum_i \vec{p}_i$, is een behouden grootheid.

De instantane versnelling $\vec{a}$ is ook een vector en is de mate van verandering van de snelheidsvector. Er geldt

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (3)$$

2.2 Galileo Galileï en het relativiteitsprincipe

Stelt u zich voor dat u een blok ijs op een glazen plaat gooit: het glijdt en komt uiteindelijk tot stilstand. Maak de plaat nat en het blok zal een grotere weg afleggen, alvorens tot stilstand te komen. Neem een blok droogijs (dat is bevroren koolstofdioxide) dat glijdt over een luchtkussen van koolstofdioxidedamp en neem waar dat dit blok veel verder zal glijden zonder noemenswaardige vermindering van snelheid. Voor de komst van Galileo Galileï (1564 - 1642) dacht men dat er altijd een kracht nodig is om een object met constante snelheid te laten bewegen. Galileo zag in dat de snelheidsvermindering veroorzaakt wordt door wrijvingskrachten. Als men de wrijving vermindert, dan vermindert ook de snelheidsafname. Galileo redeneerde dat als men *alle* krachten van een object kan verwijderen, inclusief wrijvingskrachten, de snelheid van een lichaam nooit zal veranderen. Deze eigenschap noemde hij *inertia*.

Uit het bovenstaande volgt dat we geen verschil kunnen maken tussen een object in rust of een object dat met constante snelheid beweegt. Of een object in rust blijft of met constante snelheid beweegt hangt af van het coördinatenstelsel (referentiesysteem) waarin het object wordt beschouwd. Stelt u zich voor dat u een reiziger bent in een trein die met constante snelheid langs een rechte lijn beweegt en u plaatst een biljartbal op het tafeltje voor u (nodeloos te zeggen dat we aannemen dat deze tafel perfect horizontaal is ...). Relatief ten opzichte van de trein is de bal in rust, zolang de trein met constante snelheid ten opzichte van het perron beweegt. Relatief ten opzichte van het perron beweegt de bal met dezelfde snelheid als de trein.

Vervolgens begint de machinist met afremmen omdat de trein het volgende station nadert. De trein versnelt ten opzichte van het perron (het is een negatieve versnelling, een vertraging) en

u zult zien dat de bal op uw tafeltje naar voren begint te rollen. De bal versnelt ten opzichte van de trein ondanks het feit dat er geen kracht op werkt! Een referentiesysteem dat versnelt ten opzichte van een inertiaal referentiesysteem is geen inertiaal referentiesysteem. Als er geen krachten werken op een object (in ons geval de biljartbal), dan is elk referentiesysteem ten opzichte waarvan de versnelling van het object gelijk is aan nul een *inertiaal referentiesysteem*. Zowel de trein, zolang die met constante snelheid beweegt, als het perron zijn, in goede benadering, inertiaalsystemen².

Toen Galileo Galilei leefde was er om voor de hand liggende redenen, grote belangstelling voor de banen van kanonskogels. Galileo bestudeerde dergelijke banen en ontdekte dat

- de mate waarin een voorwerp valt (versnelling) niet afhangt van de massa van het object, en dat
- de mate waarin een voorwerp valt, de versnelling van een voorwerp tijdens de val, constant is, dus onafhankelijk van de tijd. We noemen deze constante de gravitatieversnelling³ en deze bedraagt $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Een grote en een kleine kanonskogel vallen derhalve op dezelfde manier en zelfs ook een kanonskogel en een veertje mits men er voor zorgt dat luchtweerstand geen rol speelt. Gewicht heeft er niets mee te maken⁴ en we kunnen dit bewijzen door experimenten uit te voeren⁵ ⁶. Dit is de eerste stap richting het *equivalentieprincipe* dat stelt dat gravitatie niet onderscheidbaar is van uniforme versnelling.

Wij beschouwen een vrij-vallend voorwerp in één dimensie: de verticale (y) richting. De waarde y neemt toe met afnemende afstand tot het middelpunt van de aarde. Als we een voorwerp laten vallen dan is de versnelling constant en er geldt $a = g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Omdat $a = \frac{dv}{dt}$ vinden we nu de snelheid door integratie. Er geldt $v = \int_0^t a dt = v_0 + gt$, waarbij v_0 de initiële snelheid op $t = 0$ is. Verder neemt de snelheid lineair in de tijd toe. De afgelegde weg d vinden we door nogmaals te integreren. Er geldt $d(t) = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + gt) dt = d_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$, waarbij d_0 de afstand is die het voorwerp reeds afgelegd had vóór tijdstip $t = 0$. We zien dat de afgelegde weg kwadratisch toeneemt in de tijd.

Vervolgens beschouwen we de beweging van een voorwerp in twee dimensies. Hiertoe analyseren we de beweging van een kanonskogel die afgevuurd wordt op tijdstip $t = 0$ met een beginsnelheid u onder een hoek θ met de x -as. De situatie is geschetst in Fig. 1. Voor de initiële snelheid geldt $u_x = u \cos \theta$ en $u_y = u \sin \theta$. De snelheid in de verticale richting wordt gegeven door

$$v_y = u_y - gt \quad \rightarrow \quad y = u_y t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (4)$$

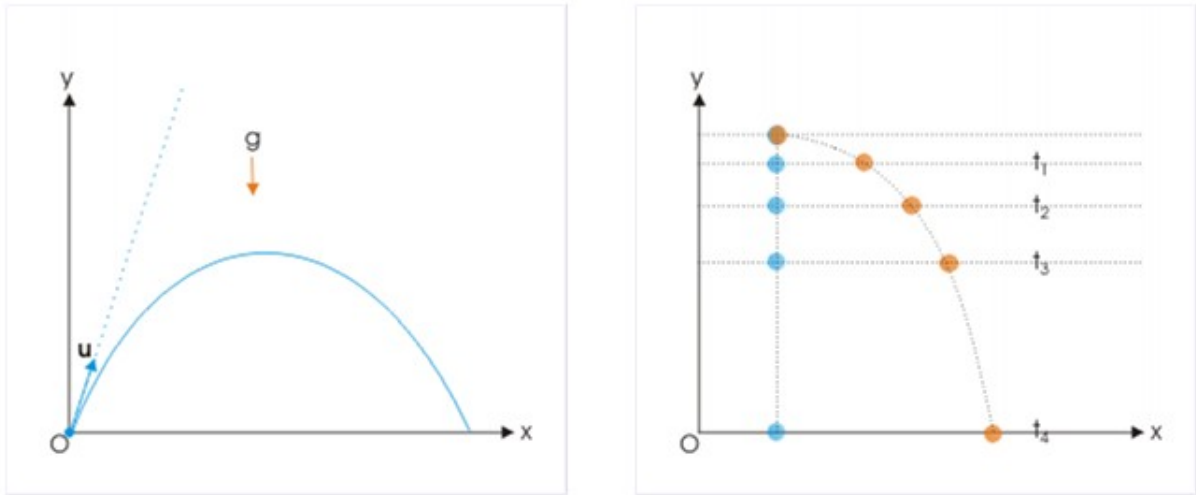
²Het referentiesysteem dat verbonden is met het oppervlak van de aarde is niet helemaal een inertiaal referentiesysteem, omdat er een kleine versnelling is van het aardoppervlak ten gevolge van de rotatie van de aarde, alsook een versnelling ten gevolge van de beweging rond de zon. Deze versnellingen zijn kleiner dan $0,01 \text{ m/s}^2$ en kunnen vaak worden verwaarloosd.

³Dit is geen natuurconstante, maar de waarde volgt uit Newtons gravitatiewet. In Nederland varieert de valversnelling op het oppervlak tussen $9,8110$ en $9,8135 \text{ m/s}^2$.

⁴Dit kan ook begrepen worden uit een gedachtenexperiment toegeschreven aan Galileo. Stel dat zware voorwerpen sneller vallen dan lichte voorwerpen. We binden vervolgens een lichte kogel vast aan een zware en gooien het stel naar beneden van de toren van Pisa. Nu zal de lichte kogel de zware afremmen en de combinatie valt langzamer dan de zware kogel alleen zou vallen. De combinatie is echter zwaarder dan enkel de zware kogel en zou dus sneller moeten vallen. Ergo, contradictio in terminis.

