

Gravitatie en kosmologie

door

Prof.dr Johannes F.J. van den Brand
Drs. Mark Beker

Afdeling Natuurkunde en Sterrenkunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit Amsterdam
en
Nationaal instituut voor subatomaire fysica

Contents

1	Inleiding	9
2	Klassieke mechanica	13
2.1	Inleiding	13
2.2	Galileo Galileï en het relativiteitsprincipe	13
2.3	De wetten van Newton	15
2.4	Dopplereffect en gravitationele roodverschuiving	17
2.5	Satellieten en equivalentieprincipe	20
2.6	Zwarte gaten en afbuiging van licht	21
2.7	Gravitatie en getijdenkrachten	23
2.8	Newtoniaanse mechanica en het formalisme van Lagrange	25
2.9	Het principe van Mach	28
3	Quantumfysische verschijnselen in het universum	29
3.1	Stervorming	29
3.2	Energiehuishouding in sterren	29
3.3	Nucleosynthese in sterren	32
3.4	Standaard zonnemodel	35
3.5	Witte dwergen, supernovae en neutronensterren	38
3.6	Neutrino astronomie	44
3.7	Neutrino oscillaties	46
3.8	Kosmische straling	49
4	Wiskunde I - Differentiaaltopologie	57
4.1	Puntgebeurtenis	57
4.2	Differentieerbare variëteit	58
4.3	Ruimtetijd van de ART	61
4.4	Coördinatentransformaties	63
4.5	Geometrische objecten	64
4.5.1	Puntgebeurtenis	64
4.5.2	Curve	64
4.5.3	Scalairveld	65
4.5.4	Vectorveld	67
4.5.5	Lineaire functionaal, 1-vorm of covectorveld	73
4.5.6	Algemene tensorvelden	76
4.6	Metrische tensor	77
5	De speciale relativiteitstheorie	81
5.1	Historische introductie en Einsteins postulaten	81
5.2	Het minkowskilijnelement	83
5.3	Tijddilatatie	84
5.4	Lorentzcontractie	86
5.5	De lorentztransformaties	87
5.6	Invariantie van de lichtsnelheid	90
5.7	Verlies van universele definitie van tijd en gelijktijdigheid	93
5.8	Ruimtetijd	94
5.9	Ruimtetijd diagrammen	96
5.10	Relativistisch Dopplereffect	97
5.11	Relativistische mechanica	98

5.12	De extra traagheid van druk	104
5.13	De energie-impuls tensor	105
6	Wiskunde II - Kromlijnige coördinaten	109
6.1	Vectoren en 1-vormen	109
6.2	Tensorcalculus	112
6.3	Christoffelsymbolen en de metriek	116
6.3.1	Berekenen van de christoffelsymbolen uit de metriek	117
7	De algemene relativiteitstheorie	119
7.1	Pseudo-riemannse variëteit	120
7.2	Tensoren en covariante afgeleide	122
7.3	Geodeten en kromming	125
7.4	Kromming en de riemanntensor	126
7.5	Newtoniaanse beschrijving van getijdenkrachten	129
7.6	De einsteinvergelijkingen	130
7.7	Zwakke gravitatievelden en de newtoniaanse limiet	135
7.8	De zwakke-veld limiet van de einsteinvergelijkingen	137
7.9	De kosmologische constante	138
7.10	Alternatieve relativistische theorieën voor gravitatie	141
7.10.1	Scalaire gravitatie theorieën	141
7.10.2	Brans - Dicke theorie	142
7.10.3	Torsietheorieën	142
8	Relativistische kosmologie	143
8.1	Introductie	143
8.2	Het kosmologisch principe	143
8.3	De wet van Hubble	148
8.4	De Friedmannvergelijkingen	151
8.5	Oplossingen van de Friedmannvergelijkingen	154
8.5.1	Heelal gedomineerd door koude materie	154
8.5.2	Heelal gedomineerd door straling	156
8.5.3	Heelal gedomineerd door een kosmologische constante	156
8.6	Het Standaard Model van de kosmologie	157
9	Kosmologische inflatie	167
9.1	Tekortkomingen van het Standaard Model	167
9.2	De dynamica van kosmologische inflatie	168
9.3	De vereenvoudigde inflatievergelijkingen	170
9.4	Een voorbeeld van een inflatiemodel	172
9.5	Het afbreken van de inflatieperiode	176
9.6	Een voorbeeld van de verhittingsfase	179
10	Gravitatiestraling	187
11	Detectie van gravitatiestraling	188
A	Appendix - Meetkunde	189
A.1	Niet-euclidische meetkunde	189
A.2	Riemanse meetkunde	195

B	Appendix - Lineaire algebra	197
B.1	Vectorrekening over de reële ruimte	197
B.1.1	Scalaren en vectoren	197
B.1.2	Product van een scalar en een vector	197
B.1.3	Som en verschil van vectoren	197
B.1.4	Lineaire afhankelijkheid; ontbinden van vectoren, kentallen	198
B.1.5	Inwendig of scalair product van vectoren	199
B.1.6	Voorbeelden	199
B.2	Lineaire ruimten en lineaire afbeeldingen	201
B.2.1	Lineaire ruimten	201
B.2.2	Eigenschappen	201
B.2.3	Lineaire onafhankelijkheid, basis, dimensie	202
B.2.4	Inwendig product, norm en orthogonaliteit van vectoren	202
B.2.5	Lineaire afbeeldingen	203
B.3	Matrixrekening	204
B.3.1	Matrices	204
B.3.2	Determinant van een matrix	204
B.3.3	Product van een matrix met een kolomvector	205
B.3.4	Matrix als transformatie-operator	205
B.3.5	Som van matrices	206
B.3.6	Product van scalar met matrix	206
B.3.7	Product van matrices	206
B.3.8	Diagonale matrices	207
B.3.9	Geadjugeerde en inverse matrices	207
B.3.10	De getransponeerde van een matrix; symmetrische en alternerende matrices	208
B.3.11	Orthogonale matrices	209
C	Appendix - Fundamentele constanten	211
D	Appendix - Coördinatensystemen	212
D.1	Cartesiaanse coördinaten	212
D.2	Sferische coördinaten	212
D.3	Cilindrische coördinaten	212
E	Appendix - Oefenopgaven	213
F	Appendix - Tensoren - beknopte samenvatting	263

Voorwoord

In dit college wordt een inleiding tot de algemene relativiteitstheorie behandeld, waarbij de nadruk ligt op het begrijpen van de fundamentele aannamen die worden gedaan in het formuleren van de theorie. We zullen een smal pad volgen dat leidt tot de einsteinvergelijkingen en gaandeweg zal het duidelijk worden dat de theorie een prachtige beschrijving biedt van gravitatie in termen van de kromming van ruimtetijd. Het bestaansrecht van de theorie is gebaseerd op de succesvolle beschrijving van natuurverschijnselen. De algemene relativiteitstheorie geeft een wetenschappelijke basis aan fenomenen als ruimtetijd, gravitatie, zwarte gaten, kosmologie en de oerknal. Op dit moment staan gravitatie en kosmologie aan de frontlinie van het wetenschappelijk onderzoek. Satellieten als COBE en WMAP, en binnenkort PLANCK, meten de isotropie en homogeniteit van de kosmische achtergrondstraling, een overblijfsel van de oerknal. De laser interferometers LIGO en Virgo zijn krachtige detectoren die speuren naar gravitatiestraling. Chandra bestudeert het universum in X-rays, terwijl Hubble visuele afbeeldingen levert.

Wiskunde speelt een prominente rol in het opzetten van natuurkundige theorieën, en de relativiteitstheorie vormt hierop geen uitzondering. In de behandeling van de diverse onderwerpen zullen we liberaal gebruik maken van verschillende wiskundige technieken. De student dient zich te realiseren dat in alle gevallen de nadruk ligt op het begrip van het natuurkundig fenomeen. Overigens is de wiskundige complexiteit van de relativiteitstheorie, in verhouding tot andere theorieën (zoals bijvoorbeeld elektrodynamica en quantummechanica), redelijk beperkt.

Het college '*Gravitatie en kosmologie*' wordt in 2009 voor het eerst in deze vorm gegeven. Verschillende wiskundige onderwerpen, zoals differentiaalmeetkunde, worden beknopt geïntroduceerd tijdens het college. Verder is de benadering redelijk 'schools'. Er wordt huiswerk opgegeven en behandeld (en dit telt mee voor het uiteindelijke cijfer). Hierbij dient benadrukt te worden dat een goed begrip van de stof enkel zal volgen uit zelfwerkzaamheid van de student. De opgaven zijn een belangrijk instrument in dit verband, want hierin kan de opgedane kennis worden toegepast, terwijl de opgaven soms ook voor verdieping van de materie zorg dragen. Merk op dat er in dit kader ook een website is ingericht, die bereikt kan worden via <http://www.nikhef.nl/~jo/gw/>.

Het dictaat is als volgt gestructureerd. Na een inleiding in hoofdstuk 1, wordt gravitatie besproken in termen van de klassieke natuurkunde in hoofdstuk 2. Quantummechanische objecten als neutronensterren worden behandeld in hoofdstuk 3. In hoofdstuk 4 wordt een deel van de wiskunde geïntroduceerd. Hiervan geven we een toepassing in hoofdstuk 5, waar we de speciale relativiteitstheorie behandelen. Vervolgens verdiepen we ons wiskundig inzicht in hoofdstuk 6, waarna we de algemene relativiteitstheorie behandelen in hoofdstuk 7. Nu de theoretische basis is gelegd, gaan we diverse toepassingen bespreken, zoals kosmologie in hoofdstuk 8 en inflatie in hoofdstuk 9. Gravitatiestraling in hoofdstuk 10. We eindigen met een bespreking van diverse experimenten, zoals de LIGO en Virgo interferometers en het satellietproject LISA. De diverse appendices dienen als achtergrondmateriaal.

Het zal opvallen dat verschillende onderwerpen ontbreken die in een regulier college wel aan de orde komen. Zo worden de klassieke testen van de algemene relativiteitstheorie nauwelijks besproken. De reden hiervoor is dat het volgens de auteurs onvoldoende bijdraagt tot een verdieping van het inzicht, maar enkel leidt tot een verbreding van de kennis. De onderwerpen zijn zo gekozen dat een smal pad wordt uitgestippeld naar doorgronding van de stof, teneinde zo snel mogelijk te komen tot de discussie van de focus van het moderne wetenschappelijk onderzoek. Dit verklaart ook waarom er relatief veel aandacht wordt besteed aan een didactische inleiding tot de relativiteitstheorie.

In de samenstelling van dit dictaat is geput uit diverse bronnen, zoals ‘*A first course in general relativity*’, Bernard Schutz; ‘*Gravity from the ground up*’, Bernard Schutz; ‘*Geometrical methods of mathematical physics*’, Bernard Schutz; ‘*Gravitation*’, Charles Misner, Kip Thorne, John Archibald Wheeler; ‘*A short course in general relativity*’, J. Foster, J.D. Nightingale; ‘*General relativity, an introduction for physicists*’, M.P. Hobson, G. Efstathiou, A.N. Lasenby; ‘*Tensor calculus*’, David Kay; ‘*Introduction to general relativity*’, John Dirk Walecka; ‘*An introduction to general relativity, spacetime and geometry*’, Sean Carroll; ‘*The road to reality, a complete guide to the laws of the universe*’, Roger Penrose; ‘*Introduction to tensor calculus and continuum mechanics*’, J.H. Heinbockel; ‘*Gravity, an introduction to Einstein’s general relativity*’, James B. Hartle; ‘*Gravitation and cosmology, principles and applications of the general theory of relativity*’, Steven Weinberg; ‘*Introduction to tensor calculus, relativity and cosmology*’, D.F. Lawden; ‘*General relativity*’, N.M.J. Woodhouse; ‘*Kosmologie, van oerknal via niets tot straling en stof*’, A. Achterberg; ‘*Algemene relativiteitstheorie*’, G.G.A. Bauerle; ‘*General relativity*’, Robert M. Wald; ‘*Theory and experiment in gravitational physics*’, Clifford M. Will; ‘*Problem book in relativity and gravitation*’, Alan Lightman, William Press, Richard Price, Saul Teukolsky; ‘*Recent developments in general relativity*’, B. Casciaro, D. Fortunato, M. Francaviglia, A. Masiello; ‘*Fundamentals of Quantum Mechanics*’, V.A. Fock; In sommige gevallen is gebruik gemaakt van relevante review artikelen uit de vakliteratuur. De bronnen worden dan ter plaatse vermeld.

Tenslotte willen de auteurs bij voorbaat aan een ieder dank betuigen die gaat bijdragen aan de verbetering van het voorliggende dictaat. Door vrijelijk uw suggesties door te geven aan de docenten zullen wij deze gebruiken ter verbetering van het lesmateriaal. Met name zijn we dank verschuldigd aan de heren Van Egmond en Peters, terwijl een eerste versie van dit college is opgezet met Gideon Koekoek.

1 Inleiding

Gravitatie is universeel en werkt aantrekkend tussen objecten die massa hebben. Het beïnvloedt alle lichamen op dezelfde wijze (dit werd ontdekt door Galileo Galileï en wordt tot uitdrukking gebracht in het equivalentieprincipe) en kan niet afgeschermd worden, zoals dat wel mogelijk is voor bijvoorbeeld elektrische velden met een kooi van Faraday. Gravitatie beschrijft de banen van projectielen op aarde, en van planeten rond de zon. Gravitatie beheerst de evolutie van het universum en voorspelt exotische objecten als neutronensterren en zwarte gaten.

De natuurkunde bestudeert materiële systemen zoals planeten, sterren en quasars en de arena waarin het fysisch gebeuren plaatsvindt is de ruimte en tijd. Ruimte en tijd zijn fundamentele begrippen in de fysica. In de geschiedenis van de natuurkunde zijn ruwweg vier concepties met betrekking tot ruimte en tijd te onderscheiden.

Ruimte en tijd volgens Aristoteles

Dit beeld komt overeen met het idee dat de ‘gemiddelde mens’ heeft van ruimte en tijd. De ruimte is drie-dimensionaal en euclidisch ($\mathbb{E}^3$) en de tijd is één-dimensionaal en euclidisch ($\mathbb{E}^1$). De bewering dat een object in rust is heeft in dit beeld van ruimte en tijd objectieve betekenis. Ruimtetijd is het cartesische product $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3$. Een punt in ruimtetijd heeft coördinaten (t, x, y, z) en het stelt dus een gebeurtenis op een scherp bepaalde tijd t en met de precies bepaalde plaats (x, y, z) voor. Een dergelijke gebeurtenis noemen we een *puntgebeurtenis*. Ruimtetijd is dus de verzameling van alle mogelijke puntgebeurtenissen. Voor twee puntgebeurtenissen $(t_1, \vec{r}_1)$ en $(t_2, \vec{r}_2)$ kunnen we spreken van de *afstand* $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ en over het *tijdverschil* $t_1 - t_2$ van beide puntgebeurtenissen. Afstand en tijdverschil hebben absolute betekenis.

Ruimtetijd volgens Galileï

Dit is het beeld van ruimte en tijd zoals dit in de klassieke mechanica van Newton voorkomt. Belangrijk hierin is het relativiteitsprincipe van Galileï¹. Dit principe wordt als volgt geformuleerd: er bestaan inertiaalsystemen; inertiaalsystemen bewegen met constante snelheid $\vec{v}$ ten opzichte van elkaar en verschillende inertiaalsystemen zijn equivalent met betrekking tot de wetten van de klassieke mechanica. We herinneren nog even aan de definitie van een inertiaalsysteem. Een inertiaalsysteem is een referentiesysteem waarin ieder vrij deeltje eenparig en rechtlijnig beweegt. Het begrip rust verliest hier zijn absolute betekenis. Immers als een deeltje in rust is in één inertiaalsysteem, is het niet in rust ten opzichte van een inertiaalsysteem dat beweegt ten opzichte van het eerste inertiaalsysteem. De afstand tussen twee puntgebeurtenissen heeft geen absolute betekenis meer. Immers als we twee puntgebeurtenissen p en q beschouwen op dezelfde plaats ten opzichte van de aarde met een tijdverschil van 1 s, dan is de afstand tussen beide 0 m. De afstand van beide puntgebeurtenissen ten opzichte van het inertiaalsysteem dat rust ten opzichte van de zon is 30 km, omdat de aarde met een snelheid van 30 km/s om de zon beweegt. Tijdverschillen hebben nog wel absolute betekenis.

Ruimtetijd volgens Einstein - Minkowski

Dit is het ruimtetijd beeld van de speciale relativiteitstheorie (Einstein 1905). Het is ontstaan uit de confrontatie van de klassieke mechanica van Newton en de elektrodynamica van Maxwell. Speciale relativiteitstheorie steunt op het volgende tweetal postulaten:

- Relativiteitsprincipe van Einstein: er bestaan inertiaalsystemen en deze zijn equivalent met betrekking tot *alle* fysische verschijnselen.

¹Galileo Galileï heeft een belangrijke invloed op de ontwikkeling van wetenschap gehad: hij was van mening dat wetenschap gebaseerd diende te zijn op zorgvuldig experimenteel onderzoek. Ook beschreef hij waarnemingen wiskundig. Hij formuleerde het equivalentieprincipe, liet zien dat de versnelling van de zwaartekracht uniform is ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$), toonde dat horizontale en verticale bewegingen afzonderlijk beschreven kunnen worden, en gaf ons het principe van relativiteit. Galileï was hiermee de eerste relativist.

- Er bestaat een eindige maximale signaalsnelheid en deze is gelijk aan de voortplantings-snelheid van licht in vacuüm.

In het bijzonder kan licht licht niet inhalen. In de speciale relativiteitstheorie is het geboden om ruimte en tijd niet meer apart te beschouwen. In de woorden van H. Minkowski: "M.H.! Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischen Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale. Von Stunde an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken, und nur noch eine Art Union der beide soll Selbständigkeit bewahren".

We zullen zien dat in de speciale relativiteitstheorie naast afstanden ook tijdverschillen hun absolute betekenis verliezen. In plaats van beide komt de minkowskimetrik, die wél een invariante betekenis heeft. Het mathematische model voor ruimtetijd is de *minkowskiruimte*, dit is een vier-dimensionale vlakke ruimte met een indefiniëte metrik met signatuur -2 .

Ruimtetijd volgens Einstein

Dit is het ruimtetijd beeld van de algemene relativiteitstheorie. Einstein formuleerde haar in 1915. Deze theorie is ontstaan uit de confrontatie van de speciale relativiteitstheorie en de theorie van de gravitationele wisselwerking. Ruimtetijd is in de algemene relativiteitstheorie een *riemannse ruimte* met signatuur -2 . In het speciale geval dat gravitatie te verwaarlozen is, krijgt men de minkowskiruimte terug. Een drastisch verschil tussen de ruimtetijd in de speciale en de algemene relativiteitstheorie is dat in de laatste de structuur van ruimtetijd (in het bijzonder de metrik) wordt bepaald door de materie. Het begrip materie wordt hier gebruikt in een zeer ruime betekenis en het omvat naast deeltjes ook het elektromagnetische veld, etc.

In het volgende zullen we aspecten van de algemene relativiteitstheorie bespreken. Hierbij spelen drie essentiële ideeën een rol. Het eerste is dat, zoals gezegd, ruimtetijd beschreven kan worden als een gekromde, vier-dimensionale wiskundige structuur die we een pseudo-riemannse variëteit noemen, dat is een differentieerbare variëteit met een metrik met signatuur -2 . Het komt erop neer dat tijd en ruimte samen een gekromde vier-dimensionale niet-euclidische geometrie vormen. Het tweede idee is dat er op elk ruimtetijd punt, dus op elke puntgebeurtenis, een lokaal inertiaal referentiesysteem bestaat dat correspondeert met lokaal vlakke coördinaten die gedragen worden door waarnemers die in vrije val zijn. Voor deze waarnemers is de natuurkunde beschreven door de algemene relativiteitstheorie niet te onderscheiden van die beschreven door de speciale relativiteitstheorie. Dit is het beroemde sterke equivalentieprincipe van Einstein en dit maakt de algemene relativiteitstheorie tot een extensie van de speciale relativiteitstheorie voor gekromde ruimtetijd. Het derde idee is dat massa (en ook energie en impulsflux) kromming van ruimtetijd veroorzaakt op een wijze die beschreven wordt door de tensorveld vergelijkingen van Einstein.

We zullen de onderliggende ideeën in de volgende hoofdstukken bespreken. Klassieke mechanica wordt besproken in hoofdstuk 2, waar we zullen zien dat zowel de afbuiging van licht rond de zon alsook het bestaan van zwarte gaten mogelijk zijn binnen de klassieke natuurkunde. Ook wordt hier het formalisme van Lagrange besproken met het bijbehorende principe van extreme actie. We besluiten met een discussie van het principe van Mach. Vervolgens geven we in hoofdstuk 3 een overzicht van astrofysische objecten en fenomenen die een quantummechanische beschrijving behoeven. In hoofdstuk 4 definiëren we ruimtetijd op een mathematische wijze. Als belangrijkste object van ruimtetijd vinden we de metrik. Als we de metrik kennen, dan kunnen we een goede beschrijving geven van ruimtetijd. Als voorbeeld behandelen we de metrik van de lege ruimtetijd, de minkowskimetrik, en leiden hieruit de postulaten van de speciale relativiteitstheorie (SRT) af in hoofdstuk 5. Conventioneel wordt de SRT gemotiveerd door uit te gaan van Einsteins twee postulaten, en wordt op basis daarvan de wiskunde ontwikkeld, en dan met name de vorm van de metrik. Wij bewandelen hier een omgekeerde route: hier zal eerst de metrik worden gepostuleerd, en wordt op basis daarvan getoond dat Einsteins postulaten volgen. De reden van

deze ‘omgekeerde’ aanpak is de volgende: in de algemene relativiteitstheorie (ART) (de latere hoofdstukken) is het vrijwel altijd zo dat eerst de metriek bekend is, voordat de rest volgt. SRT is ook om deze reden speciaal te noemen: het is een van de weinige voorbeelden in de relativiteit dat de metriek *af te leiden* is uit gedachtenexperimenten; vrijwel in alle andere gevallen zijn zulke gedachtenexperimenten niet uit te voeren, en is de metriek niet een gevolg, maar een startpunt. Het is om deze reden dat in dit hoofdstuk ook deze route bewandeld zal worden. Als de manier van redeneren dan begrepen is, is de overstap naar de ART in aansluitende hoofdstukken, snel gemaakt.

De wiskundige beschrijving van systemen in gekromde coördinaten, maar voor vlakke euclidische ruimten, wordt gegeven in hoofdstuk 6. In hoofdstuk 7 beginnen we met de behandeling van de ART. We behandelen de beweging van objecten in de ART, terwijl ook de einsteinvergelijkingen worden besproken in dit hoofdstuk. In hoofdstuk 8 starten we met de Friedmann metriek en geven we een uiteenzetting van de huidige inzichten met betrekking tot kosmologie. De oerknal en dan met name inflatie wordt behandeld in hoofdstuk 9.

In appendix A zullen we de differentiaalmeetkunde in historisch perspectief plaatsen. Diverse eigenschappen van gekromde ruimten waren reeds ontdekt door wiskundigen als C.F. Gauss, J. Bolyai, N.I. Lobachevski en B. Riemann. We bespreken aspecten van meetkunde in euclidische en niet-euclidische ruimten. Lineaire algebra en eigenschappen van vectorruimten worden besproken in appendix B. Fundamentele natuurconstanten zijn gegeven in appendix C. Oefenopgaven met uitwerkingen zijn het onderwerp van appendix E, terwijl een beknopt overzicht van tensoren gegeven wordt in appendix F.

2 Klassieke mechanica

2.1 Inleiding

In de mechanica willen we de banen van deeltjes (of meer algemeen objecten, dat wil zeggen verzamelingen van deeltjes) beschrijven. Om een dergelijke beschrijving mogelijk te maken kiezen we een willekeurig coördinatenstelsel in de drie-dimensionale (3D) ruimte. Dit stelsel bevat een oorsprong en drie veelal onderling loodrecht gekozen richtingen die we vervolgens de x , y en z -richting noemen en aangeven met respectievelijk de vectoren $\vec{i}$, $\vec{j}$ en $\vec{k}$. Verder brengen we een afstandsverdeling aan op de x , y en z -as. Tijd wordt gemeten met een universeel lopende klok en een willekeurig tijdstip wordt gekozen als $t = 0$. Vervolgens worden tijden van gebeurtenissen relatief gemeten ten opzichte van $t = 0$.

We beschrijven de positie waarop een object zich bevindt in de 3D ruimte met de plaatsvector (of positievector)

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (1)$$

Deze plaatsvector wijst van de oorsprong van het coördinatenstelsel naar de positie van het deeltje. De instantane snelheidsvector $\vec{v}$ is de mate van verandering van de plaatsvector. De grootte van deze vector noemen we de snelheid en deze vector wijst in de bewegingsrichting. Er geldt

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2)$$

Gerelateerd aan de snelheid is de impuls. Er geldt $\vec{p} = m\vec{v}$. De totale impuls van een systeem, $\sum_i \vec{p}_i$, is een behouden grootheid.

De instantane versnelling $\vec{a}$ is ook een vector en is de mate van verandering van de snelheidsvector. Er geldt

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (3)$$

2.2 Galileo Galileï en het relativiteitsprincipe

Stel u voor dat u een blok ijs op een glazen plaat gooit: het glijdt en komt uiteindelijk tot stilstand. Maak de plaat nat en het blok zal een grotere weg afleggen, alvorens tot stilstand te komen. Neem een blok droogijs (dat is bevroren koolstofdioxide) dat glijdt over een luchtkussen van koolstofdioxidedamp en neem waar dat dit blok veel verder zal glijden zonder noemenswaardige vermindering van snelheid. Voor de komst van Galileo Galileï (1564 - 1642) dacht men dat er altijd een kracht nodig is om een object met constante snelheid te laten bewegen. Galileï zag in dat de snelheidsvermindering veroorzaakt wordt door wrijvingskrachten. Als men de wrijving vermindert, dan vermindert ook de snelheidsafname. Galileï redeneerde dat als men *alle* krachten van een object kan verwijderen, inclusief wrijvingskrachten, de snelheid van een lichaam nooit zal veranderen. Deze eigenschap noemde hij *inertia*.

Uit het bovenstaande volgt dat we geen verschil kunnen maken tussen een object in rust of een object dat met constante snelheid beweegt. Of een object in rust blijft of met constante snelheid beweegt hangt af van het coördinatenstelsel (referentiesysteem) waarin het object wordt beschouwd. Stel u voor dat u een reiziger bent in een trein die met constante snelheid langs een rechte lijn beweegt en u plaatst een biljartbal op het tafeltje voor u (nodeloos te zeggen dat we aannemen dat deze tafel perfect horizontaal is ...). Relatief ten opzichte van de trein is de bal in

rust, zolang de trein met constante snelheid ten opzichte van het perron beweegt. Relatief ten opzichte van het perron beweegt de bal met dezelfde snelheid als de trein.

Vervolgens begint de machinist met afremmen omdat de trein het volgende station nadert. De trein versnelt ten opzichte van het perron (het is een negatieve versnelling, een vertraging) en u zult zien dat de bal op uw tafeltje naar voren begint te rollen. De bal versnelt ten opzichte van de trein ondanks het feit dat er geen kracht op werkt! Een referentiesysteem dat versnelt ten opzichte van een inertiaal referentiesysteem is geen inertiaal referentiesysteem. Als er geen krachten werken op een object (in ons geval de biljartbal), dan is elk referentiesysteem ten opzichte waarvan de versnelling van het object gelijk is aan nul een *inertiaal referentiesysteem*. Zowel de trein, zolang die met constante snelheid beweegt, als het perron zijn, in goede benadering, inertiaalsystemen².

Toen Galileo Galilei leefde was er om voor de hand liggende redenen, grote belangstelling voor de banen van kanonskogels. Galilei bestudeerde dergelijke banen en ontdekte dat

- de mate waarin een voorwerp valt (versnelling) niet afhangt van de massa van het object, en dat
- de mate waarin een voorwerp valt, de versnelling van een voorwerp tijdens de val, constant is, dus onafhankelijk van de tijd. We noemen deze constante de gravitatieversnelling en deze bedraagt $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Een grote en een kleine kanonskogel vallen derhalve op dezelfde manier en zelfs ook een kanonskogel en een veertje mits men er voor zorgt dat luchtweerstand geen rol speelt. Gewicht heeft er niets mee te maken³ en we kunnen dit bewijzen door experimenten uit te voeren^{4 5}. Dit is de eerste stap richting het *equivalentieprincipe* dat stelt dat gravitatie niet onderscheidbaar is van uniforme versnelling.

Wij beschouwen een vrij-vallend voorwerp in één dimensie: de verticale (y) richting. De waarde y neemt toe met afnemende afstand tot het middelpunt van de aarde. Als we een voorwerp laten vallen dan is de versnelling constant en geldt $a = g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Omdat $a = \frac{dv}{dt}$ vinden we nu de snelheid door integratie. Er geldt $v = \int_0^t a dt = v_0 + gt$, waarbij v_0 de initiële snelheid op $t = 0$ is. Verder neemt de snelheid lineair in de tijd toe. De afgelegde weg vinden we door nogmaals te integreren. Er geldt $d(t) = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + gt) dt = d_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$, waarbij d_0 de afstand is die het voorwerp reeds afgelegd had vóór tijdstip $t = 0$. We zien dat de afgelegde weg kwadratisch toeneemt in de tijd.

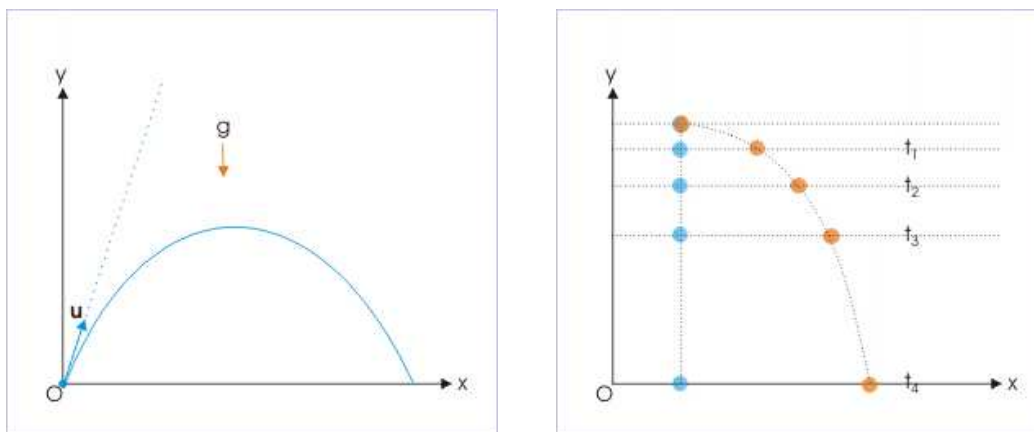
Vervolgens beschouwen we de beweging van een voorwerp in twee dimensies. Hiertoe analyseren we de beweging van een kanonskogel die afgevuurd wordt op tijdstip $t = 0$ met een beginsnelheid u onder een hoek θ met de x -as. De situatie is geschetst in Fig. 1. Voor de initiële snelheid geldt

²Het referentiesysteem dat verbonden is met het oppervlak van de aarde is niet helemaal een inertiaal referentiesysteem, omdat er een kleine versnelling is van het aardoppervlak ten gevolge van de rotatie van de aarde, alsook een versnelling ten gevolge van de beweging rond de zon. Deze versnellingen zijn kleiner dan $0,01 \text{ m/s}^2$ en kunnen vaak worden verwaarloosd.

³Dit kan ook begrepen worden uit een gedachtenexperiment van toegeschreven aan Galilei. Stel dat zware voorwerpen sneller vallen dan lichte voorwerpen. We binden vervolgens een lichte kogel vast aan een zware en gooien het stel naar beneden van de toren van Pisa. Nu zal de lichte kogel de zware afremmen en de combinatie valt langzamer dan de zware kogel alleen zou vallen. De combinatie is echter zwaarder dan enkel de zware kogel en zou dus sneller moeten vallen. Ergo, contradictio in terminis.

⁴Simon Stevin heeft reeds in 1586 zijn experiment gepubliceerd waarin hij twee loden ballen, een tien keer zwaarder dan de ander, van de klokkentoren van de oude kerk in Delft heeft laten vallen over een afstand van ongeveer 10 m. Hierbij werd geen verschil waargenomen in tegenstelling tot de bewering van aanhangers van Aristoteles. Zijn publicatie was drie jaar vóór Galilei's eerste behandeling van gravitatie en 18 jaar eerder dan Galilei's theoretisch werk over vallende lichamen.

⁵Een dergelijk experiment is door astronaut David Scott uitgevoerd op de maan met een hamer en veer tijdens de Apollo 15 missie.



Figuur 1: Baan van een kanonskogel die afgevuurd wordt op tijdstip $t = 0$ met een beginsnelheid u onder een hoek θ met de x -as. De rechterfiguur laat zien dat de verticale beweging onafhankelijk van de horizontale beweging beschouwd kan worden.

$u_x = u \cos \theta$ en $u_y = u \sin \theta$. De snelheid in de verticale richting wordt gegeven door

$$v_y = u_y - gt \quad \rightarrow \quad y = u_y t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (4)$$

De kanonskogel raakt de grond als $y = 0$ en oplossen van bovenstaande vergelijking levert een vluchttijd $T = \frac{2u_y}{g}$.

In de horizontale richting werkt er geen versnelling en wordt de x -positie gegeven door

$$x = u_x t. \quad (5)$$

We kunnen vergelijking (4) en (5) samennemen en hieruit t elimineren. We vinden dan de baan van de kogel,

$$y = \frac{u_y}{u_x} x - \frac{g}{2u_x^2} x^2, \quad (6)$$

en zien dat de kogel een parabolische baan heeft.

Het idee dat we de beweging in horizontale en verticale richting mogen ontkoppelen en zelfstandig behandelen is van Galileï. Het is een eerste versie van het *relativiteitsprincipe*. Toen Nicolas Copernicus (1473 - 1543) stelde dat de aarde en andere planeten rond de zon bewegen, was het moeilijk te begrijpen waarom we deze beweging niet voelen. Waarom vliegen we niet van de aarde af, of blijft de atmosfeer achter als de aarde met grote snelheid rond de zon raast? Galileï gebruikte de onafhankelijkheid van verschillende bewegingen om dit te verklaren. Net zoals voorwerpen die binnen een trein verticaal vallen en het niet uitmaakt of de trein stilstaat of met constante snelheid beweegt, zo merken wij ook niet dat de aarde met grote snelheid door het universum vliegt. Tegenwoordig stellen we dat *alle* natuurwetten hetzelfde zijn voor een waarnemer die met uniforme snelheid in een rechte lijn beweegt als die voor een waarnemer in rust. We noemen dit het *relativiteitsprincipe*.

2.3 De wetten van Newton

In moderne bewoordingen kunnen de wetten van Newton als volgt geformuleerd worden:

- *Eerste wet:* een voorwerp blijft in rust als er geen externe kracht op werkt. Een voorwerp in beweging heeft een constante snelheid als er geen externe kracht op werkt.
- *Tweede wet:* de versnelling van een voorwerp is in de richting van de netto externe kracht die erop werkt. De versnelling is evenredig met de externe kracht overeenkomstig $\vec{F} = m\vec{a}$, met m de massa van het voorwerp. Merk op dat het verband tussen kracht en impuls gegeven wordt door $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. De netto kracht is de vectorsom van alle krachten die op het voorwerp werken, $\vec{F}_{\text{netto}} = \sum \vec{F} = m\vec{a}$.
- *Derde wet:* krachten komen altijd voor in paren met gelijke grootte en tegengestelde richting. Als een voorwerp A een kracht $\vec{F}_{A,B}$ uitoefent op voorwerp B , dan wordt er een gelijke maar tegengesteld gerichte kracht $\vec{F}_{B,A}$ door voorwerp B op A uitgeoefend. Er geldt $\vec{F}_{B,A} = -\vec{F}_{A,B}$.

De eerste wet is duidelijk in overeenstemming met de ideeën van Galileo Galileï. Het leidt tot het relativiteitsprincipe en het feit dat beweging in verschillende richtingen onafhankelijk behandeld kan worden. Ook de tweede wet is geïnspireerd door Galileï en om dit duidelijk te maken dienen we de begrippen massa en gewicht nader te beschouwen. Als we een voorwerp willen versnellen, dan dienen we er een kracht op uit te oefenen. De versnelling heeft dan de waarde $a = \frac{F}{m}$. De massa m kan gezien worden als de weerstand, inertia, tegen versnelling. Massa heeft als eenheid kilogram [kg]. Hoe groter de massa, hoe moeilijker het is om het voorwerp in beweging te brengen. Het gewicht van een voorwerp is de gravitatiekracht die erop werkt. Het is een kracht die, voor een object met massa 1 kg, aan het aardoppervlak gelijk is aan $F_g = mg = 9,8 \text{ N}$ met als eenheid Newton [N]. Als we de tweede wet van Newton combineren met Galileï's ontdekking dat voorwerpen met verschillende massa's op dezelfde manier vernellen onder gravitatie, dan blijkt dat het gewicht van een voorwerp inderdaad evenredig moet zijn met haar massa.

Dit is als volgt in te zien: stel we tillen een zwaar voorwerp op en houden het vast. Wat we *voelen* als gewicht is in werkelijkheid de sensatie van het uitoefenen van een naar boven gerichte kracht om het voorwerp hoog te houden tegen de werking van de zwaartekracht in. Uit de eerste wet volgt dat de totale kracht op het voorwerp nul is en dat onze opwaartse kracht precies de zwaartekracht op het voorwerp opheft. Het gewicht van het voorwerp is dus gelijk aan de zwaartekracht die erop werkt. Als we het voorwerp loslaten, dan is de zwaartekracht erop nog steeds gelijk, terwijl onze opwaartse kracht verdwenen is: het voorwerp versnelt naar beneden, het valt. Volgens Galileï is de versnelling echter niet afhankelijk van het gewicht. De enige manier waarop we de kracht F (het gewicht) kunnen veranderen zonder de versnelling a te veranderen, is door het gewicht F evenredig te maken met m , dus $\vec{F}_{\text{gewicht}} = m\vec{g}$. In dat geval geldt namelijk $\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{gewicht}}}{m} = \frac{m\vec{g}}{m} = \vec{g}$ en voorwerpen vallen onafhankelijk van hun gewicht of massa, de versnelling is gelijk voor alle voorwerpen en bedraagt $9,8 \text{ m/s}^2$. We noemen de massa m die als evenredigheidsconstante optreedt in de uitdrukking voor gewicht $\vec{F} = m\vec{g} = m_{\text{zware}}\vec{g}$ ook wel de *zware* massa, terwijl de massa die optreedt in de tweede wet $\vec{F} = m\vec{a} = m_{\text{trage}}\vec{a}$ de *trage* massa. Galileï's equivalentieprincipe stelt dat zware massa en trage massa gelijk zijn en we schrijven $m_{\text{zware}} = m_{\text{trage}} = m$. We kunnen Galileï's equivalentieprincipe nu als volgt formuleren: de massa van een lichaam is evenredig met haar gewicht.

Newton liet zien dat dezelfde gravitatie die ervoor zorgt dat appels naar de aarde vallen, er ook voor zorgt dat de maan bij de aarde blijft en dat de aarde rond de zon beweegt. De relatief eenvoudige wiskundige uitdrukking $\vec{F} = m\vec{a}$ was consistent met alle bekende meetgegevens van planeetbanen. De grootte van de kracht tussen twee objecten met massa M_1 en M_2 gescheiden door een afstand r bedraagt

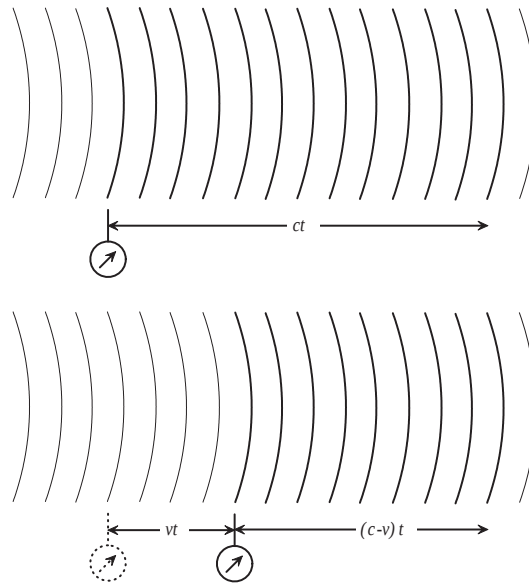
$$F_{\text{grav}} = \frac{GM_1M_2}{r^2}, \quad (7)$$

met G een evenredigheidsconstante die Newtons gravitatieconstante genoemd wordt met als waarde $G = 6,6720 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}$. De kracht is altijd attractief en in Newtons theorie is de werking instantaan.

2.4 Dopplereffect en gravitationele roodverschuiving

Stel dat Galileï samen met twee kanonskogels van de toren van Pisa was gevallen. Op weg naar beneden zouden de twee kogels eenvoudig in zijn nabijheid zijn gebleven. Ten opzichte van hem zouden de kogels zich gedragen alsof er helemaal geen krachten op werken. Als hij nu één van de kogels een zetje zou geven in een willekeurige richting, dan zou deze kogel ten opzichte van hem met uniforme snelheid langs een lijn in die richting bewegen. Zowel Galileï als de kogel versnellen ten opzichte van de aarde, maar als we over hun relatieve beweging spreken, dan kan deze gemeenschappelijke versnelling afgetrokken worden en houden we alleen een relatieve beweging over. Dit gebeurt enkel omdat voor gravitatie de versnelling van elk object in een gravitatieveld gelijk is. We kunnen het equivalentieprincipe nu ook als volgt formuleren: in een gravitatieveld gedragen alle voorwerpen zich zodanig dat ze volkomen vrij lijken te zijn van gravitatiekrachten als ze bekeken worden door vrij-vallende waarnemers. Voor een vrij-vallende waarnemer zijn de natuurwetten hetzelfde als die in de ruimte, ver van alle massieve objecten en hun gravitatievelden.

Bovenstaande formulering van het equivalentieprincipe maakt geen gebruik van begrippen als massa en versnelling en is bijzonder nuttig in het beschrijven van het effect van gravitatie op licht⁶. We kunnen het effect van gravitatie op licht nu vinden door te eisen dat het zich dient te gedragen alsof er geen gravitatie is als het wordt beschouwd door een vrij-vallende waarnemer. Dit betekent in het bijzonder dat het voor die waarnemer een rechte lijn dient te volgen zonder verandering in frequentie.



Figuur 2: Lichtgolven lopen van links naar rechts. Een detector meet het aantal golffronten dat passeert. De frequentie is het aantal golffronten dat per tijdseenheid gemeten wordt en hangt af van de snelheid van de detector.

⁶We weten dat licht een bijzondere plaats inneemt in Einstein's relativiteitstheorie: de snelheid van licht is een universele constante in elk referentiesysteem, terwijl licht een inertiaal massa heeft die gelijk is aan nul. We kunnen daarom niet eenvoudig de wet $\vec{F} = m\vec{a}$ gebruiken om de beweging van licht te beschrijven.

In het algemeen wordt de frequentie van licht beïnvloed door de beweging van een waarnemer. Dit wordt de Dopplerverschuiving⁷ genoemd. We beschouwen licht als een golfverschijnsel met golflengte λ en frequentie f . Hiervoor geldt de relatie $\lambda = \frac{c}{f} = cT$ met c de lichtsnelheid en T de periode. De bovenste afbeelding in Fig. 2 toont de situatie voor een stilstaande detector. Alle golffronten in het interval ct zijn de detector gepasseerd (vetgedrukte fronten). Als dit N golffronten zijn, dan is de frequentie $f = \frac{N}{t}$. In het onderste plaatje zijn slechts N' golffronten gedurende tijd t de detector gepasseerd (vetgedrukte fronten), omdat de detector naar rechts beweegt. De verhouding $\frac{N'}{N}$ is hetzelfde als de verhouding van de lengten, $\frac{(c-v)t}{ct} = 1 - \frac{v}{c}$. Hieruit volgt dat de meebewegende detector een lagere frequentie meet,

$$f' = \frac{N'}{t} = (1 - \frac{v}{c}) \frac{N}{t} = (1 - \frac{v}{c}) f. \quad (8)$$

Als de frequentie verandert, dan verandert de kleur van het licht. Als de lichtbron van ons af beweegt spreken we van een roodverschuiving, terwijl we over een blauwverschuiving spreken als de bron naar ons toe beweegt.

We zijn nu in staat om de gravitationele effecten op licht af te leiden door te eisen dat licht zich dient te gedragen alsof er geen gravitatie is wanneer het wordt waargenomen door een vrijvallende waarnemer⁸. Hiertoe beschouwen we het Pound-Rebka-Snider experiment dat begin



Figuur 3: Schematische weergave van het Pound-Rebka-Snider experiment voor de meting van de gravitationele roodverschuiving van fotonen door de aarde.

⁷In het geval van geluidsgolven zorgt het Dopplereffect voor een verschuiving naar hogere frequentie van de toon van de sirene van een naderende ziekenwagen, terwijl de toon naar lagere frequenties verschuift als de ziekenwagen van ons af beweegt.

⁸Evenzo voelen wij de beweging van de aarde rond de zon niet, omdat de aarde in vrije val is en er dus niets te voelen valt.

jaren 60 van de vorige eeuw is uitgevoerd op het Jefferson Physical Laboratory van Harvard. Het experiment is weergegeven in Fig. 3. In de figuur schijnt men (we noemen deze persoon W1) een lichtbundel met frequentie f_{bron} vanaf de aarde naar boven. Een waarnemer (W2) staat op een toren met hoogte h direct boven de bron en meet de frequentie van dit licht. Hij (W2) noemt deze frequentie f_{top} . We gebruiken het equivalentieprincipe om de relatie tussen f_{bron} en f_{top} te bepalen⁹ en dat betekent het introduceren van nog een andere waarnemer (W3) die vrij-vallend is. Deze waarnemer (W3) valt van de top van de toren naar beneden op het moment dat het licht de bron verlaat. Een dergelijke vrij-vallende waarnemer (W3) ziet het licht alsof er geen gravitatie werkzaam is. Het licht beweegt voor hem (W3) in een rechte lijn en zonder frequentieverschuiving: op het moment dat hij begint met vallen, meet hij (W3) dezelfde frequentie als de waarnemer (W1) bij de bron. Volgens het equivalentieprincipe meet hij (W3) dezelfde frequentie even later als het licht de top bereikt. Het duurt een tijd $t = \frac{h}{c}$ voordat het licht de top bereikt, en dan heeft deze waarnemer (W3) een instantane snelheid $v = gt = \frac{gh}{c}$. Ten opzichte van hem (W3) beweegt de waarnemer (W2) boven dan met snelheid $-v$ van hem (W3) af, hetgeen een Dopplerverschuiving met zich mee brengt. Het equivalentieprincipe en vergelijking (8) geeft ons nu direct

$$f_{\text{top}} = f_{\text{bron}} \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right). \quad (9)$$

Voor de 22,6 m hoge toren van het Pound-Rebka-Snider experiment is het effect klein, $2,46 \times 10^{-15}$, maar het werd desalnietemin gemeten met een precisie van 1 %. Het effect is beduidend groter voor de satellieten van het Global Positioning System (GPS) die op ongeveer 20.200 km hoogte vliegen. Teneinde de navigatie nauwkeurigheid van ongeveer 15 m te bereiken dienen de GPS satellieten hun tijdsignalen te coördineren met een precisie van ongeveer 50 ns ($= \frac{15 \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}}$). Deze precisie is ongeveer 1000 maal groter dan de gravitationele roodverschuiving (ongeveer 40 μs). Zonder correcties op basis van de algemene relativiteitstheorie zouden GPS systemen een afwijking van kilometers per dag vertonen.

Het is belangrijk te begrijpen dat de roodverschuiving een eigenschap is van zowel het licht als de waarnemers. Dus licht op welke hoogte van de aarde dan ook heeft geen unieke frequentie. Als de frequentie gemeten wordt door waarnemers die stilstaan ten opzichte van de grond, dan meten we een roodverschuiving. Als de frequentie gemeten wordt door vrijvallende waarnemers, dan is er geen verschuiving.

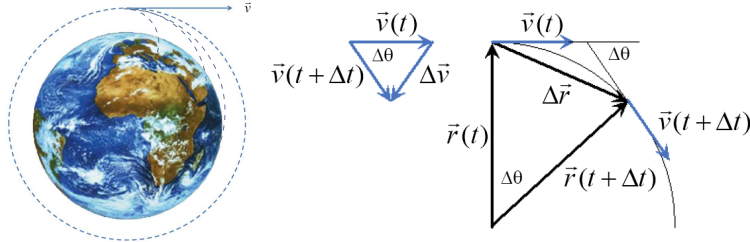
De gravitationele roodverschuiving¹⁰ heeft directe consequenties voor het begrip tijd. Stel dat we twee klokken vervaardigen die gebaseerd zijn op het tellen van golffronten van een lichtbron. Elk golffront dat de detector passeert en geregistreerd wordt zien we als een tik van de klok. De gravitationele roodverschuiving heeft dan als consequentie dat voor een waarnemer in de toren zijn klok sneller tikt dan de klok die op aarde staat. Als hij na een dag met zijn klok naar beneden gaat en de klokken vergelijkt, ziet hij dat zijn klok met ongeveer 1 ns voorloopt, hetgeen tegenwoordig eenvoudig te meten is. Overigens geldt deze conclusie voor al zijn klokken, biologisch of fysisch.

⁹Relatie (9) kan ook gevonden worden door twee experimentatoren in een ruimteschip te beschouwen, dat reist met constante versnelling g . De afstand tussen de twee waarnemers is h in de richting van de versnelling. Laten we aannemen dat het ruimteschip in rust is ten opzichte van een bepaald inertiaalsysteem op het moment dat de waarnemer beneden (bron) een foton uitzendt. Het duurt tijd $t = h/c$ voordat dit foton bij de bovenste (top) waarnemer aankomt. Op dat moment heeft deze waarnemer een snelheid $v = gt = gh/c$ en neemt hij het foton waar met een Dopplerverschuiving, precies volgens vergelijking (9). Het equivalentieprincipe eist dat, indien deze roodverschuiving wordt waargenomen in een experiment dat wordt uitgevoerd onder condities van uniforme versnelling in afwezigheid van een gravitatieveld, dezelfde roodverschuiving waargenomen dient te worden in een experiment onder condities van een uniform gravitatieveld, maar zonder versnelling.

¹⁰Waarnemen van een gravitationele roodverschuiving heeft ook als directe consequentie dat ruimtetijd gekromd dient te zijn.

2.5 Satellieten en equivalentieprincipe

In het volgende zullen we enkele consequenties van de wetten van Newton bestuderen. We gebruiken het equivalentieprincipe om te verklaren hoe satellieten in hun baan blijven. De



Figuur 4: Als we een voorwerp met snelheid v horizontaal lanceren, dan zal het bij voldoende snelheid een cirkelbaan rond de aarde beschrijven.

positie en snelheidsvectoren van een deeltje dat een cirkelbaan beschrijft zijn gegeven in Fig. 4. De hoek $\Delta\theta$ tussen $\vec{v}(t)$ en $\vec{v}(t + \Delta t)$ is hetzelfde als tussen $\vec{r}(t)$ en $\vec{r}(t + \Delta t)$, omdat de plaats- en snelheidsvectoren over gelijke hoeken moeten roteren om onderling loodrecht te blijven. Een gelijkbenige driehoek wordt gevormd door de twee snelheidsvectoren en $\Delta\vec{v}$. Een tweede gelijkbenige driehoek wordt gevormd door de twee plaatsvectoren en $\Delta\vec{r}$. Om de richting van de versnellingsvector te vinden, beschouwen we de driehoek gevormd door de twee snelheidsvectoren en $\Delta\vec{v}$. De som van de hoeken van elke driehoek is 180° en de basishoeken van elke gelijkbenige driehoek zijn gelijk. In de limiet dat Δt naar nul gaat, gaat $\Delta\theta$ ook naar nul, en in deze limiet gaan beide basishoeken naar 90° . Dit betekent dat $\Delta\vec{v}$ loodrecht op de snelheid staat. Als we $\Delta\vec{v}$ tekenen vanaf de positie van het deeltje dan wijst het in de centripetale richting, dus naar het middelpunt van de aarde.

De twee driehoeken zijn congruent en dus geldt $\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r}$ (lengten van corresponderende zijden zijn evenredig). Delen door Δt en herschikken levert

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{r} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}. \quad (10)$$

In de limiet dat Δt nul nadert, gaat de term $\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$ over in de versnelling a , de grootte van de instantane versnelling, terwijl de term $\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$ de snelheid v benadert, de grootte van de instantane snelheid. Met deze substituties vinden we voor de centripetale versnelling, a_c

$$a_c = \frac{v^2}{r}. \quad (11)$$

Een deeltje dat met *veranderende snelheid* in een cirkel beweegt heeft ook een versnellingscomponent a_t tangential aan de cirkel gegeven door $a_t = \frac{dv}{dt}$.

In het volgende beschouwen we een satelliet die met constante snelheid in een cirkelbaan rond het centrum van de aarde over het oppervlak beweegt. De versnelling is nu gelijk aan $a = \frac{v^2}{r} = g = 9,81 \text{ m/s}^2$ en we vinden voor de snelheid met $r = 6370 \text{ km}$ de waarde $v = \sqrt{rg} = \sqrt{(6370 \text{ km})(9,81 \text{ m/s}^2)} = 7,91 \text{ km/s}$. De omlooptijd bedraagt $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(6370 \text{ km})}{7,91 \text{ km/s}} = 5060 \text{ s} = 84,3 \text{ min}$.

Op grotere hoogte is de omlooptijd langer en bedraagt bijvoorbeeld 91 minuten op 300 km hoogte waar de Space Shuttle opereert. Astronauten in de Space Shuttle zijn gewichteloos. Dit komt

niet omdat op 300 km van het aardoppervlak het gravitatieveld van de aarde verwaarloosbaar is (dat is eenvoudig uit te rekenen met vergelijking (7)). Het is een perfecte demonstratie van het equivalentieprincipe: de Space Shuttle is in vrije val rond de aarde en dat veroorzaakt dat voorwerpen in de Space Shuttle zich gedragen alsof gravitatie afwezig is.

We willen het bovenstaande verder uitdiepen met het volgende voorbeeld. Stel we stappen in een stilstaande lift. De sensatie van gewicht komt doordat de vloer van de lift een kracht op ons uitoefent tegengesteld gericht aan de gravitatiekracht van de aarde. Als we de liftkabel doorknippen, dan valt de kracht van de vloer weg. We raken in vrije val, en dan verdwijnt de sensatie van gewicht volledig. De vloer van de lift, niet de gravitatiekracht, is verantwoordelijk voor ons gewicht. We kunnen dit argument omkeren: als we de lift naar boven versnellen, zullen we ons zwaarder gaan voelen. Als we in een geblindeerde lift zitten en we voelen ons gewichtloos, dan kunnen we niet onderscheiden of we in vrije val zijn op aarde of ons in de ruimte ver weg van graviterende objecten bevinden. Evenzo, als we wél gewicht ervaren, weten we niet of dat komt doordat we in een stilstaande lift op aarde staan, of dat we in de verre ruimte naar boven worden versneld. Als gravitatie overal uniform zou zijn, kunnen we het niet onderscheiden van versnelling. Dit is de betekenis van het woord *equivalentie* in het *equivalentieprincipe*.

2.6 Zwarte gaten en afbuiging van licht

We hebben reeds in vergelijking (7) gezien dat de gravitatiekracht uitgeoefend door deeltje 1 op deeltje 2 gegeven wordt door

$$\vec{F}_{1,2} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{1,2}^2}\hat{r}_{1,2}, \quad (12)$$

waarbij $\hat{r}_{1,2} = \frac{\vec{r}_{1,2}}{|\vec{r}_{1,2}|}$ een eenheidsvector is die wijst van deeltje 1 naar deeltje 2. We hebben bovenstaande uitdrukking gegeven als vectorrelatie; het minteken brengt de richting in rekening.

We beschouwen de situatie met $m_1 = m$ de massa van een deeltje en $m_2 = M$ de massa van een massief object, bijvoorbeeld de aarde. We stellen ons voor dat het deeltje in een cirkelbaan rond de aarde beweegt. Er geldt $a = F/m$ en dit betekent dat $\frac{GM}{r^2}$ de versnelling van het deeltje is. Deze versnelling is centripetaal en we vinden dan

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} \quad \rightarrow \quad v = v_{\text{cirkelbaan}} = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (13)$$

voor de snelheid van een deeltje dat gravitationeel gebonden is in een cirkelvormige baan met straal r rond een massief object met massa M .

Als we een deeltje van de aarde naar het oneindige brengen, dient er arbeid verricht te worden. Deze arbeid is gelijk (maar met een minteken) aan de potentiële energie V van het deeltje (als we immers het deeltje vanuit het oneindige op de aarde laten vallen verkrijgt het kinetische energie en kan het weer arbeid verrichten). De hoeveelheid potentiële energie wordt gegeven door

$$V(r) = -\int_{r_0}^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_{r_0}^{\infty} F\hat{r} \cdot d\vec{s} = -\int_{r_0}^{\infty} F_r dr = -\int_{r_0}^{\infty} \left(-\frac{GmM}{r^2}\right) dr = -\frac{GmM}{R}. \quad (14)$$

Omdat enkel veranderingen in potentiële energie relevant zijn, kunnen we altijd een constante V_0 erbij optellen. We kiezen deze constante zo, dat de potentiële energie gelijk is aan nul, $V = 0$, als het deeltje oneindig ver van de aarde staat. In dit geval geldt dan $V_0 = 0$. We merken op dat vergelijkingen (12) en (14) toestaan om de gravitationele potentiaal in te voeren. Er geldt

$$\vec{F}_{\text{grav}} = -m\nabla\Phi(\vec{x}) \quad \text{en ook} \quad \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\nabla\Phi(\vec{x}), \quad (15)$$

waarbij $\vec{F}_{\text{grav}}$ de kracht is op een deeltje met massa m en op positie $\vec{x}$ ten gevolge van de gravitationele potentiaal Φ geproduceerd door een ander deeltje (met bijvoorbeeld massa M). Voor een enkel deeltje met massa M gaf vergelijking (14) $\Phi(\vec{x}) = -GM/x$, en voor een continue massadichtheid $\rho(\vec{x})$ geldt

$$\Phi(\vec{x}) = - \int \frac{G\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'. \quad (16)$$

Het newtoniaanse gravitatieveld $\vec{g}$ wordt dan gedefinieerd door

$$\vec{g}(\vec{x}) \equiv -\nabla\Phi(\vec{x}), \quad (17)$$

waardoor we vinden

$$\nabla \cdot \vec{g}(\vec{x}) = -4\pi G\rho(\vec{x}) \rightarrow \nabla^2\Phi(\vec{x}) = 4\pi G\rho(\vec{x}). \quad (18)$$

Hierin bedoelen we met ∇^2 de laplace operator $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. We noemen dit de poissonvergelijking van newtoniaanse gravitatie.

Een object, bijvoorbeeld een satelliet met massa m , dat in een willekeurige baan met straal r rond de aarde (met massa M) draait heeft zowel kinetische energie K ¹¹ als potentiële energie V . De som van beide, de totale energie $E = K + V$, is een behouden grootte en dient constant te zijn. Er geldt

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}. \quad (19)$$

Het object kan van de aarde ontsnappen als het oneindig ver weg kan zijn en dan toch nog een bepaalde kinetische energie heeft. Als het *net* ontsnapt, dan is de eindsnelheid gelijk aan nul. In dat geval geldt, wanneer de satelliet zich op een afstand R van de aarde bevindt,

$$\frac{1}{2}mv_{\text{ontsnapping}}^2 = \frac{GmM}{R} \rightarrow v_{\text{ontsnapping}} = \left(\frac{2GM}{R}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

Als we uitdrukking (13) met (20) vergelijken zien we dat $v_{\text{ontsnapping}} = \sqrt{2}v_{\text{cirkelbaan}}$.

De Deense sterrenkundige Olaf Roemer (1644 - 1710) gaf als eerste een goede schatting van de lichtsnelheid (hij vond 11 minuten per astronomische eenheid (AU)¹², terwijl de juiste waarde 8 minuten en 19 seconden is). Dit resultaat vond hij in 1675 door de eclipse van Jupiters eerste satelliet te bestuderen voor verschillende posities van Jupiter relatief ten opzichte van de aarde.

De Britse natuurkundige John Mitchell (1724 - 1793) en de Franse wiskundige en natuurkundige Pierre Laplace (1749 - 1827) combineerden de eindige lichtsnelheid met het feit dat uit de wetten van Newton volgt dat geen object van een lichaam kan ontsnappen als haar snelheid minder is dan $(2GM/R)^{\frac{1}{2}}$. Hieruit volgt dat ook licht niet kan ontsnappen van een lichaam waarvan de ontsnappingssnelheid groter is dan c . Dus als het mogelijk is om een lichaam met vaste massa M kleiner te maken dan straal R_g , met

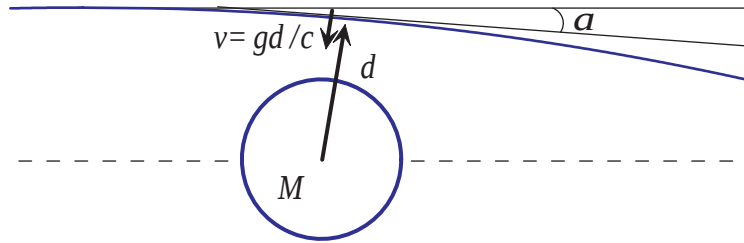
$$R_g = \frac{2GM}{c^2}, \quad (21)$$

¹¹We kunnen de formule voor de kinetische energie K vinden door de arbeid te beschouwen die verricht moet worden om een deeltje gedurende tijd dt te versnellen. Er geldt $\vec{F} \cdot d\vec{x} = \vec{F} \cdot \vec{v}dt = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v}dt = \vec{v} \cdot d\vec{p} = \vec{v} \cdot d(m\vec{v})$. Ook geldt $d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = (d\vec{v}) \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot (d\vec{v}) = 2(\vec{v} \cdot d\vec{v})$. Aannemende dat de massa constant is vinden we hiermee $\vec{v} \cdot d(m\vec{v}) = \frac{1}{2}md(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2}mdv^2 = d(\frac{1}{2}mv^2)$. Integreren hiervan levert de relatie $K = \frac{1}{2}mv^2$.

¹²De astronomische eenheid was vroeger gedefinieerd als de straal van de cirkelbaan van de aarde (in 1900) rond de zon: 1 AU = $1,496 \times 10^{11}$ m.

dan lijkt dit lichaam zwart voor de buitenwereld. Merk op dat deze limiet voor de straal, R_g , enkel afhangt van M en de natuurconstanten c en G . We noemen dit de *gravitatiestraal* van een lichaam met massa M . Het is precies de waarde die we in de algemene relativiteitstheorie vinden voor de straal van een zwart gat. Overigens verschilt het klassieke zwarte gat in belangrijke mate van een relativistisch zwart gat. In het klassieke geval komt het erop neer dat fotonen met de lichtsnelheid vertrekken, om vervolgens steeds meer snelheid te verliezen. Uiteindelijk wordt hun snelheid gelijk aan nul, draaien ze om en vallen vervolgens weer naar beneden.

