

Gravitatie en kosmologie

door

Prof.dr Johannes F.J. van den Brand
Drs. Jeroen Meidam

Afdeling Natuurkunde en Sterrenkunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit Amsterdam
en
Nationaal instituut voor subatomaire fysica

Contents

1	Inleiding	9
2	Klassieke mechanica	13
2.1	Inleiding	13
2.2	Galileo Galileï en het relativiteitsprincipe	13
2.3	De wetten van Newton	15
2.4	Dopplereffect en gravitationele roodverschuiving	18
2.5	Satellieten en equivalentieprincipe	21
2.6	Zwarte gaten en afbuiging van licht	22
2.7	Gravitatie en getijdenkrachten	24
2.8	Newtoniaanse mechanica en het formalisme van Lagrange	26
2.9	Lagrange formalisme voor gegeneraliseerde coördinaten	28
2.10	Het principe van Mach	29
3	Quantumfysische verschijnselen in het universum	31
3.1	Stervorming	31
3.2	Energiehuishouding in sterren	31
3.3	Nucleosynthese in sterren	34
3.4	Standaard zonnemodel	37
3.5	Witte dwergen, supernovae en neutronensterren	40
3.6	Neutrino astronomie	45
3.7	Neutrino oscillaties	48
3.8	Kosmische straling	52
4	Wiskunde I - Differentiaaltopologie	59
4.1	Puntgebeurtenis	59
4.2	Differentieerbare variëteit	60
4.3	Ruimtetijs van de ART	63
4.4	Coördinatentransformaties	65
4.5	Geometrische objecten	66
4.5.1	Puntgebeurtenis	66
4.5.2	Curve	66
4.5.3	Scalairveld	67
4.5.4	Vectorveld	69
4.5.5	Lineaire functionaal, 1-vorm of covectorveld	75
4.5.6	Algemene tensorvelden	78
4.6	Metrische tensor	79
5	De speciale relativiteitstheorie	83
5.1	Historische introductie en Einsteins postulaten	83
5.2	Het Minkowski-lijnelement	85
5.3	Tijddilatatie	86
5.4	Lorentzcontractie	88
5.5	De Lorentztransformaties	89
5.6	Invariantie van de lichtsnelheid	92
5.7	Verlies van universele definitie van tijd en gelijktijdigheid	95
5.8	Ruimtetijs	96
5.9	Ruimtetijsdiagrammen	98
5.10	Relativistisch Dopplereffect	99

5.11	Relativistische mechanica	100
5.12	De extra traagheid van druk	106
5.13	De energie-impuls tensor	107
6	Wiskunde II - Kromlijnige coördinaten	111
6.1	Vectoren en 1-vormen	111
6.2	Tensorcalculus	114
6.3	Christoffelsymbolen en de metriek	118
6.3.1	Berekenen van de christoffelsymbolen uit de metriek	119
7	De algemene relativiteitstheorie	121
7.1	Pseudo-riemannse variëteit	122
7.2	Tensoren en covariante afgeleide	124
7.3	Geodeten en kromming	126
7.4	Kromming en de riemanntensor	128
7.5	Newtoniaanse beschrijving van getijdenkrachten	131
7.6	De einsteinvergelijkingen	132
7.7	Zwakke gravitatievelden en de newtoniaanse limiet	137
7.8	De zwakke-veld limiet van de einsteinvergelijkingen	139
7.9	De kosmologische constante	140
7.10	Alternatieve relativistische theorieën voor gravitatie	143
7.10.1	Scalaire gravitatietheorieën	143
7.10.2	Brans - Dicke theorie	143
7.10.3	Torsietheorieën	144
8	Relativistische kosmologie	145
8.1	Introductie	145
8.2	Het kosmologisch principe	145
8.3	De wet van Hubble	150
8.4	De Friedmannvergelijkingen	153
8.5	Oplossingen van de Friedmannvergelijkingen	155
8.5.1	Heelal gedomineerd door koude materie	156
8.5.2	Heelal gedomineerd door straling	157
8.5.3	Heelal gedomineerd door een kosmologische constante	158
8.6	Het Standaard Model van de kosmologie	159
9	Kosmologische inflatie	168
9.1	Tekortkomingen van het Standaard Model	168
9.2	De dynamica van kosmologische inflatie	169
9.3	De vereenvoudigde inflatievergelijkingen	171
9.4	Een voorbeeld van een inflatiemodel	173
9.5	Het afbreken van de inflatieperiode	177
9.6	Een voorbeeld van de verhittingsfase	179
10	Gravitatiestraling	188
11	Detectie van gravitatiestraling	189
A	Appendix - Meetkunde	190
A.1	Niet-euclidische meetkunde	190
A.2	Riemanntse meetkunde	196