⁵Simon Stevin heeft reeds in 1586 zijn experiment gepubliceerd waarin hij twee loden ballen, een bal tien keer zwaarder dan de andere, van de klokkentoren van de oude kerk in Delft heeft laten vallen over een afstand van ongeveer 10 m. Hierbij werd geen verschil waargenomen in tegenstelling tot de bewering van aanhangers van Aristoteles. Zijn publicatie was drie jaar vóór Galileo's eerste behandeling van gravitatie en 18 jaar eerder dan Galileo's theoretisch werk over vallende lichamen.

⁶Een dergelijk experiment is door astronaut David Scott uitgevoerd op de maan met een hamer en veer tijdens de Apollo 15 missie.



Figuur 1: Baan van een kanonskogel die afgevuurd wordt op tijdstip $t = 0$ met een beginsnelheid u onder een hoek θ met de x -as. De rechterfiguur laat zien dat de verticale beweging onafhankelijk van de horizontale beweging beschouwd kan worden.

De kanonskogel raakt de grond als $y = 0$ en oplossen van bovenstaande vergelijking levert een vluchttijd $T = \frac{2u_y}{g}$. In de horizontale richting werkt er geen versnelling en wordt de x -positie gegeven door

$$x = u_x t. \quad (5)$$

We kunnen vergelijking (4) en (5) samennemen en hieruit t elimineren. We vinden dan de baan van de kogel,

$$y = \frac{u_y}{u_x} x - \frac{g}{2u_x^2} x^2, \quad (6)$$

en zien dat dit een parabool is.

Het idee dat we de beweging in horizontale en verticale richting mogen ontkoppelen en zelfstandig behandelen is van Galileo. Het is een eerste versie van het *relativiteitsprincipe*. Toen Nicolas Copernicus (1473 - 1543) stelde dat de aarde en andere planeten rond de zon bewegen, was het moeilijk te begrijpen waarom we deze beweging niet voelen. Waarom vliegen we niet van de aarde af, of blijft de atmosfeer achter als de aarde met grote snelheid rond de zon raast? Galileo gebruikte de onafhankelijkheid van verschillende bewegingen om dit te verklaren. Net zoals voorwerpen die binnen een trein verticaal vallen en het niet uitmaakt of de trein stilstaat of met constante snelheid beweegt, zo merken wij ook niet dat de aarde met grote snelheid door het universum vliegt. Tegenwoordig stellen we dat *alle* natuurwetten hetzelfde zijn voor een waarnemer die met uniforme snelheid in een rechte lijn beweegt als die voor een waarnemer in rust. We noemen dit het *relativiteitsprincipe*.

2.3 De wetten van Newton

In moderne bewoordingen kunnen de wetten van Newton als volgt geformuleerd worden:

- *Eerste wet:* een voorwerp blijft in rust als er geen externe kracht op werkt. Een voorwerp in beweging heeft een constante snelheid als er geen externe kracht op werkt.
- *Tweede wet:* de versnelling van een voorwerp is in de richting van de netto externe kracht die erop werkt. De versnelling is evenredig met de externe kracht overeenkomstig $\vec{F} = m\vec{a}$,

met m de massa van het voorwerp. Merk op dat het verband tussen kracht en impuls gegeven wordt door $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. De netto kracht is de vectorsom van alle krachten die op het voorwerp werken, $\vec{F}_{\text{netto}} = \sum \vec{F} = m\vec{a}$.

- *Derde wet:* krachten komen altijd voor in paren met gelijke grootte en tegengestelde richting. Als een voorwerp A een kracht $\vec{F}_{A,B}$ uitoefent op voorwerp B , dan wordt er een gelijke maar tegengesteld gerichte kracht $\vec{F}_{B,A}$ door voorwerp B op A uitgeoefend. Er geldt $\vec{F}_{B,A} = -\vec{F}_{A,B}$.

De eerste wet is duidelijk in overeenstemming met de ideeën van Galileo Galileï. Het isoleert inertiaalsystemen als de niet-versnelde systemen. Beschouw een referentiesysteem $\mathcal{O}$ met drie ruimtelijke coördinaten x , y , en z en tijdcoördinaat t , en een ander systeem $\mathcal{O}'$ met drie ruimtelijke coördinaten x' , y' , en z' en tijdcoördinaat t' . Systeem $\mathcal{O}'$ beweegt in de x richting met uniforme snelheid v ten opzichte van systeem $\mathcal{O}$.

Gezond verstand suggereert dat de coördinaten met elkaar in verband staan volgens

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{7}$$

Dit is de Galileotransformatie. Als een deeltje in $\mathcal{O}$ een snelheid $\mathbf{u}$ heeft met componenten (u_1, u_2, u_3) , dan is die snelheid in $\mathcal{O}'$ gelijk aan

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_1 - v, \\ u'_2 &= u_2, \\ u'_3 &= u_3, \end{aligned} \tag{8}$$

of ook $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Merk op dat we hierbij de volgende notatie gebruiken

$$\begin{aligned} u'_1 &= \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx}{dt}, \\ u'_2 &= \frac{dx_2}{dt} = \frac{dy}{dt}, \\ u'_3 &= \frac{dx_3}{dt} = \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \tag{9}$$

Als de coördinatenassen en ook de oorsprongen van de systemen verschillen, dan geldt

$$\mathbf{X}' = \mathcal{R}\mathbf{X} - \mathbf{v}t - \mathbf{d}, \tag{10}$$

waarbij $\mathbf{X}$ de componenten (x, y, z) heeft. Hierbij is $\mathcal{R}$ de rotatiematrix die $\mathcal{O}$ en $\mathcal{O}'$ in elkaar kan overbrengen, $\mathbf{v}$ is de relatieve snelheid van $\mathcal{O}$ ten opzichte van $\mathcal{O}'$ en $\mathbf{d}$ is de verplaatsing van de oorsprong van $\mathcal{O}'$.

Omdat de transformatie lineair is (een constante snelheid in $\mathcal{O}$ leidt tot een constante snelheid in $\mathcal{O}'$), geldt dat $\mathcal{O}'$ inertiaal is, als $\mathcal{O}$ dat ook is. Er bestaat dus een oneindige verzameling van inertiaalsystemen, die elk uniform ten opzichte van elkaar bewegen.

Newtons wetten gelden in elk inertiaalsysteem, omdat

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{u}'}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad (11)$$

zodat $\mathbf{F}$ invariant is. We hebben hiermee *Newtoniaanse (Galileo) relativiteit*: de wetten van mechanica zijn invariant onder de transformatie gegeven door vergelijking (10). Ze staan geen bepaling van de absolute snelheid toe. Men kan echter wel de absolute versnelling meten. Newton verklaarde de inertiaalsystemen in termen van een absolute ruimte die geïdentificeerd kan worden met het zwaartepunt van het zonnestelsel of een referentiesysteem van "vaste sterren". Dat is echter niet erg bevredigend.

De eerste wet van Newton leidt tot het relativiteitsprincipe en het feit dat beweging in verschillende richtingen onafhankelijk behandeld kan worden. Ook de tweede wet is geïnspireerd door Galileo en om dit duidelijk te maken dienen we de begrippen massa en gewicht nader te beschouwen. Als we een voorwerp willen versnellen, dan dienen we er een kracht op uit te oefenen. De versnelling heeft dan de waarde $a = \frac{F}{m}$. De massa m kan gezien worden als de weerstand, inertia, tegen versnelling. Massa heeft als eenheid kilogram [kg]. Hoe groter de massa, hoe moeilijker het is om het voorwerp in beweging te brengen. Het *gewicht* van een voorwerp is de gravitatiekracht die erop werkt. Het is een kracht die, voor een object met massa 1 kg, aan het aardoppervlak gelijk is aan $F_g = mg = 9,8 \text{ N}$ met als eenheid Newton [N]. Als we de tweede wet van Newton combineren met Galileo's ontdekking dat voorwerpen met verschillende massa's op dezelfde manier vernellen onder gravitatie, dan blijkt dat het gewicht van een voorwerp inderdaad evenredig moet zijn met haar massa.