Cavendish was de eerste die in 1784 een formule afleidde voor de afbuiging van licht ten gevolge van de gravitatie van de zon. We zullen deze afbuiging afleiden uit het equivalentieprincipe. Beschouw licht dat de zon passeert. We weten dat licht een rechte lijn dient te volgen in het referentiesysteem van een vrij-vallende waarnemer. Omdat lokaal vrij-vallende waarnemers allemaal in de zon vallen, dient het licht continu zijn baan te buigen, zodat de baan recht lijkt voor al deze vrij-vallende lokale waarnemers. We zullen de grootte van de afbuiging afschatten met behulp van de klassieke mechanica van Newton.



Figuur 5: Licht zal gravitationeel worden afgebogen als het een massief object zoals de zon passeert.

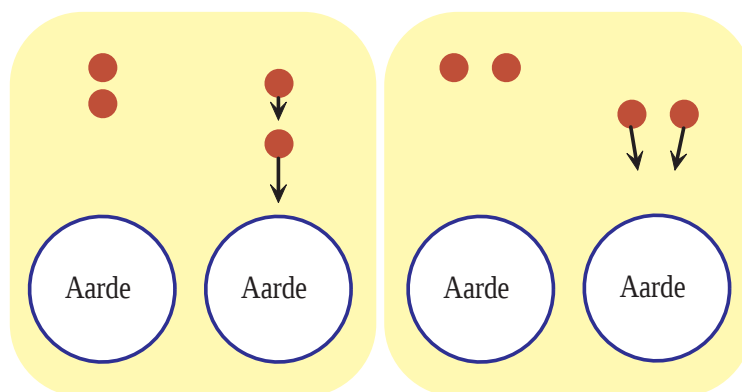
We beschouwen een enkele vrij-vallende waarnemer die initieel in rust is ten opzichte van de zon op het punt waar het licht het dichtst bij de zon is tijdens de passage. De afstand noemen we d . De versnelling van de waarnemer naar de zon bedraagt $g = GM/d^2$. Het licht reist met snelheid c en het belangrijkste deel van de afbuiging treedt op gedurende een tijd d/c . Gedurende deze tijd bereikt de waarnemer een snelheid $v = gd/c = GM/cd$ loodrecht op de richting van het licht. Vanwege het equivalentieprincipe dient het licht een dergelijke transversale snelheid te krijgen. De hoekafbuiging is klein en er geldt $\tan \alpha = \alpha = \frac{v}{c} = \frac{GM}{c^2 d}$ in radialen. De totale afbuiging dient het dubbele te zijn, omdat dezelfde afbuiging voor de inkomende lichtstraal ook geldt voor de uitgaande lichtstraal (zie Fig. 5). We vinden

$$\text{Newtoniaanse afbuigingshoek} = 2\alpha = \frac{2GM}{c^2 d}. \quad (22)$$

Een exacte klassieke berekening geeft precies bovenstaand resultaat. Een berekening met de algemene relativiteitstheorie geeft echter een factor 2 grotere afbuiging. Een afbuiging van deze grootte werd in 1919 waargenomen door Britse astronomen onder leiding van Sir Arthur Eddington (1882 - 1944) en Frank W. Dyson (1868 - 1939). Deze bevestiging van de algemene relativiteitstheorie leidde tot de grote internationale doorbraak van Einstein.

2.7 Gravitatie en getijdenkrachten

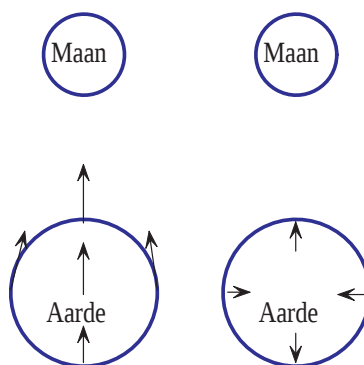
Getijdenkrachten zijn krachten die niet verdwijnen als we een systeem in vrije val beschouwen en zijn afkomstig van de niet-uniformiteit van de gravitatieversnelling. Getijdenkrachten spelen een belangrijke rol in het universum: van eb en vloed op aarde tot instabiliteiten in sterrenstelsels.



Figuur 6: *Getijdenkrachten zijn eenvoudig te herkennen als we de beweging van vrij-vallende objecten beschouwen.*

We schetsen de effecten van getijdenkrachten in Fig. 6. De figuur links toont dat wanneer twee objecten met enkel een verticale separatie vanuit rust vallen, hun separatie in de tijd toeneemt. De figuur rechts laat zien dat wanneer twee objecten met enkel een horizontale onderlinge afstand vanuit rust vallen, hun onderlinge afstand afneemt. Vanuit het gezichtspunt van een vrij-vallende waarnemer lijken de twee objecten naar elkaar toe te versnellen, alsof er een kracht op werkt. Dit leidt tot de conclusie dat het equivalentieprincipe slechts *lokaal* geldig is, niet globaal.

Een ander bekend voorbeeld van getijdenkrachten zijn de getijden op aarde ten gevolge van de gravitatiekrachten van maan en zon. Hier bespreken we de getijden van het aarde - maan systeem, geschetst in Fig. 7. Het centrum van de aarde is in vrije val. De overige delen van



Figuur 7: *Getijden veroorzaakt door de maan op aarde zijn afkomstig van de residuele versnelling van gravitatie. Hierbij is de aarde in vrije val met de gemiddelde versnelling van de gravitatie van de maan op aarde. In de rechter figuur is de centrale versnelling afgetrokken van de verschillende versnellingsvectoren.*

de aarde ondervinden relatief kleine verschilkrachten die leiden tot het ontstaan van getijden. De getijden hebben een karakteristiek gedrag onder rotaties: plaatsen met gelijke getijden zijn gescheiden door een rotatie over 180° .

De werking van getijdenkrachten leidt tot een aantal belangrijke effecten, zoals het feit dat de rotatie van de maan om zijn as gesynchroniseerd is met zijn rotatie rond de aarde¹³. Ook raken

¹³De getijdenkrachten van de maan op de aarde proberen ook de rotatie van de aarde te synchroniseren met de

aarde en maan steeds verder verwijderd van elkaar ten gevolge van de getijdenkrachten (dit kan worden begrepen als een consequentie van het behoud van impulsmoment). Een ander voorbeeld van de werking van getijdenkrachten is te vinden in het Mercurius - zon systeem. Mercurius is dicht bij de zon en ervaart getijdenkrachten die ongeveer drie keer groter zijn dan in het aarde - maan systeem. De omlooptijd van Mercurius rond de zon bedraagt 88 dagen, terwijl de rotatie rond zijn as 58,6 dagen bedraagt, precies $\frac{2}{3}$ van de omlooptijd. Dit is weer een gevolg van getijdenkrachten.

2.8 Newtoniaanse mechanica en het formalisme van Lagrange

De bewegingswetten van Newton zijn algemeen bekend. De bekendste is waarschijnlijk dat deeltjes zich in een rechte lijn en met constante snelheid voortbewegen zolang er geen krachten op werken. Dit wordt mathematisch uitgedrukt als

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = 0, \quad (23)$$

waar $\vec{x} = \vec{x}(t)$ de positie van het deeltje is, en m zijn massa. Indien er een kracht $\vec{F}$ op het deeltje werkt, komt deze aan de rechterzijde van deze vergelijking te staan. Deze formule is de basis van de Newtoniaanse mechanica en levert een stappenplan voor het oplossen van mechanische vraagstukken: vul de kracht in die op een deeltje werkt, los de resulterende vergelijking op, en de positie van het deeltje als functie van de tijd is dan bekend. De tweede wet kan niet worden afgeleid; het is een experimenteel gegeven.

Lagrange (1736-1813) ontwikkelde een nieuwe manier van mechanica doen, gebaseerd op een functie die nu zijn naam draagt: de *Lagrangiaan* L . Deze functie is gedefinieerd als het verschil tussen de kinetische energie K van een deeltje, en zijn potentiële energie V

$$L(x(t), v(t)) = K(x(t), v(t)) - V(x(t), v(t)), \quad (24)$$

en deze functie geïntegreerd over de tijdsduur van een fysisch proces noemt met de *actie* S ,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), v(t)) dt, \quad (25)$$

waarin t_1 het tijdstip van begin van het proces is, en t_2 het tijdstip van het eind van het proces. Zoals al gesuggereerd door onze notatie, heeft de Lagrangiaan van een deeltje in het algemeen geen constante waarde. Dit komt doordat de kinetische energie en de potentiële energie in het algemeen geen constante waarden hebben, omdat zij functies zijn van de positie en snelheid van het deeltje. Beschouw als voorbeeld een deeltje in het zwaartekrachtsveld van de aarde: de potentiële energie is laag wanneer dit deeltje dicht bij de aarde is, maar hoog wanneer het ver weg is; de kinetische energie neemt echter toe wanneer het deeltje onder invloed van die zwaartekracht steeds sneller naar de aarde valt. Dit voorbeeld laat zien dat de waarde van de Lagrangiaan van een deeltje in het algemeen afhankelijk is van de positie en snelheid van het deeltje. Deze zijn op hun beurt weer functies van de tijd, dus uiteindelijk is de Lagrangiaan een geheel tijdsafhankelijke functie. De actie S daarentegen is *wel* een constante, omdat we de Lagrangiaan integreren over de tijd (elke functie geïntegreerd over zijn variabele levert immers een constante op). De waarde van deze constante hangt daarmee, uiteraard, geheel af van het pad $x(t)$ dat het deeltje volgt tussen de twee tijdstippen t_1 en t_2 . Welk pad dit is, is precies de vraag die wij beantwoord willen zien wanneer we mechanica doen. Als antwoord postuleert het

omlooptijd van de maan. De aarde is echter veel massiever dan de maan. Ongeveer 1 miljard jaar geleden duurde een dag maar ongeveer 18 uur.

formalisme van Lagrange dat *een deeltje altijd het pad volgt dat de waarde van de actie minimaal of maximaal maakt*. Dit noemt men het *principe van extreme actie*, en levert een geheel nieuw voorschrift om mechanica te doen: schrijf de Lagrangiaan op van bewegend deeltje, integreer deze over de tijd, en zoek het pad dat deze integraal minimaal of maximaal maakt.

Deze manier van mechanica doen is soms te prefereren boven de meer gebruikelijke wetten van Newton¹⁴. Hij is echter niet minder fundamenteel: het is zowel mogelijk het principe van extreme actie af te leiden door uit te gaan van de tweede wet van Newton, als omgekeerd. Het principe van extreme actie en de tweede wet van Newton zijn daarom geheel equivalent.

Als voorbeeld van een toepassing van het formalisme van Lagrange, zal de wet van Newton worden afgeleid door uit te gaan van het principe van extreme actie. We beschouwen een deeltje met massa m , dat beweegt onder invloed van een kracht F en daarom een potentiële energie V heeft gerelateerd aan de kracht via $\vec{F} \equiv -\nabla V$; de kinetische energie K van een deeltje wordt, zoals altijd, gegeven door¹⁵ $K = \frac{1}{2}mv^i v_i$ (waar $v^i \equiv \frac{dx^i(t)}{dt}$). De Lagrangiaan van dit deeltje wordt dan gegeven door

$$L = \frac{1}{2}mv^i(t)v_i(t) - V(x(t)), \quad (26)$$

en de actie S is dan

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2}mv^i(t)v_i(t) - V(x(t)) \right\} dt. \quad (27)$$

Volgens het principe van extreme actie zal het deeltje een pad volgen dat de actie een extreme waarde geeft. Dit leidt tot het volgende wiskundige vraagstuk: gegeven een integraal over t met integrand $L(\vec{x}(t), \vec{v}(t))$, hoe kan men dan bepalen welke functie $\vec{x}(t)$ de uitkomst van deze integraal minimaal of maximaal maakt? Het antwoord wordt gegeven door de *vergelijkingen van Euler-Lagrange*: de componenten $x^i(t)$ van het pad $\vec{x}(t)$ dat de integraal een extreme waarde geeft, voldoen aan

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right). \quad (28)$$

Het bewijs van deze stelling is niet moeilijk, en gaat als volgt. Laten we aannemen dat $x(t)$ de x -component is van het pad $\vec{x}(t)$ dat de integraal een extreme waarde geeft. Per definitie van een extreme waarde zal elke kleine afwijking van dit pad, $\delta x \ll x$, de actie S een extra bijdrage geven, δS , die gelijk dient te zijn aan nul. We willen dus op zoek naar het pad $x(t)$ waarvoor geldt

$$S + \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \{L(x(t) + \delta x(t), v(t) + \delta v(t))\} dt, \quad (29)$$

waarin

$$\delta S = 0. \quad (30)$$

¹⁴Enkele redenen zijn dat in het formalisme van Lagrange de belangrijkste functie een scalair is, waar in de tweede wet van Newton vectoren voorkomen. Ook is het zo dat bepaalde symmetrie-eigenschappen van fysische systemen zich vaak duidelijk openbaren in het Lagrange-formalisme. Het is om deze redenen dat in onder andere de quantumveldentheorie vrijwel uitsluitend met Lagrangianen gewerkt wordt.

¹⁵De notatie $v^i v_i$ betekent in bovenstaand geval $v^i v_i \equiv \sum_{i=1}^3 (v_i)^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = |\vec{v}|^2 = v^2$. Het betreft de zogenaamde Einstein sommatieconventie die we later veelvuldig zullen gebruiken.

Aangezien δx klein is, kunnen we de Lagrangiaan benaderen door¹⁶

$$L(x(t) + \delta x(t), v(t) + \delta v(t)) \approx L(x(t), v(t)) + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial v} \delta v. \quad (31)$$

Wanneer we dit invullen in vergelijking (29) vinden we de actie S terug plus een extra term, die we kunnen identificeren als δS ,

$$\delta S \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial v} \delta v \right\} dt. \quad (32)$$

Deze uitdrukking hoort gelijk te zijn aan nul. Nadat we een partiële integratie¹⁷ doen op de tweede term van de integrand, wordt gevonden

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) \right\} \delta x(t) dt + \frac{\partial L}{\partial v} \delta x(t) \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (33)$$

De afwijking $\delta x(t)$ mag in principe elke mogelijke functie zijn, mits maar geldt dat zij nul is op het begin en eind van het proces. Er geldt dan ook $\delta x(t_1) = 0$ en $\delta x(t_2) = 0$, en hieruit volgt dat de laatste term in vergelijking (33) gelijk is aan nul. De overgebleven integraal zal in het algemeen gelijk kunnen zijn aan nul voor specifieke functies $\delta x(t)$; echter, de eis is dat deze integraal nul is voor *elke* mogelijke afwijking $\delta x(t)$ van het pad $x(t)$, en dit kan alleen wanneer alles tussen de gekrulde haken gelijk is aan nul. Deze eis levert dan precies vergelijking (28), voor de x -component (waarvoor geldt $i = 1$) van het gezochte pad. Voor de twee andere plaatscoördinaten van dit pad, $y(t), z(t)$ kan deze afleiding ook gebruikt worden en geldt dezelfde uitkomst.

Wanneer de vergelijkingen van Euler-Lagrange toegepast worden op de huidige Lagrangiaan, vinden we

$$-\frac{\partial V}{\partial x^i} = m \frac{dv^i}{dt}. \quad (34)$$

De linkerkant van deze vergelijkingen herkennen we als de kracht F^i in de i -richting, terwijl de rechterkant precies gelijk is aan $m \frac{d^2 x^i}{dt^2}$. We kunnen deze drie uitkomsten samen nemen in een enkele vectorvergelijking,

$$m \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} = \vec{F}, \quad (35)$$

wat precies de wet van Newton is. Zoals aangekondigd volgt deze inderdaad uit het principe van extreme actie.

Het Lagrangiaanse formalisme kan ook gebruikt worden om de impuls van een deeltje te bepalen. De impuls volgt uit de Lagrangiaan als

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}, \quad (36)$$

wat voor de huidige Lagrangiaan de gebruikelijke uitdrukking voor de impuls van een deeltje oplevert

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (37)$$

¹⁶Dit is gebaseerd op een eerste-orde Taylorreeks van L rond de waarden $x(t)$ en $v(t)$.

¹⁷Stel dat f en g functies zijn van x , dus $f = f(x)$ en $g = g(x)$. Dan geldt voor de afgeleide van het product $\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx} \rightarrow \frac{df}{dx}g = \frac{d}{dx}(fg) - f\frac{dg}{dx}$. Integreren over dx levert $\int gdf = fg - \int f dg$. In vergelijking (32) gebruiken we $f = \frac{\partial L}{\partial v}$ en $dg = \delta v dt = d(\delta x)$.

2.9 Het principe van Mach

Newton besprak in zijn ‘The Mathematical Principles of Natural Philosophy’ (1687) een experiment waarbij een met water gevulde emmer aan een touw hangt. We draaien de emmer rond zijn as en op deze wijze wordt het touw strak opgewonden. Nu laten we de emmer los, en deze begint snel rond zijn as te draaien, niet alleen ten opzichte van de waarnemer, maar ook ten opzichte van het water erin.

Alhoewel op dit moment de relatieve beweging maximaal is, blijft het oppervlak van het water vlak, hetgeen aangeeft dat het water geen neiging heeft om weg te bewegen van de rotatieas. Uiteindelijk als het touw ontwonden is, neemt het water een concave vorm aan terwijl het de beweging aanneemt van de emmer die ten opzichte van de waarnemer roteert. Deze concave vorm toont dat het water roteert, ondanks het feit dat het water in rust is ten opzichte van de wanden van de emmer. Met andere woorden het is niet de relatieve beweging van water en emmer die de concave vorm van het water veroorzaakt, in tegenstelling tot het idee dat bewegingen enkel relatief kunnen zijn, en dat absolute beweging niet bestaat. Is het mogelijk dat de concave vorm van het water de rotatie toont relatief ten opzichte van iets anders, laten we zeggen de absolute ruimte?!

Volgens Ernst Mach zegt Newtons experiment met de roterende emmer water ons eenvoudig dat de relatieve beweging van het water ten opzichte van de wanden van de emmer geen merkbare centrifugale krachten produceert, maar dat dergelijke krachten geproduceerd worden door de relatieve rotaties ten opzichte van de massa van de aarde en de andere hemellichamen.

Op basis van het bovenstaande kunnen we ons afvragen of een object in een leeg heelal inertia heeft. Het principe van Mach stelt dat lokale fysische wetten bepaald worden door de structuur van het universum op grote schaal. Albert Einstein leek het principe Mach te interpreteren als ‘... traagheid wordt veroorzaakt door een soort interactie tussen lichamen...’¹⁸. Einstein meende in het Lense - Thirring effect bewijs te vinden voor het principe van Mach. In een brief naar Ernst Mach schrijft hij: ‘Het ... blijkt dat inertia haar oorsprong vindt in een soort interactie tussen lichamen, zoals uw beschouwingen van Newtons emmer experiment aangeven... Als men een zware schil materie roteert, relatief ten opzichte van de vaste sterren rond een as die door het centrum gaat, ontstaat er een corioliskracht in het binnenste van de schil. Deze kracht zorgt ervoor dat het vlak van een Foucault slinger heen en weer wordt gesleept (met een praktisch onmeetbaar kleine hoeksnelheid)’. We zullen dit Lense - Thirring effect later in detail bespreken.

¹⁸A. Einstein in een brief naar Ernst Mach, Zürich, 25 Juni 1923.

3 Quantumfysische verschijnselen in het universum

3.1 Stervorming

Sterren condenseren uit gaswolken die voornamelijk uit waterstof bestaan. Als een gaswolk voldoende dichtheid heeft of koud genoeg is, dan kunnen delen ervan condenseren en sterren vormen. Het gebied dat condenseert dient een minimum afmeting te hebben, zodat er voldoende massa en gravitatie is om de gasdruk in de wolk te overwinnen. Deze minimum lengte heet de *Jeans lengte*¹⁹ en bedraagt

$$\lambda_{\text{Jeans}} = \left(\frac{\pi kT}{G\rho m} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (38)$$

met T en m respectievelijk de temperatuur en massa van het molecuul en ρ de dichtheid van de condenserende gaswolk. Elk deel van de gaswolk groter dan de Jeans lengte heeft voldoende zelf-gravitatie en kan condenseren. De massa van een dergelijk gebied is $\frac{4}{3}\pi\rho\lambda_{\text{Jeans}}^3$ en wordt de Jeans massa genoemd,

$$M_J = \frac{4}{3}\pi\rho\lambda_{\text{Jeans}}^3 = \frac{4\pi^{\frac{5}{2}}}{3} \left(\frac{kT}{Gm} \right)^{\frac{3}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}. \quad (39)$$

Het is belangrijk om in te zien dat M_J afneemt als ρ toeneemt. Als dus een instabiel gebied initieel ter grootte λ_{Jeans} condenseert, neemt de dichtheid toe. Dit verlaagt de Jeans massa en dat maakt kleinere delen van het gebied instabiel voor condensatie. Indien de dichtheid in de gaswolk niet homogeen is, dan is het waarschijnlijk dat de samentrekkende gaswolk fragmenteert in kleinere gebieden. Sterrenkundigen noemen een dergelijk gebied een *protoster*.

De gravitationele potentiële energie van de moleculen wordt tijdens de contractie van de gaswolk omgezet in warmte²⁰. Hierdoor neemt de temperatuur van het gas toe tijdens de contractie. Gedurende contractie van de protoster wordt de dichtheid uiteindelijk voldoende hoog om straling gevangen te houden en begint de protoster zich te gedragen als een zwart lichaam. Op dat moment neemt de temperatuur scherp toe en begint de protoster te schijnen in het zichtbare licht. De energie van contractie is voldoende om de protoster enkele miljoenen jaren te laten schijnen.

3.2 Energiehuishouding in sterren

De verhitting tijdens contractie van de protoster is voldoende om kernfusie te initiëren. Het mechanisme van energieproductie in de zon is fusie van waterstofatomen tot helium en fusie is de energiebron van sterren. De constructie van een fusiereactor op aarde is ingewikkeld, het grootste probleem is de zogenaamde ‘confinement’ (opsluiting) van het plasma. Een plasma met een temperatuur van ongeveer 10^8 K dient in een eindig volume opgesloten te worden. Vaste wanden

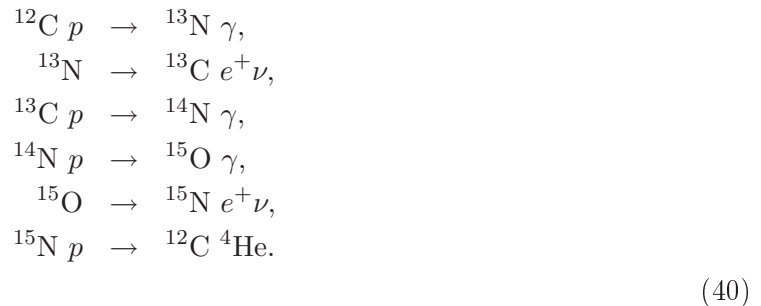
¹⁹Naar de Britse astrofysicus Sir James Jeans (1877 - 1946). We kunnen de grootte R van een sferisch gebied dat instabiel is voor stervorming bij benadering vinden door de gemiddelde kinetische energie $\frac{3}{2}kT$ van een molecuul met massa m gelijk te stellen aan de absolute waarde van de gravitationele potentiële energie $\frac{GmM}{R}$. Vervolgens vervangen we de massa M van dit gebied door haar dichtheid ρ via de substitutie $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$. Dit levert dan de benadering $\frac{3}{2}kT = \frac{GmM}{R} \rightarrow \frac{3}{2}kT = \frac{4}{3}\pi Gm\rho R^2 \rightarrow R = \left(\frac{9kT}{8\pi G\rho m} \right)^{\frac{1}{2}}$. Een exacte berekening die de geluidssnelheid in de gaswolk in rekening brengt, levert vergelijking (38).

²⁰Ook onze zon is uit een dergelijke protoster ontstaan. De zon heeft een massa $M_{\odot} = 2 \times 10^{30}$ kg en bestaat uit ongeveer 10^{57} waterstofatomen met elk een massa van $m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg. De huidige luminositeit van de zon bedraagt $L_{\odot} = 3,8 \times 10^{26}$ W. We hebben gezien dat de ontsnappingssnelheid van de zon gelijk is aan $v_{\text{ontsnapping}} = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{R_{\odot}}}$. De kinetische energie van een atoom als het de zon bereikt is dus $\frac{1}{2}mv_{\text{ontsnapping}}^2 = \frac{GM_{\odot}m}{R_{\odot}} = 3 \times 10^{-16}$ J. Hieruit volgt dat de gravitationele potentiële energie voldoende is om de protoster enkele miljoenen jaren te laten schijnen.

zijn niet mogelijk en we dienen toevlucht te nemen tot magnetische opsluiting of opsluiting met behulp van lasers. Het volume van het magnetisch veld dient relatief klein te zijn, enkele kubieke meters, want anders wordt het vermogen, maar worden ook de constructiekosten, onoverkomelijk. In de zon zijn deze problemen opgelost, alhoewel niet al te efficiënt. De buitentemperatuur is ongeveer 6000 K, terwijl de temperatuur in het centrum van de zon ongeveer $1,6 \times 10^7$ K is. Kernfusie verloopt relatief traag, maar de totale energieproductie is groot, omdat het volume zo groot is.

Gravitatie reguleert het fusieproces in sterren: als om een of andere reden de reacties sneller verlopen, dan heeft dat een temperatuurstijging tot gevolg. Dit leidt direct tot expansie van het centrale deel van de ster, waardoor de reactiesnelheid vermindert en de energieproductie afneemt. Evenzo als het tegenovergestelde gebeurt en de temperatuur en dus ook de gasdruk afneemt, dan krimpt de kern van de ster en neemt de reactiesnelheid weer toe. Op deze wijze kan een ster miljarden jaren een stabiele energieproductie leveren. Hetzelfde proces maakt ook dat als de massa van de ster groot is, de centrale druk en temperatuur relatief hoog is, waardoor de energieproductie groot is. Dit heeft ook tot gevolg dat zware sterren een relatief korte levensduur hebben.

Vóór de ontdekking van kernreacties kon de energieproductie in de zon niet verklaard worden: er was geen bron bekend die een dergelijke hoeveelheid energie gedurende langere tijd kon produceren. Geologische studies tonen aan dat de zon ongeveer dezelfde temperatuur heeft gehad voor een periode van minstens 10^9 jaar. Eddington was een van de eersten die erop wezen, dat met de fusie van vier waterstofatomen tot een ${}^4\text{He}$ -aatom, er ongeveer 7 MeV/nucleon aan energie vrijkomt. Dit proces levert miljoenen keren meer energie op dan een chemische reactie. Er blijft echter een probleem: klassiek kan fusie niet optreden in sterren, omdat de thermische energie van de protonen onvoldoende is om de Coulombafstoting te overwinnen. Het quantummechanisch tunneleffect maakt dergelijke reacties ook bij lagere temperatuur mogelijk. Men kan nu specifieke reacties, verantwoordelijk voor stellaire energieproductie, vaststellen. De eerste sequentie die werd voorgesteld was de zogenaamde koolstof of CNO cyclus weergegeven in Fig. 8, waarin ${}^{12}\text{C}$ en $4p$ getransformeerd worden in een α -deeltje en ${}^{12}\text{C}$. De CNO-cyclus verloopt als volgt,



In deze sequentie fungeert het koolstof als een katalysator. Het ondergaat veranderingen, maar het wordt niet verbruikt. De totale reactie kan dus geschreven worden als



De totale energie Q die in deze reactie vrijkomt, kan eenvoudig gevonden worden uit de bekende massa's (via $E = mc^2$). Er geldt

$$Q(4p \rightarrow {}^4\text{He}) = 26,7 \text{ MeV}. \tag{42}$$

Van deze energie wordt ongeveer 25 MeV gebruikt om de ster te verhitten, de rest wordt afgevoerd door de neutrino's. De CNO-cyclus is dominant in *hete* sterren. In *koude* sterren zoals de zon,

is de pp -cyclus belangrijker. De essentiële stappen in de pp -cyclus zijn

$$\left. \begin{array}{l} pp \rightarrow de^+\nu \\ \text{of} \\ ppe^- \rightarrow d\nu \end{array} \right\} dp \rightarrow {}^3\text{He}\gamma \quad (43)$$

en

$${}^3\text{He} {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} 2p, \quad (44)$$

of

$${}^3\text{He} {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} \gamma. \quad (45)$$

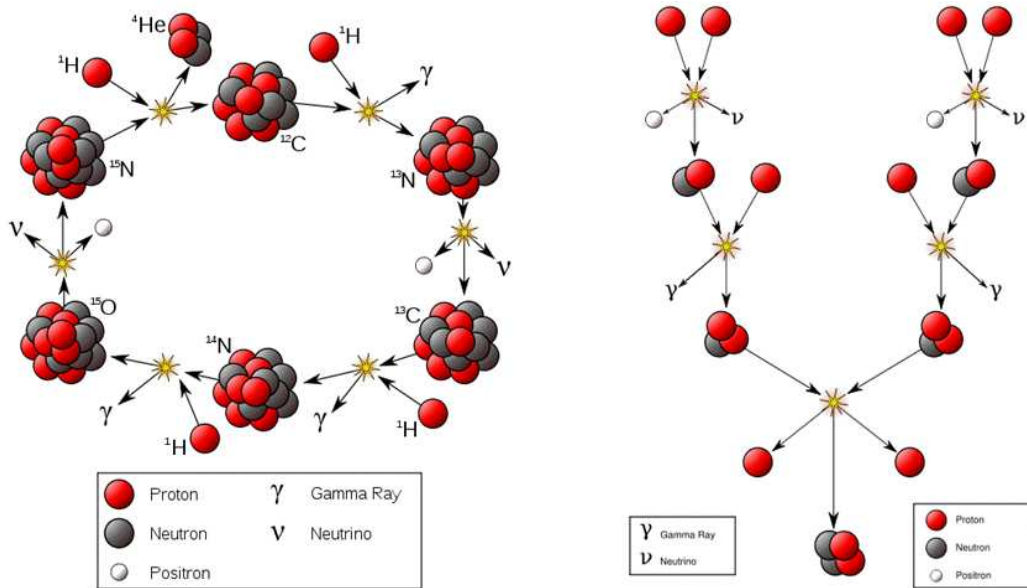
In vergelijking (44) is de reactie $4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu$ reeds gerealiseerd. In vergelijking (45) wordt ${}^7\text{Be}$ gevormd en dit leidt tot ${}^4\text{He}$ via twee sequenties,

$${}^7\text{Be} e^- \rightarrow {}^7\text{Li} \nu; \quad {}^7\text{Li} p \rightarrow 2 {}^4\text{He}, \quad (46)$$

of

$${}^7\text{Be} p \rightarrow {}^8\text{B} \gamma; \quad {}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be}^* e^+\nu; \quad {}^8\text{Be}^* \rightarrow 2 {}^4\text{He}. \quad (47)$$

De pp -cyclus heeft dezelfde energieopbrengst als de CNO-cyclus. Om de reactiesnelheden te



Figuur 8: CNO en pp -cyclus voor het fusieproces van een ster. De pp -cyclus is dominant in de zon (de CNO-cyclus verzorgt slechts 1,6 % van de energie productie in de zon). De CNO-cyclus is belangrijk in massieve waterstof-brandende sterren met een hoge centrale temperatuur, zoals Sirius A.

kunnen berekenen, zijn er twee verschillende soorten input nodig. Ten eerste, de temperatuurverdeling van het inwendige van de zon dient bekend te zijn. Het originele werk gaat terug tot Eddington en verbeterde versies lijken betrouwbaar te zijn (astronomen zijn van mening dat

de temperatuur in het inwendige van de zon ongeveer 16 miljoen K is). Ten tweede dienen de werkzame doorsneden²¹ voor de genoemde reacties bekend te zijn voor temperaturen in de orde van 16 miljoen K. Deze temperatuur correspondeert met kinetische energieën van slechts enkele keV, en de bijbehorende werkzame doorsneden zijn uitermate klein. De vergelijkingen tonen dat er twee typen reacties een rol spelen: hadronische en zwakke reacties (alle reacties met neutrino's zijn zwak). De gemiddelde levensduur van het verval ${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be}^* e^+ \nu$ is gemeten. De twee zwakke reacties in vergelijking (43) verlopen echter zo traag, dat ze niet in het laboratorium gemeten kunnen worden: ze worden berekend door gebruik te maken van de Hamiltoniaan voor de zwakke wisselwerking. Teneinde de werkzame doorsneden voor de hadronische reacties te vinden, worden de waarden die bij hogere energieën gemeten zijn, geëxtrapoleerd naar enkele keV. Experimentatoren (zoals W.A. Fowler van Caltech) en diverse theoretici zijn van mening dat hun schattingen stabiel zijn en dat zowel de structuur van sterren als de kernfysische aspecten van de productie van zonne-energie goed begrepen zijn.

3.3 Nucleosynthese in sterren

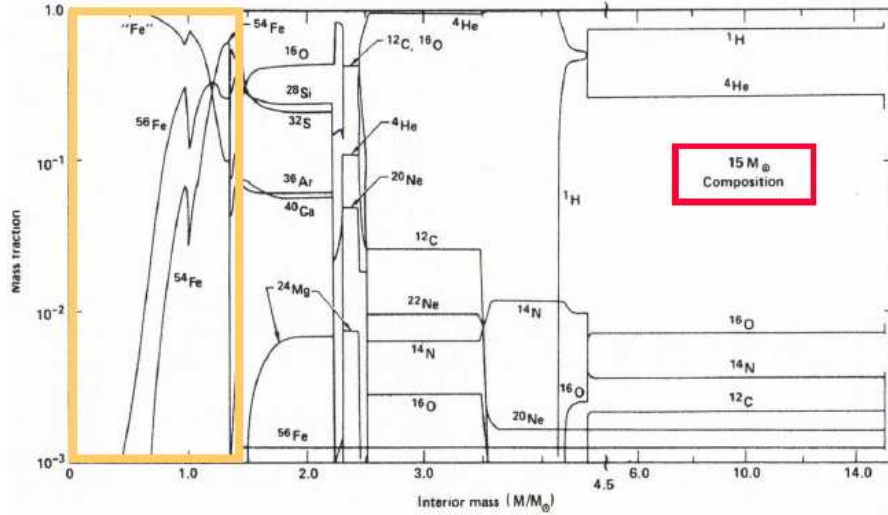
Verschillende lichte elementen zijn gevormd tijdens de Big Bang. Deze zogenaamde primordiale productie is niet mogelijk voor zware elementen, omdat neutron- of protonvangst van ${}^4\text{He}$ niet tot stabiele kernen leidt en vanwege het trage verloop van andere reacties. Neutronvangst bijvoorbeeld, leidt tot ${}^5\text{He}$, hetgeen instabiel is en weer direct vervalt naar ${}^4\text{He}$. Ook de vangst van α -deeltjes via ${}^4\text{He}{}^4\text{He} \rightarrow {}^8\text{Be}$, vormt alleen het instabiele ${}^8\text{Be}$, dat weer onmiddellijk opbreekt in twee alfa deeltjes. Als de temperatuur van het universum gedaald is tot ongeveer 3×10^8 K, ongeveer een half uur na haar geboorte, stopt nucleosynthese, omdat Coulomb repulsie verdere kernreacties verhindert. De abundanties van de diverse elementen gevormd in de Big Bang zijn nu ingevroren, zodat de abundanties van de lichte elementen d , ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$ en ${}^7\text{Li}$, zoals die tegenwoordig worden waargenomen, nog steeds de toestand van een universum van een half uur oud reflecteren.

Lichte kernen kunnen ook in sterren geproduceerd worden. In het geval van ${}^4\text{He}$ verklaart dit productieproces echter slechts ongeveer 10 % van de waargenomen abundantie van dit element. Deuterium kan al helemaal niet in significante hoeveelheden in sterren geproduceerd worden, omdat het bij dergelijke hoge dichtheden direct in zware elementen geconverteerd wordt. Deze conversie beperkt de huidige baryondichtheid in het universum tot minder dan ongeveer 5×10^{-28} kg/m³. De productie van lithium in sterren wordt positief beïnvloed door neutrino interacties met ${}^4\text{He}$. Deze reacties produceren ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, protonen en neutronen. Een van de successen van het standaard model is haar vermogen om de abundanties van de lichte elementen te voorspellen, zelfs al verschillen die een factor miljard van elkaar. Echter, de gemeten abundanties van zware elementen kan niet verklaard worden door Big Bang nucleosynthese. Klaarblijkelijk werden de zware elementen in een later stadium geproduceerd, nadat stervorming reeds plaatsgevonden had. Nucleosynthese, de verklaring van de abundantie van de elementen, is dus onlosmakelijk verbonden met sterstructuur en stervolutie.

Druk en temperatuur in een ster zijn immens. In de zon bijvoorbeeld, is de druk in het centrum 2×10^{10} bar en de temperatuur 16×10^6 K. Atomen zijn onder deze omstandigheden bijna volledig geïoniseerd, waardoor er een plasma van vrije elektronen en naakte atoomkernen ontstaat. De interne druk wordt in stand gehouden door kernreacties die voor de stralingsenergie van de ster zorgen. Zolang deze reacties plaatsvinden, zullen gravitationele en interne druk elkaar in balans houden en is de ster in een evenwichtstoestand. Wat gebeurt er echter als de brandstof

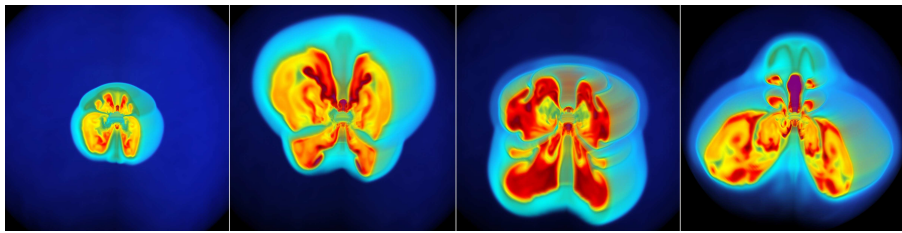
²¹De werkzame doorsnede is een maat voor de waarschijnlijkheid dat een bepaalde wisselwerking tussen deeltjes plaatsvindt (bijvoorbeeld verstrooiing of een kernreactie). Deze waarschijnlijkheid is vaak sterk afhankelijk van de energie van de deeltjes of de samenstelling van een target dat wordt beschoten. De werkzame doorsnede wordt aangeduid met σ en heeft de dimensie van oppervlakte.

opgebruikt is? Wat gebeurt er met onze zon als alle waterstof opgebruikt is en de pp -cyclus stopt? De ster zal dan onder gravitatie samentrekken, waardoor de centrale druk en temperatuur zullen toenemen. Bij hogere temperatuur zullen nieuwe kernreacties plaatsvinden en een nieuwe evenwichtstoestand wordt bereikt. Onder die omstandigheden zullen nieuwe elementen worden gevormd. Er zijn dus verschillende stadia van kernfusie en contractie. In alle stadia zullen zware elementen gegenereerd worden. Fig. 9 geeft de resultaten van de berekening van de samenstelling



Figuur 9: Resultaten van de berekening van de samenstelling van een ster met een massa van 15 zonnemassa's. De abundancies van de diverse elementen worden gegeven als functie van massa (in zonnemassa's).

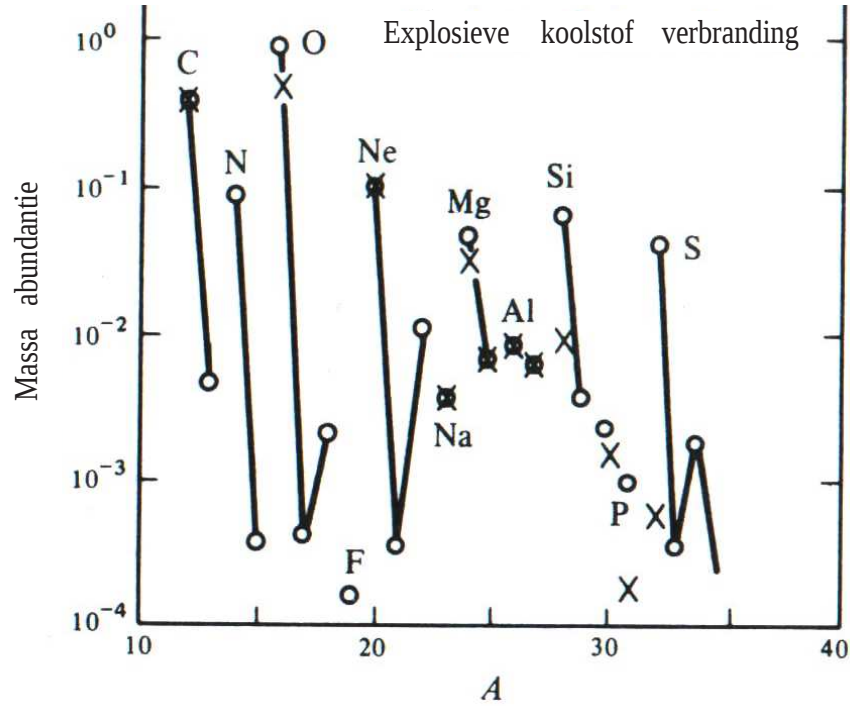
van een ster met een massa van 15 zonnemassa's. Deze ster bevindt zich aan het eind van de diverse stadia van verbranding. Een dergelijke ster zal dan de supernova-fase ondergaan, waarna zij zich tot een neutronenster zal ontwikkelen. Ook voor de berekening van de supernova-fase bestaan er nauwkeurige modellen. Figuur 10 toont de resultaten van een dergelijke berekening.



Figuur 10: Resultaat van een computersimulatie van een supernova. De massaverdeling wordt gegeven als functie van de tijd, voor de eerste 0,7 seconde van het proces.

De volgende belangrijke stap, na de vorming van ${}^4\text{He}$, is de productie van ${}^{12}\text{C}$. Het ${}^8\text{Be}$, gevormd in de reactie ${}^4\text{He} {}^4\text{He} \rightarrow {}^8\text{Be}$, is instabiel. Echter, indien de ${}^4\text{He}$ dichtheid hoog genoeg is, kunnen meetbare hoeveelheden ${}^8\text{Be}$ aanwezig zijn in de evenwichtsreactie





Figuur 11: Residu van koolstofverbranding in een exploderende ster. De cirkels stellen zonnestelsel abundanties voor, terwijl de berekende waarden door kruisen gerepresenteerd worden. De lijnen verbinden stabiele isotopen van een gegeven element. De aangenomen piektemperatuur is 2×10^9 K en de dichtheid is 10^8 kg/m³.

Vangst van een alfa deeltje kan dan plaatsvinden,



waardoor koolstof gevormd wordt. Deze vangst-reactie wordt versterkt, omdat de vorming van ${}^{12}\text{C}$ voornamelijk verloopt via een resonantie met een aangeslagen toestand, ${}^{12}\text{C}^*$.

De vorming van ${}^{16}\text{O}$ vindt plaats via



Bovenstaande sequentie kan herhaald worden voor zwaardere elementen, terwijl proton- en neutronvangst de elementen kunnen vormen die tussen de alfa-achtige nucleïden liggen. Fusiereacties, zoals koolstofverbranding, zijn van vitaal belang om rekenschap te kunnen geven van de abundantie van elementen in het gebied $20 \leq A \leq 32$. De reacties,



vereisen een temperatuur hoger dan ongeveer 10^9 K. Dergelijke temperaturen komen slechts voor in enkele zeer massieve sterren en men denkt dat koolstofverbranding voornamelijk plaatsvindt in massieve, zogenaamde exploderende sterren. Men neemt aan dat de temperatuur in exploderende

sterren ongeveer 2×10^9 K is. Figuur 11 laat zien dat de abundantie van de geproduceerde elementen goed overeenkomt met de resultaten van stermodellen. Op dezelfde manier kan zuurstofverbranding,



rekenschap geven van de abundantie van elementen met $32 \leq A \leq 42$, maar vereist een temperatuur van ongeveer $3,6 \times 10^9$ K. Verbranding van silicium draagt bij tot de verklaring van de vorming van veel elementen tot Ni.

Een nieuw aspect komt aan de orde als de vorming van ijzer bereikt wordt. De bindingsenergie per nucleon heeft een maximum in de buurt van de Fe-groep. Voor atoomgetallen groter dan dat van ijzer, neemt de bindingsenergie per nucleon af. Om die reden kan de Fe-groep niet dienst doen als brandstof en de verbranding stopt als ijzer gevormd is. Dit verklaart ook waarom de elementen in de buurt van Fe meer abundant zijn dan andere. Elementen zwaarder dan ijzer zijn waarschijnlijk gevormd door neutron- en protonvangst reacties. Deze processen vinden plaats zolang de ster brandt of wanneer explosies protonen en neutronen produceren. Op het moment dat de kernreacties die de energie van de ster leveren stoppen, stopt ook de productie van zware elementen.

3.4 Standaard zonnemodel

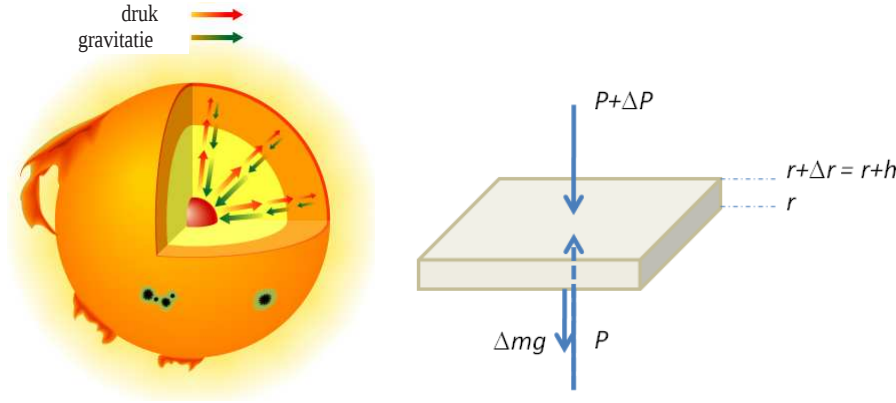
Het standaard zonnemodel (standard solar model - SSM) is een van de meest complete en succesvolle theorieën van de moderne sterrenkunde. We zullen de basisgedachten achter dit model en de consequenties ervan kort bespreken. Het SSM is gebaseerd op vier aannamen:

- De zon is sferisch symmetrisch.
- De zon is in hydrostatisch evenwicht.
- Energie wordt overgebracht door straling en convectie alsook door neutrino's.
- Fusie van waterstof tot helium is de energiebron.

De centripetale versnelling op de equator van de zon is $a = v^2/R \approx 5 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$ en dat is verwaarloosbaar ten opzichte van haar gravitatie van $g = GM/R^2 \approx 274 \text{ m/s}^2$. Sferische symmetrie is dus een goede aanname en we mogen toestandvariabelen, zoals temperatuur en druk, schrijven als functie van de afstand tot het centrum van de zon, bijvoorbeeld $T(r)$ en $P(r)$. Indien de lokale compositie (voornamelijk waterstof en helium) bekend is, dan geven deze twee grootheden ook de dichtheid. Als we aannemen dat de gasdruk²² dominant is over de stralingsdruk dan kunnen we deze laatste verwaarlozen. Er geldt $P_{\text{gas}} = \frac{\rho k T}{\mu}$ en $P_{\text{straling}} = \frac{4\sigma T^4}{3c}$, met ρ de dichtheid, μ de deeltjesmassa ($3,345 \times 10^{-27} \text{ kg}$ voor waterstofmoleculen), σ de Stefan-Boltzmann constante en c de lichtsnelheid. Diep in de zon bedraagt de dichtheid $\rho \sim 10^4 \text{ kg/m}^3$ en temperatuur $T \sim 10^7 \text{ K}$ en onder deze condities vinden we $P_{\text{gas}} \sim 1,4 \times 10^{15} \text{ N/m}^2$ en $P_{\text{straling}} \sim 2,5 \times 10^{12} \text{ N/m}^2$. We zien dat de stralingsdruk inderdaad verwaarloosbaar is²³.

²²We vinden de uitdrukking voor de gasdruk uit de ideale gaswet, $PV = NkT$, met P de gasdruk, V het volume, N het aantal moleculen, k de constante van Boltzmann en T de temperatuur. Omdat de deeltjesdichtheid, $\frac{N}{V} = \frac{\rho}{\mu}$, met ρ de massadichtheid, μ het moleculaire massa ($\mu = 2m_p$ voor waterstofmoleculen, H_2) en m_p de massa van het proton, kunnen we de gasdruk ook schrijven als $P = \frac{\rho k T}{\mu}$.

²³Voor massieve sterren met hogere temperatuur kan stralingsdruk wel een belangrijke rol spelen.



Figuur 12: In de zon is er evenwicht tussen gravitatie en de gasdruk ten gevolge van de energie opgewekt door kernfusie. Rechts: op een schil met oppervlakte A en dikte h is er hydrostatisch evenwicht tussen de krachten.

We stellen ons voor dat de zon is opgebouwd uit sferische schillen. Op de bodem van een volume element werkt een kracht ter grootte $F_{\text{bodem}} = P(r)A$, terwijl op de top een kracht werkt ter grootte $F_{\text{top}} = -(P + \Delta P)A$. Het minteken geeft aan dat deze kracht naar het centrum van de zon wijst. Verder werkt er nog de gravitatie op de massa van het volume element. Het gewicht is gelijk aan $F_{\text{gravitatie}} = -\Delta mg$, met Δm de massa van het element en g de lokale gravitatie versnelling. We vinden $F_{\text{gravitatie}} = -\rho Ahg$. De lokale gravitatie wordt gegeven door $g = \frac{GM_I}{r^2}$, waarbij M_I de totale massa binnen de bol is die begrensd wordt door de sferische schil. Deze krachten zijn in hydrostatisch evenwicht, $P(r)A - (P + \Delta P)A - \rho Ah \frac{GM_I}{r^2} = 0$, en er geldt voor een dunne sferische schil (met $\Delta P \rightarrow dP$ en $\Delta r = h \rightarrow dr$)

$$P - (P + dP) - \frac{GM_I \rho dr}{r^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{dr} = -\frac{GM_I \rho}{r^2} = -\frac{GM_I P \mu}{kT r^2}. \quad (53)$$

Als randvoorwaarde hebben we dat de druk nul moet zijn aan de rand van de ster, waar $\rho \sim 0$. De massa binnen de bol bedraagt M_I en de sferische schil levert een bijdrage

$$dM_I = 4\pi r^2 \rho dr = \frac{4\pi r^2 P \mu}{kT} dr \quad \rightarrow \quad \frac{dM_I}{dr} = \frac{4\pi r^2 P \mu}{kT}. \quad (54)$$

Hier geldt de randvoorwaarde dat $M_I = 0$ als $r = 0$. Verder geldt dat $M_I = M_\odot$ als $r = R_\odot$, de straal van de ster.

In de evenwichtstoestand is de energie binnen het volume element, tussen r en $r + dr$ constant. De stralingsflux door het buitenoppervlak is dan gelijk aan de som van de flux door het binnen oppervlak en het vermogen dat binnen de sferische schil wordt gegenereerd. Dit geeft

$$L + dL = L + 4\pi r^2 \epsilon \rho dr \quad \rightarrow \quad \frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon \rho = \frac{4\pi r^2 P \mu \epsilon}{kT}, \quad (55)$$

met L de *luminositeit* ofwel de flux van uitgestraalde energie per tijdseenheid, en ϵ de functie van intrinsieke energie generatie (in W/kg). Bij een hogere temperatuur zal er meer energie in de ster worden gegenereerd. Als randvoorwaarden gebruiken we $L = 0$ en $r = 0$, terwijl voor $r = R_\odot$ we de luminositeit $L = L_\odot$ van de zon dienen te vinden.

Tenslotte stellen we een vergelijking op voor de temperatuurverdeling van de zon. Hiertoe beschouwen we de intensiteit ($\text{J}/(\text{m}^2\text{s})$) door een sferische schil. Straling passeert deze schil,

terwijl er ook straling door kernfusie in de schil kan worden gegenereerd. Als de gemiddelde intensiteit van de straling binnen de schil gelijk is aan I , dan is de energie die geabsorbeerd wordt per tijdseenheid voor straling die de schil passeert gelijk aan $-I\kappa\rho dr$, met κ de *opaciteit* gedefinieerd als $\kappa = \frac{\zeta}{\rho}$, met ζ de *lineaire absorptie coëfficiënt*. De geabsorbeerde intensiteit bedraagt $dI = -\zeta I dr = -\kappa\rho I dr$. De intensiteit van de straling die de schil passeert is gerelateerd aan de lokale luminositeit volgens $I = \frac{L}{4\pi r^2}$. Vanwege de relatie tussen energie (E) en impuls (p voor straling geldt $E = pc$), kunnen we de impulsverandering per tijdseenheid van de straling tussen binnen- en buitenoppervlak schrijven als

$$dp = -\frac{I\kappa\rho}{c}dr = -\frac{L\kappa\rho}{4\pi r^2 c}dr. \quad (56)$$

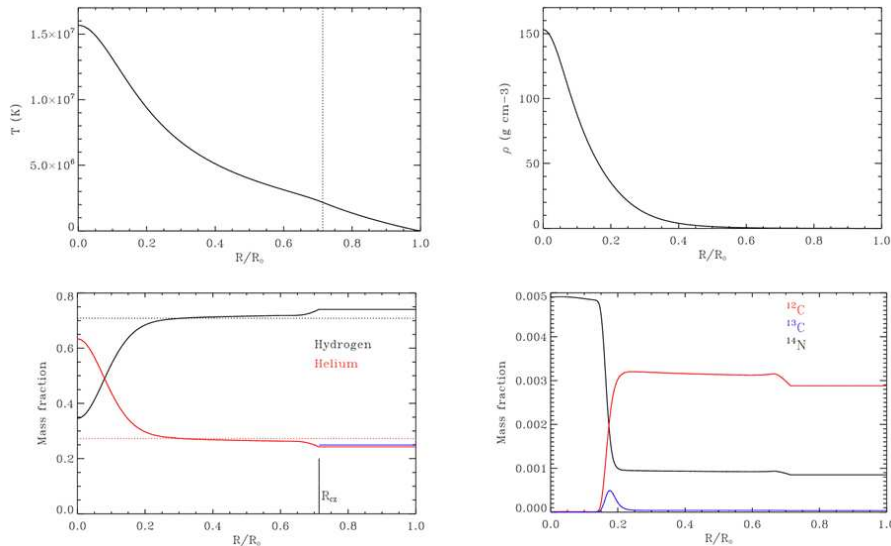
De impulsverandering in een sectie met eenheidsoppervlak vertegenwoordigt een krachtverschil per eenheid van oppervlakte, of stralingsdruk tussen binnen- en buitenoppervlak van het element. Er geldt

$$\frac{dP_{\text{straling}}}{dr} = -\frac{L\kappa\rho}{4\pi r^2 c}. \quad (57)$$

Omdat de stralingsdruk gegeven wordt door $P_{\text{straling}} = \frac{4\sigma T^4}{3c}$, kunnen we dit differentiëren naar r en in bovenstaande vergelijking invullen. We vinden dan

$$\frac{dP_{\text{straling}}}{dr} = \frac{16\sigma T^3}{3c} \frac{dT}{dr} \rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{3L\kappa\rho}{64\pi\sigma T^3 r^2}. \quad (58)$$

Voor de temperatuur nemen we als randvoorwaarde $T = T_{\text{oppervlak}}$ als $r = R_{\odot}$. Dat is de conventionele temperatuur van een ster, die men kan waarnemen; het is de temperatuur van de fotosfeer, de zichtbare buitenkant van de ster.



Figuur 13: Resultaten van het standaard model voor de zon. Boven: temperatuur en dichtheidsverdeling; onder: massafracties van diverse elementen.

Bovenstaande differentiaalvergelijkingen kunnen iteratief worden opgelost en Fig. 13 geeft de berekende temperatuur en dichtheidsverdeling in de zon. We zien dat in het centrum van de zon een temperatuur van 16 miljoen graden wordt bereikt.

We kunnen een gevoel krijgen voor het verband tussen massa (M), grootte (R) en de druk (P_C) in het binnenste van de ster. Hiervoor gebruiken we vergelijking (53) om bij grove benadering de druk in de ster (in één stap met $dr \rightarrow R$ en $M_I \rightarrow M$) te schrijven als $\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_I\rho}{r^2} \rightarrow P_C \approx \frac{GM\rho_C}{R}$. We benaderen de massa met $M \approx \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_C$. Combineren levert $P_C \approx \frac{3GM^2}{4\pi R^4}$. Op dezelfde wijze vinden we dat de centrale temperatuur schaaft als $T_C \sim \frac{M}{R}$.

Als we sterren met globaal dezelfde massa M beschouwen, dan geldt $M \sim \rho_C R^3 = \text{constant}$. Omdat dus geldt dat $R \sim \rho_C^{-\frac{1}{3}}$, vinden we de toestandsvergelijking voor de centrale druk

$$P_C \sim \rho_C^{\frac{4}{3}}. \quad (59)$$

Dit is de toestandsvergelijking voor een ster waarbij de druk precies in balans is met de gravitatie. Toestandsvergelijking van de vorm $P \sim \rho^\gamma$ worden polytropische toestandsvergelijkingen genoemd. Als de polytropische index γ groter is dan $4/3$ dan neemt de druk sneller toe bij compressie en stoot de ster terug, de ster is stabiel. Toestandsvergelijkingen met $\gamma < 4/3$ zijn niet stabiel.

3.5 Witte dwergen, supernovae en neutronensterren

In het voorgaande hebben we diverse verbrandingsprocessen die zich in sterren afspelen beschreven. In deze fusiereacties worden elementen geproduceerd en tegelijkertijd wordt meer en meer kernbrandstof opgebruikt. Wat gebeurt er wanneer er geen brandstof meer is? Volgens de gangbare theorieën kan een ster op vier manieren aan zijn einde komen: het kan een zwart gat, een witte dwerg, of een neutronenster worden, of het kan volledig fragmenteren. Haar uiteindelijke lot wordt bepaald door de beginmassa van de ster. Als deze massa minder is dan ongeveer vier zonnemassa's, dan zal de ster een witte dwerg worden. Als deze massa echter groter is dan ongeveer vier zonnemassa's, kan een supernova ontstaan die resulteert in een neutronenster, een zwart gat of in volledige fragmentatie. Zwarte gaten trekken zich oneindig lang samen en benaderen, maar zullen dit nooit bereiken, een straal van ongeveer 3 km en een dichtheid van meer dan 10^{19} kg/m^3 . Neutronensterren hebben een straal van ongeveer 10 km en een centrale dichtheid die groter is dan die van kernmaterie, ongeveer 10^{17} kg/m^3 . In het volgende bespreken we de vorming en eigenschappen van neutronensterren.

Stel dat het fusieproces ten einde loopt en de ster begint te contraheren onder zijn eigen gravitatie. Volgens het Pauliprincipe dient een systeem dat N_e elektronen bevat spinparen te vormen met impulsen die minstens $\Delta p_{\text{minimum}}$ verschillen. Dit betekent dat in drie dimensies de grootste impuls in elke richting minstens de waarde $N_e^{\frac{1}{3}} \Delta p_{\text{minimum}}$ dient te hebben. Merk op dat in deze bespreking we ons niet druk maken over factoren 2 of π , etc. De minimum impuls kunnen we vinden uit Heisenbergs onzekerheidsrelatie en is geassocieerd met de maximale onzekerheid in de plaats van het deeltje, hetgeen de grootte ($2R$) van de ster is. We vinden hiermee voor de minimum impuls in de x -richting $\Delta p_{\text{minimum } x} = \frac{h}{2R}$, met h de constante van Planck. We kunnen nu het effect van het Pauliprincipe in rekening brengen door te vermenigvuldigen met $N_e^{\frac{1}{3}}$ en vinden de minimum waarde die de grootste impuls in de x -richting dient te hebben. De drie richtingen combineren om een kinetische energie te leveren van

$$\langle K \rangle_{\text{gemiddeld}} = 3 \frac{\left(N_e^{\frac{1}{3}} \Delta p_{\text{minimum } x} \right)^2}{2m_e} = N_e^{\frac{2}{3}} \frac{3h^2}{8m_e R^2} \quad (60)$$

waarbij we de klassieke relatie tussen kinetische energie en impuls gebruikt hebben ($K = \frac{p^2}{2m}$). Deze random kinetische energie leidt direct tot de gasdruk via relatie $PV = NkT$ waarbij we de

thermische energie kT vervangen door $kT = \frac{2}{3} \langle K \rangle_{\text{gemiddeld}}$. We vinden dan

$$P_{\text{Fermi}} = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle K \rangle_{\text{gemiddeld}} = \frac{h^2 N_e^{\frac{5}{3}}}{4m_e V R^2}. \quad (61)$$

Vervolgens gebruiken we de benadering die een relatie geeft tussen druk, massa en grootte van een ster $P = \frac{3GM^2}{4\pi R^4}$ en stellen dit gelijk aan de Fermi gasdruk P_{Fermi} . Verder geldt dat $M = N_e \mu \approx 2m_p N_e$ en $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. We vinden

$$R = N_e^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{8Gm_p m_e M}, \quad (62)$$

en als we hiervoor de massa van de zon gebruiken ($M = M_{\odot}$) vinden we een straal $R = 10^7$ m. Dat is een straal in de orde van de straal van de aarde. Een exacte berekening geeft als uitkomst dat een witte dwerg met een massa van 1 zonnemassa een straal heeft die ongeveer 90 % is van de straal van de aarde.

We kunnen voor een witte dwerg de toestandsvergelijking afleiden door op te merken dat $R \sim V^{\frac{1}{3}}$ en we zien dat de Fermi gasdruk alleen afhangt van de verhouding N_e/V , het aantal elektronen per volume eenheid. Deze elektronendichtheid is evenredig met de massadichtheid $\rho = \mu N_e/V$ en we vinden hiermee de Fermi toestandsvergelijking

$$P_{\text{Fermi}} = \beta \rho^{\frac{5}{3}}, \quad (63)$$

waarbij de constante β afhangt van h , m_e en m_p . De polytropische index $\gamma = \frac{5}{3}$ en dat betekent dat een niet-relativistisch ontaard Fermigas stabiel is onder kleine verstoringen²⁴.

Een ster die gedragen wordt door elektron ontaarding wordt een witte dwerg genoemd. Ook de protonen in het plasma van de ster zijn onderhevig aan de onzekerheidsrelatie en het Pauliprincipe. Derhalve vormen de protonen ook een ontaard gas en leveren ze een bijdrage tot de gasdruk van de ster. Omdat de kinetische energie gegeven wordt door $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ leveren protonen bij dezelfde waarde van impuls een beduidend kleinere bijdrage tot de kinetische energie en daarmee de gasdruk (het schaaft omgekeerd evenredig met de massa). Witte dwergen worden waargenomen door sterrenkundigen en komen relatief veel voor: typisch 1 op de 10 sterren is een witte dwerg.