B	Appendix - Lineaire algebra	198
B.1	Vectorrekening over de reële ruimte	198
B.1.1	Scalaren en vectoren	198
B.1.2	Product van een scalar en een vector	198
B.1.3	Som en verschil van vectoren	198
B.1.4	Lineaire afhankelijkheid; ontbinden van vectoren, kentallen	199
B.1.5	Inwendig of scalar product van vectoren	200
B.1.6	Voorbeelden	200
B.2	Lineaire ruimten en lineaire afbeeldingen	202
B.2.1	Lineaire ruimten	202
B.2.2	Eigenschappen	202
B.2.3	Lineaire onafhankelijkheid, basis, dimensie	203
B.2.4	Inwendig product, norm en orthogonaliteit van vectoren	203
B.2.5	Lineaire afbeeldingen	204
B.3	Matrixrekening	205
B.3.1	Matrices	205
B.3.2	Determinant van een matrix	205
B.3.3	Product van een matrix met een kolomvector	206
B.3.4	Matrix als transformatie-operator	206
B.3.5	Som van matrices	207
B.3.6	Product van scalar met matrix	207
B.3.7	Product van matrices	207
B.3.8	Diagonale matrices	208
B.3.9	Geadjugeerde en inverse matrices	208
B.3.10	De getransponeerde van een matrix; symmetrische en alternerende matrices	209
B.3.11	Orthogonale matrices	210
C	Appendix - Fundamentele constanten	212
D	Appendix - Coördinatensystemen	213
D.1	Cartesiaanse coördinaten	213
D.2	Sferische coördinaten	213
D.3	Cilindrische coördinaten	213
E	Appendix - Oefenopgaven	214
F	Appendix - Tensoren - beknopte samenvatting	264

Voorwoord

In dit college wordt een inleiding tot de algemene relativiteitstheorie behandeld, waarbij de nadruk ligt op het begrijpen van de fundamentele aannamen die worden gedaan in het formuleren van de theorie. We zullen een smal pad volgen dat leidt tot de einsteinvergelijkingen en gaandeweg zal het duidelijk worden dat de theorie een prachtige beschrijving biedt van gravitatie in termen van de kromming van ruimtetijd. Het bestaansrecht van de theorie is gebaseerd op de succesvolle beschrijving van natuurverschijnselen. De algemene relativiteitstheorie geeft een wetenschappelijke basis aan fenomenen als ruimtetijd, gravitatie, zwarte gaten, kosmologie en de oerknal. Op dit moment staan gravitatie en kosmologie aan de frontlinie van het wetenschappelijk onderzoek. Satellieten als COBE, WMAP, en PLANCK, meten de isotropie en homogeniteit van de kosmische achtergrondstraling, een overblijfsel van de oerknal. De laser interferometers LIGO, Geo600, Virgo en Kagra zijn krachtige detectoren die speuren naar gravitatiestraling. Chandra bestudeert het Universum in X-rays, terwijl Hubble visuele afbeeldingen levert.

Wiskunde speelt een prominente rol in het opzetten van natuurkundige theorieën, en de relativiteitstheorie vormt hierop geen uitzondering. In de behandeling van de diverse onderwerpen zullen we liberaal gebruik maken van verschillende wiskundige technieken. De student dient zich te realiseren dat in alle gevallen de nadruk ligt op het begrip van het natuurkundig fenomeen. Overigens is de wiskundige complexiteit van de relativiteitstheorie, in verhouding tot andere theorieën (zoals bijvoorbeeld elektrodynamica en quantummechanica), redelijk beperkt.