Dit is als volgt in te zien: stel we tillen een zwaar voorwerp op en houden het vast. Wat we *voelen* als gewicht is in werkelijkheid de sensatie van het uitoefenen van een naar boven gerichte kracht om het voorwerp hoog te houden tegen de werking van de zwaartekracht in. Uit de eerste wet volgt dat de totale kracht op het voorwerp nul is en dat onze opwaartse kracht precies de zwaartekracht op het voorwerp opheft. Het gewicht van het voorwerp is dus gelijk aan de zwaartekracht die erop werkt. Als we het voorwerp loslaten, dan is de zwaartekracht erop nog steeds gelijk, terwijl onze opwaartse kracht verdwenen is: het voorwerp versnelt naar beneden, het valt. Volgens Galileo is de versnelling echter niet afhankelijk van het gewicht. De enige manier waarop we de kracht F (het gewicht) kunnen veranderen zonder de versnelling a te veranderen, is door het gewicht F evenredig te maken met m , dus $\vec{F}_{\text{gewicht}} = m\vec{g}$. In dat geval geldt namelijk $\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{gewicht}}}{m} = \frac{m\vec{g}}{m} = \vec{g}$ en voorwerpen vallen onafhankelijk van hun gewicht of massa, de versnelling is gelijk voor alle voorwerpen en bedraagt $9,8 \text{ m/s}^2$. We noemen de massa m die als evenredigheidsconstante optreedt in de uitdrukking voor gewicht $\vec{F} = m\vec{g} = m_{\text{zware}}\vec{g}$ ook wel de *zware* massa, terwijl de massa die optreedt in de tweede wet $\vec{F} = m\vec{a} = m_{\text{trage}}\vec{a}$ de *trage* massa. Galileo's equivalentieprincipe stelt dat zware massa en trage massa gelijk zijn en we schrijven $m_{\text{zware}} = m_{\text{trage}} = m$. We kunnen Galileo's equivalentieprincipe nu als volgt formuleren: de massa van een lichaam is evenredig met haar gewicht.

Newton liet zien dat dezelfde gravitatie die ervoor zorgt dat appels naar de aarde vallen, er ook voor zorgt dat de maan bij de aarde blijft en dat de aarde rond de zon beweegt. De relatief eenvoudige wiskundige uitdrukking $\vec{F} = m\vec{a}$ was consistent met alle bekende meetgegevens van planeetbanen. De grootte van de kracht tussen twee objecten met massa M_1 en M_2 gescheiden door een afstand r bedraagt

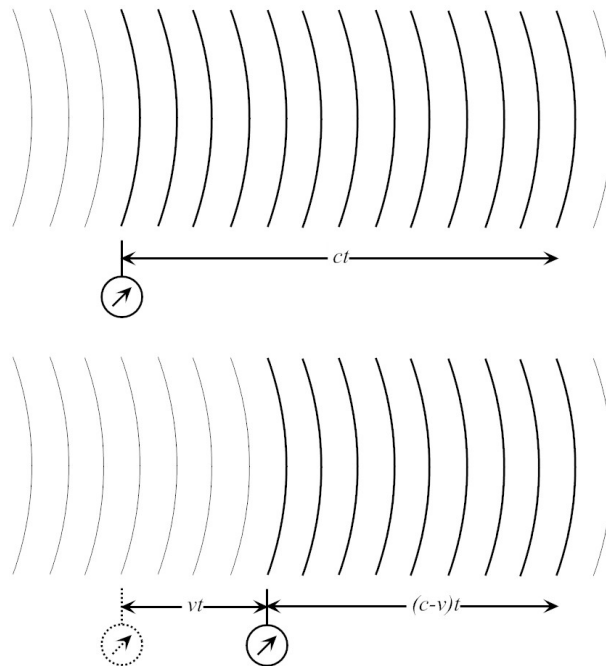
$$F_{\text{grav}} = \frac{GM_1M_2}{r^2}, \quad (12)$$

met G een evenredigheidsconstante die Newtons gravitatieconstante genoemd wordt met als waarde $G = 6,6720 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}$. De kracht is altijd attractief en in Newtons theorie is de werking instantaan.

2.4 Dopplereffect en gravitationele roodverschuiving

Stel dat Galileo samen met twee kanonskogels van de toren van Pisa was gevallen. Op weg naar beneden zouden de twee kogels eenvoudig in zijn nabijheid zijn gebleven. Ten opzichte van hem zouden de kogels zich gedragen alsof er helemaal geen krachten op werken. Als hij nu één van de kogels een zetje zou geven in een willekeurige richting, dan zou deze kogel ten opzichte van hem met uniforme snelheid langs een lijn in die richting bewegen. Zowel Galileo als de kogel versnellen ten opzichte van de aarde, maar als we over hun relatieve beweging spreken, dan kan deze gemeenschappelijke versnelling afgetrokken worden en houden we alleen een relatieve beweging over. Dit gebeurt enkel omdat voor gravitatie de versnelling van elk object in een gravitatieveld gelijk is. We kunnen het equivalentieprincipe nu ook als volgt formuleren: in een gravitatieveld gedragen alle voorwerpen zich zodanig dat ze volkomen vrij lijken te zijn van gravitatiekrachten als ze bekeken worden door vrij-vallende waarnemers. Voor een vrij-vallende waarnemer zijn de natuurwetten hetzelfde als die in de ruimte, ver van alle massieve objecten en hun gravitatievelden.

Bovenstaande formulering van het equivalentieprincipe maakt geen gebruik van begrippen als massa en versnelling en is bijzonder nuttig in het beschrijven van het effect van gravitatie op licht⁷. We kunnen het effect van gravitatie op licht nu vinden door te eisen dat het zich dient te gedragen alsof er geen gravitatie is als het wordt beschouwd door een vrij-vallende waarnemer. Dit betekent in het bijzonder dat het voor die waarnemer een rechte lijn dient te volgen zonder verandering in frequentie.



Figuur 2: Lichtgolven lopen van links naar rechts. Een detector meet het aantal golffronten dat passeert. De frequentie is het aantal golffronten dat per tijdseenheid gemeten wordt en hangt af van de snelheid van de detector.

In het algemeen wordt de frequentie van licht beïnvloed door de beweging van een waarnemer.

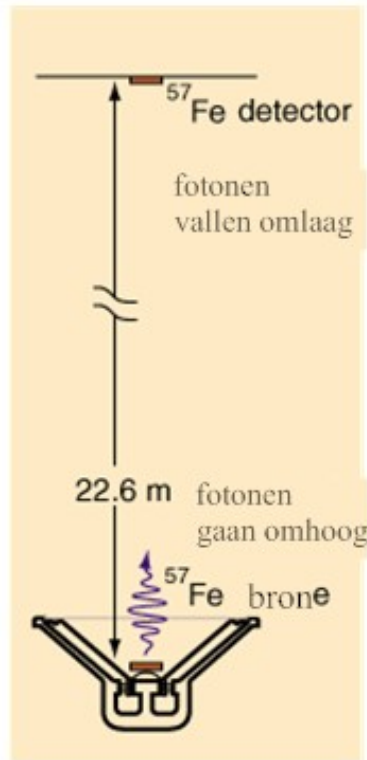
⁷We weten dat licht een bijzondere plaats inneemt in Einsteins relativiteitstheorie: de snelheid van licht is een universele constante in elk referentiesysteem, terwijl licht een inertiaal massa heeft die gelijk is aan nul. We kunnen daarom niet eenvoudig de wet $\vec{F} = m\vec{a}$ gebruiken om de beweging van licht te beschrijven.

Dit wordt de Dopplerverschuiving⁸ genoemd. We beschouwen licht als een golfverschijnsel met golflengte λ en frequentie f . Hiervoor geldt de relatie $\lambda = \frac{c}{f} = cT$ met c de lichtsnelheid en T de periode. De bovenste afbeelding in Fig. 2 toont de situatie voor een stilstaande detector. Alle golffronten in het interval ct zijn de detector gepasseerd (vetgedrukte fronten). Als dit N golffronten zijn, dan is de frequentie $f = \frac{N}{t}$. In het onderste plaatje zijn slechts N' golffronten gedurende tijd t de detector gepasseerd (vetgedrukte fronten), omdat de detector naar rechts beweegt. De verhouding $\frac{N'}{N}$ is hetzelfde als de verhouding van de lengten, $\frac{(c-v)t}{ct} = 1 - \frac{v}{c}$. Hieruit volgt dat de meebewegende detector een lagere frequentie meet,

$$f' = \frac{N'}{t} = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \frac{N}{t} = \left(1 - \frac{v}{c}\right) f. \quad (13)$$

Als de frequentie verandert, dan verandert de kleur van het licht. Als de lichtbron van ons af beweegt spreken we van een roodverschuiving, terwijl we over een blauwverschuiving spreken als de bron naar ons toe beweegt.