Als een ster massief is, dan worden de elektronen in een klein volume gedwongen door de gravitatiekracht. Hierdoor wordt hun typische snelheid groot, in de orde van de lichtsnelheid. Om te begrijpen wat er dan fysisch gebeurt, dienen we een *relativistisch* ontaard elektronengas te beschouwen. We nemen hierbij aan dat de elektronen een gas vormen van ultra-relativistische vrije fermionen, die zich in een volume V bevinden. Alle beschikbare toestanden zijn bezet tot de Fermi energie E_F . Dit ontaarde elektronengas levert de druk die in evenwicht is met de gravitationele aantrekking. Voor ultra-relativistische deeltjes wordt het verband tussen energie en impuls gegeven door $E = |\vec{p}|c$. Analooq aan vergelijking (61) wordt de druk voor een ontaard relativistisch elektrongas gegeven door

$$P = \frac{hcN_e^{\frac{4}{3}}}{3RV}. \quad (64)$$

Als we dit weer gelijkstellen aan $\frac{3GM^2}{4\pi R^4}$ en het volume vervangen door $\frac{4}{3}\pi R^3$ krijgen we

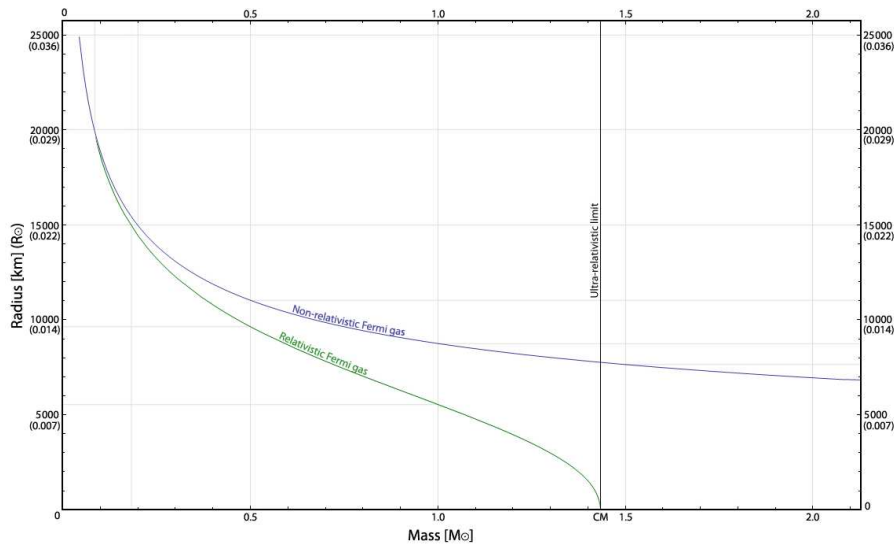
$$\frac{hcN_e^{\frac{4}{3}}}{4\pi R^4} = \frac{3GM^2}{4\pi R^4}. \quad (65)$$

²⁴Met ontaarde materie bedoelen we materie waarbij de dichtheid dermate groot is dat de belangrijkste bijdrage tot de druk komt van het Pauliprincipe. Compressie van ontaarde materie dwingt deeltjes over te gaan naar quantumtoestanden met hogere energie.

In bovenstaande vergelijking gebeurt er iets verrassends, want de straal van de ster valt uit de vergelijking. Wat we overhouden is een uitdrukking voor de massa. Klaarblijkelijk heeft een relativistische witte dwerg een *unieke* massa. Deze massa noemen we de Chandrasekhar massa²⁵ en deze wordt gegeven door

$$M_{\text{Ch}} = \left(\frac{hc}{3G} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\mu} \right)^2 = \left(\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}} \frac{m_{\text{Pl}}^3}{m_p^2} \right) \approx 1,4 M_{\odot}. \quad (66)$$

We hebben we in vergelijking (65) de relatie $M = N_e \mu$ gebruikt, en in de laatste stap hebben we $\mu = m_p$ genomen. Verder is m_{Pl} de zogenaamde Planck massa, die wordt gegeven door $m_{\text{Pl}} = \left(\frac{hc}{G} \right)^{\frac{1}{2}} = 5,5 \times 10^{-8} \text{ kg}$.



Figuur 14: Relatie tussen straal en massa voor een witte dwerg voor een (niet-)relativistisch elektrongas. In de limiet van een ultra-relativistisch elektrongas wordt de Chandrasekhar limiet bereikt.

Uit vergelijking (64) kunnen we de toestandsvergelijking van een ultra-relativistische witte dwerg vinden. Omdat $R \sim V^{\frac{1}{3}}$ zien we dat

$$P = \beta \rho^{\frac{4}{3}} \quad (67)$$

Zoals we besproken hebben in vergelijking (59) is een index $\gamma = \frac{4}{3}$ slechts marginaal stabiel voor gravitationele ineenstorting. Elke kleine correctie op de eigenschappen van een ultra-relativistische witte dwerg kan instabiliteit tot gevolg hebben.

Men neemt aan dat neutronensterren zich ontwikkelen uit de gravitationele samenstorting van sterren die massiever zijn dan ongeveer acht zonnemassa's. Tegen het einde van de diverse stadia van kernverbranding heeft de temperatuur een waarde van ongeveer $8 \times 10^9 \text{ K}$ bereikt in een centrale, voornamelijk uit ijzer bestaande, kern ter grootte van ongeveer 1,5 zonnemassa. Het element ^{56}Fe heeft de meest stabiele kern bij lage temperatuur en druk. Bij de druk, dichtheid en temperatuur van de centrale kern zullen de atomen volledig geïoniseerd zijn, waarbij de vrije

²⁵Subrahmanyan Chandrasekhar (1910 - 1995) heeft deze limiet afgeleid, die bepaalt of een instortende ster een witte dwerg wordt of een exotischer object: neutronenster of zwart gat. Ook quarksterren bestaande uit quarkmaterie (met name *s*-quarks) behoren tot de theoretische mogelijkheden.

elektronen een ontaard gas vormen. Het gedrag van deze elektronen bepaalt de verdere evolutie van de ster.

De ultra-relativistische witte dwerg is niet stabiel voor gravitationele ineenstorting. De sterkern verliest elektronen vanwege elektronvangst²⁶ door het ijzer, waarbij neutrino's worden uitgezonden. Als elektronen niet langer weerstand kunnen bieden aan de massa van de kern, stort de ster in. De gravitationele energie die hierbij vrijkomt wordt in warmte en kinetische energie omgezet. Kernen gaan hierbij over tot een gas van nucleonen en de dichtheid van de kern van de ster neemt toe tot waarden die ongeveer twee keer zo groot zijn als die van kernmaterie. Op dit punt aangekomen, stopt de compressie omdat het nucleongas nu de druk levert die nodig is om verdere ineenstorting te voorkomen. In het geval van niet al te grote massieve sterren, stuitert de kern wat op en neer als de compressie stopt, waardoor uitgaande drukgolven ontstaan die resulteren in een schokgolf. Deze schokgolf zal de mantel van de ster doen scheuren waardoor er een explosie volgt. Op deze wijze wordt een type II supernova geboren. De energie van de ineengestorte kern, ongeveer 3×10^{46} J, wordt in een tijdspanne van ongeveer 10 s uitgezonden in de vorm van neutrino's, waarbij er een neutronenster resteert. De neutrino's van SN1987a zijn op aarde waargenomen door het Superkamiokande en IMB experiment, waarbij de energie- en tijdverdeling van deze neutrino's gemeten is.

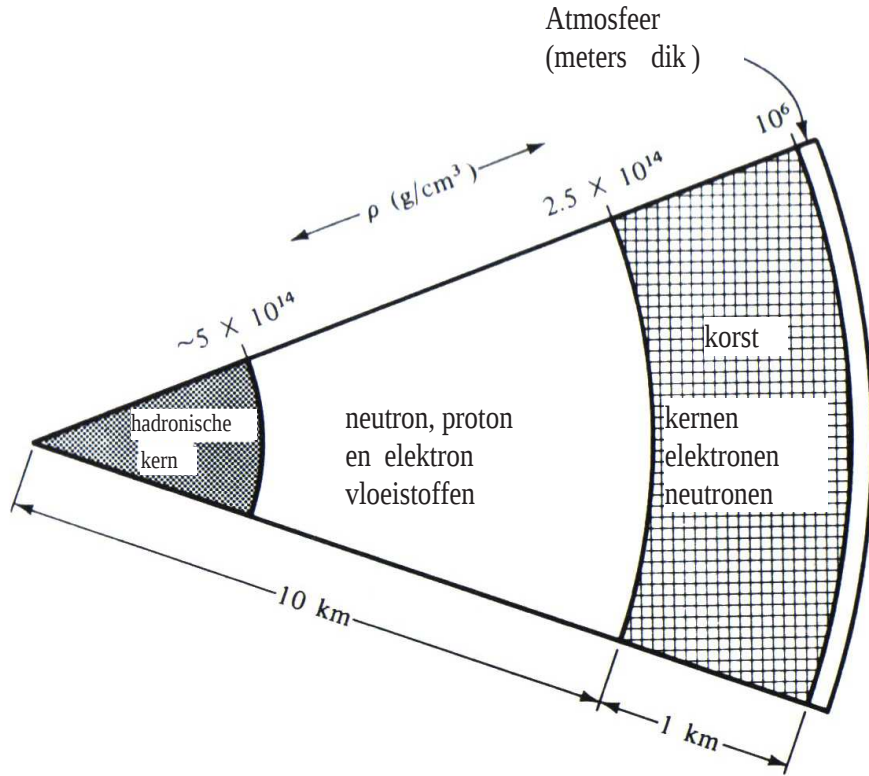
Neutrino emissie is een efficiënt koelproces voor de resterende neutronenster. De ster koelt al fors binnen een paar seconden en heeft na een paar dagen een interne temperatuur van ongeveer 10^{10} K bereikt. Deze interne temperatuur blijft zeker boven de 10^9 K gedurende de eerste duizend jaar, met neutrino emissie als het belangrijkste koelproces. Daarna wordt foton-emissie het dominante koelproces en bereikt de neutronenster een temperatuur van ongeveer 10^8 K. Fig. 15 toont een doorsnede van een typische neutronenster. Hierbij zijn de volgende vragen relevant: Hoe heeft de ster deze eindtoestand bereikt? Waarom stort de ster niet volledig in? Veel vakgebieden zijn betrokken bij een formulering van antwoorden op deze vragen: relativiteitstheorie, quantummechanica, kern- en deeltjesfysica en vastestof fysica. In het volgende bespreken we een aantal subatomaire fysica aspecten.

We beschouwen als eerste de dichtheid en samenstelling van de ster. Voor een gegeven massa van de neutronenster, kunnen we de straal en dichtheidsverdeling uitrekenen²⁷. Voor een ster met een straal van 10 km is de centrale dichtheid ongeveer $10^{17} - 10^{18}$ kg/m³. De dichtheid neemt toe van nul, aan de top van de 'atmosfeer', tot een waarde die groter is dan die van kernmaterie in het centrum. Uit de dichtheid kunnen we de samenstelling op een gegeven diepte afleiden. De buitenste laag bestaat voornamelijk uit ⁵⁶Fe, het eindresultaat van het proces van kernverbranding. De dichtheid neemt toe als we in de richting van het centrum van de ster gaan en de Fermi energie wordt dusdanig groot, dat elektronvangst kan optreden, net zoals dat het geval was bij het ontstaan van een neutronenster in de pre-supernova fase. Bij deze hogere temperatuur worden meer neutronen-rijke isotopen gevormd. Elektronvangst blijft toenemen en bij een dichtheid van ongeveer 4×10^{14} kg/m³ zullen kernen met 82 neutronen, zoals ¹¹⁸Kr, het meest stabiel zijn. Merk op dat gewoon krypton op aarde een atoomgetal $A = 84$ heeft. De meest stabiele nucleïden bij dergelijke hoge drukken zijn dus zeer neutronen-rijk. Onder normale toestanden zouden dergelijke kernen direct vervallen door elektron-emissie. Echter bij drukken die heersen in een neutronenster, zijn alle beschikbare toestanden reeds door elektronen bezet en verbiedt het Pauliprincipe een dergelijk beta-verval.

Het buitenste neutron van ¹¹⁸Kr is nauwelijks gebonden. Als de dichtheid groter wordt dan 4×10^{14} kg/m³, beginnen de neutronen uit de kernen te lekken en ontstaat er een ontaarde vloeistof.

²⁶Elektronvangst is de reactie $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$. Hierdoor worden protonen omgezet in neutronen, terwijl de ster neutrino's uitzendt.

²⁷G. Baym en C. Pethick, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **25**, 27 (1975); S. Tsuruta, *Comm. Astrophys.* **11**, 151 (1986).



Figuur 15: Doorsnede van een typische neutronenster. De hadronische kern kan quarkmaterie of een pion-condensaat bevatten.

Als de druk verder toeneemt, zullen de kernen in deze zogenaamde ‘neutron drip line’ meer en meer neutronen-rijk worden en in grootte groeien. Bij een dichtheid van ongeveer 2.5×10^{17} kg/m³, beginnen de kernen elkaar te raken en gaan ze in elkaar over om een continue vloeistof van neutronen, protonen en elektronen te vormen. Neutronen zijn hierbij in de meerderheid en de fractie protonen wordt geraamd op ongeveer 4 % van alle materie. De neutronen kunnen niet vervallen in protonen, omdat de energie van het vrijkomende elektron kleiner zou zijn dan de Fermi energie van het elektrongas. Het verval is derhalve verboden door het Pauliprincipe.

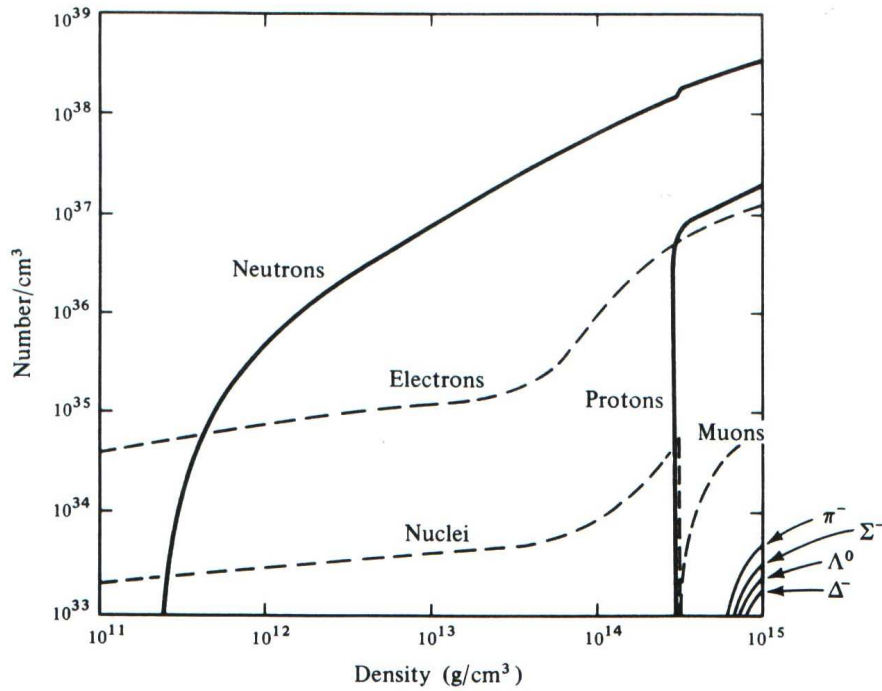
Als de energie nog groter wordt, is het energetisch mogelijk om via elektronvangst meer massieve elementaire deeltjes te vormen, zoals bijvoorbeeld

$$e^- n \rightarrow \nu \Sigma^-, \quad (68)$$

waarbij dergelijke deeltjes weer stabiel zijn vanwege het Pauliprincipe. Fig. 16 toont resultaten van een berekening²⁸ van de samenstelling van een neutronenster als functie van de dichtheid.

Als we onze aandacht nog een keer richten op de druk in een neutronenster, dan hebben we reeds gezien dat het ontaarde elektronengas bij relatief lage drukken, de tegendruk levert die ineenstorting van de ster voorkomt. Bij hogere drukken wordt volledige ineenstorting voorkomen door een combinatie van twee effecten, de afstotende kracht in de nucleon-nucleon interactie en de energie ontaardheid van de neutronen. Fig. 16 toont dat neutronen domineren bij de hoogste drukken. Ze vormen een ontaard Fermigas en we kunnen de argumenten die geleid hebben tot vergelijking (749) herhalen voor het niet-relativistische geval. We vervangen in vergelijking (749)

²⁸M.A. Ruderman, *Sci. Amer.* **224**, 24 (februari 1971).



Figuur 16: Aantal materiedeeltjes als functie van de dichtheid. Het ‘neutron drip regime’, waarbij neutronen uit kernen lekken, begint bij $4 \times 10^{14} \text{ kg/m}^3$. Bij een dichtheid van ongeveer $2,5 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$ beginnen de kernen op te lossen. Bij hogere dichtheden kunnen muonen en vreemde deeltjes ontstaan.

m_e door m_n en stellen $\mu = m_p$ (dus vermenigvuldigen met een factor 2). Dit betekent dat de straal van een neutronenster ongeveer 600 keer kleiner is dan die van een witte dwerg, of wel ongeveer 17 km. We vinden dan weer dat de druk toeneemt met afnemend volume totdat het, samen met de afstotende kracht tussen nucleonen op korte afstand (de zogenaamde harde-pit repulsie van de nucleon-nucleon (NN) kracht), in evenwicht is met de gravitationele aantrekking.

Het bestaan van neutronensterren is reeds in de jaren dertig van de vorige eeuw voorspeld. Hun ontdekking kwam onverwacht in 1967 toen een nieuwe klasse hemellichamen werd waargenomen. Deze objecten zijn puntvormig, staan buiten ons zonnestelsel en zenden periodieke radiogolven uit. Ze werden pulsars genoemd en op dit moment zijn er meer dan 1000 bekend. Hun periode varieert van ongeveer 1,5 ms tot 4 s. In 1968 suggereerde Gold²⁹ dat een pulsar een neutronenster is. De periode van de pulsar wordt geassocieerd met de rotatiefrequentie van de neutronenster. De frequentie neemt geleidelijk af vanwege het verlies aan rotatie-energie. Dit energieverlies is aanzienlijk, zo is het verlies van rotatie-energie van de Krabpulsar ongeveer even groot als de totale energie uitgezonden door deze nevel. De neutronenster is dus de energiebron van de enorme Krabnevel.

Men heeft pulsars niet alleen waargenomen als radiosterren, maar ook is periodieke emissie van licht gemeten. De perioden, de vertragingssnelheden, en de plotselinge veranderingen van de perioden zijn zorgvuldig bestudeerd. Hiermee zijn diverse eigenschappen van neutronensterren vastgesteld en weten we meer van het gedrag van kernmaterie bij dichtheden groter dan 10^{18} kg/m^3 .

²⁹T. Gold, *Nature* **218**, 731 (1968).

3.6 Neutrino astronomie

Er is één deeltje dat kan ontsnappen uit het inwendige van een dichte ster: het neutrino. Neutrino astronomie, alhoewel uitermate ingewikkeld, maakt het mogelijk om in het inwendige van sterren, bijvoorbeeld de zon, te kijken. De eigenschappen die het neutrino uniek maken, kunnen als volgt worden samengevat:

1. De absorptie van neutrino's en antineutrino's in materie is klein. De werkzame doorsnede voor absorptie kan geschreven worden als

$$\sigma \text{ (cm}^2\text{)} = 2,3 \times 10^{-44} \frac{p_e}{m_e c^2} \frac{E_e}{m_e c^2}, \quad (69)$$

met p_e en E_e de impuls en energie van het elektron in de eindtoestand in de reactie $\nu N \rightarrow e N'$. We vinden dat de gemiddelde vrije weglengte van een 1 MeV neutrino in water ongeveer 10^{19} m is. Dit is vele malen groter dan de lineaire afmetingen van sterren, die in het algemeen kleiner zijn dan 10^{11} m.

2. Men kan neutrino's en antineutrino's onderscheiden door verschillen in wisselwerkingen met water. De luminositeit van neutrino's op aarde wordt gedomineerd door de zon, omdat die zo dichtbij staat. We geloven echter dat de primaire galactische bronnen van neutrino's supernovae en hun restanten zijn. In het koelproces van supernovae worden neutrino en antineutrino paren van alle flavors³⁰ uitgezonden via reacties met neutrale stromen³¹, zoals $e^+ e^- \rightarrow \nu \bar{\nu}$. Verder worden elektron neutrino's en antineutrino's gegenereerd door kernreacties met geladen stromen, zoals $e^- p \rightarrow n \nu_e$.

Figuur 17 toont dat de neutrino's van SN1987a zijn waargenomen. In het volgende zullen we de zonneneutrino's nader beschouwen. We hebben in sectie 3.2 gezien dat vier reacties van de pp -cyclus neutrino's produceren. Fig. 18 geeft de voorspelling van het SSM voor deze neutrino's. Bahcall en Davis hebben erop gewezen dat het mogelijk zou moeten zijn het bestaan van de pp fusiereacties in de zon te bewijzen, door zonneneutrino's te detecteren met behulp van de reactie



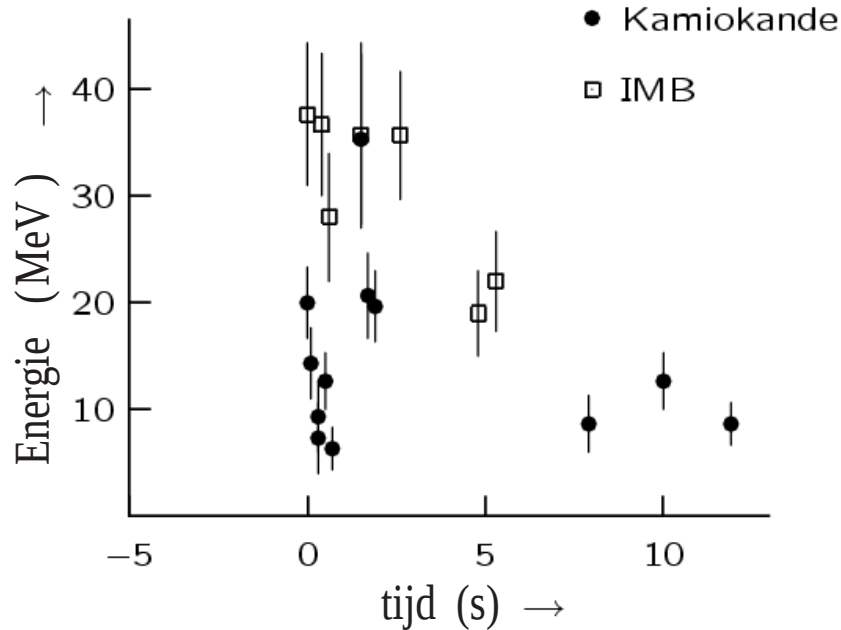
Elektron neutrino's, maar niet de antineutrino's, met een energie van meer dan 0,814 MeV kunnen worden ingevangen door ^{37}Cl . Dit resulteert in ^{37}Ar en een elektron. Hoewel de werkzame doorsnede voor dit proces klein is, is het zeer wel mogelijk om een dergelijk experiment uit te voeren. De redenen hiervoor zijn als volgt samen te vatten:

1. De neutrinoflux van de zon is zeer groot, in de orde van 10^{15} neutrino's/m²-s, op het aardoppervlak. Uit Fig. 18 volgt dan een flux van energetische neutrino's van ongeveer 6×10^{10} neutrino's/m²-s.
2. Men kan de detectoren zeer groot maken. Op dit moment worden detectoren ontworpen ter grootte van 1 kubieke kilometer. Icecube is het vervolg van het Amanda experiment op Antarctica, terwijl KM3Net het vervolg wordt van het Antares experiment in de Middellandse zee. De beide detectoren zijn weergegeven in figuur 19.
3. Het ^{37}Ar kan in uiterst kleine hoeveelheden worden waargenomen, omdat het radioactief is. Het vervalst door elektronvangst,



³⁰In de natuur komen er drie soorten neutrino's voor: elektron neutrino ν_e , muon neutrino ν_μ en tau neutrino ν_τ .

³¹In de zwakke wisselwerking worden Z bosonen of W bosonen uitgewisseld. Omdat het Z boson ongeladen is, spreekt men van neutrale stromen. De W bosonen zijn geladen.



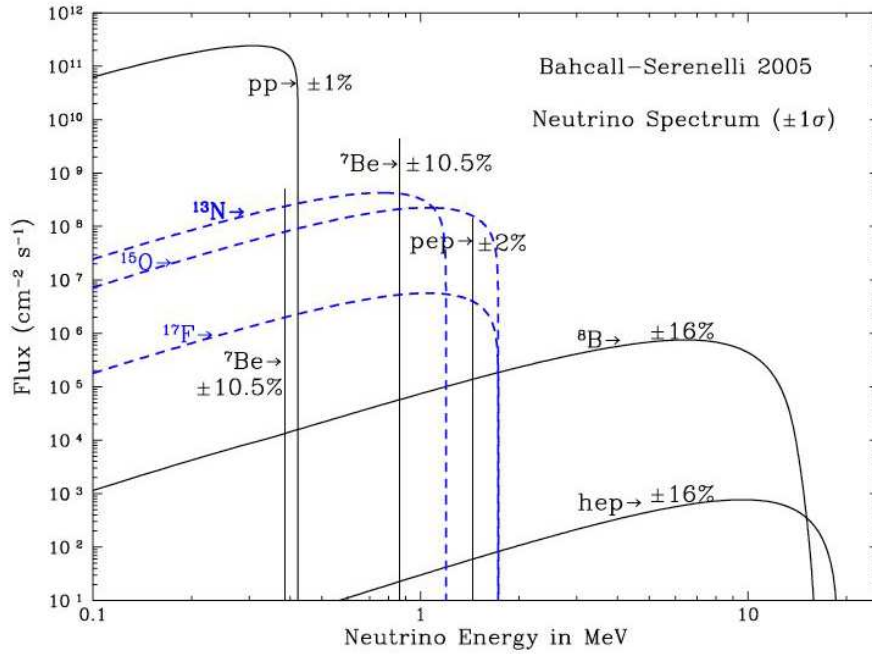
Figuur 17: Tijd- en energieverdeling van neutrino's waargenomen met het Kamiokande en het IMB experiment.

met een halfwaardetijd van 35 dagen. Het elektron wordt gewoonlijk gevangen uit de K -schil en laat daar een gat achter. De energie die vrijkomt als een ander elektron van hoger gelegen schillen het gat opvult, wordt uitgezonden als een X -foton of het wordt gebruikt om een elektron uit een hoger gelegen schil te emitteren (men noemt het dan een Auger elektron). Het Auger elektron heeft een goed-gedefinieerde energie van 2,8 keV en kan relatief eenvoudig worden waargenomen.

4. Argon is een edelgas. We kunnen het daarom relatief eenvoudig scheiden van het chloor om het vervolgens in een klein volume te concentreren.

Het experiment van Davis *et al.* maakte gebruik van een tank met 390.000 liter C_2Cl_4 (tetrachloorethyleen, een schoonmaakvloeistof). De tank werd 1,5 km ondergronds geplaatst in de Homestake goudmijn in Lead, Zuid Dakota. De 1,5 km rots boven het experiment diende als afscherming om de kosmische straling te reduceren. De abundantie van de cruciale isotoop ^{37}Cl is 25 %. Een neutrino interactie met dit chlooratoom produceert ^{37}Ar . Het radioactieve argon werd over een periode van 2 maanden verzameld en dan verwijderd door helium door de tank te stromen. Het argon werd van het helium gescheiden door absorptie op een gekoelde koolstofval. Vervolgens werd het in een volume van $0,5\text{ cm}^3$ geteld met een proportionele teller. Het resultaat wordt uitgedrukt in zogenaamde solar neutrino units, uitgesproken als 'snew', waarbij $1\text{ SNU} = 10^{-36}$ gebeurtenissen/s chloor atoom. De verwachting was dat Davis *et al.* ongeveer 8 SNU zouden moeten meten. Het experiment bepaalde $2,4 \pm 0,3\text{ SNU}$. Dit resultaat werd bevestigd door een experiment in de Kamiokande mijn, waarbij een fractie van $0,46 \pm 0,21$ werd gemeten van de voorspelling door het standaard zonnemodel.

Lange tijd heeft men gezocht naar verklaringen voor de puzzel van de zonneneutrino's. De oplossing is onlangs gevonden en heeft te maken met de transformatie van elektron neutrino's



Figuur 18: Energieverdeling van het SSM voor reacties van de pp -cyclus waarbij zogenaamde zonneneutrino's worden geproduceerd.

naar muon (en tau) neutrino's in het inwendige van de zon. Als de neutrinomassa niet gelijk is aan nul, dan kan een dergelijke transformatie plaatsvinden. In het inwendige van de zon wordt een dergelijke conversie geholpen door de aanwezigheid van elektronen. Door de geladen-stromen interactie krijgen de neutrino's effectief een verandering in hun massa en deze verandering maakt de transformatie in muon neutrino's mogelijk. Dergelijke veranderingen staan bekend als neutrino oscillaties en zijn onlangs ontdekt. De neutrale-stroom interactie draagt niet tot een dergelijke versterking bij, omdat de resulterende werkzame doorsnede van lage-energie neutrino's niet van de neutrino'soort afhangt.

3.7 Neutrino oscillaties

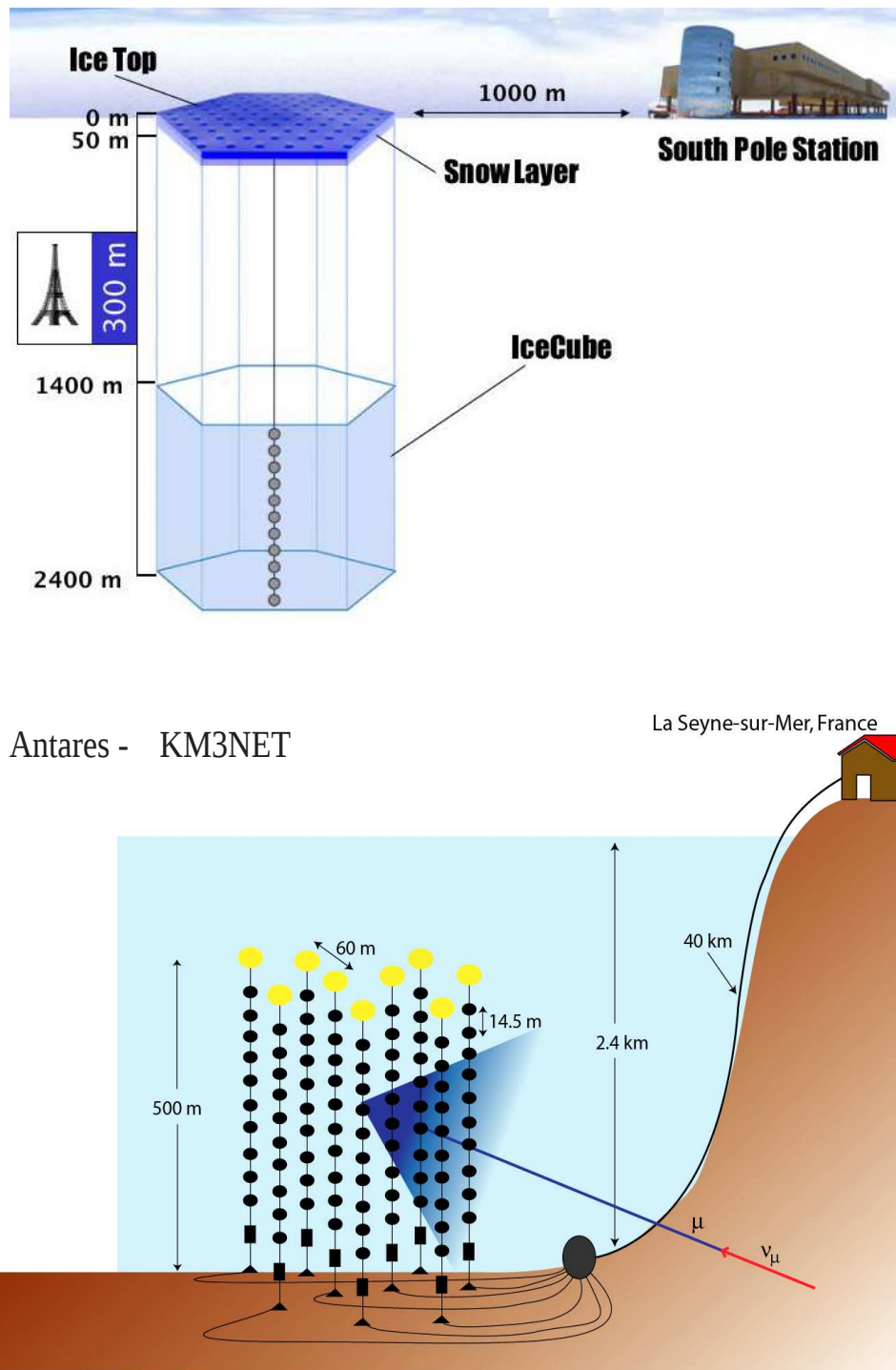
We beperken de discussie tot twee flavors, het elektron neutrino ν_e en het muon neutrino ν_μ . De flavor eigentoestanden, ν_e en ν_μ , zijn echter geen massa eigentoestanden, ν_1 en ν_2 , maar zijn hieraan gerelateerd door een zogenaamde menghoek θ ,

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}. \quad (72)$$

We nemen aan dat we een bundel ν_e 's geproduceerd hebben met een precieze impuls, waarbij alle deeltjes in de x -richting bewegen en de bron zich op $x = 0$ bevindt. We vragen ons af wat de waarschijnlijkheid is om een ν_e te detecteren op positie $x \neq 0$?

Neem aan dat we op tijdstip $t = 0$ een zuivere ν_e toestand hebben. Omdat ν_1 en ν_2 massa eigentoestanden zijn, en omdat de bundel bestaat uit eigentoestanden van impuls, vertelt de relatie

$$E_i^2 = p^2 c^2 + m_i^2 c^4 \quad \text{voor } i = 1, 2 \quad (73)$$



Figuur 19: Boven: schematische voorstelling van het Icecube experiment op Antartica. Beneden: weergave van het Antares experiment in de Middellandse zee.

ons, dat dit ook eigentoestanden van energie zijn. De tijdevolutie wordt daarom gegeven door

de uitdrukkingen

$$\begin{aligned}\nu_1(t) &= \nu_1 e^{-iE_1 t/\hbar}, \\ \nu_2(t) &= \nu_2 e^{-iE_2 t/\hbar}.\end{aligned}\tag{74}$$

Vervolgens gebruiken we de gegeven relatie tussen ν_e en ν_i en vinden dat de golffunctie op $t = 0$ geschreven kan worden als

$$\psi(0) = \nu_e = \cos \theta \cdot \nu_1 + \sin \theta \cdot \nu_2.\tag{75}$$

We gebruiken de tijdafhankelijkheid van de ν_i en kunnen de volledige oplossing van de Schrödingervergelijking met als begintoestand $\psi(0) = \nu_e$ schrijven als

$$\psi(t) = \cos \theta \cdot \nu_1(t) + \sin \theta \cdot \nu_2(t) = \cos \theta \cdot e^{-iE_1 t/\hbar} \cdot \nu_1 + \sin \theta \cdot e^{-iE_2 t/\hbar} \cdot \nu_2.\tag{76}$$

De waarschijnlijkheid om een ν_e te detecteren is het kwadraat van de projectie van $\psi(t)$ op de flavoreigentoestand ν_e . We maken gebruik van de orthonormaliteitsrelaties voor de massa eigentoestanden,

$$\nu_i^\dagger \cdot \nu_j = \delta_{ij}\tag{77}$$

en berekenen de projectie als

$$\begin{aligned}\nu_e^\dagger \cdot \psi(t) &= \left(\cos \theta \cdot \nu_1^\dagger + \sin \theta \cdot \nu_2^\dagger \right) \cdot \left(\cos \theta \cdot e^{-iE_1 t/\hbar} \cdot \nu_1 + \sin \theta \cdot e^{-iE_2 t/\hbar} \cdot \nu_2 \right) \\ &= \cos^2 \theta \cdot e^{-iE_1 t/\hbar} + \sin^2 \theta \cdot e^{-iE_2 t/\hbar}.\end{aligned}\tag{78}$$

Als we het kwadraat nemen van bovenstaande uitdrukking vinden we

$$\begin{aligned}P(\nu_e) &= |\cos^2 \theta \cdot e^{-iE_1 t/\hbar} + \sin^2 \theta \cdot e^{-iE_2 t/\hbar}|^2 \\ &= \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos [(E_1 - E_2)t/\hbar].\end{aligned}\tag{79}$$

We zien dat de periode van oscillatie gegeven wordt door

$$T = \frac{2\pi\hbar}{E_1 - E_2}.\tag{80}$$

Als we aannemen dat de neutrino's ultra-relativistisch zijn, dus $E \approx pc \gg mc^2$, dan geldt

$$E_i = \sqrt{p^2 c^2 + m_i^2 c^4} \approx pc + \frac{m_i^2 c^3}{2p} + \dots\tag{81}$$

Als we dit invullen vinden we

$$T = \frac{2\pi\hbar}{E_1 - E_2} \approx \frac{4\pi\hbar p}{m_1^2 c^3 - m_2^2 c^3} \approx \frac{4\pi\hbar E}{(m_1 c^2)^2 - (m_2 c^2)^2}.\tag{82}$$

Omdat de neutrino's ultra-relativistisch bewegen, bewegen ze zich met praktisch de lichtsnelheid. De afgelegde weg bedraagt dus $x = c \cdot t$. We zien dat de flavor oscillatie in de tijd, zich vertaalt in een oscillatie van de neutrino flavor als functie van de afstand tot de bron. De afstand die correspondeert met een oscillatieperiode wordt de oscillatielengte, L_{osc} , genoemd. We vinden hiermee de relatie

$$L_{\text{osc}} = c \cdot T = \frac{4\pi\hbar c E}{(m_1 c^2)^2 - (m_2 c^2)^2} = \frac{4\pi E \hbar c}{\Delta m^2 c^4},\tag{83}$$

met $\Delta m^2 = |m_1^2 - m_2^2|$. Als we de juiste conversiefactoren gebruiken vinden we

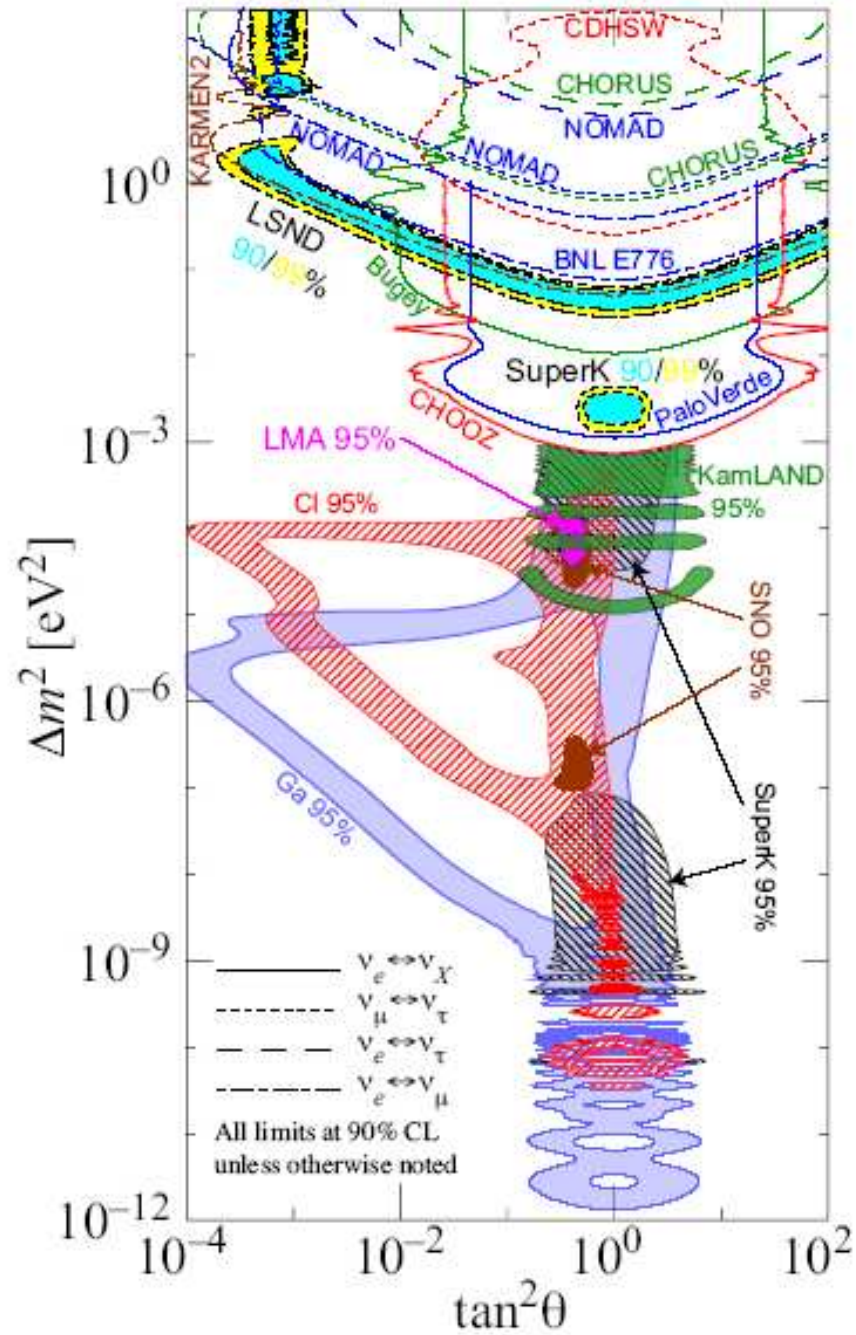
$$\begin{aligned}
 L_{\text{osc}} &= \frac{4\pi \cdot (1,6 \times 10^{-13} \text{ J/MeV}) \cdot (3 \times 10^8 \text{ m/s}) \cdot (1,054 \times 10^{-45} \text{ Js}) \cdot E}{(1,6 \times 10^{-19} \text{ J/eV})^2 \cdot \Delta m^2} \\
 &= 2,483 \text{ m} \cdot \text{eV}^2 \cdot \text{MeV}^{-1} \cdot \frac{E}{\Delta m^2} \\
 &\approx 2,5 \text{ km} \frac{E (\text{GeV})}{\Delta m^2 (\text{eV})^2}.
 \end{aligned} \tag{84}$$

Er zijn diverse experimenten uitgevoerd om neutrino oscillaties te observeren. Hierbij werden neutrino's van zowel de zon, als kernreactoren alsook de neutrino's geproduceerd in atmosferische showers van kosmische straling gebruikt. Fig. 20 toont de gebieden in de neutrino parameter-ruimte opgespannen door Δm^2 en menghoek θ die worden uitgesloten of die waarvoor er een voorkeur bestaat. De huidige consensus is dat neutrino oscillaties zijn waargenomen met een significantie van ongeveer 5σ .

3.8 Kosmische straling

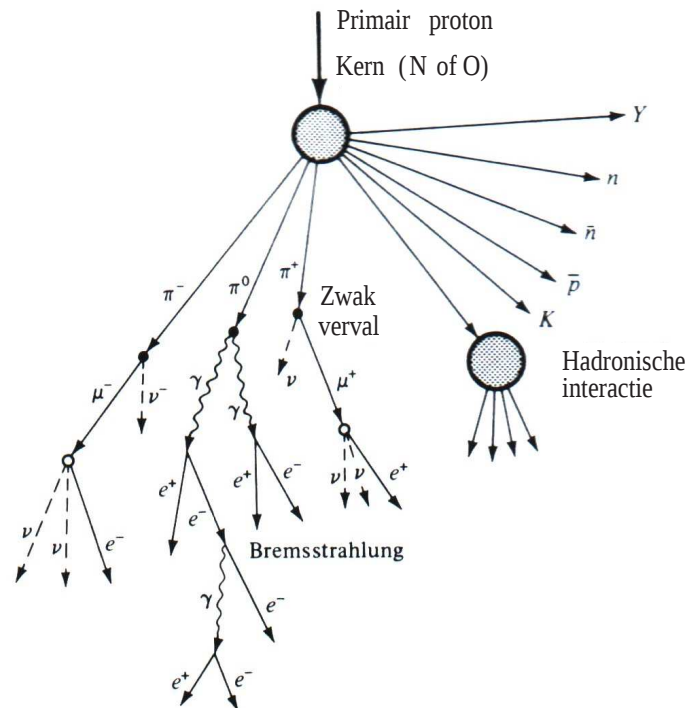
Op dit moment worden we gebombardeerd door energetische deeltjes uit de kosmos. Gemiddeld is de flux ongeveer 150 geladen deeltjes per vierkante meter en per seconde (voor een groot deel muonen met een energie van ongeveer 2 GeV). Kosmische straling werd ontdekt door de Limburgse geestelijke Theodore Wulf in het begin van de twintigste eeuw. Theodore Wulf fabriceerde uiterst nauwkeurige elektrometers. Hij nam echter waar dat hoe goed hij een elektrometer ook isoleerde, na verloop van tijd de aangebrachte lading geneutraliseerd werd. De gangbare theorie, geformuleerd door Ernest Rutherford, was dat dit veroorzaakt werd door de straling van radioactieve elementen in de aardbodem. Theodore Wulf trachtte deze bijdrage te elimineren, door zijn elektrometers te plaatsen op het hoogste gebouw ter wereld, op dat moment de 324 m hoge Eiffeltoren in Parijs. Metingen toonden aan dat het ontladen van de elektrometers met dezelfde snelheid doorging. Hierop nam Victor Hess in 1912 enkele elektrometers, vervaardigd door Theodore Wulf, mee in ballonvluchten. Het was duidelijk dat voor hoogten groter dan 1 km de ontlading toenam en zelfs verdubbelde bij 4 km. Dit was het moment van de ontdekking van kosmische straling. Sinds die tijd is de samenstelling, het energiespectrum en de ruimtelijke en tijdverdeling van deze straling uitvoerig bestudeerd. Kosmische straling vormt een belangrijke component van ons sterrenstelsel: haar energiedichtheid, ongeveer 1 eV/cm^3 , is van dezelfde orde van grootte als de energiedichtheid van het galactisch magnetisch veld en de thermische beweging van het gas.

Kosmische straling is bestudeerd op verschillende hoogten, met ballonnen, raketten en satellieten in de atmosfeer, maar ook in mijnen diep ondergronds. De straling die op de aardatmosfeer invalt bestaat uit kernen, elektronen, positronen, fotonen en neutrino's. Het is gebruikelijk om alleen de geladen deeltjes kosmische straling te noemen. Zo wordt X -ray en γ -ray astronomie bedreven. Het lot van een kosmisch proton, dat met een hoge energie op de aardatmosfeer invalt, wordt geschetst in figuur 21. Het proton gaat een interactie aan met een stikstof- of zuurstofkern en dat heeft een reeks van gebeurtenissen tot gevolg. In eerste instantie wordt een groot aantal hadronen geproduceerd, waarbij pionen domineren. Er kunnen echter ook antinucleonen, kaonen en hyperonen geproduceerd worden. Deze hadronen zullen op hun beurt weer wisselwerken met de stikstof- en zuurstofkernen in de atmosfeer, terwijl de onstabiele deeltjes ook via de zwakke wisselwerking kunnen vervallen. Merk op dat hierbij de verhouding van elektron tot muon (anti)neutrino's 1:2 is. De vervalproducten bestaan bijvoorbeeld uit elektronen, muonen, neutrino's en fotonen. De fotonen kunnen aanleiding geven tot paarproductie van deeltjes. De



Figuur 20: Gebieden in de neutrino parameterruimte opgespannen door Δm^2 en menghoek θ die worden uitgesloten of die waarvoor er een voorkeur voor de waarden van deze parameters bestaat.

muonen zijn instabiel, maar kunnen veelal vanwege tijddilatatie toch het aardoppervlak bereiken. Samenvattend, kan een hoog-energetisch proton een ‘cascade shower’ initiëren, waarbij een groot aantal deeltjes, verspreid over een oppervlak van vele vierkante kilometers, het aardoppervlak kan bereiken. In tegenstelling tot een proton, zal een hoog-energetisch foton meestal slechts een klein aantal muonen produceren. In het volgende zullen we ons concentreren op de primaire



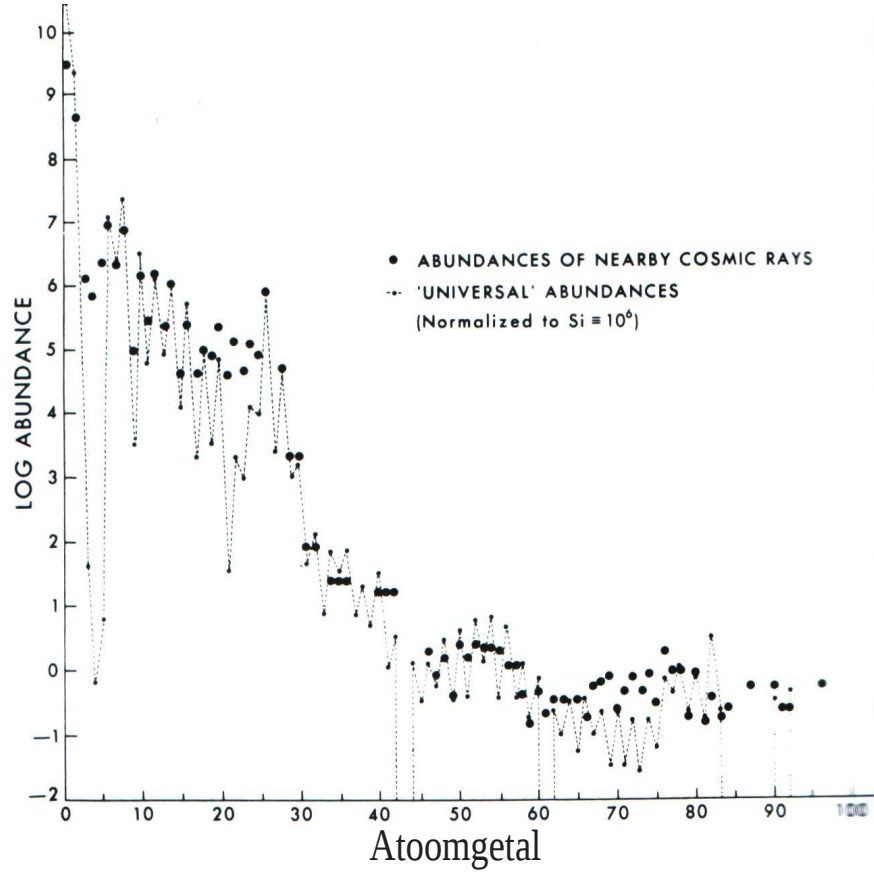
Figuur 21: Een invallend hoog-energetisch proton raakt de top van de aardatmosfeer en produceert een zogenaamde 'cascade shower'.

kosmische straling en de compositie van de 'shower' niet verder bespreken.

De samenstelling van de nucleaire component van de primaire kosmische straling wordt getoond in figuur 22. De figuur toont ook de zogenaamde universele distributie van elementen zoals waargenomen in de zonneatmosfeer en in meteorieten. De data tonen een aantal opvallende feiten:

1. De elementen Li, Be en B zijn ongeveer 10^5 keer meer abundant in kosmische straling dan universeel waargenomen.
2. De verhouding $^3\text{He}/^4\text{He}$ is ongeveer 300 keer groter in kosmische straling.
3. Zeer zware kernen komen vaker in kosmische straling voor.
4. Er zijn geen antihadronen aangetroffen in de primaire kosmische straling.
5. Elektronen zijn ongeveer 1 % keer zo abundant als kernen in hetzelfde energie interval; positronen vormen ongeveer 10 % van de elektron component.

De eerste twee feiten kunnen worden verklaard door aan te nemen dat de kosmische straling enkele g/cm^2 moeten passeren tussen de bron en de top van de aardatmosfeer. In een dergelijke hoeveelheid materie produceren kernreacties de geobserveerde verdeling. Omdat de interstellaire dichtheid ongeveer $10^{-22} \text{ kg}/\text{m}^3$ is, zijn de kosmische stralen ongeveer $10^6 - 10^7$ jaar onderweg geweest. Het energiespectrum, dat is het aantal primaire deeltjes als functie van de energie, is gemeten over een enorm gebied. Voor de nucleaire component wordt dit getoond in Fig. 23, waarbij de meetgegevens zich uitstrekken over 14 decaden in energie en 32 decaden in intensiteit. De energie van het meest energetische deeltje is $4 \times 10^{21} \text{ eV}$ of ongeveer 60 J.



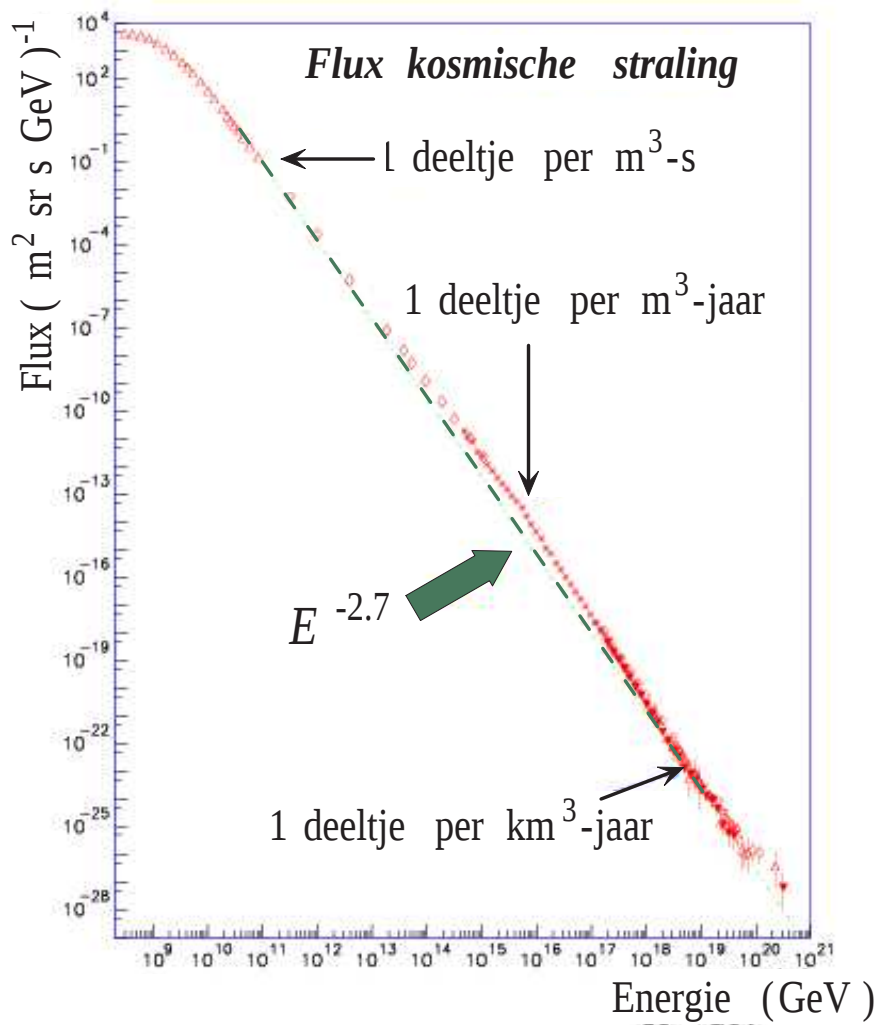
Figuur 22: Samenstelling van de nucleaire component van de primaire kosmische straling. De stippellijn toont de universele referentieverdeling.

Het is duidelijk dat het energiespectrum geen thermische verdeling heeft: het is niet exponentieel, maar valt minder steil af. Een redelijke fit aan de meetgegevens, afgezien van de laagste energieën, geeft

$$I(E) \sim E^{-2,7}, \quad (85)$$

met $I(E)$ de intensiteit van de nucleaire component met energie E . Er is een 'knie' bij ongeveer 10^{15} eV, die men niet goed kan zien in Fig. 23, maar die zichtbaar gemaakt kan worden door het spectrum te normeren op de fit. Het resultaat wordt getoond in Fig. 24. Men denkt dat de 'knie' veroorzaakt wordt door propagatie effecten of door een nieuw mechanisme van versnellen van geladen kosmische deeltjes. Boven ongeveer 10^{18} eV, waar het spectrum enigszins vlak wordt, neemt men aan dat de bijbehorende deeltjes van buiten ons sterrenstelsel afkomstig zijn (extragalactische straling), omdat het galactisch magneetveld onvoldoende is om dergelijke deeltjes op te sluiten. Het spectrum van elektronen lijkt voor energieën boven de 1 GeV op dat van figuur 23, maar is steiler boven de 100 GeV vanwege elektromagnetische interacties gedurende de vlucht van deze deeltjes. Hierdoor biedt het elektronspectrum een mogelijkheid om propagatiemodellen nauwkeurig te testen.

Er zijn nog twee factoren van belang in de discussie van de energiespectra van kosmische straling. De eerste is de isotropie van de straling, de tweede de constantheid in de tijd. Metingen geven aan dat de flux van kosmische straling isotroop is voor energieën kleiner dan 10^{15} eV. Er zijn aanwijzingen dat de flux uit het centrum van ons melkwegstelsel ongeveer 1 % groter is dan

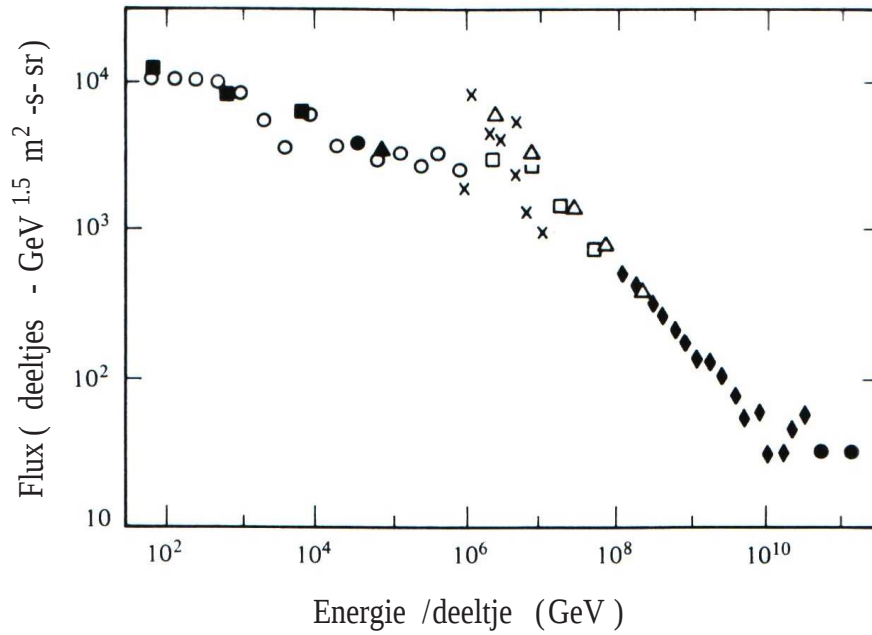


Figuur 23: Energiespectrum van de nucleaire component van de primaire kosmische straling.

gemiddeld. De tijdafhankelijkheid van de intensiteit over langere perioden is bestudeerd door te kijken naar de abundantie van nucleïden in maangesteente en meteorieten. Hieruit kan men afleiden dat de intensiteit van kosmische straling constant is geweest over een periode van 1 miljard jaar.

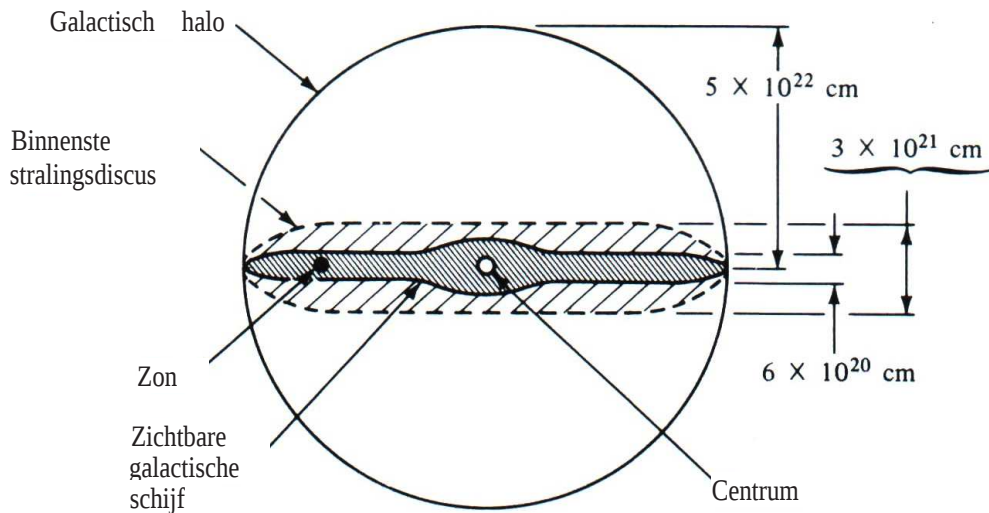
De hierboven beschreven experimentele aanwijzingen impliceren dat de bron van kosmische straling de volgende eigenschappen dient te bezitten: hij dient deeltjes met energieën tot bijna 10²² eV te produceren met een spectrum zoals gegeven door vergelijking (85). De totale energie geproduceerd in ons melkwegstelsel dient ongeveer 10⁴² J/jaar te zijn; de straling dient isotroop en constant te zijn over minstens 10⁹ jaar. Het primaire spectrum dient zware elementen te bevatten tot ongeveer $Z = 100$, maar met minder dan 1 % antihadronen.

Er is nog geen model geformuleerd dat in staat is alle meetgegevens uniek en bevredigend te beschrijven. De drie belangrijkste openstaande vragen zijn (1) Waar komen de kosmische stralen vandaan? (2) Hoe worden de kosmische deeltjes geproduceerd? (3) Hoe worden ze versneld? In het volgende zullen we enkele opmerkingen hierover maken.



Figuur 24: Energiespectrum van hoog-energetische kosmische straling gemeten door verschillende groepen. Er is een 'knie' zichtbaar bij 10^6 GeV, terwijl er een 'enkel' te zien is bij 10^{10} GeV.

1. We kunnen de eerste vraag nauwkeuriger formuleren door een schematische tekening te maken van een doorsnede door ons melkwegstelsel. Dit is weergegeven in figuur 25. Kosmische straling kan geproduceerd worden in de binnenste stralingsdiscus, in de galac-



Figuur 25: Schematische weergave van een doorsnede door ons melkwegstelsel.

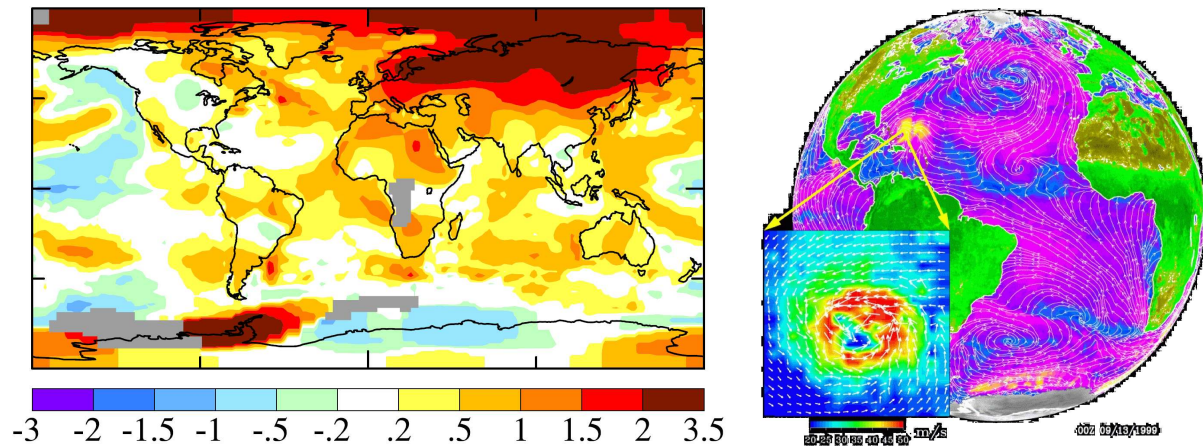
tische halo, of ze kunnen ons melkwegstelsel van buitenaf binnenvliegen. De meeste natuurkundigen zijn van mening dat kosmische straling met een energie $< 10^{18}$ eV van ons melkwegstelsel afkomstig is.