Het college ‘*Gravitatie en kosmologie*’ introduceert beknopt verschillende wiskundige onderwerpen, zoals differentiaalmeetkunde. beknopt tijdens het college. Verder is de benadering redelijk ‘schools’. Er wordt huiswerk opgegeven en behandeld (en dit telt mee voor het uiteindelijke cijfer). Hierbij dient benadrukt te worden dat een goed begrip van de stof enkel zal volgen uit zelfwerkzaamheid van de student. De opgaven zijn een belangrijk instrument in dit verband, want hierin kan de opgedane kennis worden toegepast, terwijl de opgaven soms ook voor verdieping van de materie zorg dragen. Merk op dat er in dit kader ook een website is ingericht, die bereikt kan worden via <http://www.nikhef.nl/~jo/gw/>.

Het dictaat is als volgt gestructureerd. Na een inleiding in hoofdstuk 1, wordt gravitatie besproken in termen van de klassieke natuurkunde in hoofdstuk 2. Quantummechanische objecten als neutronensterren worden behandeld in hoofdstuk 3. In hoofdstuk 4 wordt een deel van de wiskunde geïntroduceerd. Hiervan geven we een toepassing in hoofdstuk 5, waar we de speciale relativiteitstheorie behandelen. Vervolgens verdiepen we ons wiskundig inzicht in hoofdstuk 6, waarna we de algemene relativiteitstheorie behandelen in hoofdstuk 7. Nu de theoretische basis is gelegd, gaan we diverse toepassingen bespreken, zoals sferische oplossingen in hoofdstuk 8, kosmologie in hoofdstuk 9 en inflatie in hoofdstuk 10. Als er nog tijd is, dan behandelen we gravitatiestraling in hoofdstuk 11. We eindigen met een bespreking van diverse experimenten, zoals de LIGO en Virgo interferometers en het satellietproject LISA. De diverse appendices dienen als achtergrondmateriaal.

Het zal opvallen dat verschillende onderwerpen ontbreken die in een regulier college wel aan de orde komen. Zo worden de klassieke testen van de algemene relativiteitstheorie nauwelijks besproken. De reden hiervoor is dat het volgens de auteurs onvoldoende bijdraagt tot een verdieping van het inzicht, maar enkel leidt tot een verbreding van de kennis. De onderwerpen zijn zo gekozen dat een smal pad wordt uitgestippeld naar doorgronding van de stof, teneinde zo snel mogelijk te komen tot de discussie van de focus van het moderne wetenschappelijk onderzoek. Dit verklaart ook waarom er relatief veel aandacht wordt besteed aan een didactische inleiding tot de relativiteitstheorie.

In de samenstelling van dit dictaat is geput uit diverse bronnen, zoals ‘*A first course in general relativity*’, Bernard Schutz; ‘*Gravity from the ground up*’, Bernard Schutz; ‘*Geometrical methods of mathematical physics*’, Bernard Schutz; ‘*Gravitation*’, Charles Misner, Kip Thorne, John Archibald Wheeler; ‘*A short course in general relativity*’, J. Foster, J.D. Nightingale; ‘*General relativity, an introduction for physicists*’, M.P. Hobson, G. Efstathiou, A.N. Lasenby; ‘*Tensor calculus*’, David Kay; ‘*Introduction to general relativity*’, John Dirk Walecka; ‘*An introduction to general relativity, spacetime and geometry*’, Sean Carroll; ‘*The road to reality, a complete guide to the laws of the universe*’, Roger Penrose; ‘*Introduction to tensor calculus and continuum mechanics*’, J.H. Heinbockel; ‘*Gravity, an introduction to Einstein’s general relativity*’, James B. Hartle; ‘*Gravitation and cosmology, principles and applications of the general theory of relativity*’, Steven Weinberg; ‘*Introduction to tensor calculus, relativity and cosmology*’, D.F. Lawden; ‘*General relativity*’, N.M.J. Woodhouse; ‘*Kosmologie, van oerknal via niets tot straling en stof*’, A. Achterberg; ‘*Algemene relativiteitstheorie*’, G.G.A. Bauerle; ‘*General relativity*’, Robert M. Wald; ‘*Theory and experiment in gravitational physics*’, Clifford M. Will; ‘*Problem book in relativity and gravitation*’, Alan Lightman, William Press, Richard Price, Saul Teukolsky; ‘*Recent developments in general relativity*’, B. Casciaro, D. Fortunato, M. Francaviglia, A. Masiello; ‘*Fundamentals of Quantum Mechanics*’, V.A. Fock; In sommige gevallen is gebruik gemaakt van relevante review artikelen uit de vakliteratuur. De bronnen worden dan ter plaatse vermeld.