We zijn nu in staat om de gravitationele effecten op licht af te leiden door te eisen dat licht zich dient te gedragen alsof er geen gravitatie is wanneer het wordt waargenomen door een vrijvallende waarnemer⁹. Hiertoe beschouwen we het Pound-Rebka-Snider experiment dat begin



Figuur 3: Schematische weergave van het Pound-Rebka-Snider experiment voor de meting van de gravitationele roodverschuiving van fotonen door de aarde.

jaren 60 van de vorige eeuw is uitgevoerd op het Jefferson Physical Laboratory van Harvard. Het

⁸In het geval van geluidsgolven zorgt het Dopplereffect voor een verschuiving naar hogere frequentie van de toon van de sirene van een naderende ziekenwagen, terwijl de toon naar lagere frequenties verschuift als de ziekenwagen van ons af beweegt.

⁹Evenzo voelen wij de beweging van de aarde rond de zon niet, omdat de aarde in vrije val is en er dus niets te voelen valt.

experiment is weergegeven in Fig. 3. In de figuur schijnt men (we noemen deze persoon W1) een lichtbundel met frequentie f_{bron} vanaf de aarde naar boven. Een waarnemer (W2) staat op een toren met hoogte h direct boven de bron en meet de frequentie van dit licht. De ontvanger (W2) noemt deze frequentie f_{top} . We gebruiken het equivalentieprincipe om de relatie tussen f_{bron} en f_{top} te bepalen¹⁰ en dat betekent het introduceren van nog een andere waarnemer (W3) die vrij-vallend is. Deze waarnemer (W3) valt van de top van de toren naar beneden op het moment dat het licht de bron verlaat. Een dergelijke vrij-vallende waarnemer (W3) ziet het licht alsof er geen gravitatie werkzaam is. Het licht beweegt voor hem (W3) in een rechte lijn en zonder frequentieverschuiving: op het moment dat hij begint met vallen, meet hij (W3) dezelfde frequentie als de waarnemer (W1) bij de bron. Volgens het equivalentieprincipe meet hij (W3) dezelfde frequentie even later als het licht de top bereikt. Het duurt een tijd $t = \frac{h}{c}$ voordat het licht de top bereikt, en dan heeft deze waarnemer (W3) een instantane snelheid $v = gt = \frac{gh}{c}$. Ten opzichte van hem (W3) beweegt de ontvanger (W2) dan met snelheid $-v$ van hem (W3) af, hetgeen een Dopplerverschuiving met zich mee brengt. Het equivalentieprincipe en vergelijking (13) geeft ons nu direct

$$f_{\text{top}} = f_{\text{bron}} \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right). \quad (14)$$

Voor de 22,6 m hoge toren van het Pound-Rebka-Snider experiment is het effect klein, $2,46 \times 10^{-15}$, maar het werd desalnietemin gemeten met een precisie van 1 %. Het effect is beduidend groter voor de satellieten van het Global Positioning System (GPS) die op ongeveer 20.200 km hoogte vliegen. Teneinde de navigatie nauwkeurigheid van ongeveer 15 m te bereiken dienen de GPS satellieten hun tijdsignalen te coördineren met een precisie van ongeveer 50 ns ($= \frac{15 \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}}$). Deze precisie is ongeveer 1000 maal groter dan de gravitationele roodverschuiving (ongeveer 40 μs per dag). Zonder correcties op basis van de algemene relativiteitstheorie zouden GPS systemen een afwijking van kilometers per dag vertonen.

Het is belangrijk te begrijpen dat de roodverschuiving een eigenschap is van zowel het licht als de waarnemers. Dus licht op welke hoogte van de aarde dan ook heeft geen unieke frequentie. Als de frequentie gemeten wordt door waarnemers die stilstaan ten opzichte van de grond, dan meten we een roodverschuiving. Als de frequentie gemeten wordt door vrijvallende waarnemers, dan is er geen verschuiving.

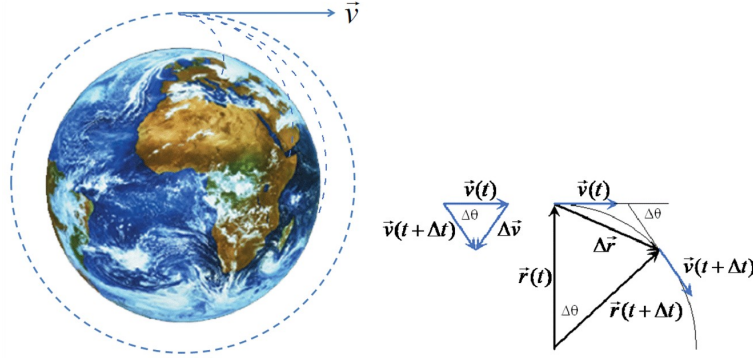
De gravitationele roodverschuiving¹¹ heeft directe consequenties voor het begrip tijd. Stel dat we twee klokken vervaardigen die gebaseerd zijn op het tellen van golffronten van een lichtbron. Elk golffront dat de detector passeert en geregistreerd wordt zien we als een tik van de klok. De gravitationele roodverschuiving heeft dan als consequentie dat voor een waarnemer in de toren zijn klok sneller tikt dan de klok die op aarde staat. Als hij na een dag met zijn klok naar beneden gaat en de klokken vergelijkt, ziet hij dat zijn klok met ongeveer 1 ns voorloopt, hetgeen tegenwoordig eenvoudig te meten is. Overigens geldt deze conclusie voor al zijn klokken, biologisch of fysisch.

¹⁰Relatie (14) kan ook gevonden worden door twee experimentatoren in een ruimteschip te beschouwen, dat reist met constante versnelling g . De afstand tussen de twee waarnemers is h in de richting van de versnelling. Laten we aannemen dat het ruimteschip in rust is ten opzichte van een bepaald inertiaalsysteem op het moment dat de waarnemer beneden (bron) een foton uitzendt. Het duurt tijd $t = h/c$ voordat dit foton bij de ontvanger (top waarnemer) aankomt. Op dat moment heeft de ontvanger een snelheid $v = gt = gh/c$ en neemt hij het foton waar met een Dopplerverschuiving, precies volgens vergelijking (14). Het equivalentieprincipe eist dat, indien deze roodverschuiving wordt waargenomen in een experiment dat wordt uitgevoerd onder condities van uniforme versnelling in afwezigheid van een gravitatieveld, dezelfde roodverschuiving waargenomen dient te worden in een experiment onder condities van een uniform gravitatieveld, maar zonder versnelling.

¹¹Waarnemen van een gravitationele roodverschuiving heeft ook als directe consequentie dat ruimtetijd gekromd dient te zijn.

2.5 Satellieten en equivalentieprincipe

In het volgende zullen we enkele consequenties van de wetten van Newton bestuderen. We gebruiken het equivalentieprincipe om te verklaren hoe satellieten in hun baan blijven. De



Figuur 4: Als we een voorwerp met snelheid v horizontaal lanceren, dan zal het bij voldoende snelheid een cirkelbaan rond de aarde beschrijven.

positie en snelheidsvectoren van een deeltje dat een cirkelbaan beschrijft zijn gegeven in Fig. 4. De hoek $\Delta\theta$ tussen $\vec{v}(t)$ en $\vec{v}(t + \Delta t)$ is hetzelfde als tussen $\vec{r}(t)$ en $\vec{r}(t + \Delta t)$, omdat de plaats- en snelheidsvectoren over gelijke hoeken moeten roteren om onderling loodrecht te blijven. Een gelijkbenige driehoek wordt gevormd door de twee snelheidsvectoren en $\Delta\vec{v}$. Een tweede gelijkbenige driehoek wordt gevormd door de twee plaatsvectoren en $\Delta\vec{r}$. Om de richting van de versnellingsvector te vinden, beschouwen we de driehoek gevormd door de twee snelheidsvectoren en $\Delta\vec{v}$. De som van de hoeken van elke driehoek is 180° en de basishoeken van elke gelijkbenige driehoek zijn gelijk. In de limiet dat Δt naar nul gaat, gaat $\Delta\theta$ ook naar nul, en in deze limiet gaan beide basishoeken naar 90° . Dit betekent dat $\Delta\vec{v}$ loodrecht op de snelheid staat. Als we $\Delta\vec{v}$ tekenen vanaf de positie van het deeltje dan wijst het in de centripetale richting, dus naar het middelpunt van de aarde.