2. Men neemt aan dat supernovae en neutronensterren kosmische straling kunnen produceren. In ons melkwegstelsel komt een supernova gemiddeld eens in de 40 jaar voor, waarbij een supernova tussen de 10^{43} en $10^{45,5}$ J aan energie produceert. Een recente extragalactische supernova werd in 1987 waargenomen, SN1987 genoemd, en deze supernova wordt uitvoerig bestudeerd. Studies van supernovae tonen aan dat deze de voor kosmische straling benodigde energie van 10^{42} J/jaar kunnen leveren. Het is echter moeilijk gebleken om met versnellingsmodellen gebaseerd op supernovaschokgolven rekenschap te geven van deeltjes met energieën groter dan 10^{15} eV. Recente waarneming van kosmische straling van het binaire systeem Cygnus X-3 en Hercules X-1 suggereren dat voor energieën boven de ‘knie’, de meeste kosmische straling afkomstig is van pulsars of binaire systemen die bestaan uit een neutronenster en een grote ster.
3. Het is mogelijk dat bronnen kosmische straling uitzenden met een energiespectrum, zoals gegeven door vergelijking (85). Daarentegen, is het ook mogelijk dat de natuur dezelfde techniek gebruikt als we nu in versnellers toepassen: versnellen in stappen. Een mechanisme voor deeltjesversnelling in de interstellaire ruimte, botsing van deeltjes met een bewegend magnetisch veld, werd voorgesteld door Fermi³². Echter, in het algemeen is men de mening toegedaan dat de primaire bronnen van kosmische straling gevormd worden door supernovae explosies en hun restanten.

³²E. Fermi, *Phys. Rev.* **75**, 12 (1949).

4 Wiskunde I - Differentiaaltopologie

In een ruimte zijn een punt, scalair en een vector voorbeelden van topologische objecten. Als de scalair of vector kan variëren van punt tot punt, spreken we over een scalairveld, respectievelijk een vectorveld. In Fig. 26 geven we een voorbeeld van een scalairveld en een vectorveld op de aarde. Een tensor is een object dat de begrippen getal, vector, 1-vorm en matrix generaliseert.



Figuur 26: Links: voorbeeld van een scalairveld, het verschil tussen de temperatuurverdeling gemeten op aarde in 2008 ten opzichte van het gemiddelde van de jaren 1951 - 1980; rechts: windverdeling aan het oppervlak van de aarde als voorbeeld van een vectorveld.

Tensoren kunnen gezien worden als zelfstandige geometrische grootheden, die los staan van eventuele referentiesystemen. Het is onze doelstelling om alle fundamentele wetten van de natuur uit te drukken in dergelijke topologische of geometrische objecten. Dat is de essentie van het relativiteitsprincipe: *de fundamentele wetten van de natuurkunde zijn onafhankelijk van de keuze van het referentiesysteem*. Door gebruik te maken van tensoren verkrijgen we een dergelijke referentiesysteem onafhankelijke beschrijving.

In de relativiteitstheorie beschouwen we tensorvelden in ruimtetijd. Allereerst bespreken we hoe ruimtetijd in kaart gebracht kan worden. We zullen aannemelijk maken dat ruimtetijd een differentieerbare variëteit is. Vervolgens bespreken we de verschillende topologische objecten die in ruimtetijd betekenis hebben: scalair veld, vector, 1-vorm, tensoren. We zullen zien dat het mogelijk is om het begrip inproduct te definiëren in ruimtetijd en voeren de zogenaamde metrische tensor in.

4.1 Puntgebeurtenis

We voeren in deze paragraaf een centraal begrip van de algemene relativiteitstheorie in, namelijk het begrip *puntgebeurtenis*³³. Dit is een zogeheten primitief begrip, dit wil zeggen een begrip dat wordt gedefinieerd in termen van andere begrippen. Wat dit betreft is het vergelijkbaar met het begrip ‘punt’ uit de euclidische meetkunde. Primitieve begrippen worden niet gedefinieerd, omdat in hun definities weer andere begrippen optreden, die weer gedefinieerd zouden moeten worden, enz. Aan deze oneindige regressie wordt een einde gemaakt in de axiomatische methode. De daarin optredende axioma's zijn te beschouwen als impliciete definities van de in de theorie voorkomende primitieve begrippen. We volgen derhalve een axiomatische opbouw van de algemene relativiteitstheorie. Hier introduceren we het begrip puntgebeurtenis met voorbeelden.

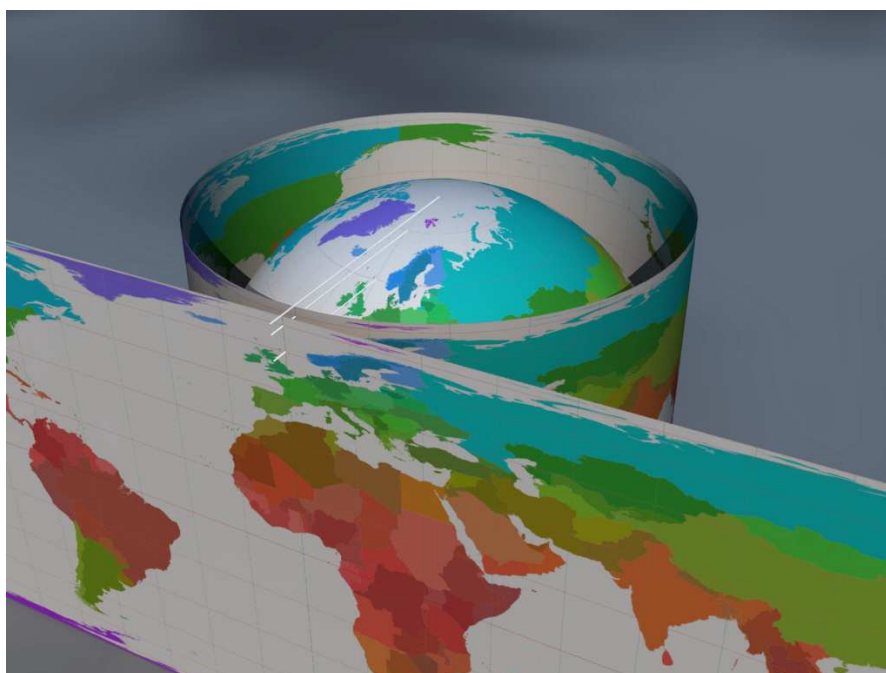
³³In het Engels spreken van een *event*.

In de materiële werkelijkheid om ons heen vinden allerlei gebeurtenissen plaats: de zon gaat op, twee auto's botsen op elkaar, ... Dat zijn allemaal gebeurtenissen en karakteristiek voor gebeurtenissen is dat ze zich in een zeker gebied van de ruimte afspelen en dat ze in een zeker tijdinterval gebeuren. Gebeurtenissen zijn vaak zeer complex en we ontleden ze dan ook verder. Een gebeurtenis kan worden beschouwd als te zijn opgebouwd uit zeer vele gebeurtenissen, die op een kleiner gebied en een kleiner tijdinterval betrekking hebben. Het geïdealiseerde limietgeval van een gebeurtenis, die op een oneindig klein gebied plaats heeft en oneindig kort duurt noemen we een *puntgebeurtenis*. Een puntgebeurtenis is een gebeurtenis met een scherp bepaalde plaats en een scherp bepaald tijdstip. Een voorbeeld van een puntgebeurtenis is de explosie van een oneindig klein rotje met een oneindig kort durende knal. Een ander voorbeeld is de botsing van twee massapunten, immers als de twee massapunten elkaar raken is er sprake van een scherp bepaalde plaats en een scherp bepaald tijdstip.

Het begrip puntgebeurtenis houdt een extrapolatie van onze ervaring in, omdat er een eindige ondergrens is voor het scheidend vermogen voor afstanden en tijdsduren. Ieder fysisch proces is te beschouwen als een collectie van puntgebeurtenissen. De verzameling van alle mogelijke puntgebeurtenissen noemen we *ruimtetijd*. Ruimtetijd is niet slechts een verzameling, ruimtetijd heeft meer mathematische structuur. Het fundamentele begrip in de differentiaalmeetkunde is dat van een differentieerbare ruimte (differentieerbare variëteit). We zullen trachten dit plausibel te maken en daarna postuleren dat ruimtetijd een differentieerbare variëteit is.

4.2 Differentieerbare variëteit

Het oppervlak van de aarde vormt een twee-dimensionaal gekromd oppervlak. Dit oppervlak kan worden ingebed in de drie-dimensionale euclidische wereld. Een belangwekkende vraag is

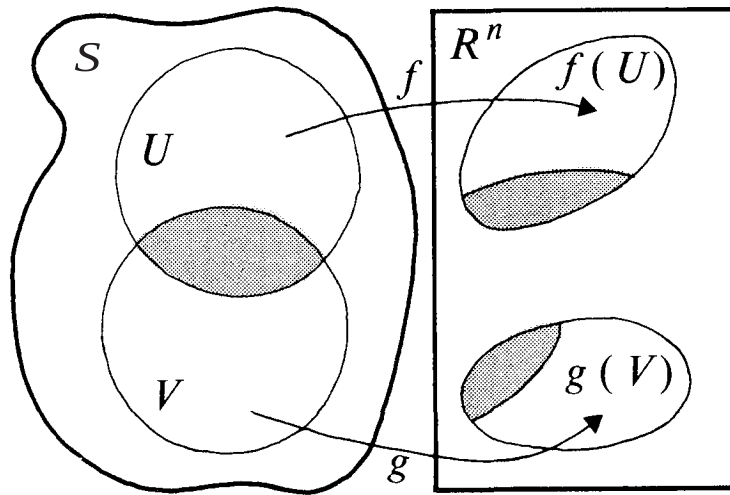


Figuur 27: Het aardoppervlak kan in kaart worden gebracht met een voldoende aantal elkaar gedeeltelijk overlappende kaarten ($n \geq 2$ kaarten).

nu: kan men over dergelijke twee-dimensionale oppervlakken spreken zonder het hulpmiddel van de drie-dimensionale euclidische ruimte? In de algemene relativiteitstheorie is ruimtetijd een

gekromde vier-dimensionale ruimte; deze willen we graag beschrijven zonder haar in te bedden in een hoger dimensionale euclidische ruimte. Het antwoord is bevestigend, zoals blijkt uit het volgende voorbeeld: in de geografie beschrijft men het aardoppervlak, een oppervlak dat ongelijk is aan de twee-dimensionale ruimte $\mathbb{E}^2$, met behulp van een atlas, bestaande uit twee-dimensionale kaarten, waarbij de drie-dimensionale ruimte niet nodig is. Een kaart beschrijft een stukje van het aardoppervlak met behulp van een stukje $\mathbb{R}^2$.

Het gehele aardoppervlak (zie Fig. 27) kan in kaart worden gebracht met een voldoende aantal elkaar gedeeltelijk overlappende kaarten. Teneinde ook de polen correct te kunnen afbeelden zijn er minstens 2 kaarten nodig. Voor het realiseren van een kaart zijn verschillende afbeeldingen $f, g, \dots$ mogelijk. Hier passen we cilinderprojectie toe (de polen worden hierbij niet correct afgebeeld). Mercatorprojectie is een cilinderprojectie, waarna een breedtegraad-afhankelijke schaalcorrectie wordt toegepast, hetgeen leidt tot hoekgelijkheid. Merk op dat wanneer we een klein gebied rond een bepaald punt steeds verder uitvergroten, we de topologische structuur van de euclidische ruimte meer en meer benaderen.

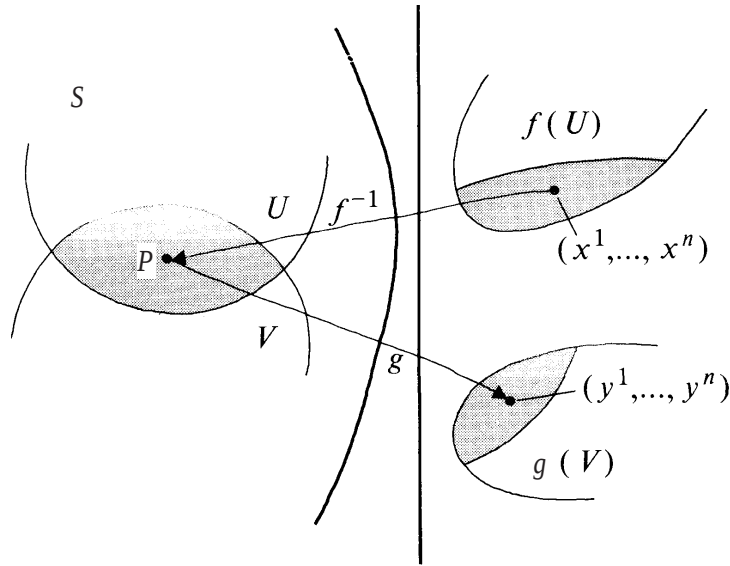


Figuur 28: De omgeving U en V in S overlappen (het gearceerde gebied). De bijbehorende n -kaarten naar $\mathbb{R}^n$, (U, f) en (V, g) , geven twee verschillende afbeeldingen (en dus twee coördinatenstelsels) in het overlapgebied. De relatie tussen deze coördinaten karakteriseert de differentieerbaarheidsklasse van de variëteit.

Wiskundig gebruiken we de volgende definities. Stel dat S een verzameling is. Een n -kaart van een punt $\mathcal{P}$ van S is een paar (U, κ) , waarbij $U \subset S$ een deelverzameling is die $\mathcal{P}$ bevat, en κ een bijectieve afbeelding $\kappa : U \rightarrow O \subset \mathbb{R}^n$ met O een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Een kaart (U, κ) voegt aan ieder punt $\mathcal{P} \in U \subset S$ coördinaten $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ toe gedefinieerd door $(x^1, x^2, \dots, x^n) \equiv \kappa(\mathcal{P}) \in \mathbb{R}^n$. We noteren ook wel korter $(x^i) \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n)$, waarbij stilzwijgend $i = 1, 2, \dots, n$. De associatie van punten met de waarden van hun parameters kan men zien als een afbeelding van punten van een variëteit naar punten van de euclidische ruimte met de juiste dimensie. Een variëteit lijkt lokaal op een euclidische ruimte: hij is ‘glad’ en heeft een bepaald aantal dimensies.

Via de afbeelding κ krijgt de oorspronkelijke deelverzameling U van S eveneens sommige van de structuren die de open deelverzameling $O \subset \mathbb{R}^n$ heeft. Een kaart geeft een *coördinatisering* van U ; een kaart wordt ook wel een *coördinatenstelsel* van U genoemd. De coördinatenlijnen in O worden met κ^{-1} teruggebracht naar U . Een kaart moet een bijectieve, bicontinue afbeelding zijn

van het aardoppervlak naar $\mathbb{R}^2$. Een bijectieve afbeelding κ heet *bicontinu* als κ en κ^{-1} continu zijn. Een bicontinue bijectie heet een *homeomorfisme*. We tonen alles nog eens in Fig. 29.



Figuur 29: Een vergroting van Fig. 28 toont hoe het overlappende gebied een afbeelding maakt van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^n$, die gegeven wordt door f^{-1} gevolgd door g (dit wordt $g \circ f^{-1}$ genoemd).

Een n -atlas op $\mathcal{S}$ is een collectie kaarten $\{(U_\alpha, \kappa_\alpha)\}$ zo dat $\{U_\alpha\}$ een overdekking van $\mathcal{S}$ is, dit wil zeggen $\mathcal{S} = \cup_\alpha U_\alpha$. Door een atlas wordt ieder punt van $\mathcal{S}$ minstens één keer in kaart gebracht. Door de atlas op verzameling $\mathcal{S}$ wordt het mogelijk analyse te bedrijven en kan men bijvoorbeeld over differentieerbaarheid gaan praten.



Figuur 30: Een kaart geeft een afbeelding van het aardoppervlak naar de 2D euclidische ruimte. Op de kaart lijkt de afstand tussen Montreal en Parijs op die tussen Bogota en Lagos.

Samenvattend kunnen we het volgende zeggen. Het begin is een structuurloze verzameling $\mathcal{S}$. Deze wordt verdeeld in elkaar gedeeltelijk overlappende deelverzamelingen, en deze deelverzamelingen worden stuk voor stuk in kaart gebracht, met andere woorden deze deelverzamelingen

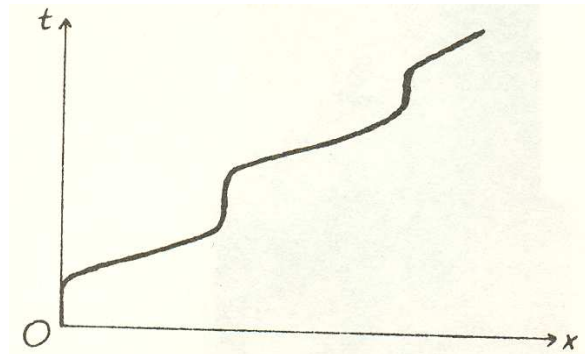
worden gecoördinatiseerd. Als $\mathcal{S}$ helemaal is overdekt door zulke gebiedjes, en als de overgangen tussen de verschillende coördinatenstelsels voldoende vaak differentieerbaar zijn, dan heet $\mathcal{S}$ een differentieerbare variëteit. Het hebben van een kaart is een goede eerste stap in de beschrijving van het aardoppervlak. Echter voor het berekenen van afstanden is er meer informatie nodig, want we dienen te weten hoe afstanden op de kaart overeenkomen met afstanden op het aardoppervlak. Deze informatie wordt gegeven door de metriek. De differentieerbare variëteit die ruimtetijd beschrijft heeft deze extra structuur. De metrische tensor volgt uit de Einsteinvergelijkingen en wordt bepaald door de energie-, massa- en impulsverdelingen, samengevat door de energie-impuls tensor.

4.3 Ruimtetijd van de ART

We zullen nu plausibel proberen te maken dat ruimtetijd een differentieerbare variëteit is. Daartoe wordt een geïdealiseerde waarnemer ingevoerd, dat is een waarnemer met verwaarloosbare afmetingen ten opzichte van de beschouwde schaal. Hierbij moet men denken aan een massapunt met daarop een glad lopende klok. Deze klok hoeft voorlopig helemaal niet eenparig (uniform) te lopen, als hij maar niet stilstaat. Bij iedere puntgebeurtenis op de plaats van deze waarnemer (dus op de plaats van het massapunt) hoort nu een eenduidig bepaald tijdstip, namelijk de tijd t die de klok aanwijst als de puntgebeurtenis $\mathcal{P} = \mathcal{P}(t)$ plaatsvindt. Voor een zeker tijdinterval I is er dus een bijectie

$$\gamma : t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto \gamma(t) = \mathcal{P}(t) \in \mathcal{S}. \quad (86)$$

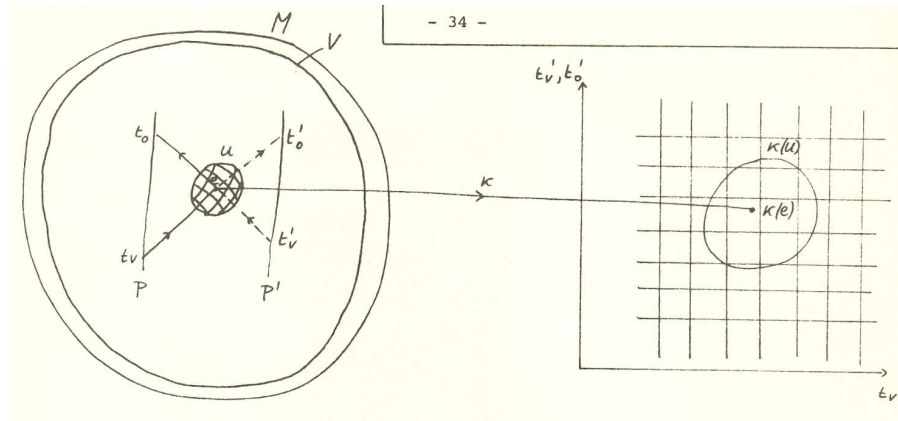
Dit is een kromme in $\mathcal{S}$, de *wereldlijn* van de waarnemer. Er zijn talloze voorbeelden van wereldlijnen te geven. Eén zo'n voorbeeld is de wereldlijn van een punttrein, dat is een trein met verwaarloosbare afmetingen ten opzichte van de beschouwde schaal (zie Fig. 31). Hierin is x de afstand van de punttrein tot het station O en t is de verlopen tijd sinds het vertrek uit O . Lichtsignalen zijn van groot belang voor het beschrijven van de structuur van ruimtetijd.



Figuur 31: Wereldlijn van een punttrein. De vertikale delen van de wereldlijn komen overeen met gebeurtenissen waarbij de trein stilstaat.

Bij lichtsignalen moet men denken aan golfpakketjes van radarsignalen, lichtpulsen of γ -quanta, waarvan de ruimtelijke afmetingen en de tijdsduur weer verwaarloosbaar zijn ten opzichte van de beschouwde schaal. Het is gebruikelijk doch niet geheel juist dergelijke golfpakketjes collectief met de term *foton* aan te duiden. Het belang van fotonen met betrekking tot de structuur van ruimtetijd is het gevolg van de empirisch vastgestelde universaliteit van de voortplanting van elektromagnetische golven in vacuüm, dat wil zeggen de voortplantingssnelheid in vacuüm is onafhankelijk van de bewegingstoestand van de bron en van de golflengte, de intensiteit en de polarisatie van de elektromagnetische golven.

Beschouw nu een radarstation P , dat een puntgebeurtenis e waarneemt. Het radarstation is klein genoeg om dit met een wereldlijn in $\mathcal{S}$ te beschrijven. Bij de puntgebeurtenis e kan men denken aan een vliegtuig waaraan op een zeker tijdstip en op een zekere plaats het radarsignaal wordt gereflecteerd. De tijd t_V van vertrek van het radarsignaal en de tijd t_O van ontvangst van het gereflecteerde radarsignaal worden door het radarstation P geregistreerd. In de newtonse mechanica wordt een puntgebeurtenis vastgelegd door vier coördinaten, $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$. Daarom introduceren we een tweede radarstation P' , dat een andere wereldlijn beschrijft en tijden t'_V en t'_O registreert voor dezelfde puntgebeurtenis e met de klok op P' . Men veronderstelt nu dat er een deelverzameling U van $\mathcal{S}$ bestaat, zodanig dat voor iedere puntgebeurtenis uit U de vier reële getallen (t_V, t_O, t'_V, t'_O) een coördinatenstelsel vormen. De kaart (U, κ) met $U \subset \mathcal{S}$ en $\kappa(e) = (t_V, t_O, t'_V, t'_O)$ heet een *radarcoördinatenstelsel*. Er is hier ondersteld dat een radarstation door slechts één uitgaande en één terugkomende radarpuls met e verbonden is. Als het heelal gesloten is zou puntgebeurtenis e door meer dan twee radarsignalen met een radarstation verbonden kunnen zijn. We beperken daarom in bovenstaande constructie alle wereldlijnen tot een deelverzameling V van $\mathcal{S}$, zodat e en P , respectievelijk e en P' door slechts twee radarpulsen worden verbonden. Dit wordt schematisch weergegeven in Fig. 32. Door nu



Figuur 32: Twee waarnemers brengen een gebeurtenis in kaart door er radarpulsen aan te reflecteren. Radarcoördinaten van een puntgebeurtenis e worden gevormd door tijden van vertrek en ontvangst van deze radarpulsen.

ruimtetijd $\mathcal{S}$ lapjesgewijs helemaal in kaart te brengen op bovenstaande wijze komt men tot de uitspraak: ruimtetijd is een vierdimensionale differentieerbare variëteit.

Er zijn naast genoemde manier nog andere manieren om ruimtetijd van coördinaten te voorzien. We noemen er twee.

1. Breng in ruimtetijd een voldoende dichte zwerm willekeurig bewegende deeltjes aan (massapunten), en voorzie ieder van deze deeltjes van een klok die weer niet noodzakelijkerwijs eenparig hoeft te lopen, als hij maar niet stilstaat. Kenmerk verder ieder deeltje door drie reële getallen (x, y, z) om ze van elkaar te onderscheiden. Aan een puntgebeurtenis worden nu vier reële getallen toegevoegd, namelijk het drietal plaatscoördinaten (x, y, z) van het massapunt P waar de puntgebeurtenis e plaatsvindt en het tijdstip t dat de klok van P aanwijst op het moment dat de puntgebeurtenis e wordt waargenomen. We krijgen zo een kaart $e \mapsto (t, x, y, z)$. Het coördinatenstelsel wordt zo geconstrueerd dat voor naburige puntgebeurtenissen bijbehorende (t, x, y, z) weinig verschillen.
2. Neem vier waarnemers met ieder een lopende klok, die willekeurig bewegen. Laat deze waarnemers de aankomsttijden t^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) van een lichtsignaal registreren dat door

een puntgebeurtenis e is uitgezonden. Men krijgt voor de puntgebeurtenis e dan vier coördinaten (t^μ) .

De belangrijkste begrippen met betrekking tot de structuur van ruimtetijd zijn dus *puntgebeurtenis*, *massapunt*, *foton* en *klok*.

4.4 Coördinatentransformaties

Als we kijken naar Fig. 29, zien we dat om een punt $\mathcal{P}$ van de variëteit te labelen, we een systeem van n coördinaten gebruiken, maar waarbij de keuze van de coördinaten arbitrair is. Het idee hierachter is dat niet de ‘labels’, maar de punten zelf, en de topologische en geometrische relaties ertussen van belang zijn. We mogen punten herlabelen door coördinatentransformaties uit te voeren, $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$, uitgedrukt door n vergelijkingen

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^0, x^1, \dots, x^{n-1}) \quad \text{met } \alpha' = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (87)$$

waarbij we de nieuwe coördinaten geven als functie van de oude coördinaten. Merk op dat we het accent aan de index hangen om de nieuwe coördinaten aan te geven. We kunnen een coördinatentransformatie dus passief beschouwen als het toekennen van nieuwe (geaccentueerde) coördinaten $(x^{0'}, x^{1'}, \dots, x^{(n-1)'})$ aan een punt van de variëteit, waarvan de oude coördinaten gegeven worden door $(x^0, x^1, \dots, x^{n-1})$.

We zullen aannemen dat de functies gegeven in vergelijking (87) eenwaardig, continu en differentieerbaar zijn over het valide bereik van hun argumenten. Door elke vergelijking in (87) te differentiëren naar de oude coördinaten x^β , krijgen we de $n \times n$ partiële afgeleiden $\partial x^{\alpha'}/\partial x^\beta$. Deze kunnen we samennemen in de $n \times n$ transformatiematrix $\Lambda^{\alpha'}_\beta$

$$\Lambda^{\alpha'}_\beta = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^{n-1}} \\ \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^{(n-1)'}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{(n-1)'}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial x^{(n-1)'}}{\partial x^{n-1}} \end{pmatrix}, \quad (88)$$

zodat rijen worden gelabeld met een index in de teller van de partiële afgeleide en kolommen door een index in de noemer. De elementen van de transformatiematrix zijn functies van de coördinaten, en daarom zijn de numerieke waarden van de matrixelementen in het algemeen verschillend als ze worden uitgerekend op verschillende punten $\mathcal{P}$ van de variëteit. De determinant van de transformatiematrix wordt de *Jacobiaan* van de transformatie genoemd en wordt aangeduid met

$$J = \det \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} \right). \quad (89)$$

Het is duidelijk dat de numerieke waarde van J van punt tot punt in de variëteit verandert.

Stel dat $J \neq 0$ voor een bepaald bereik van de coördinaten x^β , dan betekent dit dat we (in principe) vergelijkingen (87) kunnen oplossen naar de oude coördinaten x^β . We krijgen op deze wijze de *inverse* transformatievergelijkingen

$$x^\alpha = x^\alpha(x^{0'}, x^{1'}, \dots, x^{(n-1)'}) \quad \text{met } \alpha = 0, 1, \dots, n-1. \quad (90)$$

Op dezelfde manier als hierboven kunnen we de inverse transformatiematrix $\Lambda^\alpha_{\beta'} = \partial x^\alpha / \partial x^{\beta'}$ en de Jacobiaan van de inverse transformatie $J' = \det(\partial x^\alpha / \partial x^{\beta'})$ bepalen.

Als we de kettingregel gebruiken, dan kunnen we eenvoudig laten zien dat de inverse transformatiematrix de inverse is van de transformatiematrix, omdat

$$\sum_{\beta=0}^{n-1} \Lambda_{\beta}^{\alpha'} \Lambda_{\gamma'}^{\beta} = \sum_{\beta=0}^{n-1} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\gamma'}} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\gamma'}} = \delta_{\gamma}^{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{als } \alpha = \gamma, \\ 0 & \text{als } \alpha \neq \gamma, \end{cases} \quad (91)$$

waar we de Kronecker delta δ_{γ}^{α} gebruiken, alsmede het feit dat

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\gamma'}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} = 0 \quad \text{als } \alpha \neq \gamma, \quad (92)$$

omdat de coördinaten in zowel het geaccentueerde als in het niet-geaccentueerde systeem onafhankelijk zijn. Omdat de twee transformatiematrices elkaars inverse zijn, volgt $J' = 1/J$.

We beschouwen twee naburige punten $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$ in de variëteit, met respectievelijk coördinaten x^{α} en $x^{\alpha} + dx^{\alpha}$. In het nieuwe systeem wordt de infinitesimale coördinatenafstand tussen $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$ gegeven door de totale differentiaal

$$dx^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{n-1}} dx^{n-1}, \quad (93)$$

waar we bedoelen dat de partiële afgeleiden aan de rechterzijde van de vergelijking worden uitgerekend op punt $\mathcal{P}$. We kunnen dit economischer schrijven als

$$dx^{\alpha'} = \sum_{\beta=0}^{n-1} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}|_{\mathcal{P}} dx^{\beta}, \quad (94)$$

waar we in de laatste stap de sommatieconventie van Einstein hebben ingevoerd. Dit betekent dat als er in de uitdrukking dezelfde index boven als beneden voorkomt, we automatisch sommeren over alle waarden die die index kan aannemen.

4.5 Geometrische objecten

In het bovenstaande hebben we gepostuleerd dat ruimtetijd een differentieerbare variëteit is. We bespreken nu de verschillende topologische objecten die in ruimtetijd betekenis hebben: scalair veld, vector, 1-vorm, tensoren. Merk op dat de metrische tensor en het concept inproduct pas later aan de orde komen.

4.5.1 Puntgebeurtenis

Het begrip puntgebeurtenis hebben we reeds eerder besproken. Ruimtetijd is de verzameling van alle mogelijke puntgebeurtenissen.

4.5.2 Curve

Het is gebruikelijk om bij een curve te denken aan een reeks verbonden punten in ruimtetijd. Dit noemen we een *pad* en we reserveren het woord *curve* voor een geparametriseerd pad. We definiëren een curve als een afbeelding van een interval van de reële lijn naar een pad in ruimtetijd. Dit betekent dat een curve een pad is, waarbij met elke puntgebeurtenis een reëel getal geassocieerd is. Dit getal noemen we de parameter. Een curve $\mathcal{P}(\lambda)$ is te identificeren als een verzameling puntgebeurtenissen die gerelateerd zijn via een parameter λ . Elke puntgebeurtenis heeft coördinaten die uitgedrukt kunnen worden als een functie van λ . Er geldt

$$\text{Curve} : \{x^0 = f(\lambda), x^1 = g(\lambda), x^2 = h(\lambda), x^3 = k(\lambda), a \leq \lambda \leq b\}. \quad (95)$$

Als we de parameter vervangen (maar niet de puntgebeurtenissen) door $\lambda' = \lambda'(\lambda)$, vinden we

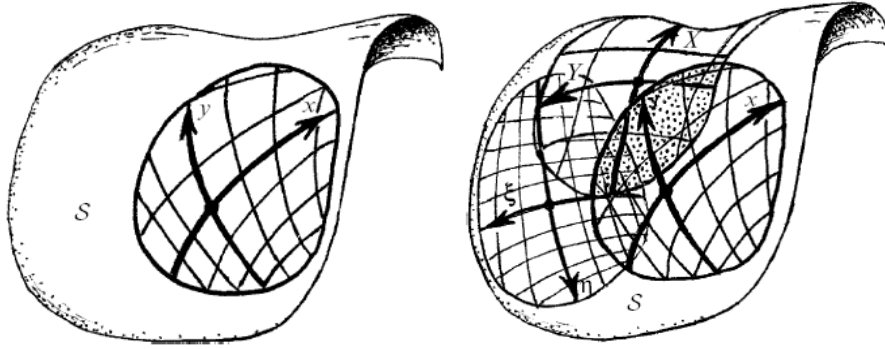
$$\{x^0 = f'(\lambda'), x^1 = g'(\lambda'), x^2 = h'(\lambda'), x^3 = k'(\lambda'), a' \leq \lambda' \leq b'\}, \quad (96)$$

waarbij f' , g' , h' en k' nieuwe functies zijn en waar geldt $a' = \lambda'(a)$ en $b' = \lambda'(b)$. Wiskundig noemen we dit een nieuwe curve, terwijl de afbeelding (het pad dat in ruimtetijd gevolgd wordt) hetzelfde blijft. Een oneindig aantal krommen kunnen dus hetzelfde pad hebben.

Voor de parameter wordt typisch de tijd op de klok van een meereizende waarnemer gebruikt. Als een metriek ontbreekt kunnen we echter niet spreken over lengte langs een curve.

4.5.3 Scalairveld

We beschouwen alleen differentieerbare variëteiten en dat zijn ruimten die continu en differentieerbaar zijn. Dit betekent dat we op elk punt van de variëteit een scalairveld Φ kunnen definiëren en dat deze functie overal kan worden gedifferentieerd. Stel we hebben een gladde functie Φ



Figuur 33: Grafische voorstelling van een differentieerbare variëteit $\mathcal{S}$. Binnen een lokaal gebied kan een kaart met gladde (reële getallen) coördinaten (x, y) de punten in de variëteit labelen. Om de hele variëteit te bestrijken dienen we verschillende kaarten samen te 'lijmen'.

gedefinieerd op $\mathcal{S}$, denk bijvoorbeeld aan de temperatuur op het aardoppervlak. In moderne wiskundige taal is Φ dan een gladde afbeelding van $\mathcal{S}$ naar de ruimte van reële getallen $\mathbb{R}$, omdat Φ aan ieder punt van $\mathcal{S}$ een reëel getal toekent, dit wil zeggen Φ maakt een afbeelding van $\mathcal{S}$ naar de reële getallen. Een dergelijke functie wordt vaak een *scalairveld* op $\mathcal{S}$ genoemd. Binnen een bepaald lokaal gebied heeft Φ een coördinatenvergelijking $\Phi = f(x, y)$ op de bijbehorende kaart. De gladheid van het scalairveld Φ komt dan tot uitdrukking in de *differentieerbaarheid* van de functie $f(x, y)$. Het zal de lezer opgevallen zijn dat onderscheid wordt gemaakt tussen Φ en f . De reden is dat Φ gedefinieerd is op het oppervlak, maar uitgedrukt kan worden in verschillende coördinatensystemen. De wiskundige uitdrukking voor $f(x, y)$ kan verschillen voor verschillende kaarten, terwijl de grootte Φ op elk specifiek punt van het oppervlak bestreken door deze kaarten niet verandert. Voor een andere kaart in Fig. 33 geldt bijvoorbeeld $\Phi = F(X, Y)$. Als de kaarten overlappen geldt $f(x, y) = F(X, Y)$. De specifieke uitdrukking voor F , in termen van X en Y , zal in het algemeen verschillen van de uitdrukking voor f in termen van x en y . In het algemeen is X een gecompliceerde functie van x en y in het overlap gebied, en dat geldt ook voor Y . Met deze functies dienen we rekening te houden als we van f naar F gaan. Dergelijke functies, die de coördinaten van één systeem beschrijven in termen van die van het andere systeem,

$$X = X(x, y) \quad \text{en} \quad Y = Y(x, y), \quad (97)$$

en hun inverse

$$x = x(X, Y) \quad \text{en} \quad y = y(X, Y), \quad (98)$$

noemen we *overgangsfuncties*.

Teneinde het bovenstaande concreet te maken, stelt U zich de volgende situatie voor. Een waarnemer die we voorzien van het label $\mathcal{O}$ besluit om de temperatuur van een bepaald gebiedje van het aardoppervlak in kaart te brengen. Hiertoe maakt hij een kaart van het gebied en gebruikt hij coördinaten x en y . Een bepaald punt $\mathcal{P}$ van het aardoppervlak komt overeen met een bepaald punt (x, y) op zijn kaart. Een tweede waarnemer (die we labelen met $\mathcal{O}'$) komt op hetzelfde idee. Hij maakt ook een kaart, echter met volledig andere coördinaten (x', y') . Na verloop van tijd besluiten beide waarnemers om hun analyse te vergelijken en leggen ze de kaarten naast elkaar. Het blijkt mogelijk om een wiskundige transformatie³⁴ te vinden tussen plaatsvectoren $\mathbf{x} = (x, y)$ op de kaart van waarnemer $\mathcal{O}$ en $\mathbf{x}' = (x', y')$ van $\mathcal{O}'$. Stel dat de transformatie correspondeert met de volgende set lineaire vergelijkingen,

$$\begin{aligned} x' &= 5x - 2y \\ y' &= 3x + 2y \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (99)$$

Deze vergelijkingen definiëren een lineaire transformatie³⁵ (of lineaire afbeelding) van een punt (x, y) naar een corresponderend beeld (x', y') . In matrixvorm mogen we dit schrijven als $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, en indien de afbeelding bijectief (een-op-een afbeelding) is, geldt $\det \mathbf{A} \neq 0$. Er is altijd sprake van een *alias-alibi* aspect bij dergelijke transformaties: als (x', y') wordt beschouwd als het definiëren van nieuwe coördinaten (een nieuwe naam) voor (x, y) , dan hebben we te maken met het alias aspect; als (x', y') beschouwd wordt als een nieuwe positie (plaats) voor (x, y) , dan komt het alibi aspect te voorschijn. In tensorrekening zijn we in het algemeen meer geïnteresseerd in het alias aspect. We noemen de twee coördinatenstelsels gerelateerd door $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ respectievelijk het systeem $\mathcal{O}'$ en $\mathcal{O}$. Stel dat het punt $\mathcal{P}$ van de variëteit in het systeem $\mathcal{O}$ gegeven wordt door de coördinaten $(x, y) = (0, -1)$. Met vergelijking (99) vinden we voor het punt $(x, y) = (0, -1)$ het beeldpunt $(x', y') = (2, -2)$ in systeem $\mathcal{O}'$. Het origineel in $\mathcal{O}$ en het beeldpunt in $\mathcal{O}'$ hebben verschillende coördinaten, maar stellen hetzelfde punt $\mathcal{P}$ in de variëteit voor.

Stel dat waarnemer $\mathcal{O}$ de temperatuur T in zijn coördinatenstelsel kan beschrijven met uitdrukking $T : T(x, y) = 30 + 8x - y$ (dit is een scalairveld T dat verschillende waarden kan aannemen op verschillende punten). Op punt $(x, y) = (0, -1)$ wordt de temperatuur dan gegeven door $T = 30 + 8 \times 0 - (-1) = 31^\circ\text{C}$. Om de corresponderende uitdrukking voor de andere waarnemer, die in coördinatenstelsel $\mathcal{O}'$, te vinden, dienen we eerst de inverse transformatie gegeven door vergelijking (99) af te leiden. Hiertoe inverteren we de bijbehorende matrix en vinden

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}. \quad (100)$$

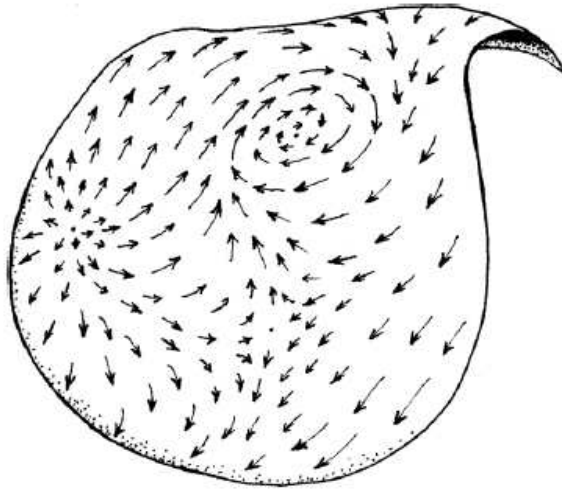
Er geldt dan $x = \frac{1}{16}(2x' + 2y')$ en $y = \frac{1}{16}(-3x' + 5y')$ en we krijgen een andere uitdrukking voor de temperatuur. We vinden $T : T(x', y') = 30 + \frac{8}{16}(2x' + 2y') - \frac{1}{16}(-3x' + 5y') = 30 + \frac{19}{16}x' + \frac{11}{16}y'$. Als we nu weer naar de temperatuur op hetzelfde punt (beeldpunt $(x', y') = (2, -2)$) kijken, vinden we weer $T(x', y') = T(2, -2) = 30 + \frac{19 \times 2}{16} + \frac{11 \times (-2)}{16} = 30 + 2,375 - 1,375 = 31^\circ\text{C}$, zoals het hoort, want de temperatuur is een scalairveld dat zich niets aantrekt van het coördinatenstelsel dat we kiezen. Beide waarnemers zijn het eens: in de variëteit (het stukje aardoppervlak waar de kaarten overlappen in dit geval) is de temperatuur op punt $\mathcal{P}$ gelijk aan 31°C .

³⁴Voor tensorrekening is basiskennis van transformatietheorie onontbeerlijk. Dit voorbeeld is een eerste kennismaking.

³⁵De transformaties die een rol spelen in de ART zijn over het algemeen niet lineair.

4.5.4 Vectorveld

Het begrip vector is ontstaan in de fysica en wel door begrippen als snelheid en versnelling. Deze objecten hebben een grootte en een richting en ze kunnen worden opgeteld en met een reëel getal vermenigvuldigd. Veel verwarring komt voort uit het feit dat de naam ‘vector’ refereert naar twee verschillende concepten: enerzijds een zuiver numeriek object (een rij of kolom getallen) en anderzijds een object met geometrische of topologische eigenschappen. In deze laatste betekenis is de vector onafhankelijk van het referentiesysteem en heeft daarom geen unieke decompositie in numerieke elementen. We benadrukken het om een vector (of meer algemeen een tensor) te zien als een ‘geometrisch object’, iets dat men zich kan voorstellen zonder te moeten refereren naar een specifiek referentiesysteem. Fig. 34 geeft een voorstelling van een vectorveld, bijvoorbeeld



Figuur 34: Grafische voorstelling van een vectorveld als een ‘verdeling van pijltjes over de variëteit’ getekend op S . De vectoren zijn gebonden aan hun plaats.

de horizontale windsnelheid op het oppervlak van de aarde.

Een topologische vector is een object $\vec{V}$ dat leeft in een bepaalde ruimte, in ons voorbeeld van het aardoppervlak is dat een niet-euclidische twee-dimensionale ruimte met constante positieve kromming³⁶. De vector heeft een bepaalde betekenis in die ruimte en stelt in ons voorbeeld de horizontale windsnelheid op het oppervlak van de aarde voor. We kunnen vectoren tekenen als pijltjes, zonder te refereren naar een bepaalde basis, en dat hebben we gedaan in Fig. 34.

Er is geen unieke manier om een topologische vector te expanderen in termen van componenten. Zonder verdere informatie is een bewering als

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (101)$$

zonder enige betekenis, omdat we niet weten welke basis we dienen te gebruiken. Wat we dienen te doen, is iets te schrijven als

$$\vec{V} \xrightarrow{\mathcal{O}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (102)$$

³⁶Andere voorbeelden zijn de Hilbertruimte met complexe golf functies van de quantummechanica, of de Minkowskiruimte van de speciale relativiteitstheorie.

waarmee we met het pijltje $\xrightarrow{\mathcal{O}}$ bedoelen dat de vector $\vec{V}$ componenten a en b heeft, die gegeven zijn in het referentiesysteem van waarnemer $\mathcal{O}$ (bijvoorbeeld het (x, y) systeem). De vector $\vec{V}$ is een pijl met als componenten een verzameling van coördinatenstelsel afhankelijke getallen. We kunnen ook schrijven

$$\vec{V} = a\vec{e}_{x(\mathcal{O})} + b\vec{e}_{y(\mathcal{O})}, \quad (103)$$

waarbij $\vec{e}_{x(\mathcal{O})}$ en $\vec{e}_{y(\mathcal{O})}$ de basisvectoren in het referentiesysteem van waarnemer $\mathcal{O}$ zijn. We hadden net zo goed een andere waarnemer kunnen kiezen, bijvoorbeeld $\mathcal{O}'$, en dan geldt

$$\vec{V} \xrightarrow{\mathcal{O}'} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad (104)$$

waarbij

$$\vec{V} = p\vec{e}_{X(\mathcal{O}')} + q\vec{e}_{Y(\mathcal{O}')}, \quad (105)$$

met $\vec{e}_{X(\mathcal{O}')}$ en $\vec{e}_{Y(\mathcal{O}')}$ de basisvectoren in het referentiesysteem van waarnemer $\mathcal{O}'$ (bijvoorbeeld het (X, Y) systeem). Merk op dat vergelijkingen (102) - (105) alle geldige beschrijvingen zijn van *dezelfde* topologische vector $\vec{V}$.

Het is verleidelijk om te denken dat het symbool $\vec{e}_x$ de x -component van de $\vec{e}$ -vector voorstelt. We bedoelen echter met $\vec{e}_x$ een volledige vector, waarbij het subscript x onderdeel is van de naam van de vector en aangeeft welke van de basisvectoren we bedoelen (namelijk de basisvector in de x -richting). De vector $\vec{e}_x$ heeft zelf componenten, waarvan de x -component geschreven kan worden als $(\vec{e}_x)_x$. De volledige basis³⁷ geven we in dit geval aan met $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$.

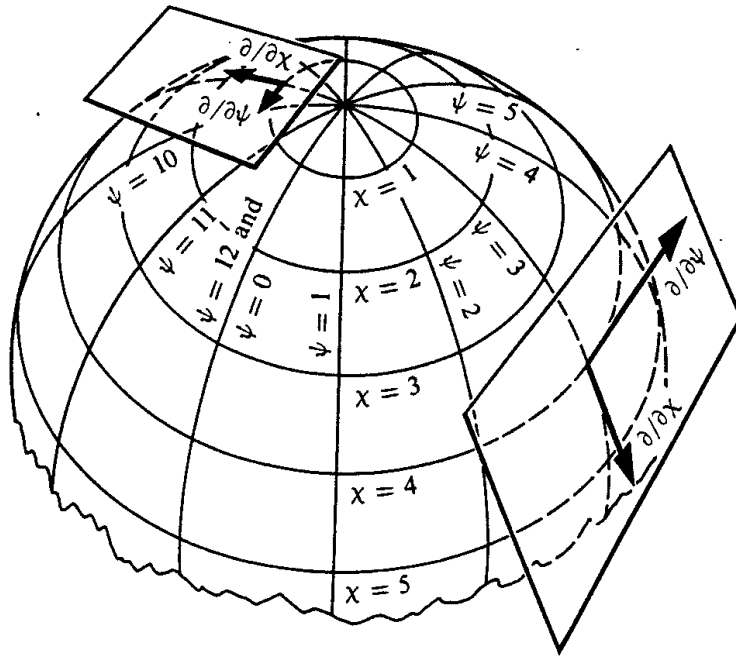
Elke complete set vectoren kan gebruikt worden als basis. In Fig. 33 zijn de referentiesystemen van drie waarnemers weergegeven. Een topologische vector wordt voorgesteld door de pijl (zie Fig. 34) en hoort niet bij een of ander referentiesysteem. Het is een topologisch object met zelfstandig bestaansrecht. De waarnemers bekijken het echter vanuit hun eigen gezichtspunt (referentiesysteem). Cruciaal is te begrijpen dat de vector *niet* verandert als we van het ene naar het andere referentiesysteem gaan. Er geldt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{\mathcal{O}} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_{\mathcal{O}'}. \quad (106)$$

Natuurlijk zijn de componenten a en b niet gelijk aan p en q en dienen we een voorschrift te vinden hoe we deze kunnen berekenen als we van basis veranderen. We gaan als volgt te werk: kies eerst een puntgebeurtenis $\mathcal{P}$. Op deze puntgebeurtenis kiezen we dan een complete set onafhankelijke vectoren (hierbij is elke redelijke keuze geoorloofd). We noemen deze vectoren $\vec{e}_i$ en gebruiken deze als basis om andere vectoren op punt $\mathcal{P}$ in te expanderen: $\vec{u} = \sum u^\alpha \vec{e}_\alpha$ en $\vec{v} = \sum v^\alpha \vec{e}_\alpha$. Fig. 35 toont dat deze basis een tangentenruimte $T_{\mathcal{P}}$ definieert op punt $\mathcal{P}$. Alle vectoren worden *lokaal* op dit punt beschreven³⁸. De richtingsafgeleiden $\partial_\alpha \equiv \partial_{\vec{e}_\alpha}$ langs deze coördinaten spannen de tangentenruimte (de raakruimte in punt $\mathcal{P}$) op. In Fig. 35 hebben we als coördinaten $\chi(\mathcal{P})$ en $\psi(\mathcal{P})$ gebruikt. De basisvectoren worden gegeven door de richtingsafgeleiden langs de coördinaatlijnen en zijn $\partial/\partial\chi$ en $\partial/\partial\psi$. We kunnen een vector dus zien als een richtingsafgeleide. We zien dat deze vectoren *niet* in de variëteit liggen, maar een eigen vectorruimte opspannen.

³⁷Er worden vaak andere symbolen gebruikt voor de basisvectoren, zoals $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ en $\mathbf{k}$. Ook is het mogelijk om $\vec{e}$ te zien als een object met hogere rang, bijvoorbeeld een vector van vectoren. Dat is niet fout, maar in ons geval ook niet nuttig.

³⁸We stappen dus af van het begrip vrije vector. In de algemene relativiteitstheorie kunnen we een vector niet eenvoudig vrij verplaatsen!



Figuur 35: De basisvectoren die door een coördinatensysteem worden geïnduceerd, vormen een tangenteruimte op elke gebeurtenis van de variëteit.

Alhoewel Fig. 35 een inzichtelijke voorstelling geeft, dienen we ons te realiseren, dat een abstracte variëteit beschouwd dient te worden als een zelfstandige entiteit: er is geen hogere-dimensionale ruimte waarin de variëteit en zijn tangenteruimten zijn ingebed. We geven een toelichting aan de hand van een voorbeeld dat de gang van zaken in de vertrouwde drie-dimensionale euclidische ruimte beschrijft.

Voorbeeld: coördinatensysteem in euclidische ruimte

We beschouwen de euclidische ruimte met cartesische coördinaten (x, y, z) en de bijbehorende basis van eenheidsvectoren $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. We gebruiken dit systeem als algemene referentie om andere, niet cartesische coördinaten in te beschrijven. We hebben een tweede coördinatensysteem (u, v, w) dat niet cartesisch is, bijvoorbeeld de sferische coördinaten (r, θ, ϕ) . Er geldt

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w), \quad (107)$$

en we kunnen dit inverteren om u, v, w te schrijven in termen van x, y, z . We kunnen bovenstaande vergelijking schrijven als

$$\vec{r} = x(u, v, w)\vec{i} + y(u, v, w)\vec{j} + z(u, v, w)\vec{k}, \quad (108)$$

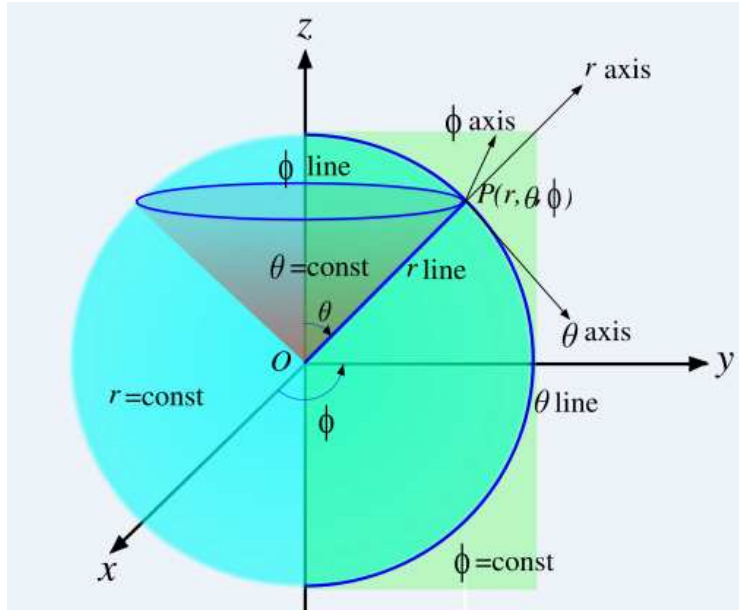
Indien we w gelijk zetten aan de constante w_0 , terwijl u, v mogen variëren, krijgen we

$$\vec{r} = x(u, v, w_0)\vec{i} + y(u, v, w_0)\vec{j} + z(u, v, w_0)\vec{k}. \quad (109)$$

hetgeen een parametrische vergelijking is voor het coördinatenoppervlak $w = w_0$, waarbij de coördinaten u, v de rol van parameters spelen. We kunnen de parametrische vergelijkingen voor de twee andere oppervlakken op identieke wijze verkrijgen. Als we in bovenstaande vergelijking $v = v_0$ en $w = w_0$ stellen, maar u laten variëren, krijgen we

$$\vec{r} = x(u, v_0, w_0)\vec{i} + y(u, v_0, w_0)\vec{j} + z(u, v_0, w_0)\vec{k}, \quad (110)$$

krijgen we een parametrische vergelijking voor de coördinatencurve gegeven door de snijlijn van vlakken $v = v_0$ en $w = w_0$, waarbij u de rol van parameter langs de curve speelt. We kunnen de parametrische vergelijkingen voor de twee andere curven op identieke wijze verkrijgen. Door elk punt $\mathcal{P}$ met coördinaten (u_0, v_0, w_0) gaan drie



Figuur 36: De coördinaatoppervlakken (bol, kegel en half-vlak) en coördinaatcurven voor sferische coördinaten.

coördinaatvlakken gegeven door $u = u_0$, $v = v_0$ en $w = w_0$. De vlakken snijden elkaar in coördinaatcurven. Voor sferische coördinaten hebben we

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta. \quad (111)$$

waarbij de coördinaten het volgende bereik hebben: $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ en $0 \leq \phi < 2\pi$. Fig. 36 toont dat het coördinaatvlak $r = r_0$ een bol is met straal r_0 , het coördinaatvlak $\theta = \theta_0$ is een oneindige kegel met de apex in de oorsprong en de as verticaal, en het coördinaatvlak $\phi = \phi_0$ is een half-oneindig vlak met de z -as als rand.

De oppervlakken $\theta = \theta_0$ en $\phi = \phi_0$ snijden elkaar en dat resulteert in de coördinaatcurve die een deellijn is die vanaf O vertrekt door $\mathcal{P}$ gaat; de oppervlakken $\phi = \phi_0$ en $r = r_0$ snijden elkaar in de curve die een halve cirkel is met eindpunten op de z -as en die door $\mathcal{P}$ gaat; en de oppervlakken $r = r_0$ en $\theta = \theta_0$ snijden elkaar in de horizontale cirkel door $\mathcal{P}$ met het middelpunt op de z -as.

Als we vergelijking (110) differentiëren naar de parameter u , krijgen we een tangentenvector aan de coördinaatcurve. Omdat we tijdens differentiëren v en w constant houden (want op deze wijze was de curve gedefinieerd), hebben we in feite de partiële afgeleide naar u genomen van vergelijking (107). Als we op dezelfde manier vergelijking (107) partieel afleiden naar v en w , krijgen we de tangentenvectoren van de andere twee coördinaatcurven. De drie partiële afgeleiden

$$\vec{e}_u \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{e}_v \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \quad \vec{e}_w \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}, \quad (112)$$

berekend op punt (u_0, v_0, w_0) geven tangentenvectoren aan de drie coördinaatcurven die door $\mathcal{P}$ gaan. Op deze wijze verkrijgen we de natuurlijke basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w\}$ op punt $\mathcal{P}$. In het algemeen is deze basis niet orthogonaal en zijn de vectoren geen eenheidsvectoren.

Gegeven een vectorveld $\vec{\lambda}$, kunnen we in elk punt $\mathcal{P}$ de vector $\vec{\lambda}$ refereren aan basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w\}$,

$$\vec{\lambda} = \lambda^u \vec{e}_u + \lambda^v \vec{e}_v + \lambda^w \vec{e}_w. \quad (113)$$

We gebruiken u^i ($i = 1, 2, 3$) in plaats van (u, v, w) voor de coördinaten, en $\{\vec{e}_i\}$ ($i = 1, 2, 3$) in plaats van $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w\}$ voor de natuurlijke basis. Voor een vector $\vec{\lambda}$ duiden we de componenten in de basis $\{\vec{e}_i\}$ aan met λ^i ($i = 1, 2, 3$). We kunnen vergelijking (113) nu uitdrukken als

$$\vec{\lambda} = \lambda^1 \vec{e}_1 + \lambda^2 \vec{e}_2 + \lambda^3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 \lambda^i \vec{e}_i. \quad (114)$$

We spreken nu af dat een index uit het midden van het alfabet ($i, j, k, \dots$) altijd loopt over de waarden 1, 2 en 3. Verder sommeren we automatisch als dezelfde index voorkomt als superscript en subscript (dit heet de sommatieconventie van Einstein). We kunnen vergelijking (114) nu schrijven als $\vec{\lambda} = \lambda^i \vec{e}_i$. Merk op dat de twee indices die we op deze wijze gebruiken, *dummie indices* genoemd worden. We mogen deze vervangen door andere letters (die nog niet in gebruik zijn).

In het volgende bestuderen we vectoren in ruimtetijd. Omdat ruimtetijd uit drie ruimtelijke en één tijddimensie bestaat, vormt het een vier-dimensionale structuur. De vectoren die in ruimtetijd leven, worden dan ook viervectoren genoemd. Als we een coördinatenstelsel aanbrengen, hebben deze vectoren vier componenten. Een typische vector is de verplaatsingsvector $\Delta \vec{x} \xrightarrow{\mathcal{O}} (\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$, die twee gebeurtenissen P en Q verbindt. Een andere notatie is $\Delta \vec{x} \xrightarrow{\mathcal{O}} \{\Delta x^\alpha\}$. Als we willen weten wat de componenten van deze vector zijn in een ander coördinatenstelsel, bijvoorbeeld het systeem $\mathcal{O}'$, dan schrijven we $\Delta \vec{x} \xrightarrow{\mathcal{O}'} \{\Delta x^{\alpha'}\}$. We gebruiken het accent boven de index om de nieuwe coördinaten aan te geven. De vector $\Delta \vec{x}$ is hetzelfde en daarvoor hebben we geen nieuwe notatie nodig als we van referentiesysteem veranderen. We kunnen de nieuwe vectorcomponenten $\Delta x^{\alpha'}$ vinden met behulp van de transformatiematrix van het ene naar het andere systeem (zie vergelijkingen (88)) en (93), en we schrijven

$$\Delta x^{\alpha'} = \sum_{\beta=0}^3 \Lambda_{\beta}^{\alpha'} \Delta x^{\beta} = \Lambda_{\beta}^{\alpha'} \Delta x^{\beta} \quad (115)$$

voor willekeurige α' . De verzameling $\Lambda_{\beta}^{\alpha'}$ bestaat uit 16 getallen die de transformatiematrix vertegenwoordigen. De notatie maakt weer gebruik van Einsteins sommatieconventie en vergelijking (115) stelt eigenlijk vier verschillende vergelijkingen voor ($\alpha' = 0, 1, 2, 3$).

Een algemene vector (wij zijn geïnteresseerd in viervectoren) is *gedefinieerd* als een verzameling getallen (de componenten van de vector ten opzichte van een bepaalde basis, $\mathcal{O}$) als $\vec{V} \xrightarrow{\mathcal{O}} (V^0, V^1, V^2, V^3) = \{V^\alpha\}$ en door de regel dat zijn componenten in een systeem $\mathcal{O}'$ gegeven worden door

$$V^{\alpha'} = \Lambda_{\beta}^{\alpha'} V^{\beta}. \quad (116)$$

Dus de componenten van een vector (vergelijking (116)) transformeren op dezelfde manier als de coördinaten (vergelijking (115)).

De componenten V^α van een vector $\vec{V}$ ten opzichte van de natuurlijke basis $\{\vec{e}_\alpha\}$ worden de *contravariante componenten* genoemd. Een object waarvan de componenten contravariant transformeren, een vector, noemen we een $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tensor. Stel dat we twee systemen met curvilineaire coördinaten hebben in ruimtetijd, aangegeven met $\mathcal{O}$ en $\mathcal{O}'$. We vragen ons af hoe de contravariante componenten van een vector veranderen als we van het ene naar het andere systeem gaan. We noemen $\{\vec{e}_\alpha\}$ de basis in het systeem van waarnemer $\mathcal{O}$ en $\{\vec{e}_{\alpha'}\}$ de basis in het systeem van waarnemer $\mathcal{O}'$. Er geldt

$$\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha = V^{\alpha'} \vec{e}_{\alpha'}. \quad (117)$$

We kunnen bovenstaande relatie gebruiken om de transformatiewet voor de basisvectoren te vinden, dit wil zeggen de relatie tussen $\{\vec{e}_\alpha\}$ en $\{\vec{e}_{\alpha'}\}$. Met vergelijking (116) kunnen we vergelijking (117) schrijven als

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha'} V^{\beta} \vec{e}_{\alpha'} = V^{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \rightarrow V^{\beta} \Lambda_{\beta}^{\alpha'} \vec{e}_{\alpha'} = V^{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \rightarrow V^{\alpha} \Lambda_{\alpha}^{\beta'} \vec{e}_{\beta'} = V^{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \rightarrow V^{\alpha} (\Lambda_{\alpha}^{\beta'} \vec{e}_{\beta'} - \vec{e}_{\alpha}) = 0. \quad (118)$$

In de eerste stap maken we gebruik van het feit dat $\Lambda^{\beta'}_{\alpha}$ en V^{β} gewoon getallen zijn, en dat hun volgorde in een eindige som niet uitmaakt. In de tweede stap gebruiken we het feit dat β en α' dummie indices zijn: we veranderen β in α en α' in β' . De laatste vergelijking moet waar zijn voor elke verzameling $\{V^{\alpha}\}$ omdat $\vec{V}$ een willekeurige vector is. We vinden

$$\vec{e}_{\alpha} = \Lambda^{\beta'}_{\alpha} \vec{e}_{\beta'} \quad (119)$$

en dit is de transformatiewet voor basisvectoren. Het is geen transformatie van componenten, maar geeft de basis $\{\vec{e}_{\alpha}\}$ van $\mathcal{O}$ als een lineaire som van de basis $\{\vec{e}_{\alpha'}\}$ van $\mathcal{O}'$. Als we dit vergelijken met relatie (116) dan zien we dat het transformatiegedrag verschilt. Omdat de componenten met de inverse transformatiematrix van die van de basisvectoren transformeert, noemen we de componenten van een vector contravariant.