Tenslotte wil de auteur bij voorbaat aan een ieder dank betuigen die gaat bijdragen aan de verbetering van het voorliggende dictaat. Door vrijelijk uw suggesties door te geven aan de docenten zullen wij deze gebruiken ter verbetering van het lesmateriaal. Met name zijn we dank verschuldigd aan de heren Van Egmond en Peters, terwijl een eerste versie van dit college is opgezet met Gideon Koekoek.

Jo van den Brand
Hilversum, 20 augustus 2012

1 Inleiding

Gravitatie is universeel en werkt aantrekkend tussen objecten die massa hebben. Het beïnvloedt alle lichamen op dezelfde wijze (dit werd ontdekt door Galileo Galileï en wordt tot uitdrukking gebracht in het equivalentieprincipe) en kan niet afgeschermd worden, zoals dat wel mogelijk is voor bijvoorbeeld elektrische velden met een kooi van Faraday. Gravitatie beschrijft de banen van projectielen op aarde, en van planeten rond de zon. Gravitatie beheerst de evolutie van het universum en voorspelt exotische objecten als neutronensterren en zwarte gaten.

De natuurkunde bestudeert materiële systemen zoals planeten, sterren en quasars en de arena waarin het fysisch gebeuren plaatsvindt is de ruimte en tijd. Ruimte en tijd zijn fundamentele begrippen in de fysica. In de geschiedenis van de natuurkunde zijn ruwweg vier concepties met betrekking tot ruimte en tijd te onderscheiden.

Ruimte en tijd volgens Aristoteles

Dit beeld komt overeen met het idee dat de ‘gemiddelde mens’ heeft van ruimte en tijd. De ruimte is drie-dimensionaal en euclidisch ($\mathbb{E}^3$) en de tijd is één-dimensionaal en euclidisch ($\mathbb{E}^1$). De bewering dat een object in rust is heeft in dit beeld van ruimte en tijd objectieve betekenis. Ruimtetijd is het cartesische product $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3$. Een punt in ruimtetijd heeft coördinaten (t, x, y, z) en het stelt dus een gebeurtenis op een scherp bepaalde tijd t en met de precies bepaalde plaats (x, y, z) voor. Een dergelijke gebeurtenis noemen we een *puntgebeurtenis*. Ruimtetijd is dus de verzameling van alle mogelijke puntgebeurtenissen. Voor twee puntgebeurtenissen $(t_1, \vec{r}_1)$ en $(t_2, \vec{r}_2)$ kunnen we spreken van de *afstand* $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ en over het *tijdverschil* $t_1 - t_2$ van beide puntgebeurtenissen. Afstand en tijdverschil hebben absolute betekenis.

Ruimtetijd volgens Galileo

Dit is het beeld van ruimte en tijd zoals dit in de klassieke mechanica van Newton voorkomt. Belangrijk hierin is het relativiteitsprincipe van Galileo¹. Dit principe wordt als volgt geformuleerd: er bestaan inertiaalsystemen; inertiaalsystemen bewegen met constante snelheid $\vec{v}$ ten opzichte van elkaar en verschillende inertiaalsystemen zijn equivalent met betrekking tot de wetten van de klassieke mechanica. We herinneren nog even aan de definitie van een inertiaalsysteem. Een inertiaalsysteem is een referentiesysteem waarin ieder vrij deeltje eenparig en rechtlijnig beweegt. Het begrip rust verliest hier zijn absolute betekenis. Immers als een deeltje in rust is in één inertiaalsysteem, is het niet in rust ten opzichte van een inertiaalsysteem dat beweegt ten opzichte van het eerste inertiaalsysteem. De afstand tussen twee puntgebeurtenissen heeft geen absolute betekenis meer. Immers als we twee puntgebeurtenissen p en q beschouwen op dezelfde plaats ten opzichte van de aarde met een tijdverschil van 1 s, dan is de afstand tussen beide 0 m. De afstand van beide puntgebeurtenissen ten opzichte van het inertiaalsysteem dat rust ten opzichte van de zon is 30 km, omdat de aarde met een snelheid van 30 km/s om de zon beweegt. Tijdverschillen hebben nog wel absolute betekenis.