De twee driehoeken zijn congruent en dus geldt $\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r}$ (lengten van corresponderende zijden zijn evenredig). Delen door Δt en herschikken levert

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{r} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}. \quad (15)$$

In de limiet dat Δt nul nadert, gaat de term $\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$ over in de versnelling a_c , de grootte van de instantane centripetale versnelling, terwijl de term $\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$ de snelheid v benadert, de grootte van de instantane snelheid. Met deze substituties vinden we voor de centripetale versnelling, a_c

$$a_c = \frac{v^2}{r}. \quad (16)$$

Een deeltje dat met *veranderende snelheid* in een cirkel beweegt heeft ook een versnellingscomponent a_t tangenciaal aan de cirkel gegeven door $a_t = \frac{dv}{dt}$.

In het volgende beschouwen we een satelliet die met constante snelheid in een cirkelbaan rond het centrum van de aarde over het oppervlak beweegt. De versnelling is nu gelijk aan $a = \frac{v^2}{r} = g = 9,81 \text{ m/s}^2$ en we vinden voor de snelheid met $r = 6370 \text{ km}$ de waarde $v = \sqrt{rg} = \sqrt{(6370 \text{ km})(9,81 \text{ m/s}^2)} = 7,91 \text{ km/s}$. De omlooptijd bedraagt $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(6370 \text{ km})}{7,91 \text{ km/s}} = 5060 \text{ s} = 84,3 \text{ minuten}$.

Op grotere hoogte is de omlooptijd langer en bedraagt bijvoorbeeld 91 minuten op 300 km hoogte waar de Space Shuttle opereert. Astronauten in de Space Shuttle zijn gewichteloos. Dit komt niet omdat op 300 km van het aardoppervlak het gravitatieveld van de aarde verwaarloosbaar is (dat is eenvoudig uit te rekenen met vergelijking (12)). Het is een perfecte demonstratie van het equivalentieprincipe: de Space Shuttle is in vrije val rond de aarde en dat veroorzaakt dat voorwerpen in de Space Shuttle zich gedragen alsof gravitatie afwezig is.

We willen het bovenstaande verder uitdiepen met het volgende voorbeeld. Stel we stappen in een stilstaande lift. De sensatie van gewicht komt doordat de vloer van de lift een kracht op ons uitoefent tegengesteld gericht aan de gravitatiekracht van de aarde. Als we de liftkabel doorknippen, dan valt de kracht van de vloer weg. We raken in vrije val, en dan verdwijnt de sensatie van gewicht volledig. De vloer van de lift, niet de gravitatiekracht, is verantwoordelijk voor ons gewicht. We kunnen dit argument omkeren: als we de lift naar boven versnellen, zullen we ons zwaarder gaan voelen. Als we in een geblindeerde lift zitten en we voelen ons gewichteloos, dan kunnen we niet onderscheiden of we in vrije val zijn op aarde of dat we ons in de ruimte ver weg van graviterende objecten bevinden. Evenzo, als we wél gewicht ervaren, weten we niet of dat komt doordat we in een stilstaande lift op aarde staan, of dat we in de verre ruimte naar boven worden versneld. Als gravitatie overal uniform zou zijn, kunnen we het niet onderscheiden van versnelling. Dit is de betekenis van het woord *equivalentie* in het *equivalentieprincipe*.

2.6 Zwarte gaten en afbuiging van licht

We hebben reeds in vergelijking (12) gezien dat de gravitatiekracht uitgeoefend door deeltje 1 op deeltje 2 gegeven wordt door

$$\vec{F}_{1,2} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{1,2}^2}\hat{r}_{1,2}, \quad (17)$$

waarbij $\hat{r}_{1,2} = \frac{\vec{r}_{1,2}}{|\vec{r}_{1,2}|}$ een eenheidsvector is die wijst van deeltje 1 naar deeltje 2. We hebben bovenstaande uitdrukking geschreven als vectorrelatie; het minteken brengt de richting in rekening.

We beschouwen de situatie met $m_1 = m$ de massa van een deeltje en $m_2 = M$ de massa van een massief object, bijvoorbeeld de aarde. We stellen ons voor dat het deeltje in een cirkelbaan rond de aarde beweegt. Er geldt $a = F/m$ en dit betekent dat $\frac{GM}{r^2}$ de versnelling van het deeltje is. Deze versnelling is centripetaal en we vinden dan

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} \quad \rightarrow \quad v = v_{\text{cirkelbaan}} = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (18)$$

voor de snelheid van een deeltje dat gravitationeel gebonden is in een cirkelvormige baan met straal r rond een massief object met massa M .

Als we een deeltje van de aarde (met straal R) naar het oneindige brengen, dient er arbeid verricht te worden. Deze arbeid is gelijk aan de potentiële energie V van het deeltje (als we immers het deeltje vanuit het oneindige op de aarde laten vallen verkrijgt het kinetische energie en kan het weer arbeid verrichten). De hoeveelheid potentiële energie wordt gegeven door

$$V(r) = \int_R^\infty \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_R^\infty F\hat{r} \cdot d\vec{s} = \int_R^{r=\infty} \left(-\frac{GmM}{r^2}\right) dr = -\frac{GmM}{R}. \quad (19)$$

Omdat enkel veranderingen in potentiële energie relevant zijn, kunnen we altijd een constante V_0 erbij optellen. We kiezen de potentiële energie gelijk aan nul, $V = 0$, als het deeltje oneindig ver van de aarde staat. In dit geval geldt dan $V_0 = 0$. We merken op dat vergelijkingen (17) en (19) toestaan om de gravitationele potentiaal $\Phi(\vec{x})$ in te voeren. Er geldt

$$\vec{F}_{\text{grav}} = m\vec{g} = -m\nabla\Phi(\vec{x}) \quad \text{en ook} \quad \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\nabla\Phi(\vec{x}), \quad (20)$$

waarbij $\vec{F}_{\text{grav}}$ de kracht is op een deeltje met massa m en op positie $\vec{x}$ ten gevolge van de gravitationele potentiaal Φ geproduceerd door een ander deeltje (met bijvoorbeeld massa M). Voor een enkel deeltje met massa M gaf vergelijking (19) $\Phi(\vec{x}) = -GM/x$, en voor een continue massadichtheid $\rho(\vec{x})$ geldt

$$\Phi(\vec{x}) = - \int \frac{G\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'. \quad (21)$$

Het Newtoniaanse gravitatieveld $\vec{g}$ wordt dan gedefinieerd door

$$\vec{g}(\vec{x}) \equiv -\nabla\Phi(\vec{x}), \quad (22)$$

waardoor we vinden¹²

$$\nabla \cdot \vec{g}(\vec{x}) = -4\pi G\rho(\vec{x}) \rightarrow \nabla^2\Phi(\vec{x}) = 4\pi G\rho(\vec{x}). \quad (23)$$

Hierin bedoelen we met ∇^2 de Laplace operator $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. We noemen dit de Poissonvergelijking van Newtoniaanse gravitatie.

Een object, bijvoorbeeld een satelliet met massa m , dat in een willekeurige baan met straal r rond de aarde (met massa M) draait heeft zowel kinetische energie K ¹³ als potentiële energie V . De som van beide, de totale energie $E = K + V$, is een behouden grootte en dient constant te zijn. Er geldt

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}. \quad (24)$$

Het object kan van de aarde ontsnappen als het oneindig ver weg kan zijn en dan toch nog een bepaalde kinetische energie heeft. Als het *net* ontsnapt, dan is de eindsnelheid gelijk aan nul, terwijl de potentiële energie met $V(r = \infty) = 0$ maximaal is. De totale energie $E_{\text{eind}} = 0$. In dat geval geldt, wanneer de satelliet zich op een afstand R van de aarde bevindt,

$$E_{\text{begin}} = E_{\text{eind}} = 0 \rightarrow \frac{1}{2}mv_{\text{ontsnapping}}^2 = \frac{GmM}{R} \rightarrow v_{\text{ontsnapping}} = \left(\frac{2GM}{R}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (25)$$

Als we uitdrukking (18) met (25) vergelijken zien we dat $v_{\text{ontsnapping}} = \sqrt{2}v_{\text{cirkelbaan}}$.

De Deense sterrenkundige Olaf Roemer (1644 - 1710) gaf als eerste een goede schatting van de lichtsnelheid (hij vond 11 minuten per astronomische eenheid (AU)¹⁴, terwijl de juiste waarde 8 minuten en 19 seconden is). Dit resultaat vond hij in 1675 door de eclipse van Jupiters eerste satelliet te bestuderen voor verschillende posities van Jupiter relatief ten opzichte van de aarde.