We kunnen de inverse transformaties vinden door ons te realiseren dat de systemen $\mathcal{O}$ en $\mathcal{O}'$ op gelijke voet staan. We kunnen derhalve de indices met en zonder accenten verwisselen en vinden voor de inverse transformatie van basis en componenten

$$\vec{e}_{\beta'} = \Lambda^{\alpha}_{\beta'} \vec{e}_{\alpha}, \quad \text{en} \quad V^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta'} V^{\beta'}. \quad (120)$$

Dit volgt ook uit het feit dat eerst heen en vervolgens terug transformeren niets mag veranderen. Dit leidt tot de identiteit

$$\Lambda^{\nu}_{\beta'} \Lambda^{\beta'}_{\alpha} = \delta^{\nu}_{\alpha}. \quad (121)$$

Merk op dat we bovenstaand verband al hadden gevonden in vergelijking (91).

We eindigen de discussie over vectoren met een voorbeeld in $\mathbb{R}^2$. Stel dat V^i met $i = 1, 2$ de contravariante componenten zijn van een vector, en dat $V^i = (x^2, x^1)$ in het coördinatenstelsel $\mathbf{x} = \{x_i\}$. We willen nu de componenten van deze vector, $V^{i'}$, berekenen in het systeem $\mathbf{x}' = \{x^{i'}\}$ met transformatie

$$\begin{aligned} x^{1'} &= (x^2)^2 \neq 0 \\ x^{2'} &= x^1 x^2. \end{aligned} \quad (122)$$

Volgens de definitie van covariantie, vergelijking (116), geldt

$$V^{i'} = V^r \Lambda^{i'}_r = V^1 \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^1} + V^2 \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^2}, \quad (123)$$

waarbij we vergelijking (88) gebruikt hebben om $\Lambda^{i'}_r$ uit te werken. We zien dat we de transformatiematrix nodig hebben voor geval $i = 1$ en $i = 2$. We vinden

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x^2 \\ x^2 & x^1 \end{pmatrix}. \quad (124)$$

Dit geeft

$$V^{1'} = V^1(0) + V^2(2x^2) = 2x^1 x^2 \quad V^{2'} = V^1(x^2) + V^2(x^1) = (x^2)^2 + (x^1)^2 \quad (125)$$

en in termen van de geaccentueerde coördinaten wordt dit

$$V^{1'} = 2x^{2'} \quad V^{2'} = x^{1'} + \frac{(x^{2'})^2}{x^{1'}}. \quad (126)$$

4.5.5 Lineaire functionaal, 1-vorm of covectorveld

Een tensor van het type $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt een covector, een covariante vector, een lineaire functionaal³⁹ of een 1-vorm genoemd. De lineaire functionaal⁴⁰ $\tilde{p}$ heeft een vector als argument en beeldt af op de reële getallen: $\tilde{p}(\vec{V})$ is een reëel getal⁴¹. De functionalen voldoen aan de axioma's voor een vectorruimte. Deze ruimte wordt de *duale vectorruimte* genoemd om het te onderscheiden van de ruimte van alle vectoren $\vec{V}$. De componenten van $\tilde{p}$ worden p_α genoemd en er geldt

$$p_\alpha \equiv \tilde{p}(\vec{e}_\alpha). \quad (127)$$

Elke component met één enkel subscript is per conventie de component van een 1-vorm; een superscript geeft een component van een vector aan. In termen van componenten wordt het getal $\tilde{p}(\vec{V})$ gegeven door

$$\tilde{p}(\vec{V}) = \tilde{p}(V^\alpha \vec{e}_\alpha) = V^\alpha \tilde{p}(\vec{e}_\alpha) = V^\alpha p_\alpha. \quad (128)$$

Merk op dat we in bovenstaande afleiding gebruik maken van de lineariteit van de functionaal. Voor ruimtetijd ($n = 4$) is het getal $\tilde{p}(\vec{V})$ gelijk aan $V^0 p_0 + V^1 p_1 + V^2 p_2 + V^3 p_3$ en de bewerking wordt *contractie van $\vec{V}$ en $\tilde{p}$* genoemd.

De componenten van $\tilde{p}$ op een andere basis $\{\vec{e}_{\alpha'}\}$ zijn

$$p_{\alpha'} \equiv \tilde{p}(\vec{e}_{\alpha'}) = \tilde{p}(\Lambda^\beta_{\alpha'} \vec{e}_\beta) = \Lambda^\beta_{\alpha'} \tilde{p}(\vec{e}_\beta) = \Lambda^\beta_{\alpha'} p_\beta. \quad (129)$$

Als we dit vergelijken met uitdrukking (120) dan zien we dat de componenten van 1-vormen op precies dezelfde wijze transformeren als basisvectoren en tegengesteld aan de componenten van vectoren. Met tegengesteld bedoelen we met de inverse transformatie (zie weer vergelijking (120)). Dit gebruik van de inverse garandeert dat het $V^\alpha p_\alpha$ systeem onafhankelijk is voor iedere vector $\vec{V}$ en 1-vorm $\tilde{p}$. De inverse transformatie geeft aanleiding tot het woord *duaal* in *duale vectorruimte*. De eigenschap van transformeren met basisvectoren geeft aanleiding tot de *co* in *covariante vector*. Omdat componenten van gewone vectoren tegengesteld transformeren aan de basisvectoren, worden ze *contravariant* genoemd.

Omdat de 1-vormen een vectorruimte opbouwen, kunnen we een verzameling van onafhankelijke 1-vormen als basis kiezen. We hebben de basis $\{\vec{e}_\alpha\}$ reeds gebruikt om de componenten van de 1-vorm te definiëren. We kunnen nu de geassocieerde 1-vorm basis $\tilde{\omega}^\alpha, \alpha = 0, \dots, 3$ definiëren die we *duaal* aan $\{\vec{e}_\alpha\}$ noemen. Dat wil zeggen dat we de verzameling $\{\tilde{\omega}\}$ zó kiezen, dat

$$\tilde{p} = p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha. \quad (130)$$

We vinden op deze manier specieke 1-vormen als basis. Merk op dat we de notatie weer zodanig kiezen, dat we gebruik kunnen maken van de sommatieconventie. Als we vergelijking (130) gebruiken, vinden we

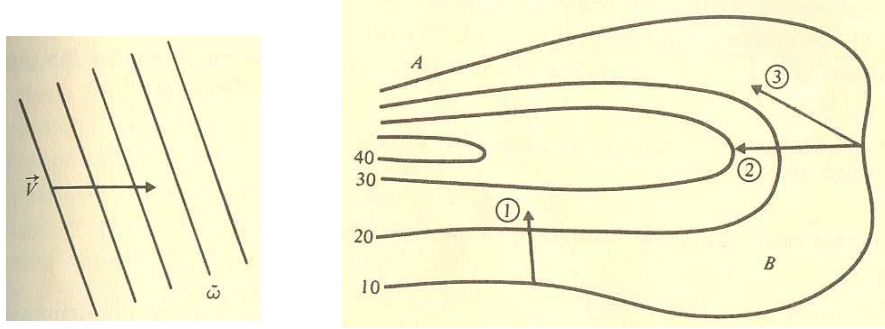
$$\tilde{p}(\vec{V}) = p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha(\vec{V}) = p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha(V^\beta \vec{e}_\beta) = p_\alpha V^\beta \tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta). \quad (131)$$

Het bovenstaande dient gelijk te zijn aan $p_\alpha V^\alpha$ en daaruit volgt

$$\tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta) = \delta^\alpha_\beta. \quad (132)$$

Bovenstaande relatie definieert de 1-vorm basis: de vector basis induceert een unieke en bruikbare 1-vorm basis⁴².

³⁹Terwijl een functie een getal als argument neemt en een getal als resultaat oplevert, neemt een functionaal een functie als argument en levert een getal als resultaat. Een voorbeeld is de totale massa die hoort bij een



Figuur 37: Links: de waarde $\tilde{p}(\vec{V})$ is gelijk aan 2,5. Rechts: een topologische kaart demonstreert de gradiënt 1-vorm (lokale contouren van constante hoogte). De verandering van hoogte voor een reis (pijl) is het aantal contouren dat door de pijl doorboord wordt. Deze is het grootst voor reis (2).

Bij vectoren denken we meestal aan een pijl als we een beeld nodig hebben. Het kan handig zijn om ook een voorstelling van een 1-vorm te hebben. Dit beeld moet het feit uitdrukken dat een 1-vorm een afbeelding is van een vector naar een reëel getal. In de drie-dimensionale ruimte kan men zich een 1-vorm $\tilde{p}$ op punt $\mathcal{P}$ voorstellen als een aantal parallelle vlakken. De contractie met een vector $\vec{V}$ is dan het aantal vlakken dat door de vector ‘doorboord’ wordt. Hoe dichter de oppervlakken bij elkaar staan, hoe groter $\tilde{p}(\vec{V})$.

Het dualisme is overigens compleet, omdat we vectoren ook kunnen beschouwen als functies die 1-vormen afbeelden op de reële getallen. Gegeven vector $\vec{V}$ krijgen we een reëel getal als we de vector voorzien van een 1-vorm,

$$\vec{V}(\tilde{p}) \equiv \tilde{p}(\vec{V}) \equiv p_\alpha V^\alpha. \quad (133)$$

Vectoren hebben dus geen speciale positie als objecten die als input dienen voor tensoren. We kunnen een vector ook als tensor zien: een lineaire functie van een 1-vorm naar een reëel getal. Vectoren en 1-vormen hebben hiermee een gelijke en symmetrische status.

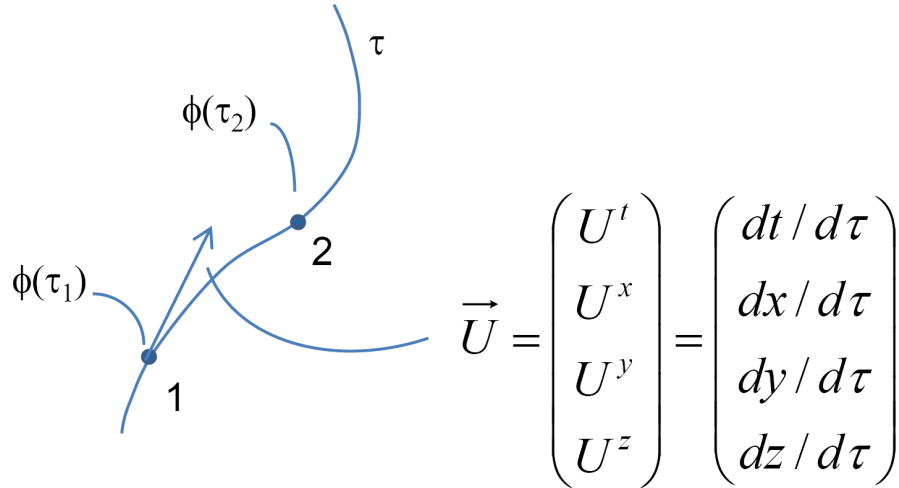
Voordat we de beschrijving van 1-vormen afsluiten zullen we nog een speciale 1-vorm bespreken, de gradiënt. We beschouwen in Fig. 38 een scalair veld $\phi(\vec{x}) = \phi(t, x, y, z)$. De wereldlijn van een waarnemer meet een waarde voor ϕ voor elke gebeurtenis die hij meemaakt en deze waarde verandert voortdurend. We parametriseren de wereldlijn met de eigentijd τ van de waarnemer en dit stelt ons in staat om de coördinaten van gebeurtenissen op de wereldlijn uit te drukken als functies van τ . Er geldt $[t = t(\tau), x = x(\tau), y = y(\tau), z = z(\tau)]$. De viersnelheid heeft componenten $\vec{U} \rightarrow \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right)$ en is duidelijk een viervector, want het is de verplaatsingsvector gedeeld door een getal (de eigentijd). Omdat ϕ een functie is van t, x, y en z , is ϕ op de wereldlijn impliciet een functie van τ , $\phi(\tau) = \phi[t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau)]$. De mate

dichtheidsverdeling, waarbij $m = \int \rho(x, y, z) dx dy dz$.

⁴⁰Net zoals we vectoren aangeven door een pijltje ($\vec{V}$) boven het symbool te plaatsen, geven we een lineaire functionaal aan door er een tilde ($\tilde{p}$) boven te plaatsen.

⁴¹Je kunt de 1-vorm zien als een apparaat met een sleuf. Als in deze sleuf een vector geplaatst wordt, dan rolt er een getal uit het apparaat.

⁴²Dit is niet de enig mogelijke basis voor 1-vormen. Men kan eenvoudig laten zien dat andere basis 1-vormen voldoen aan $\tilde{\omega}^{\alpha'} = U^{\alpha'}_{\beta} \tilde{\omega}^{\beta}$.



Figuur 38: Het pad in ruimtetijd wordt geparametriseerd door de eigentijd τ van een deeltje. Op tijd τ_1 heeft het scalaire veld ϕ de waarde $\phi(\tau_1)$ en op tijd τ_2 de waarde $\phi(\tau_2)$. De viersnelheid $\vec{U}$ is de raakvector aan de wereldlijn.

van verandering van ϕ op de wereldlijn, dat is de afgeleide, bedraagt

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\partial\phi}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial\phi}{\partial t} U^t + \frac{\partial\phi}{\partial x} U^x + \frac{\partial\phi}{\partial y} U^y + \frac{\partial\phi}{\partial z} U^z = \tilde{d}\phi(\vec{U}). \quad (134)$$

Het is duidelijk dat we in bovenstaande vergelijking erin geslaagd zijn om met de vector $\vec{U}$ het getal $d\phi/d\tau$ te produceren, dat de mate van verandering van ϕ is langs de wereldlijn waaraan $\vec{U}$ een tangent vector is. Dit getal $d\phi/d\tau$ wordt verkregen met een uitdrukking die duidelijk een lineaire functie van $\vec{U}$ is en hiermee hebben we dus een 1-vorm gedefinieerd. Vergelijken met uitdrukking (128) toont dat deze 1-vorm de componenten $\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}$ heeft. Deze 1-vorm wordt de gradiënt van ϕ genoemd en aangeduid met $\tilde{d}\phi$. Er geldt

$$\tilde{d}\phi \xrightarrow{\mathcal{O}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \quad \text{of ook } \tilde{d}\phi = \nabla\phi \quad \text{met } \nabla_\alpha\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}. \quad (135)$$

Merk op dat ondanks de notatie, $\tilde{d}\phi$ niet klein hoeft te zijn. We zien dus verder dat de gradiënt een 1-vorm is, terwijl we in de vectoranalyse geleerd hebben dat het een vectorgrootheid is. De reden hiervoor is dat er een metriek nodig is om 1-vormen aan vectoren te relateren. Op dit moment hebben we deze extra mathematische structuur nog niet aan onze variëteit opgelegd.

We kunnen vergelijking (135) nog controleren op haar consistentie door te bestuderen hoe de componenten transformeren. Voor een 1-vorm moet gelden $(\tilde{d}\phi)_{\alpha'} = \Lambda_{\alpha'}^\beta (\tilde{d}\phi)_\beta$. We weten hoe partiële afgeleiden transformeren, namelijk

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}}, \quad (136)$$

hetgeen betekent dat $(\tilde{d}\phi)_{\alpha'} = \Lambda_{\alpha'}^\beta (\tilde{d}\phi)_\beta$, want gegeven dat $x^\beta = \Lambda_{\alpha'}^\beta x^{\alpha'}$ geldt

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} = \Lambda_{\alpha'}^\beta \frac{\partial\phi}{\partial x^\beta}. \quad (137)$$

De componenten van de gradiënt transformeren met de inverse van de componenten van vectoren. De gradiënt is dus een 1-vorm.

Van nu af aan zullen we partiële afgeleiden aanduiden met de komma-notatie. Er geldt de definitie

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \equiv \phi_{,x} \quad \text{of algemeen} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} \equiv \phi_{,\alpha}. \quad (138)$$

Merk op dat de index α aan de linkerkant als een boven-index optreedt en aan de rechterkant als een beneden-index.

4.5.6 Algemene tensorvelden

De $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensoren zijn tensoren die twee vectorargumenten hebben. Een voorbeeld is de metrische tensor, maar een eenvoudiger voorbeeld is het product van twee 1-vormen. We gebruiken hierbij de volgende regel: als $\tilde{p}$ en $\tilde{q}$ beide 1-vormen zijn, dan is $\tilde{p} \otimes \tilde{q}$ de $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor die, als hij de vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$ als argumenten krijgt, het getal $\tilde{p}(\vec{A}) \tilde{q}(\vec{B})$ produceert. Het is dus het product van de getallen geproduceerd door de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tensoren. Het symbool $\otimes$ wordt het tensorproduct genoemd en geeft de formele notatie hoe we een $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor moeten samenstellen uit 1-vormen. Overigens is $\otimes$ niet commutatief: $\tilde{p} \otimes \tilde{q} \neq \tilde{q} \otimes \tilde{p}$ zijn verschillende tensoren. De eerste geeft de waarde $\tilde{p}(\vec{A})\tilde{q}(\vec{B})$ en de tweede $\tilde{q}(\vec{A})\tilde{p}(\vec{B})$.

De meest algemene $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor is geen eenvoudig tensorproduct van twee 1-vormen, maar kan wel altijd voorgesteld worden als een som van dergelijke tensoren. Hiertoe beschouwen we de componenten van een willekeurige $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor $\mathbf{f}$. Er geldt $f_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)$, waarbij elke index vier waarden kan aannemen voor ruimtetijd. In totaal heeft $\mathbf{f}$ dus 16 componenten. De waarde van $\mathbf{f}$ voor willekeurige vectoren is

$$\mathbf{f}(\vec{A}, \vec{B}) = \mathbf{f}(A^\alpha \vec{e}_\alpha, B^\beta \vec{e}_\beta) = A^\alpha B^\beta \mathbf{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = A^\alpha B^\beta f_{\alpha\beta}. \quad (139)$$

De vraag is of we een basis kunnen vormen voor deze tensoren⁴³. Kunnen we een verzameling bestaande uit 16 verschillende $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensoren $\tilde{\omega}^{\alpha\beta}$ definiëren, zodat geldt $\mathbf{f} = f_{\alpha\beta} \tilde{\omega}^{\alpha\beta}$? Als dat zo is, dan dient te gelden

$$f_{\mu\nu} = \mathbf{f}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = f_{\alpha\beta} \tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) \quad (140)$$

en dat betekent, dat moet gelden

$$\tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta. \quad (141)$$

Volgens vergelijking (132) is δ_μ^α de waarde van $\tilde{\omega}^\alpha$ voor $\vec{e}_\mu$ en hetzelfde geldt voor δ_ν^β . Daarom is $\tilde{\omega}^{\alpha\beta}$ een tensor, waarvan de waarde het product is van de waarden van de twee basis 1-vormen. We concluderen derhalve

$$\tilde{\omega}^{\alpha\beta} = \tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta. \quad (142)$$

De tensoren $\tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta$ vormen een basis voor alle $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensoren, en we mogen schrijven

$$\mathbf{f} = f_{\alpha\beta} \tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta. \quad (143)$$

Op deze wijze is een algemene $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor een som over eenvoudige tensorproduct tensoren.

⁴³Vergelijk dit eens met wat we gedaan hebben in vergelijking (130).

Een tensor van het type $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ is een afbeelding (functie) van M 1-vormen en N vectoren naar reële getallen, die lineair is in elk van zijn $M + N$ argumenten⁴⁴. Merk op dat deze definitie van een tensor niet spreekt over de componenten van de 1-vormen en vectoren. De tensor dient hetzelfde reële getal als uitkomst te geven, onafhankelijk van het gebruikte coördinatensysteem.

Net als een 1-vorm en vector heeft ook een tensor componenten. De definitie is als volgt: de componenten in een referentiesysteem $\mathcal{O}$ van een tensor van het type $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ zijn de waarden van de functie als men voor de argumenten de basis 1-vormen $\{\vec{e}^\alpha\}$ en basisvectoren $\{\vec{e}_\alpha\}$ van het systeem $\mathcal{O}$ gebruikt. De componenten van een tensor zijn dus afhankelijk van het referentiesysteem van de waarnemer, omdat de basis immers per systeem verschilt. De tensor zelf kan gezien worden als een topologisch object dat zelfstandig bestaat in ruimtetijd en onafhankelijk gezien kan worden van coördinatenstelsels.

4.6 Metrische tensor

Tot nu toe hebben we alleen variëteiten beschouwd die een relatief eenvoudige vorm hebben. De variëteit is continu en differentieerbaar, waardoor we 1-vormen, vectoren en andere tensoren kunnen definiëren. Verder betreft het een amorphe verzameling punten (of puntgebeurtenissen). Er is nog geen meetkunde gedefinieerd. Zo kunnen we twee vectoren (of 1-vormen) niet afbeelden op een reëel getal. Er is dan ook nog geen concept van inproduct.

Als volgende stap kiezen we nu een $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor $\mathbf{g}$ (van gravitatie) die dienst gaat doen als de metriek van de variëteit. Een dergelijke variëteit noemen we een riemannse variëteit. De metrische tensor maakt het mogelijk om de (kwadratische) lengte van een vector te berekenen, of het scalaire product (inproduct) van twee vectoren te bepalen. Ook zullen we zien dat de metriek een één op één correspondentie levert tussen vectoren en 1-vormen. We definiëren

$$g(\vec{A}, \vec{B}) \equiv \vec{A} \cdot \vec{B}, \quad (144)$$

en hieruit volgt direct dat de metrische tensor symmetrisch is, $g(\vec{A}, \vec{B}) = g(\vec{B}, \vec{A})$. We beschouwen $g(\ , \)$ als een functie met twee argumenten en die lineair is in deze argumenten, bijvoorbeeld

$$g(\alpha \vec{A} + \beta \vec{B}, \vec{C}) = \alpha g(\vec{A}, \vec{C}) + \beta g(\vec{B}, \vec{C}). \quad (145)$$

Merk op dat deze definitie van metriek geen gebruik maakt van de componenten van de vectoren. De metriek kan weer gezien worden als een topologisch object in ruimtetijd. In een specifieke basis $\{\vec{e}_\alpha\}$ heeft de metrische tensor componenten die gegeven zijn door

$$g(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = g_{\alpha\beta}. \quad (146)$$

De fundamentele rol van de metriek is om te zorgen voor een afbeelding tussen vectoren en 1-vormen. Om te begrijpen hoe dit werkt, beschouwen we g en een enkele vector $\vec{V}$. Omdat g twee vector argumenten nodig heeft, kunnen we de uitdrukking $g(\vec{V}, \)$, waar nog een argument ontbreekt, beschouwen als een functie van vectoren. Als men aan $g(\vec{V}, \)$ nog een vector toekent, dan krijgen we een reëel getal. Een dergelijke lineaire functie van vectoren die een reëel getal produceert, noemen we een 1-vorm. We noemen het $\tilde{V}$. Er geldt

$$g(\vec{V}, \) \equiv \tilde{V}(\), \quad (147)$$

⁴⁴Men kan een dergelijke tensor opvatten als een apparaat met M gaten waar men 1-vormen en N gaten waar men vectoren in kan stoppen. Nadat men die M 1-vormen en N vectoren erin gestopt heeft, rolt er een reëel getal uit het apparaat. De uitkomst is lineair in elk van de vectoren en 1-vormen die als input gebruikt zijn.

waar we tussen de haakjes het vector argument moeten aanleveren. Dan geldt dat $\tilde{V}$ de 1-vorm is, die voor de vector $\vec{A}$ de waarde $\tilde{V} \cdot \vec{A}$ heeft. Er geldt

$$\tilde{V}(\vec{A}) \equiv g(\vec{V}, \vec{A}) = \vec{V} \cdot \vec{A} = V^\alpha A_\alpha = V_\alpha A^\alpha. \quad (148)$$

Omdat g symmetrisch is, kunnen we ook schrijven $g(\cdot, \vec{V}) \equiv \tilde{V}(\cdot)$. De componenten van $\tilde{V}$ vinden we als volgt,

$$V_\alpha \equiv \tilde{V}(\vec{e}_\alpha) = \vec{V} \cdot \vec{e}_\alpha = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{V} = \vec{e}_\alpha \cdot (V^\beta \vec{e}_\beta) = (\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta) V^\beta = g_{\alpha\beta} V^\beta. \quad (149)$$

Hiermee hebben we de relatie tussen vectoren en 1-vormen gevonden,

$$V_\alpha = g_{\alpha\beta} V^\beta. \quad (150)$$

We onderscheiden de componenten V^α van de vector $\vec{V}$ van de componenten V_α van de 1-vorm $\tilde{V}$ *alleen* door de positie van de index α . De inverse van de metriek bestaat ook en wordt aangeduid met $g^{\alpha\beta}$. Hiermee vinden we

$$V^\alpha = g^{\alpha\beta} V_\beta. \quad (151)$$

Een vector is een $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tensor en een 1-vorm is een $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tensor. We gebruiken de metrische tensor als afbeelding tussen beide. Op dezelfde manier kunnen we een $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ tensor afbeelden op een $\begin{pmatrix} N-1 \\ M+1 \end{pmatrix}$ tensor, of door gebruik te maken van de inverse metriek op een $\begin{pmatrix} N+1 \\ M-1 \end{pmatrix}$ tensor. Het is gebruikelijk om voor deze geassocieerde tensoren hetzelfde symbool te gebruiken, maar we dienen ons ervan bewust te zijn dat we te maken hebben met verschillende tensoren. Stel $T^{\alpha\beta}_\gamma$ zijn de componenten van een $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ tensor. Dan zijn

$$T^{\alpha\beta}_{\beta\gamma} \equiv g_{\beta\mu} T^{\alpha\mu}_\gamma \quad (152)$$

de componenten van een $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor, omdat we het *tweede* 1-vorm argument veranderd hebben in een vector. We noemen dergelijke manipulaties het naar boven brengen en naar beneden halen van indices en gebruiken hierbij de metriek als afbeelding.

We kunnen dit ook doen met de metriek zelf en vinden

$$g^\alpha_\beta \equiv g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta^\alpha_\beta. \quad (153)$$

De laatste stap volgt uit het feit dat $g^{\alpha\beta}$ en $g_{\alpha\beta}$ elkaars inverse afbeelding zijn.

Een differentieerbare variëteit is een riemannse variëteit als de kwadratische booglengte langs een curve voldoet aan

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (154)$$

waarbij de componenten van de metrische tensor, $g_{ij} = g_{ij}(x^1, x^2, \dots, x^n)$, continue functies zijn van de coördinaten en verschillen van constanten. In het speciale geval dat $g_{ij} = \delta_{ij}$, reduceert de riemannse ruimte tot de euclidische ruimte $\mathbb{E}^n$. De ruimte is vlak als het mogelijk is om een coördinatentransformatie te vinden, waarvoor $ds^2 = \epsilon_i (dx^i)^2$, waarbij iedere ϵ_i gelijk is aan +1 of -1. Een ruimte die niet vlak is, wordt gekromd genoemd.

We vatten het voorgaande samen en illustreren dit aan de hand van een voorbeeld uit de 3D euclidische ruimte.

Voorbeeld: duale basis in euclidische ruimte

We beschouwen de euclidische ruimte met cartesische coördinaten (x, y, z) en de bijbehorende basis van eenheidsvectoren $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. We gebruiken dit systeem weer als algemene referentie om een ander, niet cartesisch systeem, (u, v, w) , te beschrijven. We kunnen de gradiënt van een scalaire functie beschouwen als een 1-vorm. Teneinde dat duidelijk te maken gaan we weer even terug naar onze beschrijving in de drie-dimensionale euclidische ruimte. Vergelijking (112) geeft de natuurlijke basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w\}$ op punt $\mathcal{P}$, waarbij we de coördinaten (u, v, w) gebruiken om punten te labelen. Er is een andere manier om het coördinatensysteem (u, v, w) te gebruiken om een basis te construeren op punt $\mathcal{P}$. Allereerst inverteren we vergelijkingen (107) om u , v en w te krijgen in termen van x , y en z ,

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z). \quad (155)$$

Dit stelt ons in staat om elke coördinaat als een scalair veld te beschouwen en de bijbehorende gradiënten te berekenen.

$$\begin{aligned} \nabla u &= \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}, \\ \nabla v &= \frac{\partial v}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z} \vec{k}, \\ \nabla w &= \frac{\partial w}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial w}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial z} \vec{k}. \end{aligned} \quad (156)$$

Op elk punt $\mathcal{P}$ staan deze gradiëntvectoren loodrecht op de corresponderende coördinaatoppervlakken door $\mathcal{P}$, die overeenkomen met de oppervlakken $u = u_0$, $v = v_0$ en $w = w_0$. We hebben daarom met $\{\nabla u, \nabla v, \nabla w\}$ een alternatieve basis op $\mathcal{P}$. Deze basis is de *duale* van de basis van tangentenvectoren. Teneinde deze basis te onderscheiden van de natuurlijke basis, gebruiken we de indices als superscripten⁴⁵.

$$\vec{e}^u \equiv \nabla u, \quad \vec{e}^v \equiv \nabla v, \quad \vec{e}^w \equiv \nabla w. \quad (157)$$

Laten we nu een concreet voorbeeld beschouwen. Er geldt

$$x = u + v, \quad y = u - v, \quad z = 2uv + w, \quad (158)$$

waarbij $-\infty < u < \infty$, $-\infty < v < \infty$, $-\infty < w < \infty$. Inverteren van deze vergelijkingen geeft

$$u = \frac{1}{2}(x + y), \quad v = \frac{1}{2}(x - y), \quad w = z - \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad (159)$$

waaraan we kunnen zien dat de coördinaatvlakken $u = u_0$ een familie vlakken vormen, net zoals $v = v_0$, terwijl de coördinaatvlakken $w = w_0$ een familie hyperbolische paraboloiden vormen.

De positievector $\vec{r}$ wordt gegeven door

$$\vec{r} = (u + v)\vec{i} + (u - v)\vec{j} + (2uv + w)\vec{k}, \quad (160)$$

waarmee we voor de vectoren van de natuurlijke basis

$$\begin{aligned} \vec{e}_u &= \partial \vec{r} / \partial u = \vec{i} + \vec{j} + 2v\vec{k}, \\ \vec{e}_v &= \partial \vec{r} / \partial v = \vec{i} - \vec{j} + 2u\vec{k}, \\ \vec{e}_w &= \partial \vec{r} / \partial w = \vec{k} \end{aligned} \quad (161)$$

vinden. Alleen de laatste vector is een eenheidsvector. Geen van de inproducten $\vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = 4uv$, $\vec{e}_v \cdot \vec{e}_w = 2u$ en $\vec{e}_w \cdot \vec{e}_u = 2v$ is in het algemeen gelijk aan nul. Het systeem is dus niet orthogonaal.

We vinden voor de 1-vormen van de duale basis

$$\begin{aligned} \vec{e}^u &= \nabla u = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}, \\ \vec{e}^v &= \nabla v = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}, \\ \vec{e}^w &= \nabla w = -x\vec{i} + y\vec{j} + \vec{k} = -(u + v)\vec{i} + (u - v)\vec{j} + \vec{k}. \end{aligned} \quad (162)$$

We zien dat in het algemeen $\vec{e}^u$ niet parallel is met $\vec{e}_u$, $\vec{e}^v$ niet met $\vec{e}_v$, en $\vec{e}^w$ niet met $\vec{e}_w$.

Gegeven een vectorveld $\vec{\lambda}$ dan kunnen we op elk punt $\mathcal{P}$ de vector $\vec{\lambda}$ beschrijven ten opzichte van de natuurlijke basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w\}$ of de duale basis $\{\vec{e}^u, \vec{e}^v, \vec{e}^w\}$. We schrijven

$$\vec{\lambda} = \lambda^i \vec{e}_i = \lambda_i \vec{e}^i. \quad (163)$$

⁴⁵Door de indices als superscripten te plaatsen kunnen we weer gebruik maken van de elegante en compacte indexnotatie.

De ruimtetijd van Minkowski is een van de belangrijkste differentieerbare variëteiten, het is de ruimtetijd die beschreven wordt door de speciale relativiteitstheorie. Eenvoudige behandelingen van SRT introduceren de bijbehorende minkowskimetrik zelfs niet expliciet, maar geven ons wel alle ingrediënten die we nodig hebben om deze af te leiden. In het bijzonder weten we dat er voorkeurstelsels zijn voor de coördinaten, de zogenaamde Lorentzframes, en dat als twee gebeurtenissen gescheiden zijn door coördinaatafstanden $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ in een dergelijk frame, dan is het getal

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \quad (164)$$

onafhankelijk van het Lorentzframe. Als we onze coördinaten herdefiniëren door $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ en griekse letters gebruiken als ruimtetijd indices, dan vinden we

$$\Delta s^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = \eta_{\alpha\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta, \quad (165)$$

waarbij $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. We zien dat $\vec{V} \cdot \vec{W} = \eta_{\alpha\beta} V^\alpha W^\beta$ en $\eta_{\alpha\beta}$ is in feite de metrische tensor en het Lorentzframe vormt de geassocieerde orthonormale basis. We zien direct de associatie tussen de componenten van een vector en zijn geassocieerde 1-vorm. In een Lorentzframe geldt

$$U_0 = \eta_{0\alpha} U^\alpha = -U^0, \text{ en } U_x = U^x, U_y = U^y, U_z = U^z. \quad (166)$$

Een variëteit met metriek g wordt een minkowski ruimtetijd genoemd als er één enkel coördinatenstelsel bestaat dat de gehele variëteit bedekt en waarin g de componenten $\eta_{\alpha\beta}$ heeft.

5 De speciale relativiteitstheorie

5.1 Historische introductie en Einsteins postulaten

De relativiteitstheorie is geboren in het prille begin van de twintigste eeuw. De negentiende eeuw was net ten eind gekomen, en de natuurkunde bevond zich in een unieke positie: voor het eerst in de geschiedenis leken alle fundamentele vraagstukken opgelost te zijn. Al in de 17e eeuw had Sir Isaac Newton (1643-1727) een theoretisch model opgesteld waarmee beweging en krachten in detail konden worden berekend en voorspeld, samengevat in drie wetten die nu zijn naam dragen. Tezamen met Newtons universele wet van de zwaartekracht konden deze drie wetten zelfs de banen van de planeten om de zon perfect⁴⁶ beschrijven. Ook konden deze wetten, wanneer toegepast op de aanname dat materie bestaat uit vele miniscule deeltjes in constante botsing, de wetten van de warmteleer reproduceren; hiermee was het vakgebied van de thermodynamica vrijwel geheel⁴⁷ verklaard, wat een triomf is van de newtoniaanse bewegingsleer.

Verder was er nog de theorie van de elektrische en magnetische velden, onderzocht door Faraday, Oersted, Coulomb en Savart, en uiteindelijk halverwege de 19e eeuw tot een wiskundig geheel samengesmeed door James Clerk Maxwell (1831-1879); de vier wetten van deze theorie dragen nu zijn naam. Ook deze theorie, de elektrodynamica geheten, was uitermate succesvol. Het beschrijft, onder andere, de interactie tussen elektriciteit en magnetisme en laat zien dat zij eigenlijk een aspect zijn van een en dezelfde kracht. Ook laten de wetten van Maxwell zien dat elektrische en magnetische velden verstoord kunnen worden, en dat deze verstoring zich voortplant met een snelheid van 299.800 kilometer per seconde, een waarde nu universeel aangegeven door de letter c .⁴⁸ Dit is precies de snelheid waarvan men al lang eerder gemeten had dat het licht zich ermee voortplant, en de conclusie werd dan ook al snel getrokken dat licht niets anders is dan een verstoring in het elektromagnetische veld. Al snel konden alle regels uit de lenzen- en spiegeltheorie afgeleid worden uit de elektrodynamica, en hiermee werd het gehele vakgebied van de optica een solide fundament gegeven.

Het was dan ook geen wonder dat de natuurkundigen aan het eind van de negentiende eeuw in een euforische staat verkeerden. Er waren weliswaar nog bepaalde berekeningen in detail uit te voeren, maar niets leek erop te wijzen dat er meer zou bestaan dan de elektromagnetische kracht en de zwaartekracht, en dat alle relaties tussen krachten en bewegingen beschreven konden worden door de leer van Newton. Alle andere krachten en verschijnselen (licht, warmte, ...) waren al aangetoond een direct gevolg te zijn van de wetten van Newton of de wetten van Maxwell (of een combinatie van beide), en er waren simpelweg weinig aanwijzingen om te vermoeden dat de natuur zich aan meer wetten hield dan deze.

Er waren in het begin van de twintigste eeuw dan ook maar weinig natuurkundigen die zich realiseerden dat er wel degelijk een fundamenteel probleem verscholen zat in deze twee grote theorieën. Het probleem zat hem niet in de theorieën afzonderlijk, maar in hun *combinatie*. De wetten van Maxwell laten zien, zoals we besproken hebben, dat er golven bestaan die zich voortplanten door de ruimte en dat zij dit doen met precies de snelheid van het licht. De elektrodynamica zegt bovendien dat deze snelheid dezelfde is voor alle waarnemers, ook als deze zich ten opzichte van elkaar met constante snelheid bewegen. Dat is op zichzelf wel wonderlijk, maar hoeft nog geen probleem te zijn (zolang het maar niet door experiment tegengesproken

⁴⁶Later zullen we zien dat er wel degelijk een afwijking bekend was van de planeetbanen zoals beschreven door newtoniaanse wetten, te weten de perihelium verschuiving van Mercurius. Het verklaren van deze afwijking was een van de eerste experimentele verificaties van Einsteins theorie van de zwaartekracht: de algemene relativiteitstheorie. We komen hier in latere hoofdstukken op terug.

⁴⁷Ook hier geldt een kleine opmerking: er waren enkele onduidelijkheden (zoals de Gibbs correctie factor) die later verklaard zijn door de quantummechanica.

⁴⁸De keuze voor de letter c komt van het Griekse woord voor snelheid, *celeritas*.

wordt). Het probleem openbaart zich pas wanneer nu tegelijkertijd de wetten van Newton worden beschouwd: deze zeggen namelijk dat *alle* snelheden (ook die van het licht) wel degelijk behoren te verschillen tussen waarnemers die zelf een snelheid hebben ten opzichte van elkaar: dit zit onmiskenbaar ingebouwd in de wetten van Newton. Het was dan ook duidelijk dat de wetten van Newton en de wetten van Maxwell elkaar op enkele punten tegenspreken, en dat een van deze sets aangepast zou moeten worden. Het bleken de wetten van Newton te zijn. Het is deze noodzaak tot aanpassing die de jonge Albert Einstein in 1905 leidde tot de theorie die wij nu de speciale relativiteitstheorie (SRT) noemen.

Als startpunt van de SRT nam Einstein twee *postulaten*, twee principes waar geen bewijs van bekend is, maar waarvan hij vermoedde dat de natuur die altijd in acht nam. Beide zijn gebaseerd op vermoedens gevoed door de elektrodynamica, en beide zullen nu in zeker detail besproken worden.

De wetten van Maxwell laten zien dat een elektromagnetische verstoring zich voortplant met de snelheid van het licht ongeacht met welke snelheid een waarnemer zelf beweegt. Dit is een wonderlijk resultaat: als waarnemer *A* een foton voorbij ziet vliegen met de snelheid van het licht, c , en een waarnemer *B* beweegt zich met een zekere snelheid v ten opzichte van *A* in dezelfde richting als het foton, dan zegt het ‘gezond verstand’ dat waarnemer *B* het foton met een snelheid $c - v$ ziet bewegen. De wetten van Maxwell zeggen echter dat *ook* waarnemer *B* het foton met c ziet bewegen, en dat hetzelfde geldt voor *alle* waarnemers *C*, *D*, ... die zich met een constante snelheid bewegen ten opzichte van waarnemer *A*. Nogmaals: de verklaring voor dit gegeven is niet bekend, maar Einstein nam het als een *gegeven*, een feit van de natuur. Hij breidde het zelfs uit: waar de elektrodynamica suggereert dat dit een eigenschap is van louter en alleen het licht, nam Einstein aan dat alles wat zich met deze snelheid beweegt aan deze eigenschap voldoet. Dit vormt dan het eerste postulaat van de SRT:

Postulaat 1: de lichtsnelheid heeft dezelfde waarde voor alle waarnemers die zich ten opzichte van elkaar bewegen met een constante snelheid.

Dit gegeven staat bekend als het *principe van de invariantie van de lichtsnelheid*. De fysische (en zelfs filosofische!) implicaties van dit postulaat zijn enorm, omdat het direct tot gevolg heeft dat de duur van tijd en de grootte van afstanden niet hetzelfde kunnen zijn voor al deze waarnemers.

Het tweede postulaat komt voort uit een andere eigenschap van de elektrodynamica. Zoals verteld gaat de elektrodynamica over de relatie tussen elektrische velden en magnetische velden, waar een elektrisch veld een maat is voor de invloed van een stilstaand geladen deeltje op alle andere geladen deeltjes in zijn omgeving; een magnetisch veld is een maat voor de invloed van een bewegend geladen deeltje op alle andere geladen deeltjes in zijn omgeving. Op het eerste gezicht lijken deze definities in elkaar over te gaan. Immers, een stilstaand deeltje kan ook gezien worden als een bewegend deeltje wanneer de waarnemer van een stilstaand geladen deeltje besluit met constante snelheid te gaan bewegen; dientengevolge zal het elektrisch veld van het deeltje gedeeltelijk overgaan in een magnetisch veld. In zoverre lijkt het verschil tussen de twee velden slechts een keuze. Echter, er is een heel fysisch verschil tussen de twee velden, en dat is dat een ervan voldoet aan twee van de vier wetten van Maxwell, waar het andere veld voldoet aan de twee andere wetten van Maxwell, met fysisch heel verschillende eigenschappen. Bovendien is het gevolg van een elektrisch veld op een tweede geladen deeltje een kracht die *parallel* is aan het elektrische veld, waar het gevolg van een magnetisch veld een kracht is die *loodrecht* staat op het magnetische veld. Als het verschil tussen elektrische en magnetische velden slechts een keuze is van de snelheid van de waarnemer, hoe kan het dan zijn dat een fysisch meetbaar verschijnsel als kracht op een geladen deeltje zo verschillend is? Blijkbaar is er wel degelijk een heel fundamenteel verschil tussen elektrische en magnetische velden.

Ondanks dit schijnbare verschil, is er de volgende wonderlijke eigenschap van de elektrodynamica: als twee waarnemers, die relatief ten opzichte van elkaar bewegen met constante snelheid, de wetten van Maxwell toepassen op een en hetzelfde systeem van geladen deeltjes, dan zullen zij tot dezelfde fysische resultaten komen, ongeacht alle schijnbaar fundamentele verschillen tussen elektrische en magnetische velden. De waarnemers verschillen dan wel van mening over welke richting de krachten op wijzen, of de deeltjes al dan niet bewegen, en elektrische velden voor de ene waarnemer zijn magnetische voor de ander, maar het *totaal* van al deze effecten geeft uiteindelijk precies dezelfde fysische voorspellingen. Hiermee wordt bedoeld dat als de twee waarnemers hun voorspellingen corrigeren voor het feit dat zij met onderling snelheid bewegen ten opzichte van elkaar, deze altijd precies overeenkomen: de wetten van Maxwell kunnen dus worden toegepast door beide waarnemers zonder op onderlinge tegenstrijdigheden te stuiten. Blijkbaar maakt de natuur, in ieder geval wat elektromagnetische velden betreft, geen onderscheid tussen waarnemers met onderlinge verschillende constante snelheden. Einstein nam dit aan als een *gegeven*, en nam aan dat dit geldt voor *alle* natuurkundige verschijnselen (niet alleen de elektromagnetische). Dit vormt het tweede postulaat van de SRT:

Postulaat 2: de natuur maakt geen onderscheid tussen waarnemers die zich ten opzichte van elkaar bewegen met constante snelheid.

Praktisch betekent dit postulaat dat het onmogelijk is om via experimenten te bepalen of een waarnemer in absolute beweging is ten opzichte van een fysisch systeem of niet: het verschil tussen verschillende waarnemers is fundamenteel niet meetbaar. Hierdoor is elke waarnemer even ‘correct’ als elke andere waarnemer die zich met constante snelheid beweegt ten opzichte van de eerste. In het bijzonder betekent dit dat er geen waarnemersstelsel is ten opzichte waarvan fysische grootheden gemeten moeten worden: elk ander stelsel voldoet namelijk even goed. De gemeten waarden van de grootheden verschillen in het algemeen⁴⁹ per waarnemer, maar de *wetten* waaraan deze grootheden voldoen dienen allemaal precies hetzelfde te zijn. Daarom moet bij elke meting van een grootheid aangegeven worden ten opzichte van welke waarnemer het gemeten is. Dit wil zeggen: uitkomsten van metingen hebben nooit absolute betekenis, maar slechts louter relatief. Dit postulaat staat daarom bekend als het *relativiteitsprincipe*. Dit levert een wiskundig voorschrift: teneinde een theorie te formuleren die voldoet aan het relativiteitsprincipe, moeten de wiskundige wetten van deze theorie geschreven worden in een vorm die geen onderscheid maakt tussen waarnemers met verschillende constante snelheden. Dit zullen we dan ook expliciet doen in het vervolg.

5.2 Het minkowskilijnelement

Nu de twee postulaten van de SRT zijn gemotiveerd, kunnen we deze gaan gebruiken om de relatie tussen tijd en ruimte te onderzoeken, en de wetten van beweging af te leiden. Startpunt is het lijnelement

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (167)$$

De metriek speelt zoals altijd de hoofdrol. In het geval van de SRT (en wanneer geschreven in cartesische coördinaten) wordt de metriek gegeven door

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (168)$$

⁴⁹Er zijn uitzonderingen op deze regel: er bestaan ook grootheden die hetzelfde zijn voor alle waarnemers. Een ervan is al genoemd: de lichtsnelheid c .

Deze metriek draagt de naam *minkowskimetriek*, en wordt conventioneel aangeduid door de griekse letter η , oftewel $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. De inverse van de minkowskimetriek is eenvoudig te vinden, en blijkt precies dezelfde vorm te hebben als de metriek zelf,

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (169)$$

Als we het lijnelement uitschrijven vinden we:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (170)$$

Dit kunnen we meteen gebruiken om een fysische interpretatie toe te kennen aan het lijnelement. Ten eerste kan worden opgemerkt dat de laatste drie termen precies de stelling van Pythagoras vormen⁵⁰. Dit betekent dat als een waarnemer de afstand tussen twee punten in ruimtetijd meet, en dat op hetzelfde tijdstip doet, voor deze waarnemer geldt dat ds^2 niets anders is dan de afstand tussen deze twee punten. Verder kan worden opgemerkt dat als een waarnemer het tijdsverschil meet tussen twee gebeurtenissen en dat doet zonder ondertussen van positie te veranderen ten opzichte van de gebeurtenissen (dit wil zeggen: deze waarnemer is in rust ten opzichte van de gebeurtenissen!), de laatste drie termen van het lijnelement gelijk zijn aan nul; voor deze waarnemer geldt dus dat het lijnelement de interpretatie heeft van minus de verstreken tijd tussen twee gebeurtenissen. *Het lijnelement is een maat voor de tijd verstreken tussen twee gebeurtenissen voor een waarnemer die in rust is ten opzichte van deze gebeurtenis.*

5.3 Tijddilatatie

We zullen nu de eerste paar directe gevolgen van het minkowskilijnelement beschouwen. Zoals al eerder aangestipt, suggereert het eerste postulaat dat verschillende waarnemers van mening zullen verschillen over de afstand en het tijdsverschil tussen twee gebeurtenissen. Allereerst zal het effect van tijddilatatie worden beschouwd. Startpunt is het lijnelement

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (171)$$

Hierin is $d\tau$ op te vatten als de tijd die verstrijkt op de klok van een waarnemer (W1) voor wie de twee gebeurtenissen plaatsvinden op dezelfde positie, en is dt de tijd die verstrijkt tussen die gebeurtenissen zoals gemeten door een andere waarnemer (W2). Wanneer nu de rechterkant van deze vergelijking gedeeld wordt door $c^2 dt^2$, kan de relatie tussen verstreken tijd van de eerste waarnemer ($d\tau$) en die van de tweede waarnemer (W2) (dt) geschreven worden als

$$d\tau = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt. \quad (172)$$

Het plusmin-teken van deze uitdrukking is het wiskundige gevolg van het nemen van een wortel; fysisch zijn we echter alleen geïnteresseerd in het plusteken, aangezien een minteken zou impliceren dat de twee waarnemers tegengesteld lopende tijden ervaren. We zullen daarom vanaf nu altijd het plusteken gebruiken. Verder is geschreven $v \equiv \frac{dx}{dt}$, oftewel het is de afstand tussen de twee gebeurtenissen zoals gemeten door de tweede waarnemer, gedeeld door de tijdsduur zoals gezien door de tweede waarnemer (W2). Dit is de snelheid v waarmee deze waarnemer zich beweegt ten opzichte van de twee gebeurtenissen (en hiermee ook ten opzichte van de eerste waarnemer, die immers stil staat ten opzichte van de gebeurtenissen). Uit de gevonden vergelijking blijkt dat de twee waarnemers hun tijden verschillend registreren: de hoeveelheid tijd die

⁵⁰Merk op dat met de definitie $dT \equiv ict$, we het lijnelement kunnen schrijven als $ds^2 = dT^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$.

voor de ene waarnemer verstrijkt tussen twee gebeurtenissen is niet dezelfde als die voor de ander. De factor $\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1/2}$ is een maat daarvoor. Deze factor wordt de *lorentzfactor* genoemd, en zal nog vaker voorkomen in de SRT; hij wordt conventioneel aangeduid met de letter γ , waarbij

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (173)$$

Merk alvast op dat deze factor oneindig groot wordt als de twee waarnemers een onderlinge snelheid hebben gelijk aan c ; verder kan al worden opgemerkt dat als de twee waarnemers een onderlinge snelheid hebben groter dan c , de factor imaginair wordt en daardoor nooit fysisch relevant kan zijn. Dit is een eerste hint dat de lichtsnelheid niet alleen invariant is, maar ook de *maximale* snelheid is die fysisch mogelijk is. Voor het effect van tijddilatatie is het alleen nodig op te merken dat de lorentzfactor altijd groter is dan 1. Hieruit volgt dat $d\tau$ kleiner is dan dt , oftewel: de tijd verstreken tussen twee gebeurtenissen is voor de waarnemer die stilstaat ten opzichte van de twee gebeurtenissen, kleiner dan voor de waarnemer die zich met snelheid v beweegt ten opzichte van de gebeurtenissen ($d\tau < dt$). Wat betekent dit nu fysisch? Op eerste gezicht lijkt dit te betekenen dat de tijd sneller verloopt voor de eerste waarnemer dan voor de tweede: immers, de eerste waarnemer heeft minder tijd nodig om van een gebeurtenis naar de andere te gaan. De conclusie is echter net andersom, zoals een voorbeeld laat zien. Laat de eerste gebeurtenis het moment zijn waarop de twee waarnemers nog gelijk lopende klokken hebben, en waarop beide waarnemers kijken naar de slinger van de klok van waarnemer W1, die net op het punt staat een slinger te maken. Na een zekere tijd T heeft de slinger de andere kant bereikt, gezien vanuit de waarnemer die de klok bij zich heeft: $d\tau = T$. De stilstaande waarnemer W2 kijkt ondertussen naar dezelfde klok (die zich ten opzichte van hem voortbeweegt met snelheid v), en voor deze waarnemer doet de slinger er een tijd $dt = \gamma d\tau$ over: langer. Dit wil dus zeggen, dat de stilstaande waarnemer observeert dat de voorbijvliegende klok langer nodig heeft dan T om een enkele slinger te maken. De conclusie van de stilstaande waarnemer zou dan ook zijn dat de voorbijkomende klok te langzaam loopt. Dit is wat er bedoeld wordt met tijddilatatie: voor een stilstaande waarnemer lijkt een voorbij komende klok langzamer te lopen dan voor de waarnemer die met de klok meebeweegt. Dit wordt vaak aangeduid met de slogan ‘bewegende klokken lopen langzamer’; echter, de lading zou wellicht beter gedekt zijn door de uitspraak ‘voor een stilstaande waarnemer lijkt de bewegende klok langzamer te lopen’.

Een vraag komt dan al snel op: loopt een bewegende klok nu ‘echt’ langzamer dan de stilstaande klok? Want goed beschouwd hebben we hier alleen maar laten zien dat de bewegende klok langzamer *lijkt* te lopen wanneer bekeken door een stilstaande waarnemer. Het antwoord is dat er geen verschil is tussen langzamer *lijken* te lopen, en daadwerkelijk langzamer lopen: fysica gaat immers alleen over gemeten effecten, wat wil zeggen dat wij over alle effecten die zich niet via een meting openbaren, geen zinnige (dat wil zeggen testbare) uitspraak kunnen doen. Elke gemeten waarneming is net zo ‘waar’ als elke andere gemeten waarneming. Het heeft dan ook geen zin ons af te vragen of de slinger van een klok nu ‘echt’ langzamer slingert wanneer het beweegt, of dat het alleen maar zo ‘lijkt’ in onze waarneming: alleen onze meting geldt.

Wat de relativiteitstheorie ons nu geleerd heeft, is dat de gemeten tijdsduur van een proces afhankelijk is van de snelheid van de waarnemer, en de vraag hoe snel een proces nu ‘echt’ gaat, is onzinnig geworden. Dit is, zoals ook al genoemd in de discussie over het relativiteitsprincipe, de kern van het woord ‘relativiteit’: er is geen absoluut antwoord meer op de vraag wat de ‘werkelijke’ waarde is van bepaalde grootte; elke waarde is waarnemer-afhankelijk geworden, en elke gemeten waarde is even ‘waar’.

Enkele laatste opmerkingen over tijddilatatie. Het moge duidelijk zijn dat dit verschijnsel niets te maken heeft met de mechaniek van de klokken. Het is een puur geometrisch verschijnsel, direct

voortkomend uit de minkowskimetrick. Het verschijnsel beperkt zich dan ook niet tot klokken, en geldt voor elk fysisch meetbaar tijdsverschil: de slinger van een klok, de duur van een harteklop, het verval van een atoomkern, de levensduur van een mens, het vallen van een steen, etc, *alle* verschijnselen lijken langzamer te gaan voor een waarnemer, wanneer deze verschijnselen zich bewegen ten opzichte van deze waarnemer.

5.4 Lorentzcontractie

Een tweede direct gevolg van het minkowskilijnelement is de lorentzcontractie: afstanden tussen gebeurtenissen zijn korter voor een waarnemer die beweegt ten opzichte van de gebeurtenissen. Startpunt is wederom het lijnelement en we kiezen de x -as als richting van relatieve beweging. Er geldt

$$-c^2 dt^2 + dx^2 = -c^2 dt'^2 + dx'^2. \quad (174)$$

Om lorentzcontractie aan te tonen beschouwen we de volgende twee gebeurtenissen: de voorkant van een lat passeert een waarnemer, en de achterkant van de lat passeert deze waarnemer. Voor deze waarnemer vinden de twee gebeurtenissen plaats op dezelfde positie, dus geldt $dx' = 0$. De tijd die de lat erover doet om de waarnemer te passeren, dt' , kan gebruikt worden door deze waarnemer als een maat voor de lengte van de lat. Als de lat passeert met een snelheid v , concludeert deze waarnemer dat de lat een lengte heeft van $L' = v dt'$. De rechterkant van deze vergelijking kan dan ook worden geschreven als

$$-c^2 dt^2 + dx^2 = -\frac{c^2 L'^2}{v^2}. \quad (175)$$

De linkerkant van deze vergelijking heeft betrekking op een andere waarnemer die met de lat meebeweegt. Voor deze waarnemer vinden de twee gebeurtenissen (het de eerste waarnemer passeren van voor en achterkant van de lat) plaats op een onderlinge afstand van L , de lengte van de lat zoals gemeten door deze tweede waarnemer. De tijdsduur tussen de twee momenten, dt is echter anders voor deze waarnemer, omdat er een tijddilatatie optreedt⁵¹. Er geldt $dt' = \gamma^{-1} dt$. Als we dan vervolgens weer gebruiken dat de tijd dt' een maat is voor de lengte L' van de lat zoals gemeten door de eerste waarnemer, dan kan vergelijking (175) geschreven worden als

$$-c^2 \gamma^2 \frac{L'^2}{v^2} + L^2 = -\frac{c^2 L'^2}{v^2}. \quad (176)$$

Dit is nu een relatie tussen de lengte van de lat zoals gemeten door de waarnemer die de lat stil ziet staan, en zoals gemeten door de waarnemer die de lat ziet passeren met een snelheid v . Vereenvoudigd is deze relatie

$$L = \gamma L'. \quad (177)$$

Wanneer herinnerd wordt dat γ altijd groter is dan 1, zien we nu dat de lengte van een lat korter lijkt voor iemand die de lat ziet bewegen, dan iemand die de lat in rust ziet. Dit is de lorentzcontractie: afstanden lijken korter wanneer waargenomen door een bewegende waarnemer. Merk op dat dit niet alleen geldt voor latten, maar natuurlijk voor *alle* fysisch meetbare afstandsverschillen. Net als tijddilatatie, is lorentzcontractie een puur geometrisch effect, een direct gevolg van het minkowskilijnelement. Bovendien geldt ook hier weer dat er geen absoluut antwoord is op de vraag hoe lang een lat nu 'echt' is: afstand is een snelheids-afhankelijke grootheid geworden, en kan diengevolge alleen bepaald worden *ten opzichte van* een gegeven waarnemer: het relativiteitsprincipe!

⁵¹De correcte plaatsing van de lorentzfactor γ kan soms verwarrend zijn: welke waarnemer meet nu een langere tijdsduur? De vuistregel is altijd, dat de waarnemer die in rust is ten opzichte van de twee gebeurtenissen, de kortste tijdsduur meet tussen de twee gebeurtenissen. Dit betekent hier dat $\frac{dt'}{dt} < 1$, wat aangeeft hoe de factor γ geplaatst dient te worden.

5.5 De lorentztransformaties

Uit het relativiteitsprincipe volgde al dat het lijnelement invariant dient te zijn onder transformaties van coördinaten. Dit betekent dat er een beperkte set waarnemers is die onderling het minkowskilijnelement mogen gebruiken. We vragen ons af welke transformaties tussen waarnemers het minkowskilijnelement niet van vorm doen veranderen.

Wiskundig gezien is dan ook de vraag welke functies $x' = x'(t, x, y, z)$, $y' = y'(t, x, y, z)$, $z' = z'(t, x, y, z)$ de volgende vergelijking oplossen,

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2. \quad (178)$$

Er zijn meerdere transformaties te bedenken die hieraan voldoen. De makkelijkste die we bedenken kunnen is dat we gewoon bij elke coördinaat een constante optellen,

$$t' = t + a_t, \quad x' = x + a_x, \quad y' = y + a_y, \quad z' = z + a_z. \quad (179)$$

Ingevuld in vergelijking (178) laat direct zien dat dit een oplossing is. Fysisch betekent deze oplossing niets anders dan dat de twee waarnemers een (vaste) afstand van elkaar staan (a_x, a_y, a_z), en dat de klok van een van de waarnemers een (vaste) hoeveelheid tijd voor of achter loopt op die van de ander (a_t). Zulke transformaties noemt men *translaties*.

Een tweede set transformaties die het lijnelement gegeven in vergelijking (178) invariant laten, kan gevonden worden door veranderingen in de tijd en één van de plaats-coördinaten (bijvoorbeeld z) niet te beschouwen. In dat geval moet voldaan worden aan

$$dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2, \quad (180)$$

oftewel de som van twee kwadraten dient niet te veranderen. Deze vergelijking is eenvoudig op te lossen door te schrijven

$$x' = A_x x + A_y y, \quad y' = B_x x + B_y y, \quad (181)$$

waar A_x, A_y, B_x, B_y constanten zijn. Ingevuld in vergelijking (180) laat dan zien dat voor deze constanten dient te gelden

$$A_x^2 + B_x^2 = 1, \quad A_y^2 + B_y^2 = 1, \quad A_x A_y = -B_x B_y. \quad (182)$$

Aan de eerste twee eisen kan direct voldaan worden: als een som van twee kwadraten een constante moet opleveren, dan ligt het voor de hand om sinussen en cosinussen te proberen, aangezien voor deze functies geldt $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ voor elke hoek α . Men kan dus kiezen $A_x = \cos \alpha, B_x = \sin \alpha$ en $A_y = \cos \beta, B_y = \sin \beta$ om aan de eerste twee vergelijkingen te voldoen; aan de derde vergelijking is dan ook voldaan wanneer gekozen wordt $\beta = -\alpha$. Op deze manier is de transformatie compleet, en vinden we

$$x' = (\cos \alpha)x + (\sin \alpha)y, \quad y' = (\sin \alpha)x - (\cos \alpha)y. \quad (183)$$

Deze transformatie correspondeert met een draaiing om de z -as over een hoek α . Bijvoorbeeld, als die hoek $\frac{\pi}{2}$ is (een draaiing van 90°), dan is $x' = y$, en $y' = x$: de twee waarnemers staan stil ten opzichte van elkaar, maar zijn onderling 90° gedraaid. Transformaties als deze heten *rotaties*. In het voorgaande hebben we alleen een draaiing over de z -as beschouwd, maar de uitbreiding naar draaiingen over de andere assen zijn net zo eenvoudig te vinden.

Een derde soort transformatie kan gevonden worden door nu niet de tijd en een plaatscoördinaat constant te houden, maar in plaats daarvan twee ruimtelijke coördinaten (bijvoorbeeld y en z). In dat geval dient de transformatie te voldoen aan

$$-c^2 dt'^2 + dx'^2 = -c^2 dt^2 + dx^2. \quad (184)$$

Door nu te schrijven

$$ct' = A_t ct + A_x x, \quad x' = B_t ct + B_x x, \quad (185)$$

(waar A_t, A_x, B_t, B_x constanten zijn) en in te vullen in vergelijking (184), wordt gevonden dat de constanten moeten voldoen aan

$$A_t^2 - B_t^2 = 1, \quad -A_x^2 + B_x^2 = 1 \quad A_t A_x = B_t B_x. \quad (186)$$

Deze keer zullen sinussen en cosinussen niet voldoen, omdat hier nu het *verschil* van twee kwadraten een constante moet zijn om aan de eerste twee vergelijkingen te voldoen. Dit is precies wat de *hyperbolische functies* $\cosh$ en $\sinh$ definieert: voor deze geldt namelijk dat $\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta = 1$, voor elke waarde van η . Het ligt dan ook voor de hand te kiezen $A_t = \cosh \eta, B_t = \sinh \eta$ en $A_x = \sinh \rho, B_x = \cosh \rho$ zodat aan de eerste twee vergelijkingen is voldaan. Aan de derde vergelijking kan vervolgens voldaan worden door $\rho = \eta$ te kiezen. Hiermee is dan de transformatie compleet, en vinden we

$$ct' = (\cosh \eta)ct + (\sinh \eta)x, \quad x' = (\sinh \eta)ct + (\cosh \eta)x. \quad (187)$$

Wiskundig is dit een draaiing in ruimtetijd, maar dan over een ‘hyperbolische hoek’ η in plaats van een normale. Maar wat betekent dit fysisch? Met name: wat is de betekenis van de hyperbolische hoek η ? Dit kan worden gevonden door de tijddilatatie te beschouwen: we hadden al gezien dat de tijden van twee waarnemers die met snelheid v ten opzichte van elkaar bewegen, gerelateerd zijn via vergelijking (172). Als we de differentiaalvorm nemen van vergelijking (187) en kiezen $dt' = d\tau$, dan kunnen we de eerste uitdrukking in vergelijking (187) schrijven als

$$d\tau = (\cosh \eta)dt + (\sinh \eta)\frac{1}{c}dx \quad (188)$$

Kwadrateren, delen door dt^2 en vergelijken met de tijddilatatie formule geeft dan

$$\cosh^2 \eta + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sinh^2 \eta + 2\left(\frac{v}{c}\right) \cosh \eta \sinh \eta = 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2. \quad (189)$$

Dit is een kwadratische vergelijking voor de variabele $\frac{v}{c}$, en geeft een relatie tussen de snelheid v en de hyperbolische hoek η . Zo is al meteen te zien dat η niets anders is dan een ingewikkelde manier om de snelheid tussen twee waarnemers te beschrijven⁵². Wat de precieze relatie is tussen v en η vraagt nog een beetje meer rekenwerk. Allereerst moet vergelijking (189) herschreven worden tot

$$\begin{aligned} \left(\frac{v}{c}\right)^2 (1 + \sinh^2 \eta) + 2\left(\frac{v}{c}\right) (\cosh \eta \sinh \eta) + (\cosh^2 \eta - 1) &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 (\cosh^2 \eta) + 2\left(\frac{v}{c}\right) (\cosh \eta \sinh \eta) + (\sinh^2 \eta) &= 0. \end{aligned} \quad (190)$$

waar in de laatste stap de relatie $\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta = 1$ is gebruikt. Deze vergelijking kan worden opgelost voor $\frac{v}{c}$ met behulp van de abc-formule. Het resultaat is het directe verband tussen $\frac{v}{c}$ en η ,

$$\left(\frac{v}{c}\right) = -\frac{\sinh \eta}{\cosh \eta} \equiv -\tanh \eta \quad \Rightarrow \quad \eta = -\operatorname{arctanh} \left(\frac{v}{c}\right) \quad (191)$$

⁵²Deze alternatieve maat voor de snelheid wordt in sommige takken van de fysica meer gebruikt dan de snelheid v ; hij heeft als naam de *rapidity*. De reden voor deze voorkeur is dat de snelheid v tussen waarnemers nooit groter kan zijn dan de lichtsnelheid, terwijl de rapidity wel degelijk ∞ groot kan worden. Dit heeft soms rekenkundige voordelen.