Ruimtetijd volgens Einstein - Minkowski

Dit is het ruimtetijd beeld van de speciale relativiteitstheorie (Einstein 1905). Het is ontstaan uit de confrontatie van de klassieke mechanica van Newton en de elektrodynamica van Maxwell. Speciale relativiteitstheorie steunt op het volgende tweetal postulaten:

- Relativiteitsprincipe van Einstein: er bestaan inertiaalsystemen en deze zijn equivalent met betrekking tot *alle* fysische verschijnselen.

¹Galileo Galileï heeft een belangrijke invloed op de ontwikkeling van wetenschap gehad: hij was van mening dat wetenschap gebaseerd diende te zijn op zorgvuldig experimenteel onderzoek. Ook beschreef hij waarnemingen wiskundig. Hij formuleerde het equivalentieprincipe, liet zien dat de versnelling van de zwaartekracht uniform is ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$), toonde dat horizontale en verticale bewegingen afzonderlijk beschreven kunnen worden, en gaf ons het principe van relativiteit. Galileo was hiermee de eerste relativist (ik heb geen idee of we hem daarom met zijn voornaam aanspreken?)

- Er bestaat een eindige maximale signaalsnelheid en deze is gelijk aan de voortplantings-snelheid van licht in vacuüm.

In het bijzonder kan licht licht niet inhalen. In de speciale relativiteitstheorie is het geboden om ruimte en tijd niet meer apart te beschouwen. In de woorden van H. Minkowski: "M.H.! Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischen Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale. Von Stunde an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken, und nur noch eine Art Union der beide soll Selbständigkeit bewahren".

We zullen zien dat in de speciale relativiteitstheorie naast afstanden ook tijdverschillen hun absolute betekenis verliezen. In plaats van beide komt de minkowskimetrick, die wel een invariante betekenis heeft. Het mathematische model voor ruimtetijd is de *minkowskiruimte*, dit is een vier-dimensionale vlakke ruimte met een indefiniëte metrick met signatuur -2 .

Ruimtetijd volgens Einstein

Dit is het ruimtetijd beeld van de algemene relativiteitstheorie. Einstein formuleerde haar in 1915. Deze theorie is ontstaan uit de confrontatie van de speciale relativiteitstheorie en de theorie van de gravitationele wisselwerking. Ruimtetijd is in de algemene relativiteitstheorie een *riemannse ruimte* met signatuur -2 . In het speciale geval dat gravitatie te verwaarlozen is, krijgt men de minkowskiruimte terug. Een drastisch verschil tussen de ruimtetijd in de speciale en de algemene relativiteitstheorie is dat in de laatste de structuur van ruimtetijd (in het bijzonder de metrick) wordt bepaald door de materie. Het begrip materie wordt hier gebruikt in een zeer ruime betekenis en het omvat naast deeltjes ook het elektromagnetische veld, etc.

In het volgende zullen we aspecten van de algemene relativiteitstheorie bespreken. Hierbij spelen drie essentiële ideeën een rol. Het eerste is dat, zoals gezegd, ruimtetijd beschreven kan worden als een gekromde, vier-dimensionale wiskundige structuur die we een pseudo-riemannse variëteit noemen, dat is een differentieerbare variëteit met een metrick met signatuur -2 . Het komt erop neer dat tijd en ruimte samen een gekromde vier-dimensionale niet-euclidische geometrie vormen. Het tweede idee is dat er op elk ruimtetijd punt, dus op elke puntgebeurtenis, een lokaal inertiaal referentiesysteem bestaat dat correspondeert met lokaal vlakke coördinaten die gedragen worden door waarnemers die in vrije val zijn. Voor deze waarnemers is de natuurkunde beschreven door de algemene relativiteitstheorie niet te onderscheiden van die beschreven door de speciale relativiteitstheorie. Dit is het beroemde sterke equivalentieprincipe van Einstein en dit maakt de algemene relativiteitstheorie tot een extensie van de speciale relativiteitstheorie voor gekromde ruimtetijd. Het derde idee is dat massa (en ook energie en impulsflux) kromming van ruimtetijd veroorzaakt op een wijze die beschreven wordt door de tensorveld vergelijkingen van Einstein.