De Britse natuurkundige John Mitchell (1724 - 1793) en de Franse wiskundige en natuurkundige Pierre Laplace (1749 - 1827) combineerden de eindige lichtsnelheid met het feit dat uit de wetten van Newton volgt (zie vergelijking (25)), dat geen object van een lichaam kan ontsnappen als haar snelheid minder is dan $(2GM/R)^{\frac{1}{2}}$. Hieruit volgt dat ook licht niet kan ontsnappen van een lichaam waarvan de ontsnappingssnelheid groter is dan c . Dus als het mogelijk is om een lichaam met vaste massa M kleiner te maken dan straal R_g , met

$$R_g = \frac{2GM}{c^2}, \quad (26)$$

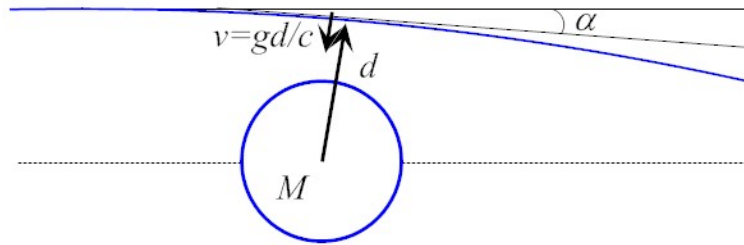
¹²Hierbij gebruiken we de stelling van Gauss, $\iiint_V \nabla \cdot \vec{g} dV = \oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \iiint_V \rho dV$.

¹³We kunnen de formule voor de kinetische energie K vinden door de arbeid te beschouwen die verricht moet worden om een deeltje gedurende tijd dt te versnellen. Er geldt $\vec{F} \cdot d\vec{x} = \vec{F} \cdot \vec{v}dt = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v}dt = \vec{v} \cdot d\vec{p} = \vec{v} \cdot d(m\vec{v})$. Ook geldt $d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = (d\vec{v}) \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot (d\vec{v}) = 2(\vec{v} \cdot d\vec{v})$. Aannemende dat de massa constant is vinden we hiermee $\vec{v} \cdot d(m\vec{v}) = \frac{1}{2}md(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2}mdv^2 = d(\frac{1}{2}mv^2)$. Integreren hiervan levert de relatie $K = \frac{1}{2}mv^2$.

¹⁴De astronomische eenheid was vroeger gedefinieerd als de straal van de cirkelbaan van de aarde (in 1900) rond de zon: 1 AU = $1,496 \times 10^{11}$ m.

dan lijkt dit lichaam zwart voor de buitenwereld. Merk op dat deze limiet voor de straal, R_g , enkel afhangt van M en de natuurconstanten c en G . We noemen dit de *gravitatiestraal* van een lichaam met massa M . Het is precies de waarde die we in de algemene relativiteitstheorie vinden voor de straal van een zwart gat (de zogenaamde Schwarzschildstraal). Overigens verschilt het klassieke zwarte gat in belangrijke mate van een relativistisch zwart gat. In het klassieke geval komt het erop neer dat fotonen met de lichtsnelheid vertrekken, om vervolgens steeds meer snelheid te verliezen. Uiteindelijk wordt hun snelheid gelijk aan nul, draaien ze om en vallen vervolgens weer naar beneden.

Cavendish was de eerste die in 1784 een formule afleidde voor de afbuiging van licht ten gevolge van de gravitatie van de zon. We zullen deze afbuiging afleiden uit het equivalentieprincipe. Beschouw licht dat de zon passeert. We weten dat licht een rechte lijn dient te volgen in het referentiesysteem van een vrij-vallende waarnemer. Omdat lokaal vrij-vallende waarnemers allemaal in de zon vallen, dient het licht continu zijn baan te buigen, zodat de baan recht lijkt voor al deze vrij-vallende locale waarnemers. We zullen de grootte van de afbuiging afschatten met behulp van de klassieke mechanica van Newton.



Figuur 5: Licht zal gravitationeel worden afgebogen als het een massief object zoals de zon passeert.

We vereenvoudigen de discussie en beschouwen enkel één enkele vrij-vallende waarnemer die initieel in rust is ten opzichte van de zon op het punt waar het licht het dichtst bij de zon is tijdens de passage. Deze afstand noemen we d . De versnelling van de waarnemer naar de zon bedraagt $g = GM/d^2$. Het licht reist met snelheid c en het belangrijkste deel van de afbuiging treedt op gedurende een tijd d/c . Gedurende deze tijd bereikt de waarnemer een snelheid $v = gd/c = GM/cd$ loodrecht op de richting van het licht. Vanwege het equivalentieprincipe dient het licht een dergelijke transversale snelheid te krijgen. De hoekafbuiging is klein en er geldt $\tan \alpha = \alpha = \frac{v}{c} = \frac{GM}{c^2 d}$ in radialen. De totale afbuiging dient het dubbele te zijn, omdat dezelfde afbuiging voor de inkomende lichtstraal ook geldt voor de uitgaande lichtstraal (zie Fig. 5). We vinden

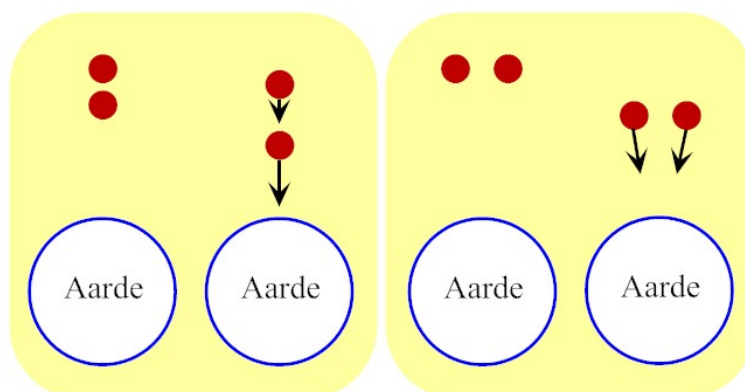
$$\text{Newtoniaanse afbuigingshoek} = 2\alpha = \frac{2GM}{c^2 d}. \quad (27)$$

Een exacte klassieke berekening geeft precies bovenstaand resultaat. Een berekening met de algemene relativiteitstheorie geeft echter een factor 2 grotere afbuiging. Een afbuiging van deze grootte werd in 1919 waargenomen door Britse astronomen onder leiding van Sir Arthur Eddington (1882 - 1944) en Frank W. Dyson (1868 - 1939). Deze bevestiging van de algemene relativiteitstheorie leidde tot de grote internationale doorbraak van Einstein.

2.7 Gravitatie en getijdenkrachten

Getijdenkrachten zijn krachten die niet verdwijnen als we een systeem in vrije val beschouwen en zijn afkomstig van de niet-uniformiteit van de gravitatieversnelling. Getijdenkrachten spelen een

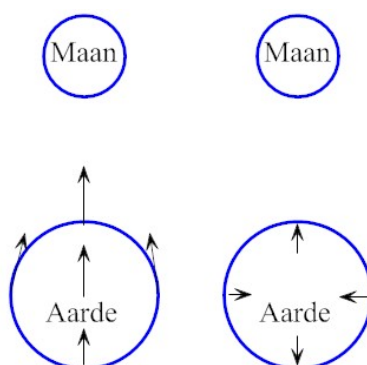
belangrijke rol in het universum: van eb en vloed op aarde tot instabiliteiten in sterrenstelsels. We schetsen de effecten van getijdenkrachten in Fig. 6. De figuur links toont dat wanneer twee



Figuur 6: *Getijdenkrachten zijn eenvoudig te herkennen als we de beweging van vrij-vallende objecten beschouwen.*

objecten met enkel een verticale separatie vanuit rust vallen, hun separatie in de tijd toeneemt. De figuur rechts laat zien dat wanneer twee objecten met enkel een horizontale onderlinge afstand vanuit rust vallen, hun onderlinge afstand afneemt¹⁵. Vanuit het gezichtspunt van een vrij-vallende waarnemer lijken de twee objecten naar elkaar toe te versnellen, alsof er een kracht op werkt. Dit leidt tot de conclusie dat het equivalentieprincipe slechts *lokaal* geldig is, niet globaal.