Dit kan nu worden gebruikt om de transformatievergelijking (191) uit te drukken in de snelheid v , wat vaak een inzichtelijker grootheid is dan de hyperbolische hoek η . Hiervoor kunnen de volgende rekenregels worden gebruikt⁵³,

$$\begin{aligned}\cosh\left(-\operatorname{arctanh}\left(\frac{v}{c}\right)\right) &= \sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma \\ \sinh\left(-\operatorname{arctanh}\left(\frac{v}{c}\right)\right) &= -\left(\frac{v}{c}\right) \sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = -\left(\frac{v}{c}\right) \gamma.\end{aligned}\quad (192)$$

Merk op dat de lorentzfactor γ hier op natuurlijke wijze zijn intrede doet. Hiermee is dan gevonden dat de transformaties tussen de twee waarnemers gegeven worden door

$$\left. \begin{aligned} cdt' &= \gamma \left(cdt - \left(\frac{v}{c}\right) dx \right) \\ dx' &= \gamma (dx - v dt) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz, \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \rightarrow x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu} \quad (193)$$

(waar de relaties tussen de y en z afstanden ook weer zijn toegevoegd). Hierbij is $\beta = v/c$ de snelheid als fractie van de lichtsnelheid. Verder gebruiken we x^{μ} met $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ en $x^3 = z$, alsook de transformatiematrix $\Lambda^{\nu'}_{\mu}$.

De inverse transformaties kunnen we vinden door v door $-v$ te vervangen. We vinden

$$\left. \begin{aligned} cdt &= \gamma (cdt' + \beta dx') \\ dx &= \gamma (dx' + v dt') \\ dy &= dy' \\ dz &= dz', \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} \rightarrow x^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu'} x^{\nu'}. \quad (194)$$

We zien dan dat vergelijking (193) geschreven kan worden als $x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu}$, terwijl voor de inverse relaties (194) geldt $x^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu'} x^{\nu'}$. Deze vergelijkingen heten de *lorentztransformaties*, en spelen een hoofdrol in de SRT. Fysisch stellen zij het verschil voor tussen afstanden en tijdsduren zoals gemeten door waarnemers die zich ten opzichte van elkaar bewegen met een constante snelheid v in x -richting. Zulke vergelijkingen zijn eenvoudig af te leiden voor waarnemers die zich met snelheid v in andere richtingen bewegen. Tezamen met de translaties in alle richtingen en de rotaties om de drie ruimte-assen, vormen de lorentztransformaties de volledige set transformaties die het lijnelement niet veranderen, oftewel: onder deze transformaties is het relativiteitprincipe veilig gesteld. De conclusie is dan ook de volgende: zolang waarnemers maar louter getranslateerd en/of geroteerd zijn ten opzichte van elkaar, of alleen met constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen, kunnen zij allen het minkowskilijnelement blijven gebruiken, en gelden dus alle wetten afgeleid in dit hoofdstuk voor de coördinaatsystemen voor al zulke waarnemers. Zulke stelsels noemen we *inertiaalstelsels*. Dit is wat de speciale relativiteitstheorie het predikaat ‘speciaal’ geeft: alle wetten afgeleid gelden voor een beperkte set waarnemers. In latere hoofdstukken zullen we onze bevindingen uitbreiden naar *alle* waarnemers, leidend tot de theorie van de *algemene* relativiteit. Voor nu zullen we in de rest van dit hoofdstuk altijd louter inertiaalstelsels beschouwen: vanaf nu zal er met ‘waarnemer’ een waarnemer bedoeld worden die zich in een inertiaalstelsel bevindt.

⁵³Deze rekenregels zijn eenvoudig te bewijzen met behulp van de definities: $\cosh x \equiv \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\sinh x \equiv \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

De lorentztransformaties geven ons alle mogelijke relaties tussen de tijdsduren en afstanden zoals gemeten door verschillende waarnemers die zich bewegen met snelheid v ten opzichte van elkaar. Twee specifieke voorbeelden van zulke relaties hadden we al eerder gezien, toen nog direct afgeleid uit het minkowskilijnelement: de tijddilatatie en de lorentzcontractie. Deze liggen dan ook automatisch opgesloten in de lorentztransformaties. Voor tijddilatatie hoeven we alleen maar te kijken naar het speciale geval dat een van de waarnemers een tijdsduur meet tussen twee gebeurtenissen die ten opzichte van hem op een en dezelfde positie plaatsvinden, zodat $dx = 0$; voor deze waarnemer schrijven we $dt = d\tau$; er volgt dan direct uit vergelijking (194) dat een andere waarnemer een tijdsduur meet tussen deze twee gebeurtenissen gelijk aan $dt' = \gamma d\tau$. Dit is precies de tijddilatatieformule in vergelijking (172). Verder, om de lorentzcontractie af te leiden uit de lorentztransformaties hoeft alleen naar het speciale geval gekeken te worden dat de twee gebeurtenissen de metingen zijn van voor- en achterkant van een lat door een waarnemer die deze metingen doet op een en hetzelfde tijdstip (immers: als dat niet het geval is, zal de lat ‘voorbij’ vliegen in de tijd die deze waarnemer wacht tussen meting van voor- en achterkant, en stelt de afstand tussen gemeten positie van voor- en achterkant dus niet meer de lengte van de lat voor). Voor deze waarnemer geldt dan ook $dt = 0$, en zal de lengte van de lat gegeven zijn door $dx = L$; volgens vergelijking (194) meet de waarnemer in rust ten opzichte van de lat een lengte van $dx' = L = \gamma L$. Dit is precies de lorentzcontractie formule, vergelijking (177).

De tijddilatatie en lorentzcontractie zijn slechts speciale gevallen van de lorentztransformaties, een set algemene relaties tussen tijdsduren en afstanden zoals gemeten door waarnemers die bewegen ten opzichte van elkaar met een snelheid v .

5.6 Invariantie van de lichtsnelheid

We zijn nu op het punt aangekomen dat we ons kunnen buigen over de vraag hoe snelheden veranderen tussen waarnemers die zich bewegen ten opzichte van elkaar. Snelheid is niets anders dan een verandering van positie gedeeld door de verstreken tijd benodigd om de afstand tussen de begin- en eindposities te overbruggen. Maar zoals al gezien, zijn afgelegde afstanden en verstreken tijden niet meer absoluut: zij verschillen van waarnemer tot waarnemer. Het is dan ook te verwachten dat het concept gemeten snelheid op een nieuwe manier zal transformeren tussen verschillende waarnemers. Hiervoor beschouwen we twee waarnemers, 1 en 2, die ten opzichte van elkaar bewegen met een constante snelheid v . Beiden kijken naar een bewegend deeltje, en meten daar de snelheid van, waarbij u_1 de snelheid is zoals gemeten door waarnemer 1, en u_2 de snelheid zoals gemeten door waarnemer 2. De vraag is nu hoe deze twee gemeten snelheden zich tot elkaar verhouden.

Per definitie is de snelheid zoals gemeten door waarnemer 2 gegeven door

$$u_2 \equiv \frac{dx_2}{dt_2}. \quad (195)$$

De transformatie tussen tijd- en positieverschillen wordt gegeven door de lorentztransformatie, vergelijking (194); teller en noemer kunnen dan ook direct worden ingevuld, en worden uitgedrukt in de gemeten afstand en verstreken tijd dx_1 en dt_1 zoals gemeten door waarnemer 1. Dit levert

$$u_2 = \frac{\gamma}{\gamma} \frac{dx_1 + v dt_1}{dt_1 + \left(\frac{v}{c^2}\right) dx_1} = \frac{\frac{dx_1}{dt_1} + v}{1 + \left(\frac{v}{c^2}\right) \frac{dx_1}{dt_1}} = \frac{u_1 + v}{1 + \left(\frac{v}{c^2}\right) u_1}, \quad (196)$$

waarin is gebruikt dat dx_1 gedeeld door dt_1 precies de snelheid u_1 is zoals gemeten door waarnemer 1.

Dit is de zogenaamde *regel van Einstein voor het samenstellen van snelheden*: gegeven de snelheid u_1 van een object zoals gemeten door waarnemer 1, geeft deze formule ons de snelheid u_2 van

dit object zoals gemeten door waarnemer 2 die zich zelf met snelheid v beweegt ten opzichte van waarnemer 1. Voor kleine snelheden gaat de relatie over in de normale optelling van snelheden in de klassieke mechanica: $u_2 = u_1 + v$.

Een aantal interessante eigenschappen kan nu worden opgemerkt. Zo kan eenvoudig worden aangetoond dat als een waarnemer een deeltje ziet bewegen met een snelheid lager dan de lichtsnelheid (oftewel $u_1 < c$), elke andere waarnemer dit deeltje ook ziet bewegen met een snelheid lager dan de lichtsnelheid ($u_2 < c$). Ook kan worden aangetoond dat als een waarnemer het deeltje ziet bewegen met een snelheid hoger dan de lichtsnelheid, elke andere waarnemer dit deeltje ook ziet bewegen met een snelheid hoger dan de lichtsnelheid. Dit laatste is overigens alleen wiskundig waar: het zal later worden aangetoond dat niets sneller kan gaan dan het licht⁵⁴.

Het belangrijkste gevolg van Einsteins snelheidsregel is dat alle waarnemers dezelfde snelheid voor een lichtsignaal zullen meten, ongeacht de onderlinge snelheden tussen deze waarnemers: voor elke waarnemer zal een foton zich voortplanten met snelheid c . Neem als bewegend object een foton, dat voor waarnemer 1 met een snelheid van $u_1 = c$ beweegt. Einsteins snelheidsregel zegt dan vervolgens dat ook waarnemer 2 dit foton met snelheid $u_2 = c$ ziet bewegen,

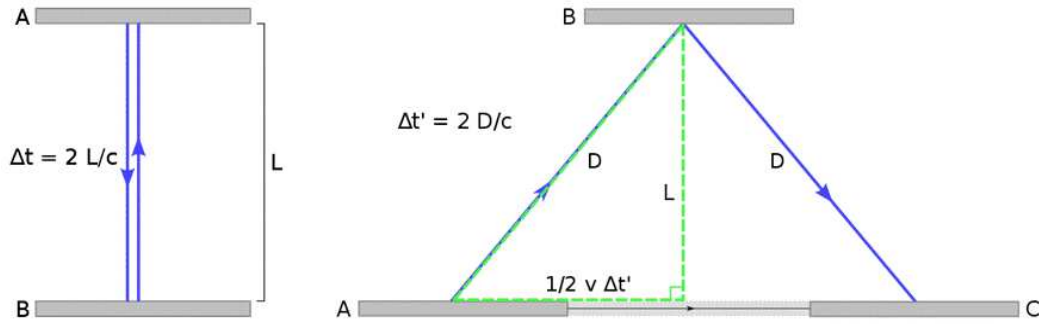
$$u_2 = \frac{u_1 + v}{1 + \left(\frac{v}{c^2}\right) u_1} \Big|_{u_1=c} = \frac{c + v}{1 + \left(\frac{v}{c}\right)} = c. \quad (197)$$

Dit betekent dat licht zich altijd (dit wil zeggen voor elke waarnemer in elk inertiaalsysteem) met de lichtsnelheid voortbeweegt! Stel dat waarnemer 1 een lichtstraal afvuurt. De fotonen snellen met de lichtsnelheid weg ten opzichte van waarnemer 1. Waarnemer 2 besluit om met hoge snelheid het licht achterna te gaan. Hiertoe beweegt hij bijvoorbeeld met 99 % van de snelheid ten opzichte van waarnemer 1. Als hij nu een meting uitvoert van de snelheid van de lichtbundel uitgezonden door waarnemer 1, meet hij toch weer dezelfde snelheid c . Ten opzichte van het licht heeft hij geen enkele vordering gemaakt! De snelheid v tussen de twee waarnemers blijkt geheel irrelevant (hij werd weggedeeld in de laatste stap). Blijkbaar maakt het niet uit hoe snel de twee waarnemers zich bewegen ten opzichte van elkaar: als een van hen een foton ziet dat met de lichtsnelheid gaat, dan ziet elke andere waarnemer dit ook. De conclusie is dan ook: *licht gaat voor elke waarnemer met de lichtsnelheid*. Men zegt ook wel: de lichtsnelheid is *invariant*. Op deze manier hebben we Einsteins oorspronkelijke eerste postulaat teruggevonden, louter en alleen door uit te gaan van de minkowskimetrie en het relativiteitsprincipe.

Tijddilatatie kan ook direct worden afgeleid uit de constantheid van de lichtsnelheid voor verschillende waarnemers. Om dit duidelijk te maken beschouwen we een eenvoudige klok gebaseerd op reflecterend licht. De klok is weergegeven in Fig. 39. Elke kloktik correspondeert met de heen- en terugreis van een foton tussen de spiegels. Voor een stilstaande klok duurt een kloktik $\Delta t \frac{2L}{c}$ s. Als de klok beweegt met snelheid v , dan moet het licht een langere weg afleggen om de heen- en terugreis te maken. De geometrie laat toe om de kloktik van de bewegende klok te bepalen. Er geldt $\Delta t' = \frac{2D}{c}$ en de diagonale afstand D kan met behulp van de stelling van Pythagoras bepaald worden als $D = \sqrt{L^2 + \frac{1}{4}v^2(\Delta t')^2}$. Invullen en oplossen van $\Delta t'$ levert $\Delta t' = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t$. We vinden hiermee weer de formule voor tijddilatatie.

Een goed voorbeeld van tijddilatatie zijn muonen die gecreëerd worden in de buitenste laag van de aardatmosfeer en richting de aarde bewegen. Vanwege tijddilatatie is hun levensduur beduidend langer dan de levensduur zoals die op aarde (in het rustsysteem van de muonen) gemeten wordt: $2.2 \mu\text{s}$. Dit laat toe dat dergelijke kosmische muonen een grotere weg afleggen en het oppervlak

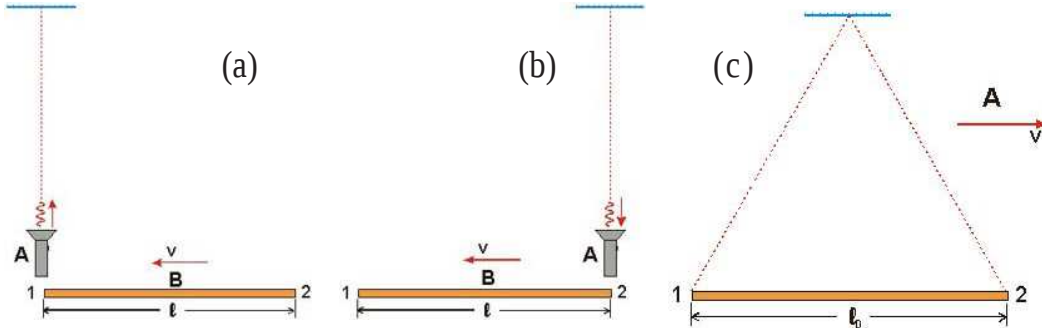
⁵⁴Dit geldt in de conventionele leer van de natuurkunde. Er zijn wel degelijk exotische theorieën waarin deeltjes bestaan die sneller gaan dan het licht (de zogenaamde *tachyonen*); echter, theorieën met tachyonen hebben doorgaans de eigenschap instabiele materie te voorspellen. Zulke deeltjes zullen daarom niet worden beschouwd.



Figuur 39: Een klok gebaseerd op een foton dat reflecteert tussen twee spiegels. Links: de klok is in rust en een kloktik komt overeen met de vluchttijd van het foton. Rechts: een waarnemer die een bewegende klok ziet, meet dat deze klok langzamer loopt.

van de aarde bereiken kunnen. Voor een waarnemer die meereist met een muon nadert de aarde met een snelheid in de buurt van de lichtsnelheid, maar kan de afgelegde weg desondanks niet meer dan $c\Delta t = (3 \times 10^8 \text{ m/s})(2.2 \times 10^{-6}) = 660 \text{ m}$ afleggen. Toch bereiken deze muonen het aardoppervlak, terwijl de afstand van de buitenste laag van de atmosfeer tot het oppervlak ongeveer 20 km is. De verklaring is dat deze lengte van 20 km voor de meereizende waarnemer lorentz-gecontraheerd is tot minder dan 660 m.

We kunnen onze lichtklok ook gebruiken om lorentzcontractie te begrijpen. We tonen de geometrie in Fig. 40. Twee waarnemers A en B hebben een relatieve snelheid v ten opzichte van



Figuur 40: Een klok gebaseerd op een foton dat reflecteert tussen twee spiegels. Panel (a): uiteinde 1 van de staaf passeert waarnemer A; panel (b): uiteinde 2 passeert A; panel (c): de situatie zoals gezien door waarnemer B.

elkaar. Waarnemer B houdt een staaf vast in de richting van v . We beschouwen eerst de situatie vanuit waarnemer A. Panel (a) toont de situatie waarbij uiteinde 1 van de staaf waarnemer A passeert. Op dat moment stuurt A een lichtflits in de richting van de spiegel. In panel (b) wordt de situatie getoond waarbij uiteinde 2 van de staaf waarnemer A passeert. De afstand tussen waarnemer A en de spiegel is dusdanig dat precies op dit tijdstip de lichtflits weer bij A aankomt. Voor A is er inmiddels een tijd $\Delta t'$ verstreken. Waarnemer A die de lengte van een ten opzichte van hem bewegende staaf meet, concludeert dus dat de lengte van de staaf L' gegeven wordt door $L' = 2v\Delta t'$. Panel (c) schetst de situatie voor de met de staaf meebewegende waarnemer B. Door te kijken naar dezelfde lichtklok meet B de lengte van de staaf als $L = 2v\Delta t$, waarbij Δt de tijdsperiode verstreken op zijn klok is. Vervolgens gebruikt hij de tijddilatatie formule,

$\Delta t = \gamma \Delta t'$ (merk op dat waarnemer B de tijd van een voor hem bewegende klok gebruikt!) en vindt $L' = L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{L}{\gamma}$.

5.7 Verlies van universele definitie van tijd en gelijktijdigheid

Als twee gebeurtenissen plaatsvinden op verschillende plaatsen, maar een waarnemer meet dat ze gelijktijdig gebeuren, dan kan het zo zijn dat een andere waarnemer (die beweegt ten opzichte van de eerste) meet dat ze voor hem niet gelijktijdig gebeuren. We noemen dit het *verlies van gelijktijdigheid*. Voor Newton en Galileo hadden voor en na een invariante betekenis: iedereen zou het erover eens zijn dat gebeurtenis A plaatsvond vóór gebeurtenis B . Dit lijkt alleen maar logisch omdat A wel eens de reden kan zijn dat B gebeurt, en het zou weleens tegenstrijdig kunnen zijn als iemand anders bepaalt dat B vóór A heeft plaatsgevonden. In de SRT is het alleen vereist dat de begrippen vóór en na nodig zijn als de gebeurtenissen elkaar kunnen beïnvloeden. Dus als A de gebeurtenis B kan veroorzaken, dan moet iedereen het erover eens zijn dat A eerder was. Echter A kan alleen B veroorzaken als licht (of een langzamer signaal) kan reizen van A naar B : geen enkele invloed kan sneller reizen dan het licht. Derhalve, als B te ver verwijderd is om licht van A te ontvangen tegen de tijd dat B plaatsvindt, dan is er geen logische reden dat verschillende waarnemers het erover eens moeten zijn welke van de gebeurtenissen het eerst plaatsvond.

Gebeurtenissen die op dezelfde tijd maar op verschillende posities plaatsvinden, zoals gezien door een waarnemer, zijn precies van dit soort: geen van beide kan de ander veroorzaken. Daarom geeft de SRT ze geen unieke volgorde: voor de ene waarnemer gebeuren ze gelijktijdig, voor een ander gebeurt A eerst, en voor een derde kan B eerst gebeuren. Echter alle drie de waarnemers zullen het erover eens zijn dat licht niet van de ene naar de andere gebeurtenis kan reizen, en er dus geen causaal verband tussen beide gebeurtenissen kan zijn.

Als echter licht kan reizen van A naar B , dan zullen alle waarnemers het hierover eens zijn en gebeurt B later dan A (maar wel met verschillende tijddilatatie effecten). Dus SRT behoudt het begrip van vóór en na, van toekomst en verleden, maar het past deze relatie niet toe op alle mogelijke paren gebeurtenissen.

Dit betekent dat het niet mogelijk is om Newtons idee van een drie-dimensionale absolute ruimte te handhaven, met tijd als alleen een parameter. In Newtons wereld zal iedereen het erover eens zijn hoe ruimte eruit ziet op een gegeven tijdstip. In Einsteins wereld is er alleen *ruimtetijd*, het vier-dimensionale continuüm van alle gebeurtenissen die op elk mogelijk tijdstip kunnen plaatsvinden. Gebeurtenissen zijn de punten in ruimtetijd. Een waarnemer zal een bepaalde verzameling gebeurtenissen groeperen in de drie-dimensionale ruimte op een bepaald tijdstip. Echter een andere waarnemer kan evenwel besluiten dat een andere verzameling gebeurtenissen ruimte vertegenwoordigt op een bepaald tijdstip.

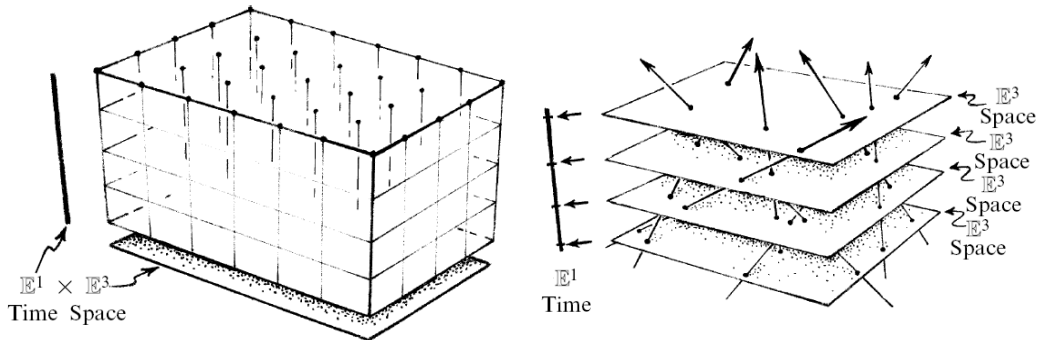
Twee gebeurtenissen die geen causaal verband met elkaar kunnen hebben, worden *ruimtelijk gescheiden* in ruimtetijd genoemd. Twee gebeurtenissen die verbonden kunnen worden door iets dat reist met een snelheid lager dan de lichtsnelheid worden *tijdsachtig gescheiden* genoemd. Gebeurtenissen die verbonden kunnen worden door één enkel foton worden *lichtachtig gescheiden* genoemd. Relativiteitstheorie mengt de begrippen ruimte en tijd. Als we het gezichtspunt van de waarnemer veranderen dan is er een transformatie van hoe we ruimte van tijd onderscheiden (zie vergelijkingen (194), hoe we tijdverschillen behandelen en hoe we afstanden meten. Dit alles wordt door de lorentztransformaties uitgedrukt.

5.8 Ruimtetijd

Hier stellen we ons wederom de vraag: wat is ruimtetijd? Waarom is het onjuist om over ruimte en tijd als aparte grootheden te spreken in plaats van over ruimtetijd als geheel? In de natuurkunde van Aristoteles werd ruimte voorgesteld als een Euclidische drie-dimensionale ruimte $\mathbb{E}^3$. De punten van de ruimte behouden hun identiteit van het ene moment op het andere. Stel een deeltje bevindt zich in rust op een bepaald ruimtelijk punt. We nemen dan aan dat wanneer we dit ruimtelijk punt nu beschouwen en ook op een later tijdstip, we te maken hebben met hetzelfde ruimtelijk punt. Ons beeld van realiteit correspondeert dan met het scherm in een bioscoop, waar een bepaald punt op het scherm zijn identiteit behoudt wat er ook op dat scherm geprojecteerd wordt. Evenzo wordt tijd voorgesteld als een Euclidische ruimte, maar dat is de triviale $\mathbb{E}^1$ één-dimensionale ruimte⁵⁵. De Euclidische ruimte geeft een definitie van het begrip afstand tussen punten. Verder is er een begrip van gelijktijdigheid. Het is dus absoluut zinvol om te spreken van gebeurtenissen die gelijktijdig hier en elders plaatsvinden. Om in de beeldspraak van de bioscoop te blijven: als we een bepaald frame van de film beschouwen dan worden alle gelijktijdige gebeurtenissen op verschillende plaatsen op het scherm geprojecteerd. De ruimtetijd van Aristoteles is het product

$$\mathcal{A} = \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3. \quad (198)$$

Het is eenvoudig de ruimte opgespannen door de paren $(t, \vec{x})$, met t een element van $\mathbb{E}^1$, een tijd, en $\vec{x}$ een element van $\mathbb{E}^3$, een punt in de ruimte. Deze ruimtetijd wordt weergegeven in Fig. 41 (linker figuur). Laten we nu eens kijken wat Galileo's relativiteitsprincipe voor een gevolg heeft



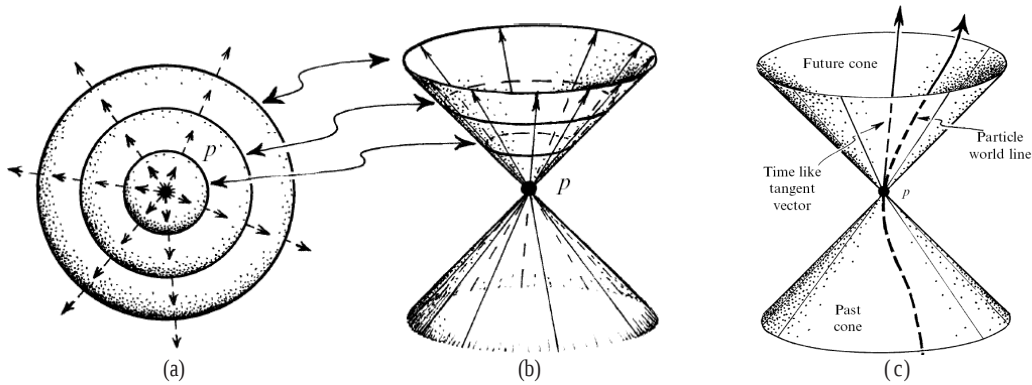
Figuur 41: Links: de ruimtetijd van Aristoteles $\mathcal{A} = \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3$ bestaat uit paren $(t, \vec{x})$. Rechts: de ruimtetijd van Galileo, $\mathcal{G}$, is een fiberruimte. Er is geen puntsgewijze connectie tussen verschillende $\mathbb{E}^3$ fibers: er bestaat geen absolute ruimte! Er is echter wel een unieke tijd voor elke ruimtetijd gebeurtenis: absolute tijd bestaat.

op ons begrip van ruimtetijd. Galileo vertelt ons dat de dynamische wetten hetzelfde zijn in elk inertiaalsysteem. Er is niets in de natuurkunde dat gebruikt kan worden om een systeem van rust te onderscheiden van een systeem dat met uniforme snelheid beweegt. Dit betekent dat er geen dynamische betekenis is in het stellen dat een bepaald ruimtelijk punt op dit moment hetzelfde is als het ruimtelijk punt een moment later. Het is zinloos te stellen dat het ruimtelijk punt waar mijn koffiekop zich nu bevindt, hetzelfde ruimtelijk punt is een minuut later. Gedurende deze minuut is de aarde om zijn as geroteerd en in dat systeem is mijn koffiekop op een ander ruimtelijk punt. Echter de aarde draait ook om de zon en dat levert weer een ander punt op.

⁵⁵Tijd wordt door Aristoteles niet voorgesteld als een kopie van de reële lijn $\mathbb{R}$, want $\mathbb{R}$ bevat het voorkeurselement 0. Er is echter geen sprake van een voorkeur voor een oorsprong in de beschrijving van dynamische objecten.

Kortom, de analogie van een projectiescherm is onjuist! We hebben niet één enkele Euclidische ruimte $\mathbb{E}^3$ als de arena waarin de acties van de fysische wereld zich in de tijd afspelen. We hebben verschillende $\mathbb{E}^3$ s voor elk tijdstip en er is geen natuurlijke identificatie tussen deze verschillende $\mathbb{E}^3$ s. Wiskundig gezien is Galileo's ruimtetijd $\mathcal{G}$ geen productruimte $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3$, maar iets dat wiskundigen een *fiberbundel* noemen met als basis $\mathbb{E}^1$ en fiber $\mathbb{E}^3$. De situatie is geschetst in Fig. 41 (rechter figuur). Een fiberbundel heeft geen puntgewijze connectie tussen één fiber en de volgende. Desalnietemin vormen de fibers samen een geheel. Aan elk ruimtetijd element van $\mathcal{G}$ wordt een tijd toegekend, en deze laatste is een element van de 'klokruimte' $\mathbb{E}^1$.

Het bestaan van een lichtsnelheid die voor elke waarnemer hetzelfde is, heeft het verdwijnen van de absolute tijd tot gevolg. In Fig. 42 nemen we een gebeurtenis $\mathcal{P}$ in ruimtetijd en beschouwen we alle lichtstralen die door $\mathcal{P}$ gaan voor elke richting (zie Fig. 42a). We kunnen ruimtetijd voorstellen door horizontaal de x en y richting uit te zetten, terwijl we de tijdcoördinaat (ct) verticaal kiezen. De lichtstralen vormen een kegel in ruimtetijd, de zogenaamde *lichtkegel*. Als we de lichtsnelheid als fundamenteel nemen, dan betekent dit dat we de lichtkegel als fundamenteel nemen. De lichtkegel definieert een structuur in de tangenteruimte T_P die hoort bij $\mathcal{P}$. De



Figuur 42: De lichtkegel specificceert de fundamentele snelheid van het licht. In (a) worden de banen van de uitgezonden fotonen ruimtelijk geschetst als een bol die expandeert vanuit punt $\mathcal{P}$. In (b) zien we dat in ruimtetijd de fotonen een kegel uitsnijden. In (c) zien we dat de kegel ruimtetijd opsplijst in een verleden en een toekomst. De wereldlijn van een massief deeltje in $\mathcal{P}$ heeft een vector die naar de toekomst wijst en tijdachtig is. Deze vector ligt dus binnen de toekomst lichtkegel van $\mathcal{P}$.

lichtkegel wordt gevormd door gebeurtenissen waarvoor geldt

$$s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 = 0. \quad (199)$$

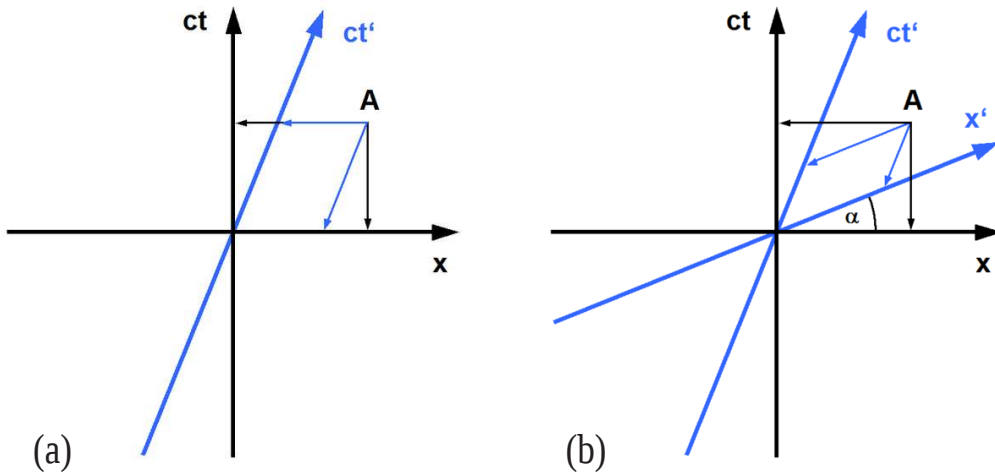
Gebeurtenissen die van $\mathcal{P}$ gescheiden zijn door een tijdachtig interval, vallen binnen de lichtkegel en er geldt $s^2 > 0 \rightarrow c^2 \Delta t^2 > \Delta r^2$. Dergelijke gebeurtenissen kunnen causaal verbonden zijn. Dat is niet mogelijk voor zogenaamde ruimtelijk gescheiden gebeurtenissen die buiten de lichtkegel vallen. Hiervoor geldt $s^2 < 0 \rightarrow c^2 \Delta t^2 < \Delta r^2$.

Merk op dat de lichtkegel uit twee delen bestaat: een *verleden* kegel en een *toekomst* kegel. We kunnen ons de verleden kegel voorstellen als de geschiedenis van een lichtflits die implodeert op $\mathcal{P}$. De toekomst kegel zien we als een lichtflits die explodeert vanuit punt $\mathcal{P}$. Fotonen liggen op de rand van de kegel, terwijl de wereldlijnen van massieve deeltjes die door $\mathcal{P}$ gaan, binnen de kegel dienen te liggen. De structuur van ruimtetijd in de SRT is zodanig dat voor elke gebeurtenis van ruimtetijd een lichtkegel bestaat die voor deze gebeurtenis de causale structuur bepaalt. We zullen dit uitdiepen in de volgende sectie.

5.9 Ruimtetijsdiagrammen

We gebruiken ruimtetijsdiagrammen om gebeurtenissen in de vierdimensionale ruimtetijd te beschrijven. In een ruimtetijd diagram (ook wel minkowskidiagram genoemd) tonen we een ruimtelijke dimensie op de x -as en de tijd op de y -as. Een ruimtetijd diagram stelt typisch het coördinatensysteem van een waarnemer voor. Deze waarnemer is dan zelf in rust in dit systeem en zijn wereldlijn correspondeert met de tijd-as. Typisch wordt verticaal niet t , maar ct uitgezet, zodat de wereldlijn van een foton een rechte lijn wordt met een helling van 45° .

We beginnen met het verhelderen van het verschil tussen de ruimtetijd van Galileo en die van de SRT. In de linker figuur stelt de schuine lijn de tijd-as voor van een waarnemer die ten opzichte

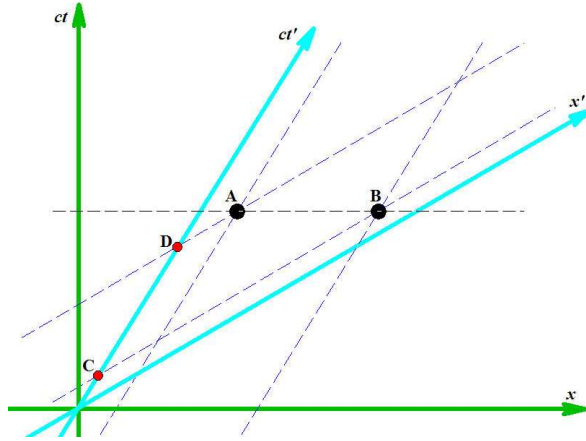


Figuur 43: Links: in de klassieke mechanica heeft een gebeurtenis A plaats op hetzelfde tijdstip. Rechts: in de SRT kennen verschillende waarnemers verschillende tijden toe aan gebeurtenis A .

van het coördinatensysteem beweegt met snelheid v . Op tijdstip $x = x' = t = t' = 0$ vallen beide coördinatensystemen samen. De as van de bewegende waarnemer staat niet loodrecht op de x -as en de tijdschaal is uitgerekt. Beide waarnemers observeren gebeurtenis A en kennen er dezelfde tijd aan toe, omdat de klassieke mechanica een absolute tijd $t = t'$ voor gebeurtenissen kent. De plaats is verschillend omdat de bewegende waarnemer naar gebeurtenis A toe beweegt. Deze grafische representatie noemen we een galileotransformatie.

Einstein ontdekte dat deze beschrijving onjuist is. Het coördinatensysteem van een bewegende waarnemer dient getekend te worden zoals gedaan is in de rechter afbeelding in Fig. 43. Dit volgt direct uit de lorentztransformaties, zie vergelijking (194). Voor de hoek α geldt $\tan \alpha = \frac{v}{c}$. Er bestaat geen absolute tijd meer en beide waarnemers kennen verschillende tijden toe aan gebeurtenis A .

Ook het verdwijnen van gelijktijdigheid kunnen we direct zien in een ruimtetijd diagram, zie Fig. 44. Hiertoe beschouwen we twee waarnemers die relatief ten opzichte van elkaar bewegen met snelheid v . Het coördinatensysteem van de bewegende waarnemer is aangegeven met x' en ct' in het systeem van de stilstaande waarnemer. De oriëntatie van deze assen kan gevonden worden uit de lorentztransformaties. We beschouwen twee ruimteachtig gescheiden gebeurtenissen A en B . Deze gebeurtenissen kunnen geen causaal verband met elkaar hebben, omdat ze niet door fotonen (dat zijn lijnen onder $\pm 45^\circ$) of langzamere signalen verbonden kunnen worden. De gebeurtenissen gebeuren gelijktijdig in het systeem van de stilstaande waarnemer. In het systeem van de bewegende waarnemer gebeurt B op tijdstip C en gebeurtenis A op tijdstip D .



Figuur 44: Ruimtetijsdiagram voor een stilstaande waarnemer heeft assen x en ct , terwijl het diagram voor een waarnemer die met snelheid v ten opzichte van de eerste beweegt, de assen x' en ct' heeft. Voor de stilstaande waarnemer vinden gebeurtenissen A en B gelijktijdig plaats. Dat is niet zo voor de bewegende waarnemer.

In zijn systeem gebeurt B eerder dan A . Er is echter ook een systeem te vinden waarin A eerder gebeurt dan B . Dat is een waarnemer die met snelheid $-v$ beweegt ten opzichte van stilstaande waarnemer. We zien dat tijd haar absolute betekenis heeft verloren. Welke deelverzameling gebeurtenissen van ruimtetijd de gelijktijdige gebeurtenissen vormt, hangt af van de beweging van de waarnemer.

5.10 Relativistisch Dopplereffect

De verandering van het begrip tijd in de SRT leidt tot een eenvoudige modificatie van de formule voor de roodverschuiving van een foton, zie vergelijking (8) en ook Fig. 2. In sectie 2.4 telden we het aantal golffronten dat een bewegende detector passeert, en vergeleken dat met het aantal dat een detector in rust registreerde. Het aantal golffronten dat per tijdseenheid passeert is de frequentie van de golf. We dienen nu in rekening te brengen dat de klok van een bewegende detector iets langzamer loopt dan die van een detector in rust. Dit betekent dat als de detector in rust N golffronten telt in tijd t , dan telt de bewegende detector $N' = N(1 - \frac{v}{c})$ golffronten (zie Fig. 2) in een tijd $t' = t/\gamma$ (Einstein's tijddilatatie). Als we het aantal golffronten delen door de tijd, dan meet de stilstaande detector een frequentie $f = N/t$, terwijl de bewegende detector een frequentie $f' = N'/t'$ meet. Dit levert

$$f' = (1 - \frac{v}{c})\gamma f = \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} f. \quad (200)$$

Bovenstaande relatie geldt als de bewegende waarnemer zich verwijderd van de lichtbron, zoals gezien door een waarnemer in rust. Dit produceert een verlaging van de frequentie, een roodverschuiving. In het geval de waarnemer de bron nadert, spreken we over een blauwverschuiving. Omdat de noemer altijd kleiner is dan 1, zijn de waarden van de rood- of blauwverschuiving *groter* dan die op basis van de niet-relativistische Doppler formule. Merk op dat er zelfs een verschuiving is als de bewegende waarnemer loodrecht beweegt op de richting naar de lichtbron. In dat geval is de niet-relativistische Doppler verschuiving gelijk aan nul, omdat de loodrechte beweging geen golffronten toevoegt of aftrekt van het aantal dat geteld wordt door een stilstaande detector. Echter is er nog steeds de tijddilatatie en die reduceert de hoeveelheid tijd dat een

bewegende detector kan meten. Dit produceert een blauwverschuiving in de SRT, terwijl er geen effect is in de klassieke Doppler formule. Dit wordt het transversale Dopplereffect genoemd.

5.11 Relativistische mechanica

De lagrangiaanse methode beschreven in sectie 2.8 leent zich uitstekend voor de uitbreiding van de mechanica van Newton naar een versie die overeenkomt met het relativiteitsprincipe. Allereerst zullen we een vrij deeltje beschouwen, oftewel een deeltje met massa m dat beweegt zonder beïnvloed te worden door een kracht. De lagrangiaan voor een dergelijk deeltje bestaat dan alleen uit een kinetische term,

$$L = K. \quad (201)$$

In de klassieke mechanica wordt de kinetische energie gegeven door $K = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$. Deze uitdrukking kunnen we echter niet overnemen in de relativiteitstheorie. Immers, het relativiteitsprincipe eist dat de natuurwetten zodanig geformuleerd dienen te worden, dat zij niet van vorm veranderen wanneer naar een ander inertiaalstelsel wordt getransformeerd. Dit betekent dat de gezochte lagrangiaan invariant moet zijn onder transformaties tussen inertiaalstelsels, en daar voldoet bovenstaande uitdrukking zeker niet aan. Echter, met enige aanpassing is een vorm te vinden die erg lijkt op de oude uitdrukking, maar die wel degelijk invariant is. Hiervoor schrijven we eerst de oude uitdrukking uit als

$$L = K = \frac{1}{2}m \frac{dx^i}{dt} \frac{dx_i}{dt}, \quad (202)$$

waar Einsteins sommatieconventie gebruikt is: $dx^i dx_i = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Wat de invariantie van deze uitdrukking in de weg staat zijn twee dingen: allereerst zijn de dx -en inertiaalstelselafhankelijk; ten tweede zijn de dt 's dat eveneens. We hadden immers al gezien dat waarnemers in verschillende inertiaalsystemen, verschillende afstanden en tijdsduren meten. Deze uitdrukking kan daarom nooit voldoen aan het relativiteitsprincipe. Echter, wanneer we $dx^i dx_i$ vervangen door $\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ staat in de teller nu precies het lijnelement ds^2 , waarvan bekend is dat dit invariant is. Op dezelfde manier ligt een uitbreiding van de twee dt 's ook voor de hand: vervang $dt dt$ door $d\tau^2$, zodat ook dit nu invariant is geworden. Een natuurlijke suggestie voor een relativistische lagrangiaan van een vrij deeltje is dan

$$L = \frac{1}{2}m\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (203)$$

Deze overwegingen zijn natuurlijk geen *bewijs* voor de geldigheid van deze uitdrukking: het is een gok. Er zijn ook andere Lagrangianen denkbaar die voldoen aan het relativiteitsprincipe. Echter, deze uitdrukking is de meest eenvoudige, en bovendien zal blijken dat de bewegingswetten die hieruit volgen, reduceren tot de oude vertrouwde bewegingswetten van Newton wanneer ze toegepast worden in situaties waarbij snelheden veel lager zijn dan de lichtsnelheid. Uiteindelijk zal het echter aan het experiment zijn om aan te tonen of de gevonden wetmatigheden correct zijn. Tot nu toe wijzen alle experimenten uit dat dit inderdaad het geval is.

De actie S behorend bij deze lagrangiaan wordt verkregen door de lagrangiaan te integreren over de tijd. Ook hier moet het relativiteitsprincipe in acht worden genomen: de uitdrukking moet worden geïntegreerd over de eigentijd $d\tau$ (in tegenstelling tot over de waarnemer-afhankelijke tijd t) om zo de invariantie van de actie te waarborgen. De actie wordt dan dus

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \frac{1}{2}m\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right\} d\tau. \quad (204)$$

Om de bewegingswet voor het deeltje af te leiden, dient het principe van extreme actie weer te worden toegepast: er moet gezocht worden naar het pad $x^\mu(\tau)$ dat de waarde van deze integraal minimaal of maximaal maakt. De Euler-Lagrange vergelijkingen voor deze situatie hebben de vorm⁵⁶

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau} \right)} \right). \quad (205)$$

Merk op dat dit vier vergelijkingen zijn: voor elk van de vier coördinaten van het pad $x^\mu(t)$ is er een vergelijking die moet worden opgelost. Wanneer de relativistische lagrangiaan wordt ingevuld en beide zijden van de Euler-Lagrange vergelijkingen worden uitgerekend, wordt gevonden dat een vrij relativistisch deeltje een pad $x^\mu(\tau)$ volgt waarvan de componenten voldoen aan de vergelijkingen

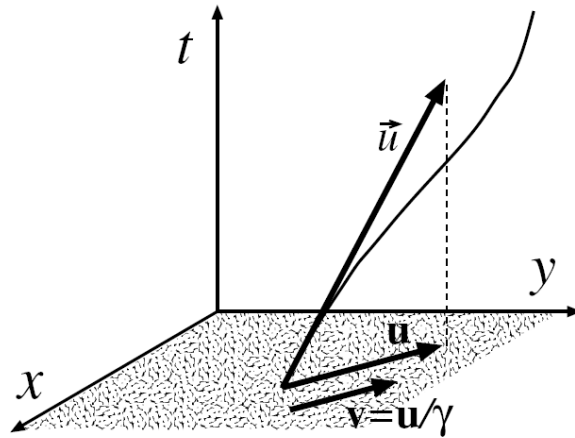
$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0. \quad (206)$$

Dit lijkt sprekend op de tweede wet van Newton voor een vrij deeltje, met twee subtiele verschillen.

Ten eerste doet de wet van Newton uitspraken over de drie plaatscoördinaten van het deeltje, waar deze nieuwe uitdrukking ook uitspraak doet over de tijd. Deze laatste stelt dat

$$m \frac{dt^2}{d\tau^2} = 0, \quad (207)$$

waaruit volgt dat $\frac{dt}{d\tau}$ gelijk is aan een constante. Dat is niet verrassend: we hadden immers al gezien dat de tijd τ zoals gemeten door een waarnemer die het deeltje ziet stilstaan, een andere is dan de tijd t gemeten door een waarnemer die het deeltje ziet bewegen. Dit was precies het tijddilatatie effect zoals besproken in sectie 5.3, en de waarde van deze constante laat zich dan ook aflezen van vergelijking (172): het is precies de lorentzfactor γ .



Figuur 45: Ruimtetiijddiagram in een specifiek lorentzframe dat de 3D ruimte toont op $t = 0$ de viersnelheid $\vec{U}$ van een deeltje dat deze 3D ruimte passeert (op $t = 0$), en twee 3D vectoren die in deze 3D ruimte liggen: het ruimtelijke deel van de viersnelheid $\vec{U}$ en de gewone snelheid $\vec{v}$ van het deeltje.

⁵⁶Dit is een generalisatie van vergelijking (28). Het bewijs van deze stelling gaat analoog aan dat van vergelijking (28).

Het tweede verschil met de wet van Newton is het feit dat er hier afgeleiden worden genomen naar de eigentijd τ , waar in Newtons theorie afgeleiden werden genomen naar de tijd t . Dit maakt van deze nieuwe afgeleide een soort ‘gemengd-object’: de gemeten afstanden x worden genomen zoals gemeten door een willekeurige waarnemer ten opzichte van wie het deeltje beweegt, waar de tijd gemeten wordt door de waarnemer die stilstaat ten opzichte van het bewegende deeltje. Dit object wordt de *viernsnelheid* $U^\mu(t)$ genoemd. Er geldt $\vec{U} = d\vec{x}/d\tau$ en voor de componenten geldt $U^\alpha = dx^\alpha/d\tau$. Dit betekent voor de gewone snelheid dat $v^j \equiv \frac{dx^j}{dt} = \frac{dx^j/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{U^j}{U^0}$. Deze relatie in combinatie met de normering van $\vec{U}$, $\vec{U}^2 = g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = -(U^0)^2 + \delta_{ij}U^i U^j = -1$, betekent dat de componenten van de viernsnelheid van de vorm $U^0 = \gamma$, $U^i = \gamma v^i$, met $\gamma = 1/(1 - \delta_{ij}v^i v^j)^{\frac{1}{2}}$ zijn. We vatten een en ander nog een samen in Fig. 45. Het is nuttig om v^j te zien als de componenten van een 3D vector $\vec{v}$, de gewone snelheid, die leeft in de 3D euclidische ruimte $t = \text{constant}$ van het gekozen lorentzstelsel. Deze 3D ruimte is niet goed gedefinieerd totdat er een lorentzstelsel gekozen is, en daarom hangt het bestaan van $\vec{v}$ af van de specifieke keuze. Op het moment dat een lorentzframe gekozen is, kunnen we $\vec{v}$ zien als een coördinaten-onafhankelijk object.

Teneinde weer contact te maken met de klassieke mechanica, schrijven we de viernsnelheid om naar een meer natuurlijk object (te weten: afstand en tijd gemeten door een en dezelfde waarnemer). Dit kunnen we doen door te beseffen dat de verlopen tijd gemeten door het deeltje, en die door een andere waarnemer, met elkaar gerelateerd zijn via de formule van tijddilatatie: $d\tau = \gamma^{-1}dt$. Op deze manier is de gevonden wet uit te drukken als

$$m\gamma^2 \frac{d\vec{x}^2}{dt^2} = 0. \quad (208)$$

De wet van Newton kan nu gezien worden als een speciaal geval van deze nieuwe wet. Als we aannemen dat het deeltje veel langzamer beweegt dan het licht ten opzichte van de waarnemer in wiens tijdsduur en afstand we nu alles hebben uitgedrukt (oftewel we nemen aan dat $v \ll c$), dan kan vergelijking (208) benaderd worden door

$$m\gamma^2 \frac{d\vec{x}^2}{dt^2} \equiv \frac{m}{1 - (v/c)^2} \frac{d\vec{x}^2}{dt^2} \approx m \left(1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \frac{d\vec{x}^2}{dt^2} \approx m \frac{d\vec{x}^2}{dt^2} = 0, \quad (209)$$

waar gebruik is gemaakt van de wiskundige regel $(1+x)^m \approx 1+mx$, welke geldt als $x \ll 1$. Dit is precies de wet van Newton! Zo is nu aangetoond dat de wet van Newton slechts een speciaal geval is van een meer algemene bewegingswet, vergelijking (206)! Dit geeft ons vertrouwen dat onze keuze voor de lagrangiaan waarschijnlijk de juiste was: hij voldoet aan het relativiteitsprincipe, en geeft ons bovendien onze oude vertrouwde bewegingswetten terug.

Met dit in het achterhoofd kunnen we nu verder gaan met het afleiden van wetten betreffende de energie en impuls. Zoals besproken in sectie 2.8, volgt een impuls uit een gegeven lagrangiaan via vergelijking (36). Toegepast op de relativistische lagrangiaan levert dit voor de impuls van het vrije deeltje

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\alpha}{d\tau}} = m \frac{dx^\nu}{d\tau} \eta_{\alpha\nu}, \quad (210)$$

en na beide kanten te contraheren met de inverse $\eta^{\mu\alpha}$ van de minkowskimetrick wordt dit

$$p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} = mU^\mu. \quad (211)$$

Wederom lijkt dit erg op de impuls zoals bekend uit de mechanica van Newton: een massa vermenigvuldigd met een snelheid. Echter, de snelheid is hier nu weer de viernsnelheid, en deze

nieuwe impuls wordt dan ook de *vierimpuls* genoemd. Vergeleken met de uitdrukking voor de newtoniaanse variant, vergelijking (37), gaan weer twee verschillen op: ten eerste is er een nul-component aanwezig, en ten tweede is het weer een ‘gemengd-object’: afgelegde afstand gemeten door een willekeurige waarnemer, en tijdsduur gemeten door een waarnemer die stilstaat ten opzichte van het deeltje. Het tweede verschil kunnen we weer een plaats geven door de relatie tussen eigentijd en tijd te gebruiken. Dit levert

$$p^\alpha = m\gamma \frac{dx^\alpha}{dt}, \quad (212)$$

en via dezelfde benaderingsmethode als gebruikt in vergelijking (209) volgt direct dat de i -component ($i = 1, 2, 3$) hiervan reduceert tot de impuls zoals bekend uit de mechanica van Newton, wanneer het deeltje veel langzamer beweegt dan het licht. De $i = 1, 2, 3$ componenten van dit object worden daarom opgevat als de relativistische uitdrukkingen van de impuls. Wat de nul-component betreft, deze moet nog een interpretatie krijgen. Deze component is

$$p^0 = mc\gamma. \quad (213)$$

Via een dimensie-analyse is meteen te zien dat het de dimensie van een energie heeft, en dit wekt de suggestie dat het gaat om de energie van het vrije deeltje. De vraag dringt zich dan al snel op: op welke manier is deze uitdrukking gerelateerd aan de newtoniaanse uitdrukking voor de energie van een vrij deeltje, $K = \frac{1}{2}mv^2$? Ook hier biedt de benadering van lage snelheden uitkomst. Er geldt

$$cp^0 = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = mc^2 + K, \quad (214)$$

waar de uitdrukking voor de newtoniaanse energie K van een vrij deeltje is ingevuld. Hier is nu gevolgd dat, in de benadering van lage snelheden, de nul-component van de relativistische impuls reduceert tot de newtoniaanse energie plus een extra term. Afgezien van deze constante term, is de nul-component bij lage snelheden inderdaad gelijk aan de energie van het deeltje zoals voorspeld door de newtoniaanse mechanica. Het ligt dan ook voor de hand om aan te nemen dat we p^0 ook bij hoge snelheden mogen opvatten als de energie van het deeltje. Wat de constante term betreft kan de vraag worden gesteld hoe fysisch interessant deze is. Immers, in de natuurkunde kennen alleen *energieverschillen* een meetbare betekenis⁵⁷, en dus zal elke extra constante term toegevoegd aan de energie van een systeem uit de berekening vallen wanneer een energieverschil opgeschreven wordt. Toch heeft de constante term m hier wel degelijk een fysische betekenis: het is namelijk niet zomaar een willekeurige constante, het is een constante die een eigenschap van het deeltje bevat (de massa)! Deze energie is ook aanwezig wanneer het deeltje geen bewegingsenergie heeft voor een gegeven waarnemer, $K = 0$; we spreken dan ook over *rust-energie*, en deze is gelijk aan

$$E = mc^2. \quad (215)$$

Dit is wellicht de bekendste formule uit de natuurkunde. Hij zegt dat elke massa een energie met zich meedraagt gelijk aan deze massa maal c^2 , en dat dit energie is die zich niet laat wegtransformeren door naar een ander inertiaalstelsel te gaan. Het is daarom een fundamentele hoeveelheid energie voor een gegeven massa m : voor *alle* waarnemers geldt dat een massa op zijn minst deze hoeveelheid energie met zich meedraagt.

⁵⁷Denk bijvoorbeeld aan de relatie tussen een kracht F in de x -richting en de potentiële energie V : $F = -\frac{dV}{dx}$, oftewel een meetbare grootte is uitgedrukt als een verschil in energie.

Resumerend is nu gevolgd dat onze keuze voor de lagrangiaan ons een uitdrukking geeft voor de impuls, waarvan de i -componenten netjes reduceren tot de impuls zoals die in de newtoniaanse mechanica bekend was; de nul-component van de vierimpuls blijkt overeen te komen met de energie van het deeltje. We schrijven dan ook

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}, \quad (216)$$

waarin geldt

$$E = \gamma mc^2, \quad p^i = \gamma mv^i. \quad (217)$$

De naam is niet de enige overeenkomst tussen de vierimpuls en viersnelheid: beide transformeren op dezelfde manier tussen inertiaalsystemen. Met name de lorentztransformaties werken op deze objecten op dezelfde manier; dit betekent dat twee waarnemers die zich in de x -richting met snelheid v bewegen ten opzichte van elkaar, verschillende energie (E en E') en impuls (p_x en p'_x) meten van een en hetzelfde deeltje, en dat deze zich tot elkaar verhouden als

$$\left. \begin{aligned} \frac{E'}{c} &= \gamma \left(\frac{E}{c} - \left(\frac{v}{c} \right) p_x \right) \\ p'_x &= \gamma \left(p_x - v \frac{E}{c^2} \right) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} p^{0'} \\ p^{1'} \\ p^{2'} \\ p^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} \rightarrow p^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} p^\nu \quad (218)$$

Bovendien kunnen we de contractie $p_\mu p^\mu$ van de vierimpuls met zichzelf nemen, omdat we al gezien hadden dat de contractie van een viervector met zichzelf altijd een invariant oplevert. Het is dan eenvoudig om aan te tonen dat deze invariant gelijk is, op een factor $-c^2$ na, aan de massa van het deeltje in het kwadraat. Er geldt

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu &= - \left(\frac{E}{c} \right)^2 + p^2 \\ &= -m^2 c^2 \gamma^2 + m^2 v^2 \gamma^2 \\ &= -m^2 c^2 \gamma^2 \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) = -m^2 c^2. \end{aligned} \quad (219)$$

Dit leidt dan tot de volgende uitdrukking voor de relatie tussen de energie en de impuls,

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (220)$$

Deze is bijna geheel⁵⁸ equivalent aan de eerder gevonden uitdrukking voor de relativistische energie, vergelijking (214), maar is in de praktijk soms te prefereren omdat deze ons in staat stelt de energie van een deeltje uit te rekenen zonder de snelheid v van het deeltje te hoeven kennen. Met name in de deeltjesfysica, waar men vaak de *impulsen* van de deeltjes beter kan meten dan louter hun snelheid, wordt deze formule veel gebruikt.

Het belang van energieën en impulsen in de relativiteitstheorie is dezelfde als die in de Newtoniaanse mechanica. Daar is het een experimenteel gegeven dat energie en impuls behouden

⁵⁸Er is een subtiel maar belangrijk verschil: deze uitdrukking geeft niet de energie van een deeltje, maar het *kwadraat* van de energie; er moet dus nog een wortel worden genomen! Nu heeft een kwadratische vergelijking altijd twee oplossingen: een met een plusteken, en een met een minteken. De laatste oplossing duidt op deeltjes met een negatieve energie, iets wat vergelijking (214) nog niet deed! Het correct interpreteren van deze nieuwe oplossingen leidde Paul Dirac tot het voorspellen van het bestaan van antimaterie.

grootheden zijn; dit levert enorme voordelen op tijdens het berekenen van mechanische processen. Het blijkt experimenteel dat dit nog steeds geldt voor onze nieuwe uitdrukkingen voor de energie en impuls: *elk experiment toont aan dat deze twee grootheden niet veranderen tijdens fysische processen*. Dit maakt het uitermate handig om met energie en impuls te werken wanneer een relativistisch probleem wordt beschouwd. Het is hier nu van belang om het verschil tussen ‘behouden’ en ‘invariant’ te onderstrepen: een grootte is *behouden* wanneer geldt dat zijn waarde voor en na een proces dezelfde is; een grootte is *invariant* als geldt dat zijn waarde voor alle waarnemers in verschillende inertiaalstelsels dezelfde is. Enkele voorbeelden: de lichtsnelheid c is een invariant en is behouden; de massa van een deeltje is invariant maar in het algemeen niet behouden; de energie van een deeltje is behouden maar niet invariant; snelheden zijn in het algemeen zowel niet behouden noch invariant.

Nog enkele woorden over snelheden. Zoals al besproken, volgt uit de minkowskimetrick de snelheidsregel van Einstein, waaruit we hebben laten volgen dat het onmogelijk is een deeltje sneller te zien gaan dan het licht als het voor een enkele waarnemer niet sneller gaat dan het licht. De vraag *of* er een waarnemer bestaat voor wie het deeltje sneller gaat dan het licht is nog niet aan de orde gekomen. Met de uitdrukking voor de relativistische energie kan die vraag nu definitief worden beantwoord, en wel als volgt. De uitdrukking gegeven in vergelijking (214) voor de relativistische energie vertelt ons dat er in een deeltje dat zich ten opzichte van ons met snelheid v beweegt, een energie E verscholen is. Omgekeerd kan de relatie ook gelezen worden als de hoeveelheid energie benodigd om een deeltje vanuit stilstand tot deze snelheid te versnellen. Als wij nu een deeltje naar de lichtsnelheid willen versnellen, dan geldt $v = c$ en wordt de noemer van vergelijking (214) gelijk aan nul: de benodigde energie E wordt oneindig groot. Dit is een andere manier van zeggen dat het onmogelijk is een deeltje de lichtsnelheid te geven! Hiermee is dan ook aangetoond dat deeltjes voor deze waarnemer niet sneller kunnen gaan dan de lichtsnelheid; via Einsteins snelheidsregel volgt dan direct dat geen enkele andere waarnemer het deeltje sneller dan het licht kan zien bewegen.

Er is een uitzondering op deze regel. Om tot de energie E van ∞ te komen, hebben we opgemerkt dat een deeltje met snelheid $v = c$ de noemer in vergelijking (214) gelijkmaakt aan nul, en delen door nul geeft oneindig. Dit is inderdaad waar, *mits de teller niet gelijk is aan nul*. Als de teller van een breuk *ook* gelijk is aan nul, levert delen door nul niet altijd meer oneindig op. De waarde van de uitkomst is dan onbepaald: afhankelijk van de context kan er iets eindigs uitkomen. Hier staat in de teller van de breuk de massa van het deeltje, dus al met al ziet het ernaar uit dat er wel degelijk deeltjes zouden kunnen bestaan die met precies de lichtsnelheid bewegen *mits de massa van zulke deeltjes maar gelijk is aan nul*⁵⁹. Zulke deeltjes kennen we: fotonen⁶⁰ gaan met de lichtsnelheid, en deze hebben inderdaad een massa gelijk aan nul. Dit volgt uit alle metingen, maar het is interessant om te zien dat dit resultaat ook *volgt* uit puur theoretische overwegingen. De impuls van een foton heeft de waarde $E = |\vec{p}|c$. Zoals elke keer weer blijkt dit een direct gevolg te zijn van de minkowskimetrick en het relativiteitsprincipe!