We zullen de onderliggende ideeën in de volgende hoofdstukken bespreken. Klassieke mechanica wordt besproken in hoofdstuk 2, waar we zullen zien dat zowel de afbuiging van licht rond de zon alsook het bestaan van zwarte gaten mogelijk zijn binnen de klassieke natuurkunde. Ook wordt hier het formalisme van Lagrange besproken met het bijbehorende principe van extreme actie. We besluiten met een discussie van het principe van Mach. Vervolgens geven we in hoofdstuk 3 een overzicht van astrofysische objecten en fenomenen die een quantummechanische beschrijving behoeven. In hoofdstuk 4 definiëren we ruimtetijd op een mathematische wijze. Als belangrijkste object van ruimtetijd vinden we de metrick. Als we de metrick kennen, dan kunnen we een goede beschrijving geven van ruimtetijd. Als voorbeeld behandelen we de metrick van de lege ruimtetijd, de minkowskimetrick, en leiden hieruit de postulaten van de speciale relativiteitstheorie (SRT) af in hoofdstuk 5. Conventioneel wordt de SRT gemotiveerd door uit te gaan van Einsteins twee postulaten, en wordt op basis daarvan de wiskunde ontwikkeld, en dan met name de vorm van de metrick. Wij bewandelen hier een omgekeerde route: hier zal eerst de metrick worden gepostuleerd, en wordt op basis daarvan getoond dat Einsteins postulaten volgen. De reden van

deze ‘omgekeerde’ aanpak is de volgende: in de algemene relativiteitstheorie (ART) (de latere hoofdstukken) is het vrijwel altijd zo dat eerst de metriek bekend is, voordat de rest volgt. SRT is ook om deze reden speciaal te noemen: het is een van de weinige voorbeelden in de relativiteit dat de metriek *af te leiden* is uit gedachtenexperimenten; vrijwel in alle andere gevallen zijn zulke gedachtenexperimenten niet uit te voeren, en is de metriek niet een gevolg, maar een startpunt. Het is om deze reden dat in dit hoofdstuk ook deze route bewandeld zal worden. Als de manier van redeneren dan begrepen is, is de overstap naar de ART in aansluitende hoofdstukken, snel gemaakt.

De wiskundige beschrijving van systemen in gekromde coördinaten, maar voor vlakke euclidische ruimten, wordt gegeven in hoofdstuk 6. In hoofdstuk 7 beginnen we met de behandeling van de ART. We behandelen de beweging van objecten in de ART, terwijl ook de einsteinvergelijkingen worden besproken in dit hoofdstuk. Vervolgens geven we enkele voorbeelden van metrieken die van belang zijn voor sferische systemen (zoals sterren en zwarte gaten) in de algemene relativiteitstheorie: Schwarzschild en Kerr metrieken. In hoofdstuk 8 starten we met de Friedmann metriek en geven we een uiteenzetting van de huidige inzichten met betrekking tot kosmologie. De oerknal en dan met name inflatie wordt behandeld in hoofdstuk 9. We beschrijven de voorspelling van gravitatiestraling in hoofdstuk 10 en besluiten met een schets van de belangrijkste experimenten die het bestaan van gravitatiestraling proberen aan te tonen in hoofdstuk 11.

In appendix A zullen we de differentiaalmeetkunde in historisch perspectief plaatsen. Diverse eigenschappen van gekromde ruimten waren reeds ontdekt door wiskundigen als C.F. Gauss, J. Bolyai, N.I. Lobachevski en B. Riemann. We bespreken aspecten van meetkunde in euclidische en niet-euclidische ruimten. Lineaire algebra en eigenschappen van vectorruimten worden besproken in appendix B. Fundamentele natuurconstanten zijn gegeven in appendix C. Oefenopgaven met uitwerkingen zijn het onderwerp van appendix E, terwijl een beknopt overzicht van tensoren gegeven wordt in appendix F.