Een ander bekend voorbeeld van getijdenkrachten zijn de getijden op aarde ten gevolge van de gravitatiekrachten van maan en zon. Hier bespreken we de getijden van het aarde - maan systeem, geschetst in Fig. 7. Het centrum van de aarde is in vrije val. De overige delen van



Figuur 7: *Getijden veroorzaakt door de maan op aarde zijn afkomstig van de residuele versnelling van gravitatie. Hierbij is de aarde in vrije val met de gemiddelde versnelling van de gravitatie van de maan op aarde. In de rechter figuur is de centrale versnelling afgetrokken van de verschillende versnellingsvectoren.*

de aarde ondervinden relatief kleine verschilkrachten die leiden tot het ontstaan van getijden. De getijden hebben een karakteristiek gedrag onder rotaties: plaatsen met gelijke getijden zijn gescheiden door een rotatie over 180° .

¹⁵Merk op dat wanneer we een cirkelvormige ring van puntdeeltjes zouden laten vallen, deze ring via quadrupooldeformatie vervormt zou worden tot een ellips.

De werking van getijdenkrachten leidt tot een aantal belangrijke effecten, zoals het feit dat de rotatie van de maan om zijn as gesynchroniseerd is met zijn rotatie rond de aarde¹⁶. Ook raken aarde en maan steeds verder verwijderd van elkaar ten gevolge van de getijdenkrachten (dit kan worden begrepen als een consequentie van het behoud van impulsmoment). Een ander voorbeeld van de werking van getijdenkrachten is te vinden in het Mercurius - zon systeem. Mercurius is dicht bij de zon en ervaart getijdenkrachten die ongeveer drie keer groter zijn dan in het aarde - maan systeem. De omlooptijd van Mercurius rond de zon bedraagt 88 dagen, terwijl de rotatie rond zijn as 58,6 dagen bedraagt, precies $\frac{2}{3}$ van de omlooptijd. Dit is weer een gevolg van getijdenkrachten.

2.8 Newtoniaanse mechanica en het formalisme van Lagrange

De bewegingswetten van Newton zijn algemeen bekend. De bekendste is waarschijnlijk dat deeltjes zich in een rechte lijn en met constante snelheid voortbewegen zolang er geen krachten op werken. Dit wordt mathematisch uitgedrukt als

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = 0, \quad (28)$$

waar $\vec{x} = \vec{x}(t)$ de positie van het deeltje is, en m zijn massa. Indien er een kracht $\vec{F}$ op het deeltje werkt, komt deze aan de rechterzijde van deze vergelijking te staan. Deze formule is de basis van de Newtoniaanse mechanica en levert een stappenplan voor het oplossen van mechanische vraagstukken: vul de kracht in die op een deeltje werkt, los de resulterende vergelijking op, en de positie van het deeltje als functie van de tijd is dan bekend. De tweede wet kan niet worden afgeleid; het is een experimenteel gegeven.

Lagrange (1736-1813) ontwikkelde een nieuwe manier van mechanica doen, gebaseerd op een functie die nu zijn naam draagt: de *Lagrangiaan* L . Deze functie is gedefinieerd als het verschil tussen de kinetische energie K van een deeltje, en zijn potentiële energie V

$$L(x(t), v(t)) = K(x(t), v(t)) - V(x(t), v(t)), \quad (29)$$

en deze functie geïntegreerd over de tijdsduur van een fysisch proces noemt met de *actie* S ,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), v(t)) dt, \quad (30)$$

waarin t_1 het tijdstip van begin van het proces is, en t_2 het tijdstip van het eind van het proces. Zoals al gesuggereerd door onze notatie, heeft de Lagrangiaan van een deeltje in het algemeen geen constante waarde. Dit komt doordat de kinetische energie en de potentiële energie in het algemeen geen constante waarden hebben, omdat zij functies zijn van de positie en snelheid van het deeltje. Beschouw als voorbeeld een deeltje in het zwaartekrachtsveld van de aarde: de potentiële energie is laag wanneer dit deeltje dicht bij de aarde is, maar hoog wanneer het ver weg is; de kinetische energie neemt echter toe wanneer het deeltje onder invloed van die zwaartekracht steeds sneller naar de aarde valt. Dit voorbeeld laat zien dat de waarde van de Lagrangiaan van een deeltje in het algemeen afhankelijk is van de positie en snelheid van het deeltje. Deze zijn op hun beurt weer functies van de tijd, dus uiteindelijk is de Lagrangiaan een geheel tijdsafhankelijke functie. De actie S daarentegen is *wel* een constante, omdat we de Lagrangiaan integreren over de tijd (elke functie geïntegreerd over zijn variabele levert immers een constante op). De waarde van deze constante hangt daarmee, uiteraard, geheel af van het

¹⁶De aardse getijdenkrachten ten gevolge van de gravitationele krachten van de maan proberen ook de rotatie van de aarde te synchroniseren met de omlooptijd van de maan. De aarde is echter veel massiever dan de maan. Ongeveer 1 miljard jaar geleden duurde een dag maar ongeveer 18 uur.

pad $x(t)$ dat het deeltje volgt tussen de twee tijdstippen t_1 en t_2 . Welk pad dit is, is precies de vraag die wij beantwoord willen zien wanneer we mechanica doen. Als antwoord postuleert het formalisme van Lagrange dat *een deeltje altijd het pad volgt dat de waarde van de actie minimaal of maximaal maakt*. Dit noemt men het *principe van extreme actie*, en levert een geheel nieuw voorschrift om mechanica te doen: schrijf de Lagrangiaan op van bewegend deeltje, integreer deze over de tijd, en zoek het pad dat deze integraal minimaal of maximaal maakt.

Deze manier van mechanica doen is soms te prefereren boven de meer gebruikelijke wetten van Newton¹⁷. Hij is echter niet minder fundamenteel: het is zowel mogelijk het principe van extreme actie af te leiden door uit te gaan van de tweede wet van Newton, als omgekeerd. Het principe van extreme actie en de tweede wet van Newton zijn daarom geheel equivalent.

Als voorbeeld van een toepassing van het formalisme van Lagrange, zal de wet van Newton worden afgeleid door uit te gaan van het principe van extreme actie. We beschouwen een deeltje met massa m , dat beweegt onder invloed van een kracht F en daarom een potentiële energie V heeft gerelateerd aan de kracht via $\vec{F} \equiv -\nabla V$; de kinetische energie K van een deeltje wordt, zoals altijd, gegeven door¹⁸ $K = \frac{1}{2}mv^i v_i$ (waar $v^i \equiv \frac{dx^i(t)}{dt}$). De Lagrangiaan van dit deeltje wordt dan gegeven door

$$L = \frac{1}{2}mv^i(t)v_i(t) - V(\vec{x}(t)), \quad (31)$$

en de actie S is dan

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2}mv^i(t)v_i(t) - V(\vec{x}(t)) \right\} dt. \quad (32)$$

Volgens het principe van extreme actie zal het deeltje een pad volgen dat de actie een extreme waarde geeft. Dit leidt tot het volgende wiskundige vraagstuk: gegeven een integraal over t met integrand $L(\vec{x}(t), \vec{v}(t))$, hoe kan men dan bepalen welke functie $\vec{x}(t)$ de uitkomst van deze integraal minimaal of maximaal maakt? Het antwoord wordt gegeven door de *vergelijkingen van Euler-Lagrange*: de componenten $x^i(t)$ van het pad $\vec{x}(t)$ dat de integraal een extreme waarde geeft, voldoen aan

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right). \quad (33)$$

Het bewijs van deze stelling is niet moeilijk, en gaat als volgt. Laten we aannemen dat $x(t)$ de x -component is van het pad $\vec{x}(t)$ dat de integraal een extreme waarde geeft. Per definitie van een extreme waarde zal elke kleine afwijking van dit pad, $\delta x \ll x$, de actie S een extra bijdrage geven, δS , die gelijk dient te zijn aan nul. We willen dus op zoek naar het pad $x(t)$ waarvoor geldt

$$S + \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \{L(x(t) + \delta x(t), v(t) + \delta v(t))\} dt, \quad (34)$$

waarin

$$\delta S = 0. \quad (35)$$

Aangezien δx klein is, kunnen we de Lagrangiaan benaderen door¹⁹

$$L(x(t) + \delta x(t), v(t) + \delta v(t)) \approx L(x(t), v(t)) + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial v} \delta v. \quad (36)$$

¹⁷Enkele redenen zijn dat in het formalisme van Lagrange de belangrijkste functie een scalair is, waar in de tweede wet van Newton vectoren voorkomen. Ook is het zo dat bepaalde symmetrie-eigenschappen van fysische systemen zich vaak duidelijk openbaren in het Lagrange-formalisme. Het is om deze redenen dat in onder andere de quantumveldentheorie vrijwel uitsluitend met Lagrangianen gewerkt wordt.