De vraag dient zich dan aan wat de waarde is van de energie van een foton: wat is hier de uitkomst van nul gedeeld door nul? De uitdrukking voor de relativistische energie doet geen uitspraak. Dit betekent niet dat er geen antwoord bestaat voor de energie van een massaloos deeltje, maar alleen dat deze waarde niet door vergelijking (214) of door de relativiteitstheorie bepaald kan worden, en dat een andere formule nodig is. In het geval van een foton is de formule

⁵⁹Een omgekeerde conclusie kan ook worden getrokken uit vergelijking (214): als een deeltje een massa gelijk aan nul zou hebben maar niet zou bewegen met de lichtsnelheid, zou alleen de teller nul zijn, en daarmee de hele uitdrukking voor de energie. Deeltjes zonder energie bestaan niet (alles heeft energie), en dus volgt nu ook dat als een deeltje geen massa heeft, het noodzakelijkerwijs met de lichtsnelheid moet bewegen.

⁶⁰Er zijn nog meer massaloze deeltjes die met de lichtsnelheid bewegen: gluonen en gravitonen. Voor het gemak spreken we alleen over de fotonen, maar impliciet bedoelen we hier alle massaloze deeltjes mee.

bekend uit de quantummechanica,

$$E = hf \quad (221)$$

waar f de frequentie (kleur) van het licht is, en h de constante van Planck. De ontdekking van deze formule door Max Planck in 1900, was de start van de studie van de quantummechanica. Samen met de ontdekking van de speciale relativiteitstheorie leidde de ontwikkeling van de quantummechanica tot een gehele herschrijving van de grondslagen van de natuurkunde.

5.12 De extra traagheid van druk

We hebben gezien hoe SRT geïsoleerde lichamen beïnvloedt als ze sneller bewegen: klokken (lopen trager), afstanden (worden korter), versnelde deeltjes (hun energie neemt toe), etc. De SRT heeft echter ook gevolgen voor een verzameling deeltjes, een gas. Met name speelt de gasdruk een belangrijke rol in de traagheid van het gas. We zullen ontdekken dat hoe hoger de gasdruk, hoe moeilijker het is om het gas te versnellen (de traagheid neemt toe). Dit heeft belangrijke gevolgen voor de ART. Als we neutronensterren bestuderen zullen we ontdekken dat dit effect ervoor zorgt dat het neutronengas een groter gewicht heeft. Dit zal ertoe leiden dat de ster een grotere gasdruk krijgt, hetgeen ervoor zorgt dat het gewicht toeneemt, etc. Deze druk-terugkoppeling leidt er uiteindelijk toe dat het onmogelijk wordt voor de ster om zichzelf in stand te houden: de traagheid van de gasdruk leidt de ineenstorting tot een zwart gat in.

De traagheid van de gasdruk is terug te leiden op de lorentzcontractie. We bekijken het effect alleen voor kleine snelheden, waar SRT correcties relatief klein zijn. We beschouwen een doos met volume V die gevuld is met een uniform gas met massadichtheid ρ en gasdruk P . Stel dat we een kleine kracht uitoefenen op de doos, waardoor we haar versnellen tot een snelheid v , die klein is ten opzichte van c . De vraag is nu: hoeveel energie hebben we moeten leveren om het gas een snelheid v te geven? Ter vereenvoudiging spreken we alleen over het gas en niet over de doos (astronomische objecten als sterren zitten niet in een doos ...).

Als het gas een snelheid v heeft, dan heeft het kinetische energie. Men zou dus kunnen verwachten dat de totale energie die we hebben moeten toevoegen aan de doos om het gas te versnellen gelijk is aan deze kinetische energie: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho Vv^2$. Dit is echter niet het hele verhaal, omdat de lorentzcontractie de lengte van de doos kleiner heeft gemaakt en daarmee het volume veranderd heeft. De doos kleiner maken, terwijl er een gas of vloeistof met druk P in zit, betekent het verrichten van arbeid. Deze arbeid is gelijk aan $\vec{F} \cdot d\vec{s} = -P\Delta V$, met ΔV de volumeverandering. Het minteken is nodig omdat de volumeverandering (ΔV) negatief is, terwijl de verrichte arbeid positief is. Deze extra energie vertegenwoordigt de extra traagheid van het gas: het is moeilijker om het gas te versnellen, omdat niet alleen arbeid verricht dient te worden om de bestaande energie te versnellen, maar ook om het gas te comprimeren, zoals de lorentzcontractie vereist.

De lengteverandering door de lorentzcontractie is gelijk aan

$$\Delta L = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - L \approx -\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}L. \quad (222)$$

De extra energie die nodig is, is gelijk aan $\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}PV$. Deze energie verdwijnt niet, maar gaat naar de interne energie van het gas (op welke wijze hangt af van het type gasmolecuul). Een deel van de energie wordt gebruikt om het gas te verwarmen (de random kinetische energie van de moleculen). De totale energie die nodig is om het gas te versnellen kunnen we schrijven als

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - P\Delta V = \frac{1}{2}\rho Vv^2 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}PV = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)v^2V. \quad (223)$$

We zien dat de energie die nodig is om het gas te versnellen evenredig is met de som $\rho + \frac{P}{c^2}$. Dus voor een bepaalde uitgeoefende kracht zal de doos minder versnellen dan we zouden verwachten op basis van alleen haar massa, omdat een deel van de energie gaat naar de interne energie van het gas. We zien dus dat de traagheid groter is dan alleen haar rustmassa. We noemen de grootte $\rho + \frac{P}{c^2}$ de traagheid van de massadichtheid van het gas.

5.13 De energie-impuls tensor

Vergelijking (223) geeft de energie die nodig is om een gas te versnellen. De energie is echter afhankelijk van het referentiestelsel, want het is de 0-component van de vierimpuls gegeven door vergelijking (216). Alhoewel deze vierimpuls een volledige beschrijving geeft van de energie en impuls van een individueel deeltje, zullen we in het vervolg vaak uitgebreide systemen bespreken die zijn samengesteld uit grote aantallen deeltjes. In plaats van het toekennen van vierimpulsen aan ieder individueel deeltje, kiezen we ervoor om het hele systeem als een vloeistof te beschrijven - een continuum dat gekarakteriseerd wordt door macroscopische grootheden als druk, dichtheid, entropie en viscositeit. In het algemeen heeft deze vloeistof een bepaald viersnelheidveld.

Een enkele impuls viervectorveld is onvoldoende om de energie en impuls van de vloeistof te beschrijven. We definiëren een energie-impuls tensor (ook wel de stress tensor genoemd) met componenten $T^{\mu\nu}$. Deze symmetrische $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ tensor vertelt ons alles wat we moeten weten van de energie-achtige eigenschappen van een systeem: energiedichtheid, druk, spanning, etc. Een algemene definitie van $T^{\mu\nu}$ is de flux van vierimpuls p^μ door een oppervlak met constante x^ν . Beschouw bijvoorbeeld een oneindig klein vloeistofelement in zijn rustsysteem. Dan is T^{00} de flux van p^0 (energie) in de x^0 (tijd) richting: het is de energiedichtheid ρ in het rustsysteem. Op dezelfde manier zien we dat in dit frame $T^{0i} = T^{i0}$ de impulsdichtheid is. De ruimtelijke componenten T^{ij} zijn de impulsflux, ofwel de stress, en vertegenwoordigen de krachten tussen aangrenzende volume elementen. Een diagonale term als T^{11} geeft de x -component van de kracht die per eenheid oppervlakte door het element wordt uitgeoefend in de x -richting. We interpreteren dit als de x -component van de druk (P_x). De druk heeft drie dergelijke componenten, $P_i = T^{ii}$, in het rustsysteem van de vloeistof.

We zullen het bovenstaande concreter maken door ‘stof’ (engels: dust) als voorbeeld te nemen. Kosmologen hebben de neiging om materie als synoniem voor stof te gebruiken. We definiëren stof in de vlakke ruimtetijd als een verzameling deeltjes die in rust zijn ten opzichte van elkaar. Het viervector snelheidsveld $U^\mu(x)$ is de constante viersnelheid van de individuele deeltjes. De componenten zijn hetzelfde op elk punt. We definiëren de flux viervector als

$$N^\mu = nU^\mu, \quad (224)$$

met n de deeltjesdichtheid gemeten in het rustsysteem. Dan is N^0 de deeltjesdichtheid gemeten in een ander systeem, terwijl N^i de deeltjesflux is in de x^i -richting. Verder nemen we aan dat elk deeltje massa m heeft. In het rustsysteem wordt de energiedichtheid van de stof gegeven door

$$\rho = nm. \quad (225)$$

Per definitie specificeert de energiedichtheid de stof volledig. Echter ρc^2 meet de energiedichtheid in het rustsysteem. Hoe zit het met de andere systemen? Merk op dat zowel n als m de 0-componenten zijn van viervectoren in hun rustsysteem, namelijk $N^\mu = (n, 0, 0, 0)$ en $p^\mu = mU^\mu = (mc, 0, 0, 0)$. We zien dus dat ρc^2 de $\mu = 0, \nu = 0$ component is van de tensor $p \otimes N$ gemeten in het rustsysteem. Dit leidt tot de volgende definitie van de energie-impuls tensor voor stof,

$$T_{\text{stof}}^{\mu\nu} = p^\mu N^\nu = mnU^\mu U^\nu = \rho U^\mu U^\nu, \quad (226)$$

met ρc^2 de energiedichtheid in het rustsysteem. We zien dat de druk van het stof in elke richting gelijk is aan nul. Dat klopt ook wel, omdat wij stof gedefinieerd hebben als een verzameling deeltjes zonder random bewegingen.

Stof is onvoldoende voor een algemene beschrijving van belangrijke fenomenen in de ART. Hiervoor is het concept van een ‘perfecte vloeistof’ nodig. Een perfecte vloeistof kan volledig worden gespecificeerd door twee grootheden: de energiedichtheid ρ in het rustsysteem, en een isotrope druk P in het rustsysteem. De parameter P geeft de druk in elke richting. Een consequentie van de isotropie is dat $T^{\mu\nu}$ diagonaal is in het rustsysteem. Verder moeten de diagonale componenten allemaal gelijk zijn: $T^{11} = T^{22} = T^{33}$. Er zijn dus slechts twee onafhankelijke parameters en dat is de energiedichtheid $\rho = T^{00}$ en de druk $P = T^{ii}$. De energie-impuls tensor van een perfecte vloeistof heeft daarmee de volgende vorm in het rustsysteem,

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \quad (227)$$

We willen uiteraard een formule die geldig is in elk systeem, een tensorvergelijking. Voor stof hadden we $T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu$, dus we gokken op $(\rho + P/c^2)U^\mu U^\nu$. Dit geeft

$$\begin{pmatrix} \rho c^2 + P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (228)$$

en we zien dat dat niet correct is. We dienen er de volgende bijdrage bij op te tellen,

$$\begin{pmatrix} -P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \quad (229)$$

hetgeen we kunnen schrijven als $Pg^{\mu\nu}$, met $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ in de SRT. Hiermee vinden we voor de algemene vorm van de energie-impuls tensor voor een perfecte vloeistof

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P/c^2)U^\mu U^\nu + Pg^{\mu\nu}. \quad (230)$$

Gegeven dat vergelijking (227) de vorm van $T^{\mu\nu}$ in het rustsysteem is, en dat vergelijking (230) een tensorvergelijking is die in het rustsysteem reduceert tot vergelijking (227), weten we dat we met vergelijking (230) de correcte uitdrukking voor elk coördinatenstelsel hebben gevonden.

Het concept van een perfecte vloeistof is algemeen genoeg om een grote verscheidenheid van vormen van materie te beschrijven. We specificeren de toestandsvergelijking om de evolutie van een dergelijke vloeistof te bepalen. De toestandsvergelijking relateert de druk aan de energiedichtheid, $P = P(\rho)$. Stof is een speciaal geval waarvoor $P = 0$, terwijl een isotroop gas bestaande uit fotonen $P = \frac{1}{3}\rho$ heeft. Een meer exotisch voorbeeld is de energie van het vacuum, waarvoor de energie-impuls tensor evenredig is met de metriek, $T^{\mu\nu} = -\rho_{\text{vacuum}}g^{\mu\nu}$. Het idee van een energiedichtheid van het vacuum is zinloos in de SRT, omdat daar de absolute schaal van de energie niet relevant is, alleen energiever verschillen tussen toestanden. In de ART koppelt alle energie echter met gravitatie (en veroorzaakt kromming van ruimtetijd), en wordt de mogelijkheid van het bestaan van vacuumenergie een belangrijke beschouwing.

Behalve dat $T^{\mu\nu}$ symmetrisch is, heeft hij de belangrijke eigenschap dat hij behouden is. Energie- en impulsbehoud worden uitgedrukt door het feit dat de divergentie gelijk is aan nul,

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (231)$$

Bovenstaande uitdrukking is een verzameling van vier vergelijkingen, een voor elke waarde van ν . De uitdrukking met $\nu = 0$ correspondeert met energiebehoud, terwijl $\partial_\mu T^{\mu k} = 0$ met $k = 1, 2, 3$ behoud van de k -de component van de impuls uitdrukt. Laten we dit eens toepassen op de perfecte vloeistof. We vinden dan

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu(\rho + P/c^2)U^\mu U^\nu + (\rho + P/c^2)(U^\nu \partial_\mu U^\mu + U^\mu \partial_\mu U^\nu) + \partial^\nu P. \quad (232)$$

Om te analyseren wat deze uitdrukking betekent, is het nuttig om afzonderlijk te beschouwen wat er gebeurt als we een en ander projecteren langs en loodrecht op het viersnelheidsveld U^μ . Allereerst merken we op dat de normalisatie $U_\nu U^\nu = -1$ de volgende identiteit levert,

$$U_\nu \partial_\mu U^\nu = \frac{1}{2} \partial_\mu (U_\nu U^\nu) = 0. \quad (233)$$

Projecteren komt neer op contraheren met U_ν en we vinden

$$U_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = -\partial_\mu(\rho U^\mu) - P \partial_\mu U^\mu. \quad (234)$$

Als we dit gelijkstellen aan nul vinden we de relativistische vergelijking voor energiebehoud van een perfecte vloeistof. Het ziet er vertrouwd uit in de niet-relativistische limiet, waar geldt

$$U^\mu = (1, v^i), \quad |v^i| \ll 1, \quad P \ll \rho. \quad (235)$$

De laatste vergelijking is aannemelijk, omdat druk alleen van de random bewegingen van de individuele deeltjes komt, en in deze limiet zijn deze bewegingen (net als de beweging van de bulk met U^μ) klein. We vinden dus in niet-relativistische taal

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (236)$$

hetgeen de continuïteitsvergelijking is voor de energiedichtheid.

Tenslotte gaan we naar het deel van vergelijking (232) dat loodrecht staat op de viersnelheid. Om een vector loodrecht op U^μ te projecteren, moeten we die vermenigvuldigen met de projectie tensor

$$P^\sigma_\nu = \delta^\sigma_\nu + U^\sigma U_\nu. \quad (237)$$

We kunnen controleren dat bovenstaande projectie tensor zijn werk doet door een vector $V^\nu_\parallel$ parallel aan U^μ en een andere vector $W^\mu_\perp$ loodrecht op U^μ te nemen. We vinden dan

$$\begin{aligned} P^\sigma_\nu V^\nu_\parallel &= 0, \\ P^\sigma_\nu W^\nu_\perp &= W^\sigma_\perp. \end{aligned} \quad (238)$$

Toepassen op $\partial_\mu T^{\mu\nu}$ levert

$$P^\sigma_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = (\rho + P/c^2) U^\mu \partial_\mu U^\sigma + \partial^\sigma P + U^\sigma U^\mu \partial_\mu P. \quad (239)$$

We interpretern deze vergelijking in de niet-relativistische limiet. Als we de ruimtelijke componenten gelijkstellen aan nul, vinden we

$$\rho [\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}] + \nabla P + \vec{v}(\partial_t P + \vec{v} \cdot \nabla P) = 0. \quad (240)$$

Merk op dat de laatste paar termen afgeleiden hebben van P keer de driesnelheid $\vec{v}$, waarvan we aannemen dat die klein is. Deze termen zijn verwaarloosbaar ten opzichte van de ∇P term. We houden dan over

$$\rho [\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}] = -\nabla P, \quad (241)$$

en dit is de vergelijking van Euler uit de vloeistofmechanica.

6 Wiskunde II - Kromlijnige coördinaten

Het wiskundige apparaat dat we dienen te ontwikkelen voor de beschrijving van de algemene relativiteitstheorie is formidabel. Voordat we gekromde ruimtetijd gaan bestuderen, bekijken we eerst kromlijnige coördinaten in de euclidische ruimte. Hierdoor kunnen we een fors deel van de wiskundige machinerie ontwikkelen in een vertrouwde situatie. Daarna is de stap naar gekromde ruimten relatief eenvoudig.

In een cartesisch coördinatenstelsel geven we een punt $\mathcal{P}$ in de vlakke 2D euclidische ruimte aan met coördinaten x en y . We kunnen ook een ander coördinatenstelsel gebruiken, waarbij we $\mathcal{P}$ aangeven met ξ en η . Vergelijking (88) geeft dan de transformatie $\Lambda^{\alpha'}_{\beta}$ tussen beide systemen. Voor de afstand tussen twee nabij gelegen punten geldt

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x, y), & \Delta\xi &= \frac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\xi}{\partial y}\Delta y, \\ \eta &= \eta(x, y), & \Delta\eta &= \frac{\partial\eta}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\eta}{\partial y}\Delta y.\end{aligned}\tag{242}$$

Wiskundig is het belangrijk dat de afbeelding één op één is en dat vereist dat de Jacobiaan van de coördinatentransformatie ongelijk is aan nul⁶¹. Dus

$$\det \begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{pmatrix} \neq 0.\tag{243}$$

We demonstreren het bovenstaande met een beschouwing over poolcoördinaten.

Voorbeeld: poolcoördinaten in het euclidische vlak.

In het euclidische 2D-vlak kunnen we de cartesische coördinaten x en y of de poolcoördinaten $\{r, \theta\}$ gebruiken. Er geldt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $\theta = \arctan \frac{y}{x}$, en de inverse relaties $x = r \cos \theta$ en $y = r \sin \theta$. Kleine veranderingen Δx en Δy produceren veranderingen Δr en $\Delta \theta$ volgens

$$\begin{aligned}\Delta r &= \frac{x}{r}\Delta x + \frac{y}{r}\Delta y = \cos \theta \Delta x + \sin \theta \Delta y, \\ \Delta \theta &= -\frac{y}{r^2}\Delta x + \frac{x}{r^2}\Delta y = -\frac{1}{r}\sin \theta \Delta x + \frac{1}{r}\cos \theta \Delta y,\end{aligned}\tag{244}$$

in eerste orde benadering.

6.1 Vectoren en 1-vormen

De traditionele manier waarop een vector gedefinieerd wordt, is door te stellen dat hij onder willekeurige coördinatentransformaties op dezelfde manier transformeert als de verplaatsing. Hiermee bedoelen we dat een vector $\Delta \vec{r}$ voorgesteld kan worden als een verplaatsing $(\Delta x, \Delta y)$, of in poolcoördinaten als $(\Delta r, \Delta \theta)$, of in het algemeen door $(\Delta \xi, \Delta \eta)$. Voor kleine $(\Delta x, \Delta y)$ geldt dan

$$\begin{pmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.\tag{245}$$

⁶¹Stel we hebben in systeem $\mathcal{O}$ de punten P en Q met coördinaten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) , respectievelijk. Deze punten worden afgebeeld op P' en Q' in systeem $\mathcal{O}'$. Stel dat de afbeelding $P \rightarrow P'$ door de volgende twee lineaire vergelijkingen gegeven wordt: $a_1x_1 + a_2y_1 = x'_1$ en $b_1x_1 + b_2y_1 = y'_1$. Evenzo voor $Q \rightarrow Q'$. Als in $\mathcal{O}$ de punten P en Q samenvallen, dan dienen ook de punten P' en Q' in $\mathcal{O}'$ samen te vallen. Dan geldt $a_1\Delta x + a_2\Delta y = 0$ en $b_1\Delta x + b_2\Delta y = 0$. Als we hieruit Δx en Δy elimineren vinden we de uitdrukking $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. In dat geval is het systeem singulier en wordt er op $(0, 0)$ afgebeeld, terwijl P en Q *niet* samenvallen (en dus $\Delta x \neq 0$ en $\Delta y \neq 0$). We eisen voor een bijectie dat de jacobiaan ongelijk aan nul is.

We stellen nu dat een willekeurige vector $\vec{V}$ op precies dezelfde manier dient te transformeren. Dus geldt

$$V^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta} V^{\beta} \quad \text{met} \quad \Lambda^{\alpha'}_{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (246)$$

waarbij de index β refereert aan het systeem (x, y) en index α' aan het systeem (ξ, η) .

Er is een moderne en meer natuurlijke manier om vectoren en 1-vormen te introduceren. Hiertoe beschouwen we een scalair veld ϕ . Gegeven de coördinaten (ξ, η) is het altijd mogelijk om de afgeleiden $\partial\phi/\partial\xi$ en $\partial\phi/\partial\eta$ te vormen. We definiëren de 1-vorm $\tilde{d}\phi$ als het geometrisch object met componenten

$$\tilde{d}\phi \rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}, \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right) \quad (247)$$

in het coördinatenstelsel (ξ, η) . Dit is de algemene definitie van een oneindig aantal 1-vormen, en we vinden een andere 1-vorm voor elke keuze van het scalaire veld ϕ . De transformatie van de componenten volgt uit de kettingregel,

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi} = \frac{\partial x}{\partial\xi} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\xi} \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad (248)$$

en evenzo voor $\frac{\partial\phi}{\partial\eta}$. We vinden hiermee

$$\begin{pmatrix} \partial\phi/\partial\xi \\ \partial\phi/\partial\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi} \\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad \Lambda^{\alpha}_{\beta'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi} \\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta} \end{pmatrix}. \quad (249)$$

We zien dat componenten van 1-vormen transformeren met $\Lambda^{\alpha}_{\beta'}$ en dat is tegenovergesteld aan het transformatiegedrag van vectorcomponenten, zoals gegeven in vergelijking (246).⁶²

We beschouwen nu de afgeleide $d\phi/ds$ van een scalair veld ϕ langs een curve met parameter s (zie ook sectie 4.5.2). Deze afgeleide hangt af van de parameter s en als we die veranderen, dan verandert ook de afgeleide. We kunnen dit schrijven als

$$\frac{d\phi}{ds} = \langle \tilde{d}\phi, \vec{V} \rangle, \quad (251)$$

waarbij $\vec{V}$ de vector met componenten $(d\xi/ds, d\eta/ds)$, notatie $\langle \tilde{p}, \vec{V} \rangle \equiv \tilde{p}(\vec{V})$. De vector $\vec{V}$ hangt alleen van de curve af, terwijl $\tilde{d}\phi$ alleen van ϕ afhangt. Daarom is $\vec{V}$ karakteristiek voor de curve en wordt de *tangent* vector (of raakvector) genoemd. We kunnen een vector dus opvatten als een object dat $d\phi/ds$ produceert als ϕ gegeven is. Dit leidt tot de moderne opvatting dat een tangent vector aan een curve d/ds genoemd moet worden⁶³. Elke curve (met parameter s) heeft

⁶²Het is van belang expliciet te controleren dat $\Lambda^{\alpha'}_{\beta}$ en $\Lambda^{\beta}_{\alpha'}$ elkaars inverse zijn. Dus $\Lambda^{\alpha'}_{\beta} \Lambda^{\beta}_{\alpha'}$ is

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \xi} & \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \xi} & \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (250)$$

Merk op dat een en ander volgt uit de definitie van partiële afgeleide en uit het feit dat ξ en η onafhankelijke variabelen zijn en dus geldt dat $\frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 0$.

⁶³Wellicht dat een andere kijk op deze zaak verhelderend is: we gaan weer uit van vergelijking (251) en omdat $\phi = \phi(\xi, \eta)$ verwacht je voor de afgeleide van ϕ langs de raakvector $\vec{V}$ van de curve

$$\nabla_{\vec{V}} \phi = V^{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\alpha}}. \quad (252)$$

een tangent vector $\vec{V}$ gedefinieerd als een lineaire functie die een 1-vorm als argument neemt en afbeeldt naar het reële getal $d\phi/ds$.

Onder een coördinatentransformatie gebeurt er niets met s (de definitie van deze parameter had niets met coördinaten te maken), maar veranderen de componenten van $\vec{V}$ volgens de kettingregel als

$$\begin{pmatrix} \frac{d\xi}{ds} \\ \frac{d\eta}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix}. \quad (257)$$

Dit is dezelfde transformatiewet die we eerder voor vectoren hebben gevonden; vergelijk dit met uitdrukking (246) en op basis van deze correspondentie mogen we $\vec{V}$ een vector noemen. Met deze informatie kunnen we onze beschouwing in poolcoördinaten voortzetten.

Voorbeeld: basis 1-vormen en vectoren in poolcoördinaten.

Voor de basiscoördinaten geldt $\vec{e}_{\alpha'} = \Lambda_{\alpha'}^{\beta} \vec{e}_{\beta}$ en dit levert

$$\vec{e}_r = \Lambda_r^x \vec{e}_x + \Lambda_r^y \vec{e}_y = \frac{\partial x}{\partial r} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{e}_y = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y, \quad (258)$$

en op dezelfde wijze

$$\vec{e}_{\theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} \vec{e}_y = -r \sin \theta \vec{e}_x + r \cos \theta \vec{e}_y. \quad (259)$$

Merk op dat we gebruiken dat $\Lambda_r^x = \frac{\partial x}{\partial r}$. Op dezelfde wijze kunnen we de andere kant op transformeren met $\Lambda_x^r = \frac{\partial r}{\partial x}$. De transformatiematrices zijn eenvoudig: we hoeven alleen te kijken naar welke index boven of beneden is en we weten welke afgeleide we dienen te gebruiken.

De basis 1-vormen vinden we op analoge wijze. Er geldt $\tilde{d}p^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta} \tilde{d}p^{\beta}$ en dus

$$\tilde{d}\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} \tilde{d}x + \frac{\partial \theta}{\partial y} \tilde{d}y = -\frac{1}{r} \sin \theta \tilde{d}x + \frac{1}{r} \cos \theta \tilde{d}y, \quad (260)$$

en ook

$$\tilde{d}r = \cos \theta \tilde{d}x + \sin \theta \tilde{d}y. \quad (261)$$

In Fig. 46 trachten we de basisvectoren en 1-vormen grafisch weer te geven. We tekenen de 1-vormen door oppervlakken te tekenen met constante r of θ voor respectievelijk $\tilde{d}r$ en $\tilde{d}\theta$. Merk op dat de bases veranderen van punt tot punt! Ook de lengten van de bases zijn niet constant. We vinden bijvoorbeeld $|\vec{e}_{\theta}|^2 = \vec{e}_{\theta} \cdot \vec{e}_{\theta} =$

Het symbool $\nabla_{\vec{V}}$ betekent de waarde van de richtingsafgeleide van een scalairveld in de richting gegeven door vector $\vec{V}$. Dus geldt

$$\nabla_{\vec{V}} = V^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \frac{dx^{\alpha}}{ds} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \left(\frac{d}{ds} \right)_{\text{langs de curve}}. \quad (253)$$

Merk op dat we nu de volgende situatie hebben,

$$\nabla_{\vec{V}} = V^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \quad \text{en} \quad \vec{V} = V^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}, \quad (254)$$

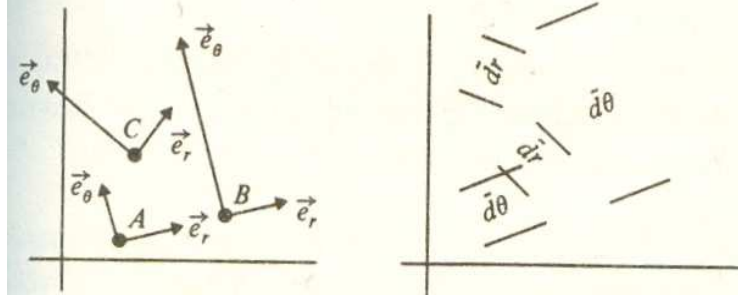
en zien dat beide uitdrukkingen dezelfde expansiecoëfficiënten V^{α} hebben. De eerste vergelijking is voor een richtingsafgeleide en de tweede beschrijft een vector. Er is dus een isomorfisme tussen vectoren en richtingsafgeleiden. We mogen derhalve schrijven

$$\vec{V} = \nabla_{\vec{V}} = \partial_{\vec{V}} = \frac{d\mathcal{P}}{ds} = \frac{d}{ds} \quad (255)$$

en voor de basisvectoren

$$\vec{e}_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}. \quad (256)$$

Voor een wiskundige is de tangentruimte de ruimte opgespannen door de richtingsafgeleiden op punt $\mathcal{P}$. Deze richtingsafgeleiden hebben dus hun eigen ruimte.



Figuur 46: Links: basisvectoren voor poolcoördinaten; rechts: basis 1-vormen.

$r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2$, zodat de lengte van $\vec{e}_\theta$ toeneemt met haar afstand tot de oorsprong. We hebben dus ook geen eenheidsbasis meer. Er geldt $|\vec{e}_r| = 1$, $|\tilde{dr}| = 1$, $|\vec{e}_\theta| = r$, $|\tilde{d\theta}| = r^{-1}$.

De inproducten kunnen worden uitgerekend, omdat we de metriek in cartesische coördinaten (x, y) kennen: $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1$ en $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$. In tensornotatie is dat $g(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ voor cartesische coördinaten. De metriek $\mathbf{g}$ heeft in poolcoördinaten de componenten $g_{\alpha'\beta'} = g(\vec{e}_{\alpha'}, \vec{e}_{\beta'}) = \vec{e}_{\alpha'} \cdot \vec{e}_{\beta'}$ en dit levert $g_{rr} = 1$, $g_{\theta\theta} = r^2$ en $g_{r\theta} = 0$. We kunnen de componenten van $\mathbf{g}$ ook schrijven als

$$(g_{\alpha\beta})_{\text{pool}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad \text{en ook} \quad d\vec{l} \cdot d\vec{l} = ds^2 = |dr\vec{e}_r + d\theta\vec{e}_\theta|^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (262)$$

De laatste formule in bovenstaande uitdrukking⁶⁴ geeft de lengte van een willekeurige en oneindig kleine verplaatsing $d\vec{l}$, hetgeen een handige manier is om de componenten van de metrische tensor en tegelijkertijd de coördinaten van het lijnelement $d\vec{l}$ te tonen.

De metriek heeft een inverse

$$(g^{\alpha\beta})_{\text{pool}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}, \quad (263)$$

waarmee geldt dat $g^{rr} = 1$, $g^{r\theta} = 0$ en $g^{\theta\theta} = 1/r^2$. We kunnen dit gebruiken om een afbeelding te maken tussen vectoren en 1-vormen. Stel bijvoorbeeld dat ϕ een scalairveld is en $\tilde{d}\phi$ haar gradiënt, dan heeft de vector $\tilde{d}\phi$ de componenten

$$(\tilde{d}\phi)^\alpha = g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta} \quad \text{en dus} \quad \begin{cases} (\tilde{d}\phi)^r &= g^{r\beta} \phi_{,\beta} = g^{rr} \phi_{,r} + g^{r\theta} \phi_{,\theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ (\tilde{d}\phi)^\theta &= g^{\theta\beta} \phi_{,\beta} = g^{\theta r} \phi_{,r} + g^{\theta\theta} \phi_{,\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{cases} \quad (264)$$

Dus terwijl $(\phi_{,r}, \phi_{,\theta})$ componenten van een 1-vorm zijn, heeft de vector gradiënt componenten $(\phi_{,r}, \phi_{,\theta}/r^2)$. Ondanks dat we in de euclidische ruimte zijn, zien we dat vectoren in het algemeen componenten hebben die verschillen van die van de geassocieerde 1-vormen. Cartesische coördinaten zijn de enige coördinaten waarvoor de componenten hetzelfde zijn (want dan geldt dat $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, 1)$).

6.2 Tensorcalculus

Stel we hebben een vector $\vec{V}$ waarvan de componenten V^α gegeven zijn ten opzichte van een willekeurig coördinatenstelsel $\{\vec{e}_\alpha\}$. We willen nu de afgeleide van deze vector bepalen. Er geldt

$$\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha \rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta}, \quad (265)$$

waarbij β gelijk is aan 0 of 1, etc. De laatste term wordt veroorzaakt doordat de basisvectoren niet overal constant hoeven te zijn. Omdat $\partial \vec{e}_\alpha / \partial x^\beta$ zelf een vector is, kunnen we deze schrijven

⁶⁴Verwar dr en $d\theta$ niet met de basis 1-vormen $\tilde{dr}$ en $\tilde{d\theta}$. Het zijn de componenten van $d\vec{l}$ in poolcoördinaten en de 'd' betekent 'oneindig kleine Δ '.

als een lineaire combinatie van basisvectoren. Hiertoe introduceren we het symbool $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ om de coëfficiënten aan te duiden. Er geldt

$$\frac{\partial \vec{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \vec{e}_{\mu}. \quad (266)$$

De interpretatie van $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ is dat het de μ -de component van $\frac{\partial \vec{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$ voorstelt. Dit object heet een *christoffelsymbol* en heeft drie indices: de eerste (α) geeft de basisvector aan die wordt gedifferentieerd, de tweede (β) geeft de coördinaat aan waarnaar wordt gedifferentieerd, en de derde (μ) geeft de component van de resulterende afgeleide vector aan. Alle indices dienen te refereren naar hetzelfde coördinatenstelsel.

Met bovenstaande definitie van de christoffelsymbolen kunnen we vergelijking (265) schrijven als

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \vec{e}_{\alpha} + V^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \vec{e}_{\mu}. \quad (267)$$

De laatste term bevat twee sommaties (over α en μ) en als we de bijbehorende dummie indices herlabelen, vinden we

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \vec{e}_{\alpha} + V^{\mu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^{\beta}} = \left(\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + V^{\mu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \right) \vec{e}_{\alpha}. \quad (268)$$

We zien dat het vectorveld $\partial \vec{V} / \partial x^{\beta}$ de componenten $\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + V^{\mu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}$ heeft. Merk op dat we voor partiële afgeleiden reeds de komma-notatie gebruiken, $\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = V^{\alpha}_{,\beta}$. We definiëren een nieuwe notatie

$$V^{\alpha}_{;\beta} \equiv V^{\alpha}_{,\beta} + V^{\mu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^{\beta}} = V^{\alpha}_{;\beta} \vec{e}_{\alpha}. \quad (269)$$

Nu is $\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^{\beta}}$ een vectorveld als we de index β opvatten als één vast getal. Deze index kan echter meer waarden aannemen en we kunnen $\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^{\beta}}$ dan ook beschouwen als zijnde geassocieerd met een $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tensorveld dat de vector $\vec{e}_{\beta}$ afbeeldt op de vector $\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^{\beta}}$. Dit tensorveld wordt de *covariante afgeleide* van $\vec{V}$ genoemd⁶⁵ en aangeduid met $\nabla \vec{V}$. Haar componenten zijn

$$(\nabla \vec{V})^{\alpha}_{\beta} = (\nabla_{\beta} \vec{V})^{\alpha} = V^{\alpha}_{;\beta}. \quad (270)$$

Op een cartesische basis zijn de componenten gelijk aan $V^{\alpha}_{;\beta}$ omdat dan de vectorvelden van de basis constant zijn. Op een gekromde basis moeten we rekening houden met de afgeleiden van de basisvectoren en krijgen we $V^{\alpha}_{;\beta}$ als componenten van $\nabla \vec{V}$ in het coördinatenstelsel waaraan de

⁶⁵Ter verheldering bekijken we de covariante afgeleide ∇ weer als een geometrisch object, dit wil zeggen als een apparaat met drie sleuven. Op elk punt $\mathcal{P}$ van ruimtetijd bevindt zich een dergelijk apparaat. De interpretatie is dat $\nabla(\tilde{\sigma}, \vec{V}(\mathcal{P}), \vec{u}) \equiv \langle \tilde{\sigma}, \nabla_{\vec{u}} \vec{V} \rangle$. We stoppen een willekeurige 1-vorm $\tilde{\sigma}$ die in de tangenteruimte bestaat op punt $\mathcal{P}$ in de eerste sleuf. In de tweede sleuf stoppen we een vectorveld $\vec{V}(\mathcal{P})$ dat in de omgeving van $\mathcal{P}$ gedefinieerd is. Tenslotte stoppen we in de derde sleuf een vector $\vec{u}$ die zich in de tangenteruimte van punt $\mathcal{P}$ bevindt. Uit de machine rolt nu een getal dat het inproduct is van de covariante afgeleide $\nabla_{\vec{u}} \vec{V}$ van het vectorveld $\vec{V}$ in de richting van $\vec{u}$ met de 1-vorm $\tilde{\sigma}$. Je kunt $\nabla_{\vec{u}} \vec{V}$ zien als de mate van verandering van $\vec{V}$ langs de vector $\vec{u}$. Een alternatieve manier om ernaar te kijken is om de eerste sleuf leeg te laten. We krijgen dan een nieuw vectorveld $\nabla(\dots, \vec{V}(\mathcal{P}), \vec{u}) \equiv \nabla_{\vec{u}} \vec{V}$ uit het oude vectorveld $\vec{V}$. We noemen dat de covariante afgeleide van het vectorveld $\vec{V}$ langs de vector $\vec{u}$. Tenslotte is er een derde manier om de zaak te bekijken: we laten zowel de eerste als de derde sleuf leeg. We krijgen nu een $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tensorveld $\nabla(\dots, \vec{V}(\mathcal{P}), \dots) \equiv \nabla \vec{V}$ uit het originele vectorveld $\vec{V}$. Dit noemen we de covariante afgeleide of de gradiënt van het vectorveld $\vec{V}$.

christoffelsymbolen refereren. Er bestaat één enkele $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tensor die we $\nabla \vec{V}$ noemen. In cartesische coördinaten zijn de componenten gelijk aan $\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}$. In algemene coördinaten $\{x^{\mu'}\}$ worden de componenten $V^{\alpha'}_{;\beta'}$ genoemd. We kunnen deze componenten op de volgende manieren vinden: (i) reken ze direct uit met behulp van vergelijking (269) hetgeen kennis vereist van de christoffelsymbolen voor dit coördinatenstelsel; of (ii) verkrijg ze via de gebruikelijke tensortransformatie vanuit een cartesisch systeem naar $\{x^{\mu'}\}$. We demonstreren de eerste methode aan de hand van een voorbeeld in poolcoördinaten.

Voorbeeld: tensorcalculus in poolcoördinaten.

In poolcoördinaten is het vectorveld $\vec{e}_x$ constant: hetzelfde op elk punt. In poolcoördinaten heeft dit veld de componenten $\vec{e}_x \rightarrow (\Lambda^r_x, \Lambda^\theta_x) = (\cos \theta, -r^{-1} \sin \theta)$. Deze componenten zijn duidelijk niet constant, terwijl $\vec{e}_x$ dat wel is. Dit komt omdat de componenten refereren naar een niet constante basis. Als we deze componenten zouden differentiëren naar, zeg, θ , dan vinden we zeker niet $\partial \vec{e}_x / \partial \theta$, want dat dient gelijk te zijn aan nul. We zien dus dat alleen het nemen van de afgeleide van de componenten van een vector niet de afgeleide van de vector oplevert. We dienen ook de niet-constante basisvectoren te differentiëren, in overeenstemming met vergelijking (265). Omdat de cartesische basisvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ constante velden zijn (en hun afgeleiden dus verdwijnen) vinden we

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r &= \frac{\partial}{\partial r} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_r &= \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y = \frac{1}{r} \vec{e}_\theta. \end{aligned} \quad (271)$$

Evenzo vinden we

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_\theta &= \frac{\partial}{\partial r} (-r \sin \theta \vec{e}_x + r \cos \theta \vec{e}_y) = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y = \frac{1}{r} \vec{e}_\theta, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta &= -r \cos \theta \vec{e}_x - r \sin \theta \vec{e}_y = -r \vec{e}_r. \end{aligned} \quad (272)$$

We kunnen nu de afgeleide $\partial \vec{e}_x / \partial \theta$ uitrekenen en vinden

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_x &= \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta) \vec{e}_r + \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{e}_r) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \sin \theta \right) \vec{e}_\theta - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \\ &= -\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \left(\frac{1}{r} \vec{e}_\theta \right) - \frac{1}{r} \cos \theta \vec{e}_\theta - \frac{1}{r} \sin \theta (-r \vec{e}_r). \end{aligned} \quad (273)$$

Vereenvoudigen levert $\partial \vec{e}_x / \partial \theta = 0$ zoals we verwachten.

We kunnen ook de christoffelsymbolen berekenen en vinden

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} &= 0 \quad \rightarrow \quad \Gamma^\mu_{rr} = 0 \quad \text{voor alle } \mu, \\ (2) \quad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} &= \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \quad \rightarrow \quad \Gamma^r_{r\theta} = 0, \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r}, \\ (3) \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} &= \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \quad \rightarrow \quad \Gamma^r_{\theta r} = 0, \quad \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}, \\ (4) \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} &= -r \vec{e}_r \quad \rightarrow \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -r, \quad \Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0. \end{aligned} \quad (274)$$

We zien dat alle indices naar hetzelfde coördinatenstelsel refereren.

De covariante afgeleide verschilt alleen van de partiële afgeleide als de basisvectoren niet constant zijn. Een scalairveld ϕ hangt echter niet van de basisvectoren af en dus is haar covariante afgeleide gelijk aan haar partiële afgeleide en dat is de gradiënt,

$$\nabla_\alpha \phi = \partial \phi / \partial x^\alpha; \quad \nabla \phi = \tilde{d}\phi. \quad (275)$$

Vervolgens beschouwen we de *divergentie* en *Laplace* operatoren. In cartesische coördinaten is de divergentie van een vector V^α gelijk aan $V^\alpha_{;\alpha}$. Dit is een getal (scalairveld) dat we krijgen door contractie van de indices van $V^\alpha_{;\beta}$. Deze contractie (dit getal dus) hangt niet van het coördinatenstelsel af en we kunnen de divergentie van $\vec{V}$ dan ook uitrekenen in andere coördinaten $\{x^{\mu'}\}$ door weer de componenten van $\nabla \vec{V}$ te contraheren over haar twee indices. Het resultaat is een getal met de waarde $V^{\alpha'}_{;\alpha'}$. Het is belangrijk om in te zien dat dit hetzelfde getal is als $V^\alpha_{;\alpha}$ in cartesische coördinaten. Dus

$$V^\alpha_{;\alpha} = V^{\alpha'}_{;\alpha'}, \quad (276)$$

waarbij de indices zonder accenten refereren naar cartesische coördinaten, terwijl die met accenten refereren naar een willekeurig systeem.

Wellicht is de lezer vertrouwd met de Laplace operator en dat is de divergentie van de gradiënt. Vergelijking (276) geeft de divergentie van een vector, terwijl de gradiënt een 1-vorm is. We dienen deze 1-vorm dus eerst om te schrijven in een vector. We zullen dit weer uitwerken aan de hand van een voorbeeld in poolcoördinaten.

Voorbeeld: divergentie en Laplace operator in poolcoördinaten.

In poolcoördinaten hebben we voor de divergentie

$$V^{\alpha}_{;\alpha} = \frac{\partial V^r}{\partial r} + \frac{\partial V^{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} V^r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V^r) + \frac{\partial}{\partial \theta} V^{\theta}, \quad (277)$$

waarbij we vergelijking (269) en de verschillende christoffelsymbolen in poolcoördinaten (vergelijking (274)) gebruikt hebben. Teneinde de Laplace operator te vinden, starten we met een scalaïrveld ϕ en bepalen we de vector gradiënt. Dat is reeds gebeurd in vergelijking (264). We vullen deze vector in in vergelijking (277) en vinden

$$\nabla \cdot \nabla \phi \equiv \nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}. \quad (278)$$

Dit is de Laplace operator in euclidische poolcoördinaten en deze is identiek aan

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}. \quad (279)$$

Ter afronding bekijken we de afgeleiden van 1-vormen en hogere-orde tensorvelden. Om de afgeleide van een 1-vorm te vinden, gebruiken we de eigenschap dat een 1-vorm en vector samen een scalaïr geven. Dus als $\tilde{p}$ een 1-vorm is en $\vec{V}$ een vector, dan is voor gegeven β , $\nabla_{\beta} \tilde{p}$ ook een 1-vorm, $\nabla_{\beta} \vec{V}$ een vector, en $\langle \tilde{p}, \vec{V} \rangle \equiv \phi$ een scalar. In een willekeurig coördinatenstelsel wordt deze scalar geschreven als $\phi = p_{\alpha} V^{\alpha}$. Daarom geldt voor $\nabla_{\beta} \phi$ volgens de productregel voor afgeleiden

$$\nabla_{\beta} \phi = \phi_{,\beta} = \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} V^{\alpha} + p_{\alpha} \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}. \quad (280)$$

We kunnen vergelijking (269) gebruiken om $\partial V^{\alpha} / \partial x^{\beta}$ te vervangen door $V^{\alpha}_{;\beta}$ hetgeen de componenten zijn van $\nabla_{\beta} \vec{V}$ en vinden

$$\nabla_{\beta} \phi = \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} V^{\alpha} + p_{\alpha} V^{\alpha}_{;\beta} - p_{\alpha} V^{\mu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} = \left(\frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - p_{\mu} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \right) V^{\alpha} + p_{\alpha} V^{\alpha}_{;\beta}, \quad (281)$$

waarbij we in de laatste stap termen verwisseld hebben en dummie indices andere namen gegeven. Van iedere term in bovenstaande vergelijking weten we dat het een tensorcomponent is voor willekeurige $\vec{V}$, behalve van die tussen haakjes. Omdat vermenigvuldigen en optellen van tensorcomponenten altijd nieuwe tensoren oplevert, moet het zo zijn dat de term tussen haakjes ook een tensor is. Dit is de covariante afgeleide van $\tilde{p}$. Er geldt dus

$$(\nabla_{\beta} \tilde{p})_{\alpha} \equiv (\nabla \tilde{p})_{\alpha\beta} \equiv p_{\alpha;\beta} = p_{\alpha,\beta} - p_{\mu} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}. \quad (282)$$

Verder geldt

$$\nabla_{\beta} (p_{\alpha} V^{\alpha}) = p_{\alpha;\beta} V^{\alpha} + p_{\alpha} V^{\alpha}_{;\beta}. \quad (283)$$

We zien dat covariant differentiëren aan dezelfde soort productregel voldoet als vergelijking (280). Dit kan ook niet anders, want in cartesische coördinaten staat ∇ voor partiële differentiëren van componenten.

We kunnen nu de volgende uitdrukkingen vergelijken,

$$\begin{aligned} V^{\alpha}_{;\beta} &= V^{\alpha}_{,\beta} + V^{\mu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}, \\ p_{\alpha;\beta} &= p_{\alpha,\beta} - p_{\mu} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (284)$$

en zien enkele overeenkomsten en enkele verschillen. We herinneren ons dat de laatste index van het christoffelsymbool de differentiatie index is. Dit betekent dat alleen de andere indices met de metriek naar boven of beneden kunnen worden gehaald. Wat er dan nog overblijft is het tekenverschil. Hierbij helpt het om zich te herinneren dat $\Gamma^\alpha_{\mu\beta}$ te maken had met afgeleiden van basisvectoren. Het lijkt daarom redelijk te veronderstellen dat $-\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ te maken heeft met afgeleiden van basis 1-vormen. De tekenverandering duidt erop dat de basis 1-vormen tegenovergesteld veranderen aan de basisvectoren, hetgeen redelijk is als we beseffen dat de contractie $\langle \tilde{\omega}^\alpha, \tilde{e}_\beta \rangle = \delta^\alpha_\beta$ een constante is met afgeleide nul.

Dezelfde procedure leidt ook tot

$$\begin{aligned}\nabla_\beta T_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu,\beta} - T_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta} - T_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\beta}; \\ \nabla_\beta A^{\mu\nu} &= A^{\mu\nu}_{,\beta} + A^{\alpha\nu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} + A^{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\alpha\beta}; \\ \nabla_\beta B^\mu_\nu &= B^\mu_{\nu,\beta} + B^\alpha_\nu\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - B^\mu_\alpha\Gamma^\alpha_{\nu\beta}.\end{aligned}\tag{285}$$

We zien dat deze uitdrukkingen een bepaalde systematiek hebben. Zo is er een Γ term voor elke index; een boven index wordt als een vector behandeld en een beneden index als een 1-vorm.

6.3 Christoffelsymbolen en de metriek

Het formalisme dat we in de vorige sectie besproken hebben, heeft geen eigenschappen van de metrische tensor gebruikt in het opstellen van de covariante afgeleiden. De metriek kan vectoren veranderen in 1-vormen en omgekeerd, en we verwachten daarom dat deze een rol speelt in het verband tussen hun afgeleiden. In het geval van cartesische coördinaten zijn de componenten van de 1-vorm en de eraan gerelateerde vector gelijk, en omdat ∇ dan alleen het nemen van afgeleiden van componenten is, moeten de componenten van de covariante afgeleide van de 1-vorm en vector gelijk zijn aan elkaar. Dit betekent dat als $\vec{V}$ een willekeurige vector is en $\tilde{V} = g(\vec{V}, \cdot)$ de eraan gerelateerde 1-vorm, dan geldt in cartesische coördinaten

$$\nabla_\beta \tilde{V} = g(\nabla_\beta \vec{V}, \dots).\tag{286}$$

Bovenstaande relatie is een tensorvergelijking en moet dus gelden in *alle* coördinaten. We concluderen dat

$$V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu} V^\mu_{;\beta},\tag{287}$$

hetgeen de componenten representatie is van vergelijking (286).

Als de hierboven gevolgde argumentatie niet bevredigend is, dan kunnen we er met vergelijkingen nog eens door heen lopen. De indices $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ geven cartesische coördinaten aan, terwijl de indices met accenten $\alpha', \beta', \gamma', \dots$ willekeurige coördinaten aangeven. We beginnen met het statement $V_{\alpha'} = g_{\alpha'\mu'} V^{\mu'}$, dat geldig is in elk coördinatenstelsel. Echter in cartesische coördinaten geldt $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ en $V_\alpha = V^\alpha$. Nu is het ook zo dat in cartesische coördinaten de christoffelsymbolen allemaal gelijk zijn aan nul. Dus hebben we $V_{\alpha;\beta} = V_{\alpha,\beta}$ en $V^\alpha_{;\beta} = V^\alpha_{,\beta}$. We kunnen daarom concluderen dat $V_{\alpha;\beta} = V^\alpha_{;\beta}$, alleen in cartesische coördinaten. Om dit om te zetten in een vergelijking die geldig is in alle coördinatenstelsels, merken we op dat in cartesische coördinaten geldt dat $V^\alpha_{;\beta} = g_{\alpha\mu} V^\mu_{;\beta}$, zodat, ook weer in cartesische coördinaten, geldt dat $V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu} V^\mu_{;\beta}$. Deze vergelijking is een tensorvergelijking, zodat geldigheid ervan in één coördinatenstelsel de geldigheid in alle stelsels impliceert. We vinden dan weer vergelijking (287),

$$V_{\alpha';\beta'} = g_{\alpha'\mu'} V^{\mu'}_{;\beta'}.\tag{288}$$

Bovenstaand resultaat heeft verreichende consequenties. Als we de β' covariante afgeleide nemen van $V_{\alpha'} = g_{\alpha'\mu'} V^{\mu'}$, vinden we

$$V_{\alpha';\beta'} = g_{\alpha'\mu';\beta'} V^{\mu'} + g_{\alpha'\mu'} V^{\mu'}_{;\beta'}. \quad (289)$$

Als we uitdrukking (289) vergelijken met uitdrukking (288) dan vinden we dat moet gelden

$$g_{\alpha'\mu';\beta'} = 0 \quad (290)$$

in alle coördinatenstelsels. Dat is een directe consequentie van vergelijking (286). In cartesische coördinaten is $g_{\alpha\mu;\beta} \equiv g_{\alpha\mu,\beta} = \delta_{\alpha\mu,\beta} = 0$ een triviale identiteit. Echter in andere coördinaten is dat niet zo voor de hand liggend. Dit laten we zien aan de hand van poolcoördinaten.

Voorbeeld: afgeleiden van de metrische tensor.

We starten met de procedure analoog aan vergelijking (285), en schrijven

$$g_{\alpha\beta;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} g_{\nu\beta} - \Gamma_{\beta\mu}^{\nu} g_{\alpha\nu}, \quad (291)$$

waarbij de indices algemene coördinaten voorstellen. We werken nu een aantal termen uit in poolcoördinaten. Bijvoorbeeld stel dat $\alpha = r$, $\beta = r$ en $\mu = r$, dan vinden we

$$g_{rr;r} = g_{rr,r} - \Gamma_{rr}^{\nu} g_{\nu r} - \Gamma_{rr}^{\nu} g_{r\nu}. \quad (292)$$

Omdat $g_{rr,r} = 0$ en $\Gamma_{rr}^{\nu} = 0$ voor alle ν , is dit triviaal gelijk aan nul. Niet zo triviaal is $\alpha = \theta$, $\beta = \theta$ en $\mu = r$. Dan vinden we

$$g_{\theta\theta;r} = g_{\theta\theta,r} - \Gamma_{\theta r}^{\nu} g_{\nu\theta} - \Gamma_{\theta r}^{\nu} g_{\theta\nu}. \quad (293)$$

Met $g_{\theta\theta} = r^2$, $\Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{r}$ en $\Gamma_{\theta r}^r = 0$ wordt dit

$$g_{\theta\theta;r} = (r^2)_{,r} - \frac{1}{r}(r^2) - \frac{1}{r}(r^2) = 0, \quad (294)$$

en we zien dat het werkt. Het is belangrijk in te zien dat dit direct volgt uit het feit dat $g_{\alpha\beta,\mu} = 0$ in cartesische coördinaten en dat $g_{\alpha\beta;\mu}$ de componenten zijn van *dezelfde* tensor ∇g in willekeurige coördinaten.

Wat we hierboven gedaan hebben is het introduceren van covariante differentiatie in willekeurige coördinaten door onze kennis van de euclidische ruimte te gebruiken. We hebben laten zien dat de metriek van de euclidische ruimte covariant constant is, vergelijking (290). Als we gekromde ruimten gaan behandelen, zal blijken dat vergelijking (290) nog steeds geldig is, en dus ook alle consequenties ervan die we nu gaan bespreken.

6.3.1 Berekenen van de christoffelsymbolen uit de metriek

Vergelijking (776) leidt tot een uiterst belangrijk resultaat: we kunnen deze vergelijking gebruiken om $g_{\alpha\beta,\mu}$ te bepalen in termen van $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$. Het omgekeerde blijkt ook waar te zijn: $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ uitdrukken in termen van $g_{\alpha\beta,\mu}$. Dat geeft een eenvoudige manier om de christoffelsymbolen uit te rekenen. We moeten eerst echter de relatie $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \equiv \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}$ bewijzen, die geldt in elk coördinatenstelsel. Om deze symmetrie te bewijzen beschouwen we een willekeurig scalairveld ϕ . De eerste afgeleide $\nabla\phi$ is een 1-vorm met componenten $\phi_{,\beta}$. De tweede covariante afgeleide $\nabla\nabla\phi$ heeft componenten $\phi_{,\beta;\alpha}$ en is een $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor. In cartesische coördinaten zijn de componenten

$$\phi_{,\beta;\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \phi \quad (295)$$

en we zien dat deze symmetrisch zijn in α en β , omdat partiële afgeleiden commuteren. Echter als een tensor symmetrisch is in één basis, dan is hij symmetrisch in alle bases. Dus geldt

$$\phi_{,\beta;\alpha} = \phi_{,\alpha;\beta} \quad (296)$$

in elke basis. Gebruikmaken van de definitie gegeven in vergelijking (282) levert

$$\phi_{,\beta,\alpha} - \phi_{,\mu}\Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} = \phi_{,\alpha,\beta} - \phi_{,\mu}\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \quad (297)$$

in elk coördinatensysteem. Maar er geldt $\phi_{,\alpha,\beta} = \phi_{,\beta,\alpha}$ en dit levert

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}\phi_{,\mu} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}\phi_{,\mu} \quad (298)$$

voor willekeurige ϕ . Hiermee is bewezen dat in elk coördinatenstelsel

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \equiv \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}. \quad (299)$$

We gebruiken bovenstaande symmetrie om vergelijking (776) te inverteren. Dat is tevens een mooi voorbeeld van geavanceerde index-manipulatie. Hiertoe schrijven we vergelijking (776) in drie permutaties van de indices,

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\mu} &= \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu}g_{\nu\beta} + \Gamma_{\beta\mu}^{\nu}g_{\alpha\nu}, \\ g_{\alpha\mu,\beta} &= \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}g_{\nu\mu} + \Gamma_{\mu\beta}^{\nu}g_{\alpha\nu}, \\ -g_{\beta\mu,\alpha} &= -\Gamma_{\beta\alpha}^{\nu}g_{\nu\mu} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu}g_{\beta\nu}. \end{aligned} \quad (300)$$

We tellen deze op, groeperen termen, gebruiken de symmetrie van g , $g_{\beta\nu} = g_{\nu\beta}$ en vinden

$$g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} = (\Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu})g_{\nu\beta} + (\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\nu})g_{\nu\mu} + (\Gamma_{\beta\mu}^{\nu} + \Gamma_{\mu\beta}^{\nu})g_{\alpha\nu}. \quad (301)$$

In deze vergelijking vallen de eerste twee termen rechts weg vanwege de symmetrie van Γ en vinden we

$$g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} = 2g_{\alpha\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\nu}. \quad (302)$$

Delen door 2, vermenigvuldigen met $g^{\alpha\gamma}$ (en sommeren over α), en gebruik maken van $g^{\alpha\gamma}g_{\alpha\nu} \equiv \delta_{\nu}^{\gamma}$ levert

$$\Gamma_{\beta\mu}^{\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}). \quad (303)$$

Dit is de uitdrukking voor de christoffelsymbolen in termen van de partiële afgeleiden van de componenten van g . We geven weer een korte demonstratie voor poolcoördinaten.

Voorbeeld: christoffelsymbolen en metriek

In poolcoördinaten geldt bijvoorbeeld

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\alpha\theta}(g_{\alpha r,\theta} + g_{\alpha\theta,r} - g_{r\theta,\alpha}). \quad (304)$$

Omdat $g^{r\theta} = 0$ en $g^{\theta\theta} = r^{-2}$ vinden we

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{2r^2}(g_{\theta r,\theta} + g_{\theta\theta,r} - g_{r\theta,\theta}) = \frac{1}{2r^2}g_{\theta\theta,r} = \frac{1}{2r^2}(r^2)_{,r} = \frac{1}{r}. \quad (305)$$

Dit is hetzelfde resultaat voor $\Gamma_{r\theta}^{\theta}$ dat we al eerder hebben afgeleid. Deze rekenmethode is ook geldig in gekromde ruimten.

7 De algemene relativiteitstheorie

Ruimtetijd is een variëteit die continu en differentieerbaar is. Dat betekent dat we bijvoorbeeld een scalairveld kunnen definiëren, waarvan dan op elk punt de afgeleiden bepaald kunnen worden. Het betekent ook dat we 1-vormen en vectoren kunnen definiëren en op een bepaald punt $\mathcal{P}$ van de variëteit zijn de elementen van de verzameling $\{\phi_{,\alpha}\}$ de componenten van de 1-vorm. Elke verzameling van de vorm $\{a\phi_{,\alpha} + b\psi_{,\alpha}\}$, met a en b functies, is ook een 1-vorm. Elke curve (met parameter λ) heeft een raakvector $\vec{V}$ en dat is een lineaire functie die een 1-vorm $\tilde{d}\phi$ als argument neemt en de afgeleide van ϕ langs de curve produceert,

$$\langle \tilde{d}\phi, \vec{V} \rangle = \vec{V}(\tilde{d}\phi) = \frac{d\phi}{d\lambda}. \quad (306)$$

Elke lineaire combinatie van vectoren is ook weer een vector. Gebruikmakend van de op deze manier gedefinieerde vectoren en 1-vormen, kunnen we een hele verzameling tensoren van het type $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ opbouwen. Omdat we nog geen $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor gekozen hebben om dienst te doen als metriek, is er nog geen correspondentie tussen 1-vormen en vectoren. We zeggen dat de verzameling van alle tensoren deel uitmaakt van de differentiaalstructuur van de variëteit.

Voordat we verder gaan, vatten we de regels van tensoralgebra nog eens samen.

1. Een tensorveld definieert een tensor op elk punt $\mathcal{P}$ van de variëteit.
2. Vectoren en 1-vormen zijn lineaire operatoren op elkaar en produceren reële getallen. Lineair betekent dat $\langle \tilde{p}, a\vec{V} + b\vec{W} \rangle = a \langle \tilde{p}, \vec{V} \rangle + b \langle \tilde{p}, \vec{W} \rangle$, en $\langle a\tilde{p} + b\tilde{q}, \vec{V} \rangle = a \langle \tilde{p}, \vec{V} \rangle + b \langle \tilde{q}, \vec{V} \rangle$, met a en b willekeurige scalaire velden.
3. Tensoren zijn op dezelfde manier lineaire operatoren op 1-vormen en vectoren, en produceren reële getallen.
4. Als twee tensoren van hetzelfde type dezelfde componenten hebben op een gegeven basis, dan hebben ze dezelfde componenten op alle bases en zeggen we dat ze identiek zijn. In het bijzonder, als de componenten van een tensor voor een bepaalde basis nul zijn, dan is de tensor gelijk aan nul.
5. Er is een aantal toegestane operaties met componenten van tensorvelden. Dergelijke operaties produceren nieuwe tensoren.
 - (a) Vermenigvuldigen met een scalairveld produceert een tensor van hetzelfde type.
 - (b) Optellen van de componenten van twee tensoren van hetzelfde type geeft de componenten van een nieuwe tensor van hetzelfde type. Alleen tensoren van hetzelfde type kunnen gelijk zijn aan elkaar.
 - (c) Vermenigvuldigen van componenten van twee tensoren van willekeurig type geeft componenten van een nieuwe tensor die de som is van de typen, het tensorproduct van de twee tensoren.
 - (d) De covariante afgeleide van de componenten van een tensor van type $\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix}$ geeft de componenten van een tensor van het type $\begin{pmatrix} N \\ M+1 \end{pmatrix}$.
 - (e) Contractie van een paar indices van de componenten van een tensor van het type $\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix}$ produceert componenten van een tensor van het type $\begin{pmatrix} N-1 \\ M-1 \end{pmatrix}$. Contractie is alleen gedefinieerd tussen boven en beneden indices.
6. Als een vergelijking gevormd wordt door het combineren van componenten van tensoren, terwijl we alleen gebruik maken van toegestane tensorbewerkingen, en als deze vergelijking geldig is in één basis, dan is hij geldig in alle bases.

7.1 Pseudo-riemannse variëteit

Een differentieerbare variëteit is een primitieve amorfe verzameling van punten (puntgebeurtenissen voor het geval van ruimtetijd). Lokaal zijn de punten gerangschikt als punten in een euclidische ruimte, maar we hebben geen afstandsconcept gespecificeerd. Het is absoluut cruciaal dat we een metriek $\mathbf{g}$ toevoegen, die de informatie bevat over hoe snel klokken lopen en wat de afstanden zijn tussen punten.