¹⁸De notatie $v^i v_i$ betekent in bovenstaand geval $v^i v_i \equiv \sum_{i=1}^3 (v_i)^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = |\vec{v}|^2 = v^2$. Het betreft de zogenaamde Einstein sommatieconventie die we later veelvuldig zullen gebruiken.

¹⁹Dit is gebaseerd op een eerste-orde Taylorreeks van L rond de waarden $x(t)$ en $v(t)$.

Wanneer we dit invullen in vergelijking (34) vinden we de actie S terug plus een extra term, die we kunnen identificeren als δS ,

$$\delta S \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial v} \delta v \right\} dt. \quad (37)$$

Deze uitdrukking hoort gelijk te zijn aan nul. Nadat we een partiële integratie²⁰ doen op de tweede term van de integrand, wordt gevonden

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) \right\} \delta x(t) dt + \frac{\partial L}{\partial v} \delta x(t) \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (38)$$

De afwijking $\delta x(t)$ mag in principe elke mogelijke functie zijn, mits maar geldt dat zij nul is op het begin en eind van het proces. Er geldt dan ook $\delta x(t_1) = 0$ en $\delta x(t_2) = 0$, en hieruit volgt dat de laatste term in vergelijking (38) gelijk is aan nul. De overgebleven integraal zal in het algemeen gelijk kunnen zijn aan nul voor specifieke functies $\delta x(t)$; echter, de eis is dat deze integraal nul is voor *elke* mogelijke afwijking $\delta x(t)$ van het pad $x(t)$, en dit kan alleen wanneer alles tussen de gekrulde haken gelijk is aan nul. Deze eis levert dan precies vergelijking (33), voor de x -component (waarvoor geldt $i = 1$) van het gezochte pad. Voor de twee andere plaatscoördinaten van dit pad, $y(t), z(t)$ kan deze afleiding ook gebruikt worden en geldt dezelfde uitkomst.

Wanneer de vergelijkingen van Euler-Lagrange toegepast worden op de huidige Lagrangiaan, vinden we

$$-\frac{\partial V}{\partial x^i} = m \frac{dv^i}{dt}. \quad (39)$$

De linkerkant van deze vergelijkingen herkennen we als de kracht F^i in de i -richting, terwijl de rechterkant precies gelijk is aan $m \frac{d^2 x^i}{dt^2}$. We kunnen deze drie uitkomsten samen nemen in een enkele vectorvergelijking,

$$m \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} = \vec{F}, \quad (40)$$

wat precies de wet van Newton is. Zoals aangekondigd volgt deze inderdaad uit het principe van extreme actie.

Het Lagrangiaanse formalisme kan ook gebruikt worden om de impuls van een deeltje te bepalen. De impuls volgt uit de Lagrangiaan als

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}, \quad (41)$$

wat voor de huidige Lagrangiaan de gebruikelijke uitdrukking voor de impuls van een deeltje oplevert

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (42)$$

2.9 Lagrange formalisme voor gegeneraliseerde coördinaten

We kunnen het Lagrange formalisme uitdrukken in termen van gegeneraliseerde coördinaten $q_i(t)$ en hun tijdafgeleiden $\dot{q}_i(t)$. Dan kunnen we de Euler-Lagrange vergelijkingen schrijven als

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (43)$$

²⁰Stel dat f en g functies zijn van x , dus $f = f(x)$ en $g = g(x)$. Dan geldt voor de afgeleide van het product $\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx} \rightarrow \frac{df}{dx}g = \frac{d}{dx}(fg) - f\frac{dg}{dx}$. Integreren over dx levert $\int gdf = fg - \int f dg$. In vergelijking (37) gebruiken we $f = \frac{\partial L}{\partial v}$ en $dg = \delta v dt = d(\delta x)$.

Deze relaties zorgen ervoor dat de actie stationair is voor willekeurige variaties δq_1 , δq_2 en δq_3 onder voorwaarde dat de variaties nul zijn voor de integratielimieten t_0 en t_1 .

De vergelijkingen van Lagrange zijn niet alleen toepasbaar voor klassieke en kwantum deeltjesdynamica, maar ook voor klassieke en relativistische kwantumveldentheorie. In het laatste geval hebben we te maken met velden φ , die functies zijn van de continue variërende ruimte-tijd coördinaten x_μ (waarbij $\mu = 0, 1, 2, 3$ achtereenvolgens de tijdcoördinaat t , en x , y en z aanduiden). We formuleren de vergelijkingen van Lagrange in termen van een Lagrange-dichtheid $\mathcal{L}$, zodanig dat de Lagrangiaan L gegeven wordt door

$$L = \int \mathcal{L} d^3x. \quad (44)$$

De Lagrangedichtheid $\mathcal{L}$ wordt doorgaans de Lagrangiaan genoemd. In de theoretische gevallen die wij zullen behandelen is de Lagrangiaan enkel een functie van de velden φ_i en hun eerste afgeleiden naar ruimte en tijd $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi/dx_\mu)$. In de klassieke mechanica beschouwen we enkel afgeleiden naar de tijd, maar in een relativistische theorie verkrijgen tijd- en ruimtecoördinaten gelijke status. In dat geval generaliseren de Euler-Lagrange vergelijkingen tot

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi_i / \partial x_\mu)} \right] = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (45)$$

We schrijven dit in het algemeen als

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial^\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi_i)} \right] = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \quad (46)$$

waarbij we de definitie $\partial^\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$ gebruikt hebben.

2.10 Het principe van Mach

Newton besprak in zijn ‘The Mathematical Principles of Natural Philosophy’ (1687) een experiment waarbij een met water gevulde emmer aan een touw hangt. We draaien de emmer rond zijn as en op deze wijze wordt het touw strak opgewonden. Nu laten we de emmer los, en deze begint snel rond zijn as te draaien, niet alleen ten opzichte van de waarnemer, maar ook ten opzichte van het water erin.

Alhoewel op dit moment de relatieve beweging tussen water en emmer maximaal is, blijft het oppervlak van het water vlak, hetgeen aangeeft dat het water geen neiging heeft om weg te bewegen van de rotatieas. Uiteindelijk als het touw ontwonden is, neemt het water een concave vorm aan terwijl het de beweging aanneemt van de emmer die ten opzichte van de waarnemer roteert. Deze concave vorm toont dat het water roteert, ondanks het feit dat het water in rust is ten opzichte van de wanden van de emmer. Met andere woorden het is niet de relatieve beweging van water en emmer die de concave vorm van het water veroorzaakt, in tegenstelling tot het idee dat bewegingen enkel relatief kunnen zijn, en dat absolute beweging niet bestaat. Is het mogelijk dat de concave vorm van het water de rotatie toont relatief ten opzichte van iets anders, laten we zeggen de absolute ruimte?!

Volgens Ernst Mach zegt Newtons experiment met de roterende emmer water ons eenvoudig dat de relatieve beweging van het water ten opzichte van de wanden van de emmer geen merkbare centrifugale krachten produceert, maar dat dergelijke krachten geproduceerd worden door de relatieve rotaties ten opzichte van de massa van de aarde en de andere hemellichamen.

Op basis van het bovenstaande kunnen we ons afvragen of een object in een leeg heelal inertia heeft. Het principe van Mach stelt dat lokale fysische wetten bepaald worden door de structuur

van het universum op grote schaal. Albert Einstein leek het principe Mach te interpreteren als ‘... traagheid wordt veroorzaakt door een soort interactie tussen lichamen...’²¹. Einstein meende in het Lense - Thirring effect bewijs te vinden voor het principe van Mach. In een brief naar Ernst Mach schrijft hij: ‘Het ... blijkt dat inertia haar oorsprong vindt in een soort interactie tussen lichamen, zoals uw beschouwingen van Newtons emmer experiment aangeven... Als men een zware schil materie roteert, relatief ten opzichte van de vaste sterren rond een as die door het centrum gaat, ontstaat er een corioliskracht in het binnenste van de schil. Deze kracht zorgt ervoor dat het vlak van een Foucault slinger heen en weer wordt gesleept (met een praktisch onmeetbaar kleine hoeksnelheid)’. We zullen dit Lense - Thirring effect later in detail bespreken.

²¹A. Einstein in een brief naar Ernst Mach, Zürich, 25 Juni 1923.