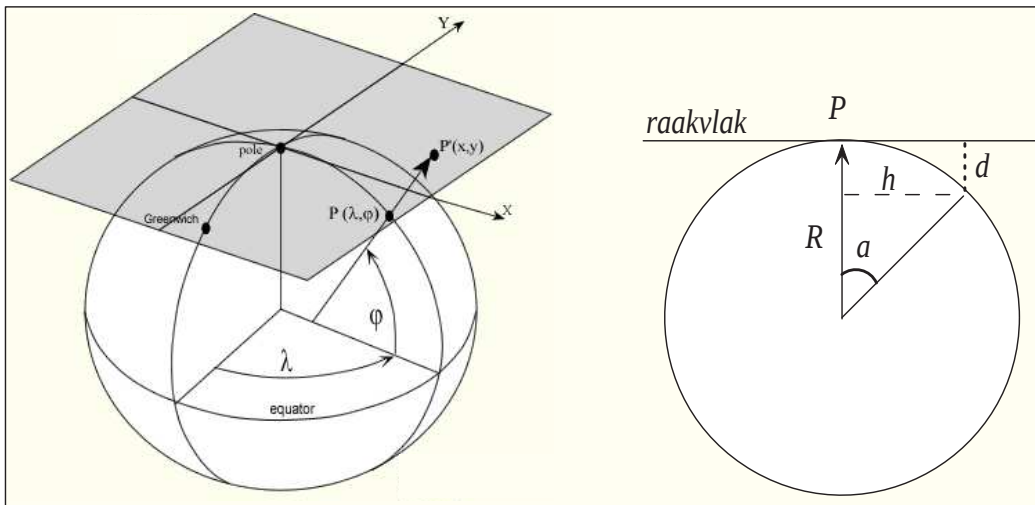
Op het aardoppervlak zouden we een metriek bepalen door kleine vectoren $\overrightarrow{\Delta\mathcal{P}}$ op het aardoppervlak te tekenen. Vervolgens zeggen we dat de lengte van de vector gegeven wordt door het inproduct

$$\overrightarrow{\Delta\mathcal{P}} \cdot \overrightarrow{\Delta\mathcal{P}} \equiv \overrightarrow{\Delta\mathcal{P}}^2 = (\text{lengte van } \overrightarrow{\Delta\mathcal{P}})^2, \quad (307)$$

en gebruiken we een meetlat om dit te bepalen. We hebben nu een definitie van het inproduct van een vector voor een kleine vector met zichzelf. We gebruiken lineariteit om naar macroscopische vectoren te gaan. Vervolgens kunnen we een definitie krijgen voor het inproduct van twee *verschillende* vectoren door gebruik te maken van

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \frac{1}{4} [(\vec{A} + \vec{B})^2 - (\vec{A} - \vec{B})^2]. \quad (308)$$

Kortom, als je een afstandsconcept hebt (een meetlat op het oppervlak van de aarde), dan kun je een inproduct vinden, en hieruit volgt de metriek (want dat is niets anders dan $\mathbf{g}(\vec{A}, \vec{B}) \equiv (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \mathbf{g}(\vec{B}, \vec{A})$. De metrische tensor is symmetrisch.). Een differentieerbare variëteit met als extra structuur een metriek, noemen we een riemannse variëteit.



Figuur 47: Links: op elk punt $\mathcal{P}$ van het oppervlak van de aarde bevindt zich een raakruimte (in dit geval een raakvlak); rechts: het raakvlak is een goede afbeelding in de nabijheid van punt $\mathcal{P}$.

We willen nu een metriek toekennen aan ruimtetijd. Hiertoe introduceren we een lokaal lorentzframe (LLF). Dat doen we door op punt $\mathcal{P}$ in vrije val te gaan. Het equivalentieprincipe zegt dan dat alle effecten van gravitatie verdwijnen en dat we lokaal de metriek van de speciale relativiteitstheorie vinden. Dat is de minkowskimetriek. We kunnen op elk punt $\mathcal{P}$ van de variëteit een coördinatenstelsel kiezen, waarin de minkowskimetriek geldt. Terwijl dit in de SRT ook een *globaal* coördinatenstelsel kan zijn, is dat alleen *lokaal* mogelijk in de algemene

relativiteitstheorie. Hiermee hebben we op elk punt $\mathcal{P}$ een definitie van lengte gevonden: met $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \rightarrow ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. In essentie bedrijven we nu SRT op punt $\mathcal{P}$ en hebben we een maat om lengten van staven en eigentijden van ideale klokken te bepalen. In een LLF wordt de metriek gegeven door $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. Voor een riemannse variëteit dienen alle diagonale elementen positief te zijn. De signatuur (de som van de elementen op de diagonaal) van de metriek van ruimtetijd is $+2$, en we spreken van een pseudo-riemannse variëteit.

Stel we brengen een coördinatenstelsel op het aardoppervlak aan met longitude en latitude. Als we naar het oppervlak van de aarde kijken, dan zien we dat hoe dichter we in de buurt van een punt $\mathcal{P}$ blijven, hoe cartesischer dit referentiesysteem er lokaal uit ziet. Afwijkingen van cartesische coördinaten treden op in tweede orde in de afstand x tot het punt $\mathcal{P}$. Wiskundig betekent dit dat geldt

$$g_{jk} = \delta_{jk} + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{x}|^2}{R^2}\right), \quad (309)$$

met R de straal van de aarde. Een eenvoudige manier om dit te zien is door het raakvlak op punt $\mathcal{P}$ te construeren. Fig. 47 toont dat als $\vec{x}$ de positievector is van een punt ten opzichte van $\mathcal{P}$, dan komt dat overeen met $\cos|\vec{x}|$ op het raakvlak. Een reeksontwikkeling levert $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$. Dit heeft tot consequentie dat als men alleen naar eerste-orde afgeleiden kijkt, men geen enkele invloed van de kromming van de aarde ziet. Alleen als we tweede-orde afgeleiden nemen, beginnen we de kromming waar te nemen.

Hetzelfde geldt voor ruimtetijd. In een gekromde ruimtetijd kunnen we geen globaal lorentz-frame vinden waarvoor $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. Het is echter wel mogelijk om coördinaten te kiezen, zodat in de nabijheid van $\mathcal{P}$ deze gelijkheid bijna geldig is. Dat wordt mogelijk gemaakt door het equivalentieprincipe. Dit is de precieze definitie van een lokaal lorentzframe en voor een dergelijk coördinatenstelsel geldt

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) &= \eta_{\alpha\beta} \quad \text{voor alle } \alpha, \beta; \\ \frac{\partial}{\partial x^\gamma} g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) &= 0 \quad \text{voor alle } \alpha, \beta, \gamma; \\ \frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\mu} g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) &\neq 0. \end{aligned} \quad (310)$$

Het bestaan van lokale lorentzframes drukt uit dat elke gekromde ruimtetijd op elk punt een vlakke raakruimte heeft. Alle tensormanipulaties die we uitvoeren spelen zich in deze raakruimte af. Bovenstaande uitdrukkingen vormen de wiskundige formulering van het feit dat het equivalentieprincipe ons toestaat om op punt $\mathcal{P}$ een LLF te kiezen.

De metriek maakt het mogelijk om de lengte van een kromme te definiëren. Als $d\vec{x}$ een kleine vectorverplaatsing op een curve is, dan is de gekwadraterde lengte gelijk aan $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ (we noemen dit het lijnelement). Een maat voor de lengte wordt gevonden door hiervan de absolute waarde te nemen en dan de wortel te trekken. Dat geeft $dl \equiv |g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|^{\frac{1}{2}}$. Integratie geeft dan de totale lengte en we vinden

$$l = \int_{\text{lans de curve}} |g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|^{\frac{1}{2}} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left| g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right|^{\frac{1}{2}} d\lambda, \quad (311)$$

waarbij λ de parameter van de curve is. De curve heeft als eindpunten λ_0 en λ_1 . De raakvector $\vec{V}$ van de curve heeft componenten $V^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ en hiermee vinden we

$$l = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} |\vec{V} \cdot \vec{V}|^{\frac{1}{2}} d\lambda \quad (312)$$

voor de lengte van een willekeurige curve.

Ook het berekenen van volumes is belangrijk als we integraties uitvoeren in ruimtetijd. Met volume bedoelen we hier een vier-dimensionaal volume. Stel we bevinden ons in een LLF en hebben er een volume element $dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$, met coördinaten $\{x^\alpha\}$ in de lokale lorentzmetriek $\eta_{\alpha\beta}$. Transformatietheorie zegt dan dat

$$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})} dx^{0'} dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'}, \quad (313)$$

waarbij de factor $\partial(\quad)/\partial(\quad)$ de jacobiaan van de transformatie van $\{x^{\alpha'}\}$ naar $\{x^\alpha\}$ is. Dit hadden we reeds besproken in hoofdstuk 4.4 en er geldt

$$\frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}} & \frac{\partial x^0}{\partial x^{1'}} & \cdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{0'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \cdots \\ \frac{\partial x^2}{\partial x^{0'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \cdots \\ \frac{\partial x^3}{\partial x^{0'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} & \cdots \end{pmatrix} = \det(\Lambda^\alpha_{\beta'}). \quad (314)$$

De berekening van deze determinant is nogal omslachtig en het kan eenvoudiger door te beseffen dat in termen van matrices de transformatie van de componenten van de metriek gegeven wordt door de vergelijking $(g) = (\Lambda)(\eta)(\Lambda)^T$, waarbij met ‘ T ’ transponeren bedoeld wordt. Dan voldoen de determinanten aan $\det(g) = \det(\Lambda)\det(\eta)\det(\Lambda^T)$. Voor elke matrix geldt $\det(\Lambda) = \det(\Lambda^T)$ en verder hebben we $\det(\eta) = -1$. Hiermee vinden we dan $\det(g) = -[\det(\Lambda)]^2$. We gebruiken de notatie

$$g \equiv \det(g_{\alpha'\beta'}) \quad \rightarrow \quad \det(\Lambda^\alpha_{\beta'}) = (-g)^{\frac{1}{2}} \quad (315)$$

en vinden

$$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \det[-(g_{\alpha'\beta'})]^{\frac{1}{2}} dx^{0'} dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'} = (-g)^{\frac{1}{2}} dx^{0'} dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'}. \quad (316)$$

Het is belangrijk om goed de redenering te begrijpen die we gevolgd hebben om tot bovenstaand resultaat te komen. We zijn gestart in een speciaal coördinatenstelsel, het LLF, en hierin geldt de minkowskimetriek. Vervolgens hebben we het resultaat gegeneraliseerd naar algemene coördinatenstelsels.

7.2 Tensoren en covariante afgeleide

Stel we hebben een tensorveld $\mathbf{T}(_, _, _)$ met rang 3. Dit veld is een functie van lokatie en definieert een tensor op elk punt $\mathcal{P}$. We kunnen deze tensor expanderen in de basis $\{\vec{e}_\alpha\}$ en dat geeft de (boven-) componenten $T^{\alpha\beta\gamma}$. In het algemeen hebben we 64 termen voor ruimtetijd. We kunnen de tensor $\mathbf{T}$ echter ook expanderen in de duale basis $\{\vec{e}^\alpha\}$ en er geldt

$$\mathbf{T}(_, _, _) \equiv T^{\alpha\beta\gamma} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta \otimes \vec{e}_\gamma = T_{\alpha\beta}{}^\gamma \vec{e}^\alpha \otimes \vec{e}^\beta \otimes \vec{e}_\gamma. \quad (317)$$

Als we de waarden van de componenten willen berekenen dan wordt het volgende theorema gebruikt,

$$T^{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{T}(\vec{e}^\alpha, \vec{e}^\beta, \vec{e}^\gamma) \quad \text{en} \quad T_{\mu\nu}{}^\gamma = \mathbf{T}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu, \vec{e}^\gamma). \quad (318)$$

Als we de componenten van de tensor $\mathbf{T}$ in een of andere rangschikking van boven- en benedenindices hebben, en we willen de componenten weten in een andere rangschikking van indices, dan wordt de metriek gebruikt. Er geldt

$$T_{\mu\nu}{}^\gamma = T^{\alpha\beta\gamma} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \quad \text{en bijvoorbeeld ook} \quad T^{\alpha\beta\gamma} = g^{\alpha\rho} T_\rho{}^{\beta\gamma} \quad (319)$$

Vervolgens willen we contractie bespreken. Dat is nogal ingewikkeld om te behandelen in onze abstracte notatie. Gegeven een tensor $\mathbf{R}$, kunnen we deze altijd schrijven in termen van een basis van vectoren als

$$\mathbf{R}(_, _, _, _) = \vec{A} \otimes \vec{B} \otimes \vec{C} \otimes \vec{D} + \dots \quad (320)$$

We bespreken contractie alleen voor een tensorproduct van vectoren en gebruiken lineariteit om een wiskundige beschrijving voor algemene tensoren te vinden. Voor contractie $\mathbb{C}_{13}$ van de eerste met de derde index geldt

$$\mathbb{C}_{13} [\vec{A} \otimes \vec{B} \otimes \vec{C} \otimes \vec{D}(_, _, _, _)] \equiv (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} \otimes \vec{D}(_, _). \quad (321)$$

We kunnen bovenstaande abstracte definitie in termen van componenten schrijven en vinden

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = A^\mu C^\nu \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu = A^\mu C^\nu g_{\mu\nu} = A^\mu C_\mu \rightarrow \mathbb{C}_{13} \mathbf{R} = R^{\mu\beta}{}_\mu{}^\delta \vec{B} \times \vec{D}. \quad (322)$$

Op dezelfde manier als hierboven, zien we dat we uit twee vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$ een tensor $\vec{A} \times \vec{B}$ kunnen construeren door er het tensorproduct van te nemen, terwijl we een scalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ kunnen maken door het inproduct te nemen. De contractie van het tensorproduct $\vec{A} \otimes \vec{B}$ levert weer een scalar op, $\mathbb{C} [\vec{A} \otimes \vec{B}] = \vec{A} \cdot \vec{B}$.

Vanaf nu gaan we een vergelijking als $R^{\mu\beta}{}_\mu{}^\delta$ vanuit een ander gezichtspunt bekijken. We hebben het steeds gezien als de componenten van een tensor. Vanaf nu is onze interpretatie dat de indices μ, β, μ en δ labels zijn van de sleuven van de abstracte tensor $\mathbf{R}$. Dus met $R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ bedoelen we de abstracte tensor $\mathbf{R}(_, _, _, _)$ met eerste sleuf α , tweede sleuf β , enz.

Het bovenstaande rondt onze discussie over tensoralgebra af. In het volgende gaan we tensoranalyse bespreken. Dit doen we aan de hand van een tensorveld $\mathbf{T}(_, _)$ met rang 2, maar wat we concluderen is geldig voor elk tensorveld. Het veld $\mathbf{T}$ is een functie van lokatie in de variëteit, $\mathbf{T}(\mathcal{P})$. We differentiëren $\mathbf{T}$ nu langs de curve $\mathcal{P}(\lambda)$. Op punt $\mathcal{P}$ wordt de raakvector $\vec{A}$ aan de curve gegeven door $\vec{A} = \frac{d\mathcal{P}}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}$. De afgeleide van $\mathbf{T}$ langs de curve (dus in de richting van vector $\vec{A}$) wordt gegeven door

$$\nabla_{\vec{A}} \mathbf{T} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{[\mathbf{T}(\mathcal{P}(\lambda + \Delta\lambda))]^\parallel - \mathbf{T}(\mathcal{P}(\lambda))}{\Delta\lambda}. \quad (323)$$

Merk op dat de twee tensoren, $\mathbf{T}(\mathcal{P}(\lambda + \Delta\lambda))$ en $\mathbf{T}(\mathcal{P}(\lambda))$, in twee verschillende raakruimten leven. Ze zijn bijna hetzelfde, omdat $\Delta\lambda$ klein is, maar desalniettemin zijn het verschillende raakruimten. We hebben een manier nodig om de tensor $\mathbf{T}(\mathcal{P}(\lambda + \Delta\lambda))$ naar punt $\mathcal{P}$ te transporteren, waar we de afgeleide willen bepalen, zodat we de tensoren kunnen aftrekken. Wat we nodig hebben wordt *parallel transporteren* van $\mathbf{T}(\mathcal{P}(\lambda + \Delta\lambda))$ genoemd.

In een gekromde variëteit zien we de effecten van kromming niet als we eerste-orde afgeleiden nemen⁶⁶. Het parallel transporteren betekent dan hetzelfde als wat het betekent in een vlakke

⁶⁶We kunnen altijd een lokaal lorentzframe construeren, dat voldoende vlak is voor wat wij willen. In dat systeem zijn de basisvectoren constant en hun afgeleiden nul in punt $\mathcal{P}$. Dit is een *definitie* voor de covariante afgeleide. Deze definitie leidt er onmiddellijk toe dat de christoffelsymbolen gelijk zijn aan nul en dat in het LLF geldt $V^\alpha_{;\beta} = V^\alpha_{,\beta}$ op punt $\mathcal{P}$. Dit is natuurlijk waar voor elke tensor en ook voor de metriek, $g_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} = 0$ op punt $\mathcal{P}$. Omdat de vergelijking $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$ een tensorvergelijking is, is hij geldig in *elke* basis. Gegeven dat $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\alpha}$, vinden we weer dat voor elke metriek dient te gelden

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu;\nu} + g_{\beta\nu;\mu} - g_{\mu\nu;\beta}). \quad (324)$$

Dus terwijl $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0$ op $\mathcal{P}$ in het LLF, geldt dat niet voor de afgeleiden ervan, want die bevatten $g_{\alpha\beta,\gamma\mu}$. Dus de christoffelsymbolen zijn dan wel nul op punt $\mathcal{P}$ als we een LLF kiezen, maar verschillen in het algemeen van nul in de omgeving van dit punt. Het verschil tussen een gekromde en een vlakke variëteit manifesteert zich dus in de afgeleiden van de christoffelsymbolen.

ruimte: de componenten veranderen niet door het transporteren. We hebben dus met vergelijking (323) een uitdrukking voor de afgeleide gevonden. De originele tensor $\mathbf{T}(_, _)$ heeft twee sleuven, en dat is ook zo voor de afgeleide $\nabla_{\vec{A}}\mathbf{T}(_, _)$, want volgens vergelijking (323) is de afgeleide niets anders dan het verschil van twee tensoren $\mathbf{T}$ op verschillende punten, en dan gedeeld door de afstand $\Delta\lambda$.

Als volgende stap kunnen we nu het concept gradiënt invoeren. We merken op dat de afgeleide $\nabla_{\vec{A}}\mathbf{T}(_, _)$ lineair is in de vector $\vec{A}$. Dat betekent dat er een rang-3 tensor $\nabla\mathbf{T}(_, _, \vec{A})$ bestaat, zodanig, dat geldt

$$\nabla_{\vec{A}}\mathbf{T}(_, _) \equiv \nabla\mathbf{T}(_, _, \vec{A}). \quad (325)$$

Dit is de definitie van de gradiënt van $\mathbf{T}$. Het laatste slot wordt per conventie gebruikt als het differentiatieslot. De gradiënt van $\mathbf{T}$ is een lineaire functie van vectoren en heeft één sleuf meer dan $\mathbf{T}$ zelf, en heeft verder de eigenschap dat als je $\vec{A}$ in de laatste sleuf stopt, je de afgeleide van $\mathbf{T}$ krijgt in de richting van $\vec{A}$. We definiëren de componenten van de gradiënt als

$$\nabla\mathbf{T} \equiv T^{\alpha\beta}_{;\mu} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta \otimes \vec{e}^\mu. \quad (326)$$

Het is een conventie om de differentiatie index beneden te plaatsen. Merk verder op dat je deze differentiatie index naar boven of beneden kunt halen net als elke andere index. Verder correspondeert alles dat na de puntkomma komt met een gradiënt. De componenten van de gradiënt zijn in dit geval $T^{\alpha\beta}_{;\mu}$.

Hoe berekenen we de componenten van een gradiënt? Het gereedschap hiervoor zijn de zogenaamde *connectie coëfficiënten*⁶⁷. Die coëfficiënten worden zo genoemd, omdat bij het nemen van de afgeleide we het tensorveld in twee verschillende raakruimten moeten vergelijken. De connectie coëfficiënten geven ons informatie over hoe de basisvectoren veranderen tussen beide naburige raakruimten. Omdat we een basis hebben in punt $\mathcal{P}$, kunnen we ons afvragen wat de afgeleide is van $\vec{e}_\alpha$ in de richting van $\vec{e}_\mu$. Er geldt

$$\nabla_{\vec{e}_\mu}\vec{e}_\alpha \equiv \Gamma^\rho_{\alpha\mu}\vec{e}_\rho. \quad (327)$$

Deze afgeleide is zelf ook een vector en we kunnen deze dus expanderen in onze basis op punt $\mathcal{P}$ waar we de afgeleide willen weten. De expansiecoëfficiënten zijn $\Gamma^\rho_{\alpha\mu}\vec{e}_\rho$. Evenzo geldt

$$\nabla_{\vec{e}_\mu}\vec{e}^\rho = -\Gamma^\rho_{\sigma\mu}\vec{e}^\sigma. \quad (328)$$

Merk op dat we nu een minteken krijgen! De connectie coëfficiënten vertellen je hoe de basisvectoren van plaats tot plaats veranderen. Dus als je de componenten van een gradiënt wilt weten, bijvoorbeeld $T^{\alpha\beta}_{;\gamma}$, dan moet je correcties maken voor het feit dat de basisvectoren veranderen. De tensor $\mathbf{T}^{\alpha\beta}$ is zelf misschien constant en alleen de basisvectoren hangen van de positie af. Het blijkt dat (zie ook vergelijking (285))

$$T^{\alpha}_{\beta;\gamma} = T^{\alpha}_{\beta,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}T^{\mu}_{\beta} - \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}T^{\alpha}_{\mu}, \quad \text{waarbij} \quad T^{\alpha}_{\beta,\gamma} = \partial_{\vec{e}_\gamma}T^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma}T^{\alpha}_{\beta}. \quad (329)$$

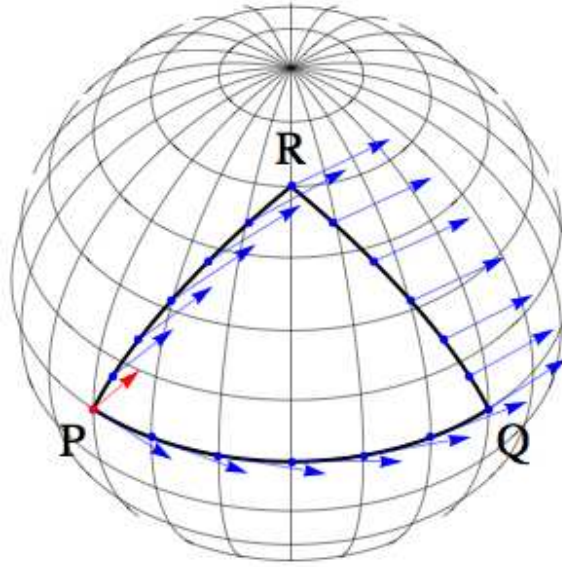
Als we de metriek $\mathbf{g}$ kennen, dan kunnen we de christoffelsymbolen uitrekenen, en daarmee alle covariante afgeleiden. Hiermee vinden we tenslotte weer de vergelijkingen

$$\begin{aligned} V^{\alpha}_{;\beta} &= V^{\alpha}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}V^{\mu}, \\ \mathcal{P}^{\alpha}_{\beta;\gamma} &= \mathcal{P}^{\alpha}_{\beta,\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\mathcal{P}_{\mu\gamma}, \\ T^{\alpha\beta}_{;\gamma} &= T^{\alpha\beta}_{,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}T^{\mu\beta} + \Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}T^{\alpha\mu}. \end{aligned} \quad (330)$$

⁶⁷Deze staan ook bekend als de christoffelsymbolen.

7.3 Geodeten en kromming

Als we sferische coördinaten aanbrengen op een bol, en we volgen twee lijnen, die loodrecht op de evenaar staan, in de richting van de noordpool, dan zien we dat de initieel parallelle lijnen een snijpunt hebben op het gekromde oppervlak. Het vijfde postulaat van Euclides geldt dus niet in een gekromde ruimte: parallelle lijnen kunnen wel degelijk een snijpunt hebben.



Figuur 48: Parallel transporteren van een vector $\vec{V}$ rond een driehoekig traject $PQRP$ uitgezet op een bol. Door $\vec{V}$ te transporteren over de lus $PQRP$ verkrijgt de eindvector een rotatie ten opzichte van de beginvector. De rotatiehoek is afhankelijk van de grootte van de lus, de gekozen weg, en de kromming van de variëteit.

Een andere illustratie van hoe kromming zich manifesteert, en die misschien nog doeltreffender is, wordt gegeven in Fig. 48. We beginnen in punt P met een raakvector die in de horizontale richting wijst. We nemen een kleine stap in de richting van Q en na elke stap projecteren we de raakvector weer op het lokale raakvlak. Dit is onze manier van parallel transporteren. Nadat we het gesloten traject $PQRP$ hebben volbracht, zien we dat de eindvector niet meer parallel is aan de initiële vector. Dit gebeurt niet in een vlakke ruimte en is een effect van de kromming van de bol. De consequentie is dat we op een gekromde variëteit geen globale parallelle vectorvelden kunnen definiëren. Het resultaat van parallel transporteren hangt af van de gekozen weg en van de grootte van de lus.

Teneinde een wiskundige beschrijving te vinden, vatten we het interval PQ in Fig. 48 op als een curve, en stellen we dat λ de parameter is van deze curve. Het vectorveld $\vec{V}$ is gedefinieerd op elk punt van de curve. De vector $\vec{U} = d\vec{x}/d\lambda$ is de raakvector aan de curve. Parallel transporteren betekent dat in een lokaal inertiaal coördinatensysteem op punt $\mathcal{P}$ de componenten van $\vec{V}$ constant moeten zijn langs de curve. Er geldt

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = U^\beta V^\alpha_{;\beta} = U^\beta V^\alpha_{;\beta} = 0 \quad \text{op punt } \mathcal{P}. \quad (331)$$

De eerste gelijkheid is de definitie van de afgeleide van een functie (in dit geval V^α) langs de curve, de tweede gelijkheid komt van het feit dat $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0$ op punt $\mathcal{P}$ in deze coördinaten. De derde gelijkheid is echter een frame-onafhankelijke uitdrukking en die is geldig in elke basis. We

nemen dit als de coördinatenstelsel onafhankelijke definitie van het parallelle transport van $\vec{V}$ langs $\vec{U}$. Een vector $\vec{V}$ wordt dus parallel getransporteerd langs een curve met parameter λ als geldt

$$U^\beta V^\alpha_{;\beta} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{d}{d\lambda} \vec{V} = \nabla_{\vec{U}} \vec{V} = 0. \quad (332)$$

De laatste stap maakt gebruik van de notatie voor de richtingsafgeleide langs $\vec{U}$.

De belangrijkste curven in een gekromde ruimte zijn de *geodeten*. Geodeten zijn lijnen die (zo recht als mogelijk is) zijn getrokken, met als voorwaarde dat de raakvectoren $\vec{U}$ van deze lijnen parallel getransporteerd worden. Voor een geodeet geldt dus

$$\nabla_{\vec{U}} \vec{U} = 0. \quad (333)$$

Merk op dat in een LLF deze lijnen inderdaad recht zijn. Voor de componenten geldt

$$U^\beta U^\alpha_{;\beta} = U^\beta U^\alpha_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} U^\mu U^\beta = 0. \quad (334)$$

Als λ de parameter van de curve is, dan geldt $U^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ en $U^\beta \partial/\partial x^\beta = d/d\lambda$. Hiermee vinden we

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (335)$$

Omdat de christoffelsymbolen bekende functies van de coördinaten $\{x^\alpha\}$ zijn, is dit een verzameling niet-lineaire tweede-orde differentiaalvergelijkingen voor $x^\alpha(\lambda)$. Deze heeft een unieke oplossing als de initiële condities voor $\lambda = \lambda_0$ worden gegeven: $x_0^\alpha = x^\alpha(\lambda_0)$ en $U_0^\alpha = (dx^\alpha/d\lambda)_{\lambda_0}$. Dus door het geven van een beginpositie (x_0^α) en een beginsnelheid (U_0^α), verkrijgen we een unieke geodeet.

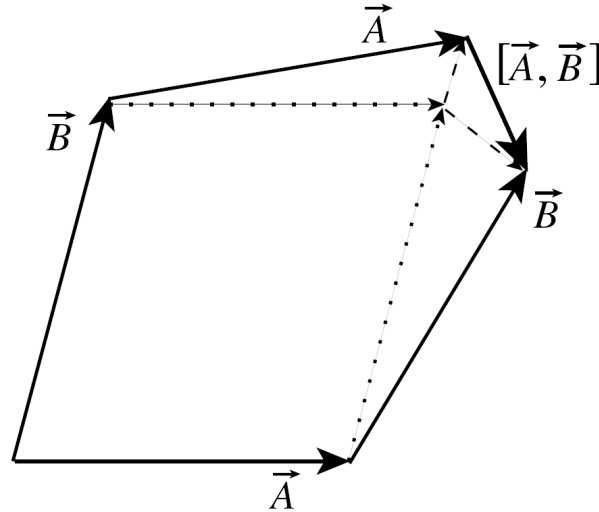
Door de parameter λ te veranderen, veranderen we wiskundig de curve (maar niet het pad). Als λ een parameter van de geodeet is, en we definiëren een nieuwe parameter $\phi = a\lambda + b$, met a en b constanten, die dus niet van de positie op de curve afhangen, dan geldt voor ϕ ook

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\phi^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \frac{dx^\mu}{d\phi} \frac{dx^\beta}{d\phi} = 0. \quad (336)$$

Alleen lineaire transformaties van λ geven nieuwe parameters die voldoen aan de geodetenvergelijking. We noemen de parameters λ en ϕ *affine* parameters. Tenslotte merken we op dat een geodeet ook een curve is met een extreme lengte (minimale lengte tussen twee punten). We kunnen de vergelijking voor een geodeet dus ook vinden met de Euler-Lagrange vergelijkingen. Hierbij gaan we uit van vergelijking (203), waarbij we de minkowskimetrisiek $\eta_{\mu\nu}$ vervangen door $g_{\mu\nu}$. Ook kunnen we aantonen dat de lengte ds langs de curve een affine parameter is.

7.4 Kromming en de riemanntensor

In Fig. 49 tonen we twee vectorenvelden $\vec{A}$ en $\vec{B}$. De vectoren zijn zó klein, dat de kromming van de variëteit geen rol speelt in het gebied waar dit diagram getekend is. We kunnen daarmee aannemen dat de vectoren op het oppervlak liggen in plaats van in de raakruimte. Teneinde de commutator $[\vec{A}, \vec{B}]$ uit te kunnen rekenen, gebruiken we een lokaal orthonormaal coördinatenstelsel. Omdat we een vector kunnen opvatten als een richtingsafgeleide, stelt $A^\alpha \partial B^\beta / \partial x^\alpha$ de grootte voor waarmee de vector $\vec{B}$ verandert als die langs $\vec{A}$ verplaatst wordt (dat is de korte gestreepte lijn rechtsboven in Fig 49). Evenzo is $B^\alpha \partial A^\beta / \partial x^\alpha$ de verandering van $\vec{A}$ als die



Figuur 49: De commutator $[\vec{A}, \vec{B}]$ van twee vectorvelden. We nemen aan dat de vectoren klein zijn, zodat de kromming het toelaat dat ze in de variëteit liggen.

langs $\vec{B}$ verplaatst wordt (dat is de andere korte gestreepte lijn). Voor de componenten van de commutator in een coördinatenstelsel geldt

$$[\vec{A}, \vec{B}] = \left[A^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, B^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right] = \left(A^\alpha \frac{\partial B^\beta}{\partial x^\alpha} - B^\alpha \frac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial x^\beta}. \quad (337)$$

Volgens bovenstaande vergelijking is de commutator $[\vec{A}, \vec{B}]$ het verschil van de twee gestreepte lijnen in Fig. 49. Het is het vijfde lijnsegment dat nodig is om de vierhoek te sluiten (dat is de geometrische betekenis van de commutator). Vergelijking (337) is een operatorvergelijking, waarbij de uiteindelijke afgeleide opereert op een scalaïrveld (net als in de quantummechanica). We vinden hiermee meteen de componenten van de commutator in een willekeurig coördinatenstelsel: $A^\alpha B^\beta_{,\alpha} - B^\alpha A^\beta_{,\alpha}$. De commutator is nuttig om onderscheid te kunnen maken tussen een coördinatenbasis en een niet-coördinatenbasis (ook wel niet-holonomische basis genoemd)⁶⁸.

In de discussie die leidde tot vergelijking (310), zagen we dat de effecten van kromming merkbaar worden als we tweede-orde afgeleiden (of gradiënten) nemen van de metriek. De krommingstensor van Riemann is een maat voor het falen van dubbele gradiënten om te sluiten. Neem een vectorveld $\vec{A}$ en neem er de dubbele gradiënten van. Dan vinden we

$$A_{\alpha;\mu\nu} - A_{\alpha;\nu\mu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] A_\alpha \equiv R^\beta_{\alpha\mu\nu} A_\beta. \quad (338)$$

Deze vergelijking kan gezien worden als de definitie van de riemanntensor. De riemanntensor geeft de commutator van covariante afgeleiden. Dit betekent dat we in gekromde ruimtetijd voorzichtig moeten zijn met de volgorde waarin we covariante afgeleiden nemen: ze commuteren namelijk niet. We kunnen vergelijking (784) uitwerken door te beginnen met de definitie van de covariante afgeleide,

$$A_{\alpha;\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} (A_{\alpha;\mu}) - \Gamma^\beta_{\alpha\nu} (A_{\beta;\mu}) - \Gamma^\beta_{\mu\nu} (A_{\alpha;\beta}) \quad \text{en} \quad A_{\alpha;\mu} = A_{\alpha,\mu} - \Gamma^\beta_{\alpha\mu} A_\beta. \quad (339)$$

⁶⁸In een coördinatenbasis worden de basisvectoren gegeven door de partiële afgeleiden, $\vec{e}_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$, en omdat partiële afgeleiden commuteren, moet gelden $[\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta] = 0$. In een niet-coördinatenbasis geldt $[\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu] = C^\alpha_{\mu\nu} \vec{e}_\alpha$, met $C^\alpha_{\mu\nu}$ de zogenaamde commutatie coëfficiënten. Een coördinatenbasis is handig voor het doen van berekeningen, terwijl een niet-coördinatenbasis nuttig kan zijn voor de interpretatie van gegevens.

We dienen nu een en ander te differentiëren, indices te manipuleren, etc. Uiteindelijk vinden we

$$A_{\alpha;\mu\nu} - A_{\alpha;\nu\mu} = \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\gamma} \Gamma_{\gamma\mu}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\gamma} \Gamma_{\gamma\nu}^{\beta} \right) V_{\beta} = R^{\beta}_{\alpha\mu\nu} V_{\beta}. \quad (340)$$

De riemanntensor vertelt ons hoe een vectorveld verandert langs een gesloten pad. We kunnen vergelijking (324) gebruiken om de riemanntensor in een LLF te schrijven als

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu}). \quad (341)$$

We zien dat de metrische tensor $\mathbf{g}$ de informatie over de intrinsieke kromming bevat⁶⁹. Deze kromming wordt manifest als we tweede-orde afgeleiden van de metriek nemen. Met $R_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv g_{\alpha\lambda} R^{\lambda}_{\beta\mu\nu}$ en bovenstaande relatie, kunnen we een aantal belangrijke eigenschappen van de riemanntensor bewijzen. De riemanntensor is

- antisymmetrisch in de laatste twee indices. Er geldt

$$\mathbf{R}(_, _, \vec{A}, \vec{B}) = -\mathbf{R}(_, _, \vec{B}, \vec{A}) \quad \text{of} \quad R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha}. \quad (342)$$

- Antisymmetrisch in de eerste twee indices. Er geldt

$$\mathbf{R}(\vec{A}, \vec{B}, _, _) = -\mathbf{R}(\vec{B}, \vec{A}, _, _) \quad \text{of} \quad R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}. \quad (343)$$

- De tensor is symmetrisch.

$$\mathbf{R}(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}) = \mathbf{R}(\vec{C}, \vec{D}, \vec{A}, \vec{B}) \quad \text{of} \quad R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\nu\mu}. \quad (344)$$

- Er gelden de zogenaamde Bianchi identiteiten,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\epsilon} + R_{\alpha\beta\delta\epsilon;\gamma} + R_{\alpha\beta\epsilon\gamma;\delta} = 0, \quad (345)$$

waarbij we steeds de laatste drie indices permuteren.

Bovenstaande symmetrieën reduceren de $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ componenten van de riemanntensor tot 20.

De krommingstensor van Ricci (riccitensor) is gedefinieerd als de contractie van de riemanntensor. Er geldt

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^{\mu}_{\alpha\mu\beta}. \quad (346)$$

Bijvoorbeeld in het geval van het aardoppervlak bevat deze tensor ook de informatie over de kromming, maar dan als de riemanntensor geïntegreerd over de hoeken. Verder kan men laten zien dat de riccitensor symmetrisch is. Tenslotte hebben we nog de scalaire kromming, de riccikromming, gedefinieerd door

$$R = R^{\alpha}_{\alpha}. \quad (347)$$

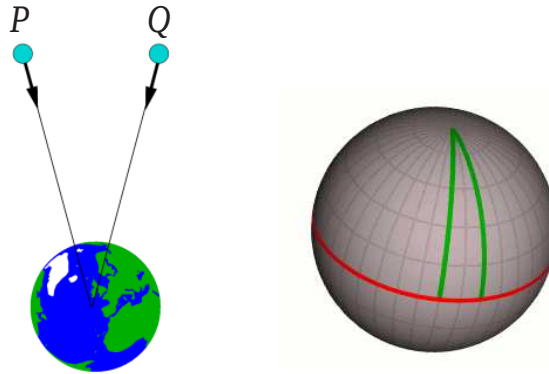
We hebben nu de tensoren gedefinieerd, die we nodig hebben voor de beschrijving van fenomenen in de algemene relativiteitstheorie. Er is een formidabel wiskundig apparaat opgetuigd en we gaan dat nu eerst gebruiken om de veldvergelijkingen (de zogenaamde einsteinvergelijkingen) van de ART te poneren. We maken een en ander aannemelijk door een analogie met de newtoniaanse beschrijving.

⁶⁹Behalve intrinsieke kromming kan een variëteit ook een extrinsieke kromming hebben. Neem bijvoorbeeld een blad papier dat geen intrinsieke kromming heeft, en rol het op tot een cilinder. Deze cilinder heeft extrinsieke kromming en die beschrijft de inbedding van het vlakke blad papier in de 3D ruimte. De ART zegt niets over de hogere ruimten waarin ruimtetijd kan zijn ingebed. De ART geeft een beschrijving van kromming binnen de variëteit zelf en dat is de intrinsieke kromming van ruimtetijd.

7.5 Newtoniaanse beschrijving van getijdenkrachten

We proberen een maat te vinden voor de kromming van ruimtetijd. Hiertoe laten we een testdeeltje vrij vallen. Wij besluiten als waarnemer⁷⁰ om met dit deeltje mee te vallen (LLF) en zien dat het deeltje langs een rechte lijn in ruimtetijd beweegt (alleen in de tijdrichting). Er is niets in de beweging van een enkel deeltje dat kromming verradert. Met name in het vrij vallende coördinatenstelsel blijft het deeltje in rust. Eén deeltje is onvoldoende om de effecten van kromming te ontdekken.

Vervolgens laten we twee deeltjes vallen. We gaan de getijdenkracht op aarde bekijken vanuit het perspectief van waarnemers die vrij vallen (LLF) samen met de deeltjes. Dergelijke waarnemers vallen in een rechte lijn naar het centrum van de aarde. Fig. 50 geeft de situatie voor twee vrij vallende deeltjes P en Q , en we zien dat beide deeltjes paden volgen die leiden naar het centrum van de aarde. Vanuit het perspectief van een waarnemer die in vrije val is met deze deeltjes, zien



Figuur 50: Links: twee vrij vallende deeltjes bewegen op initieel parallel paden naar het centrum van de aarde. Daar ligt het snijpunt van beide lijnen; rechts: lijnen op het aardoppervlak die initieel parallel zijn bij de evenaar, snijden elkaar bij de noordpool.

we dat de deeltjes naar elkaar toe bewegen. Dit wordt veroorzaakt door de differentiële gravitatieversnelling op de deeltjes en we noemen dit getijdenkrachten. Volgens Newton kruisen de paden ten gevolge van gravitatie, terwijl dit volgens Einstein gebeurt omdat ruimtetijd gekromd is. Wat Newton gravitatie noemt, wordt door Einstein kromming van ruimtetijd genoemd. Gravitatie is een eigenschap van de kromming van ruimtetijd.

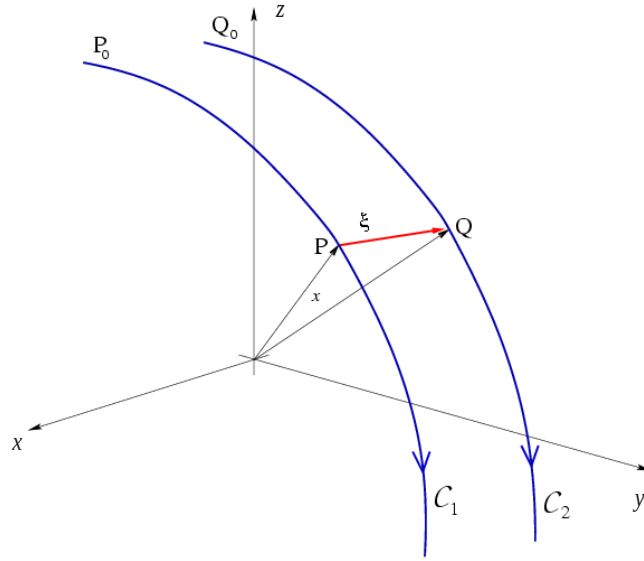
We willen nu een wiskundige beschrijving geven van dit proces, die in overeenstemming is met de wetten van Newton (zie ook hoofdstuk 2.6). Hiertoe beschouwen we Fig. 51. De newtoniaanse bewegingsvergelijkingen (zie vergelijking (15)) voor deeltjes P en Q zijn

$$\left(\frac{d^2 x_j}{dt^2}\right)_{(P)} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^j}\right)_{(P)} \quad \text{en} \quad \left(\frac{d^2 x_j}{dt^2}\right)_{(Q)} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^j}\right)_{(Q)}, \quad (348)$$

met Φ de gravitationele potentiaal. We definiëren $\vec{\xi}$ als de afstand tussen beide deeltjes. Voor parallelle banen zou gelden $\frac{d\vec{\xi}}{dt} = 0$. Met $\vec{\xi} = (x_j)_{(P)} - (x_j)_{(Q)}$ vinden we via een Taylorexpanisie

$$\frac{d^2 \xi_j}{dt^2} = -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k}\right) \xi_k = -\mathcal{E}_{jk} \xi_k \rightarrow \mathcal{E}_{jk} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k}\right), \quad (349)$$

⁷⁰We gaan er voor het gemak vanuit dat wij als waarnemer niet van invloed zijn op het proces. Het belangrijkste is dat we aannemen dat we geen kracht uitoefenen en geen kromming veroorzaken.



Figuur 51: De banen van twee vrij vallende deeltjes in een gravitatieveld Φ . De drievector $\vec{\xi}$ meet de afstand tussen de twee deeltjes en is een functie van de tijd.

en vatten $\mathcal{E}_{jk}$ op als de componenten van de gravitationele getijdentensor $\mathbf{E}$. Merk op dat de metriek voor de 3D Euclidische ruimte gegeven wordt door $\delta_{jk} = \text{diag}(1, 1, 1)$ en dat er dus geen verschil is tussen boven- en benedenindices. Vergelijking (349) wordt de vergelijking van Newtoniaanse geodetische deviatie genoemd.

Volgens Newton bewegen de deeltjes naar elkaar toe en schrijven we

$$\frac{d^2 \vec{\xi}}{dt^2} = -\mathbf{E}(_, \vec{\xi}) \quad (350)$$

in abstracte notatie. Het is interessant dat de veldvergelijking van newtoniaanse gravitatie, vergelijking (18),

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (351)$$

kan worden uitgedrukt in termen van tweede afgeleiden van Φ , die de getijdenversnellingen in vergelijking (349) beschrijven. Er is een analoge connectie in de ART.

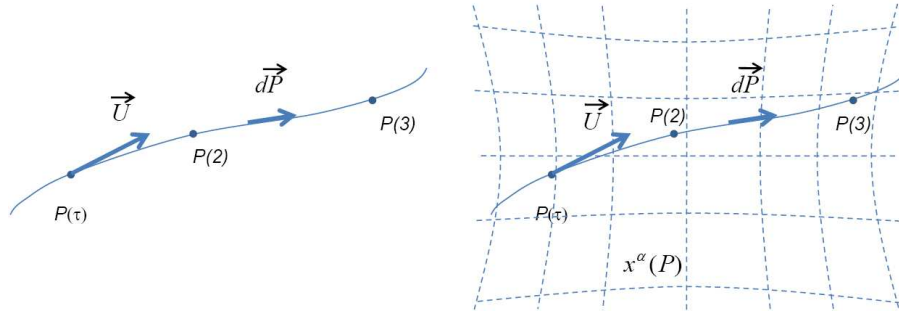
7.6 De einsteinvergelijkingen

We komen nu tot de kern van de ART, de veldvergelijkingen. We zullen proberen de veldvergelijkingen plausibel te maken op een manier die al het voorgaande nog eens samenvat. We beginnen met een beschouwing in Fig. 52 (linker diagram) van de beweging van een deeltje langs een wereldlijn. De wereldlijn is geparametriseerd met de eigentijd τ op een klok die het deeltje met zich mee draagt. We kunnen de positie van het deeltje op een punt van de wereldlijn dus aangeven met $\mathcal{P}(\tau)$. De snelheid $\vec{U}$ is de raakvector aan de curve en wordt gegeven door

$$\vec{U} = \frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}. \quad (352)$$

Voor de snelheid geldt in het LLF op punt $\mathcal{P}$

$$\vec{U}^2 = \frac{d\vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{\mathcal{P}}}{d\tau^2} = \frac{-d\tau^2}{d\tau^2} = -c^2, \quad (353)$$



Figuur 52: Links: de wereldlijn van een deeltje is een curve die geparametriseerd kan worden met de eigentijd τ van het deeltje. De snelheid $\vec{U}$ is de raakvector aan de curve. Rechts: we brengen een coördinatenstelsel $\{x^\alpha\}$ aan. De snelheid $\vec{U}$ heeft nu componenten $U^\alpha = dx^\alpha/d\tau$.

waarbij we de definitie van de metriek hebben gebruikt⁷¹. Omdat deze vergelijking een getal (scalar) oplevert, is dit geldig in elk coördinatenstelsel. We zien dus dat de snelheidsviervector lengte 1 heeft en in de tijdrichting wijst. Merk op dat deze definities geen gebruik maken van een coördinatenstelsel. In het geval dat een coördinatenstelsel aangebracht wordt, geldt voor de componenten van de snelheid

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (354)$$

De componenten zijn dus de afgeleiden van de coördinaten zelf.

Als het deeltje vrij beweegt en er geen andere krachten op werken dan die ten gevolge van de kromming van ruimtetijd, dan moet het in een rechte lijn bewegen. Hiermee bedoelen we zo recht als mogelijk is onder invloed van kromming. Het deeltje dient zijn eigen snelheid parallel te transporteren. Er geldt

$$\nabla_{\vec{U}} \vec{U} = 0, \quad (355)$$

en dat is, zoals we reeds in vergelijking (333) gezien hebben, de abstracte uitdrukking voor een geodeet. Wat dit betekent is dat wanneer we naar een lokaal lorentzframe gaan, de componenten van de viersnelheid constant blijven (en daarom is de richtingsafgeleide gelijk aan nul) als het deeltje slechts een kleine afstand aflegt. We willen nu bekijken hoe de geodetenvergelijking eruit komt te zien als we een willekeurig coördinatenstelsel aanbrengen. Dit is geschetst in het rechterpaneel van Fig. 52. In dit coördinatenstelsel worden de componenten van $\vec{U}$ gegeven door $U^\alpha = dx^\alpha/d\tau$, en kunnen we de geodetenvergelijking schrijven als

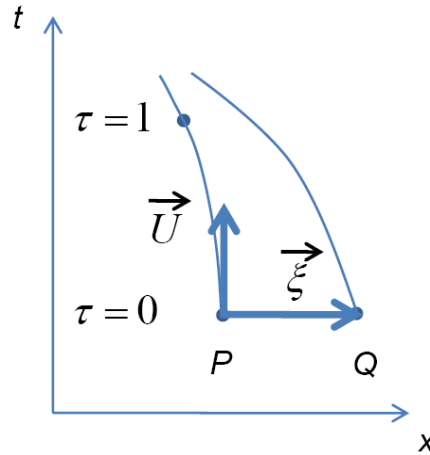
$$U^\alpha_{;\mu} U^\mu = 0 \quad \rightarrow \quad (U^\alpha_{,\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} U^\nu) U^\mu = 0. \quad (356)$$

Merk op dat $U^\alpha_{;\mu}$ de gradiënt is, waarvan we dan het inproduct nemen met de snelheid U^μ om de afgeleide van de snelheid in de richting van de snelheid te vinden. Deze afgeleide stellen we vervolgens gelijk aan nul. In de tweede stap maken we gebruik van de uitdrukking in componenten van de covariante afgeleide. We vermenigvuldigen nu de termen en vinden

$$\underbrace{\underbrace{U^\alpha_{,\mu}}_{\frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\mu}} \underbrace{U^\mu}_{\frac{dx^\mu}{d\tau}} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \underbrace{U^\nu}_{\frac{dx^\nu}{d\tau}} \underbrace{U^\mu}_{\frac{dx^\mu}{d\tau}}}_{\frac{dU^\alpha}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau} \right)} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (357)$$

⁷¹In het LLF komt $\vec{d\vec{P}}$ overeen met $(c\Delta\tau, \vec{0})$, waarbij $\Delta\tau$ de eigentijd is, gemeten met een ideale klok. Er geldt dan dat $\vec{d\vec{P}} \cdot \vec{d\vec{P}} = -(c\Delta\tau)^2$.

Het is belangrijk in te zien dat we zijn uitgegaan van de abstracte tensorvergelijking (355) voor een geodeet. Na het aanbrengen van een willekeurig coördinatenstelsel hebben we deze vergelijking in componenten geschreven en het resultaat is vergelijking (357). Deze laatste geeft vier gewone tweede-orde differentiaalvergelijkingen voor de coördinaten $x^0(\tau)$, $x^1(\tau)$, $x^2(\tau)$ en $x^3(\tau)$. Deze vergelijkingen zijn gekoppeld via de connectiecoëfficiënten. Omdat het tweede-orde differentiaalvergelijkingen zijn, hebben we twee randvoorwaarden nodig, bijvoorbeeld op tijdstip $\tau = 0$ zowel $x^\alpha(\tau = 0)$ als $\frac{dx^\alpha}{d\tau}(\tau = 0) = U^\alpha(0)$. Daarna ligt de wereldlijn van het vrije deeltje (geodeet) vast.



Figuur 53: De wereldlijnen van twee deeltjes P en Q zijn initieel parallel. Door kromming van ruimtetijd bewegen de deeltjes naar elkaar toe. De afstand tussen de deeltjes wordt gegeven door de ruimtelijke vector $\vec{\xi}$.

We bekijken in Fig. 53 de geodetische afstand tussen twee deeltjes P en Q . Dit vormt de aanloop tot de einsteinvergelijkingen. Stel dat we twee deeltjes hebben die op een bepaald tijdstip (dat we voor het gemak als $\tau = 0$ kiezen) in rust zijn ten opzichte van elkaar. We definiëren de separatievector $\vec{\xi}$, die van het ene naar het andere deeltje wijst. Verder heeft deeltje P een snelheid $\vec{U}$. De eis dat de deeltjes aanvankelijk in rust zijn ten opzichte van elkaar, komt neer op $\nabla_{\vec{U}}\vec{\xi} = 0$ op punt $\mathcal{P}$ op tijdstip $\tau = 0$. Verder willen we $\vec{\xi}$ zo definiëren, dat in het LLF van deeltje P de vector $\vec{\xi}$ zuiver ruimtelijk is (dat is een keuze die we mogen maken). Hiermee is $\vec{\xi}$ loodrecht op de snelheid $\vec{U}$. Hij wijst dus in een richting die loodrecht op de tijdrichting staat. Er geldt dan $\vec{U} \cdot \vec{\xi} = 0$ op punt $\mathcal{P}$. Samengevat, eisen we op tijdstip $\tau = 0$

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\vec{U}}\vec{\xi} &= 0 \\ \vec{U} \cdot \vec{\xi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{op punt } \mathcal{P} \quad \text{voor } \tau = 0. \quad (358)$$

De tweede afgeleide $\nabla_{\vec{U}}\nabla_{\vec{U}}\vec{\xi}$ is echter niet gelijk aan nul, want we weten dat de effecten van kromming merkbaar worden als we tweede-orde afgeleiden van de metriek nemen. Dit betekent dat de geodeten van de deeltjes naar elkaar toe worden gedrukt of van elkaar verwijderd raken (naargelang de metriek), naarmate de tijd vordert. Er geldt

$$\nabla_{\vec{U}}\nabla_{\vec{U}}\vec{\xi} = -\mathbf{R}(_, \vec{U}, \vec{\xi}, \vec{U}), \quad (359)$$

met $\mathbf{R}$ de krommingstensor. Deze vergelijking beschrijft hoe twee aanvankelijk parallelle geodeten in de loop der tijd van elkaar beginnen af te wijken ten gevolge van de kromming. De

uitdrukking volgt uit vergelijkingen (330) en (784). De tweede afgeleide $\nabla_{\vec{U}}\nabla_{\vec{U}}\vec{\xi}$ beschrijft de relatieve versnelling van de deeltjes.

In het LLF van deeltje P op tijdstip $\tau = 0$ geldt $U^0 = 1$ en $U^i = 0$. Hiermee verwachten we

$$(\nabla_{\vec{U}}\nabla_{\vec{U}}\vec{\xi})^j = \frac{\partial^2 \xi^j}{\partial t^2} = -R_{\alpha\beta\gamma}^j U^\alpha \xi^\beta U^\gamma = -R_{0k0}^j \xi^k, \quad (360)$$

want de snelheid $\vec{U}$ heeft alleen een tijdcomponent in het LLF van deeltje $\mathcal{P}$, terwijl de separatievektor $\vec{\xi}$ alleen ruimteachtige componenten heeft $k = 1, 2, 3$. In het LLF heeft de vergelijking voor geodetische afwijking de vorm

$$\frac{\partial^2 \xi^j}{\partial t^2} = -R_{0k0}^j \xi^k, \quad (361)$$

terwijl we in de newtoniaanse mechanica gevonden hebben (zie vergelijking (349)) dat

$$\frac{\partial^2 \xi^j}{\partial t^2} = -\mathcal{E}_{jk} \xi^k. \quad (362)$$

In een LLF is het ruimtelijke deel van de metriek cartesisch ($\delta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$) en maakt de plaats van de indices niets uit. Vergelijken geeft dan

$$R_{j0k0} = \mathcal{E}_{jk} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k}. \quad (363)$$

We kunnen een deel van de krommingstensor identificeren met afgeleiden van de newtoniaanse gravitatiepotentiaal. Volgens Newton geldt

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho \quad \rightarrow \quad \Phi_{,jk} \delta^{jk} = \mathcal{E}_{jk} \delta^{jk} = \mathcal{E}^j_j, \quad (364)$$

en we vinden voor het spoor van de gravitationele getijdentensor $\mathcal{E}^j_j = 4\pi G\rho$. Analoog zou je misschien verwachten dat in de algemene relativiteitstheorie zou gelden dat

$$R^j_{0j0} = 4\pi G\rho \quad ? \quad (365)$$

als een eerste gok.

Er is echter een fundamenteel probleem met vergelijking (365). Het dient een uitdrukking te zijn, die niet van het coördinatenstelsel afhangt. Wat we echter gedaan hebben, is het opstellen van de vergelijking in een speciaal stelsel: het LLF. Wat we derhalve dienen te doen, is proberen een relatie tussen tensoren te vinden. Hiertoe merken we op dat in het LLF geldt dat $R_{0000} = 0$ en $R^0_{000} = 0$ ten gevolge van antisymmetrie. Er geldt dus $R^j_{0j0} = 4\pi G\rho \rightarrow R^\mu_{0\mu0} = 4\pi G\rho$. We bevinden ons nog steeds in het LLF (overigens geldt hier $R_{00} = 4\pi G\rho$ met R_{00} de Ricci tensor, maar dat terzijde).

Er is nog een probleem met vergelijking (365): links van het gelijkteken hebben we twee indices en rechts ervan geen enkele. Je zou dus misschien kunnen denken dat geldt

$$R_{\alpha\beta} = 4\pi G T_{\alpha\beta} \quad ? \quad (366)$$

Hierbij is $T_{\alpha\beta}$ de energie-impuls tensor, waarvan $T_{00} = \rho$ (en dat is overigens vaak de dominerende term in het LLF). Einstein maakte deze gok al in 1912, maar hij is fout! Deze vergelijkingen hebben ingebouwde inconsistenties. Het is belangrijk om te begrijpen wat er mis is, en dat komt neer op het volgende. Beschouw de riemannntensor

$$R^\delta_{\alpha\beta\gamma} \approx g_{\alpha\beta,\gamma\delta} + \text{niet lineaire termen.} \quad (367)$$

Als we de eerste en derde index contraheren, krijgen we

$$R_{\alpha\beta} \approx g_{\gamma\alpha,\gamma\beta} + \text{niet lineaire termen.} \quad (368)$$

We zien hiermee dat de voorgestelde vergelijkingen (366) een verzameling vormen van 10 partiële differentiaalvergelijkingen voor de 10 componenten van de metriek $g_{\alpha\beta}$ (want de metriek is symmetrisch in α en β). Ook de Ricci tensor is symmetrisch. Dat lijkt allemaal prima, maar we hebben de vrijheid om zelf het coördinatenstelsel te kiezen waarin we de vergelijkingen gaan opschrijven. We hebben de vrijheid om $x^0(\mathcal{P})$, $x^1(\mathcal{P})$, $x^2(\mathcal{P})$ en $x^3(\mathcal{P})$ te kiezen. We kunnen dat gebruiken om 4 van de 10 componenten van $g_{\alpha\beta}$, zoals gezien als functie van de coördinaten, gelijk te zetten aan wat we willen, bijvoorbeeld $g_{00} = -1$, $g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0$. Echter, onze vergelijkingen (366) staan dit niet toe: 10 partiële differentiaalvergelijkingen voor 10 onbekenden. Wat we nodig hebben, zijn 6 vergelijkingen voor 10 onbekenden.

Voordat we onze speurtocht naar de einsteinvergelijkingen voortzetten, maken we eerst twee opmerkingen. De eerste opmerking heeft te maken met de Bianchi indentiteiten. Dankzij deze indentiteiten $R_{\alpha\beta\gamma\delta;\epsilon} + \dots = 0$ blijkt dat als we de einsteintensor definiëren,

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}, \quad (369)$$

met $R_{\alpha\beta}$ de riccitensor en R de scalaire kromming, dan zorgen de Bianchi indentiteiten ervoor dat de divergentie van de einsteintensor gelijk is aan nul,

$$G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0. \quad (370)$$

De tweede opmerking heeft te maken met de ons bekende behoudswetten voor energie en impuls. In een LLF geldt

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0j}}{\partial x^j} = 0, \\ \frac{\partial T^{j0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{jk}}{\partial x^k} = 0. \end{array} \right. \quad (371)$$

Merk op dat $\frac{\partial T^{0j}}{\partial x^j}$ de ruimtelijke divergentie is en energiebehoud zegt $\partial\rho/\partial t + \text{div}\vec{J} = 0$, met $\vec{J}$ de massa-energieflux. Evenzo is $\frac{\partial T^{j0}}{\partial t}$ de impulsdichtheid en $\frac{\partial T^{jk}}{\partial x^k}$ de impulsflux. Omdat we alleen de eerste afgeleide nemen, is wat geldt in een vlakke ruimte in het LLF, ook geldig voor gekromde ruimtetijd. Hiermee vinden we de tensorvergelijking

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0. \quad (372)$$

Het lijkt redelijk om aan te nemen dat de natuur gekozen heeft voor

$$G^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}. \quad (373)$$

Dit zijn de einsteinvergelijkingen. De evenredigheidsfactor ($8\pi G/c^4$) vinden we door de newtoniaanse limiet te nemen. Voordat we de einsteinvergelijkingen opleggen, weten we al dat

$$G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0 = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}_{;\beta}. \quad (374)$$

Dit zijn 4 vergelijkingen en het zijn de afgeleiden van de einsteinvergelijkingen. Aan deze 4 identiteiten (de divergenties van $G^{\alpha\beta}$ en $T^{\alpha\beta}$ zijn nul) wordt al voldaan. Dit legt 4 beperkingen op aan de einsteinvergelijkingen (ook wel de veldvergelijkingen genoemd) en de veldvergelijkingen geven slechts 6 nieuwe stukken informatie. Dat is precies wat we nodig hebben.

7.7 Zwakke gravitatievelden en de newtoniaanse limiet

Het is duidelijk dat de ART beschrijving van gravitatie in termen van kromming van ruimtetijd reduceert tot de SRT voor lokale lorentzframes. Het is echter belangrijk om expliciet te controleren dat de beschrijving reduceert tot de newtoniaanse beschrijving als we de correcte randvoorwaarden bezien.

Zonder gravitatie heeft ruimtetijd de minkowskimetrik η . Derhalve zullen zwakke gravitatievelden overeenkomen met een geringe kromming van ruimtetijd. We nemen aan dat er coördinaten bestaan, waarin de metrik de volgende vorm heeft,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{met } |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (375)$$

Verder nemen we aan dat in dat coördinatenstelsel de metrik stationair is, waardoor geldt $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$. De wereldlijn van een vrij vallend deeltje wordt gegeven door de geodetische vergelijking

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0. \quad (376)$$

We nemen aan dat het deeltje langzaam beweegt (niet-relativistisch), zodat voor de componenten van de driesnelheid geldt $dx^i/dt \ll c$ ($i = 1, 2, 3$), met t gedefinieerd via $x^0 = ct$. Hiermee eisen we voor $i = 1, 2, 3$

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau}. \quad (377)$$

We mogen de driesnelheid verwaarlozen en vinden

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00} c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (378)$$

We gebruiken vergelijking (782) en vinden

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2} g^{\kappa\mu} (\partial_0 g_{0\kappa} + \partial_0 g_{0\kappa} - \partial_\kappa g_{00}) = -\frac{1}{2} g^{\kappa\mu} \partial_\kappa g_{00} = -\frac{1}{2} \eta^{\kappa\mu} \partial_\kappa h_{00}, \quad (379)$$

waarbij we vergelijking (375) hebben gebruikt. De laatste gelijkheid is geldig tot op eerste orde in $h_{\mu\nu}$. Omdat we hebben aangenomen dat de metrik stationair is geldt

$$\Gamma^0_{00} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j h_{00} \quad \text{met } i = 1, 2, 3. \quad (380)$$

Invullen in vergelijking (378) levert

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \nabla h_{00}. \quad (381)$$

De eerste vergelijking stelt dat $dt/d\tau = \text{constant}$, en hiermee kunnen we de twee uitdrukkingen combineren. Dat geeft de volgende bewegingsvergelijking voor het deeltje,

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2} c^2 \nabla h_{00}. \quad (382)$$

Als we deze uitdrukking vergelijken met de newtoniaanse uitdrukking voor de beweging van een deeltje in een gravitatieveld, formule (15), dan zien we dat beide identiek zijn, als we de

identificatie maken dat $h_{00} = 2\Phi/c^2$. We vinden dat voor een langzaam bewegend deeltje de ART overgaat in de newtoniaanse beschrijving, als de metriek gegeven wordt door

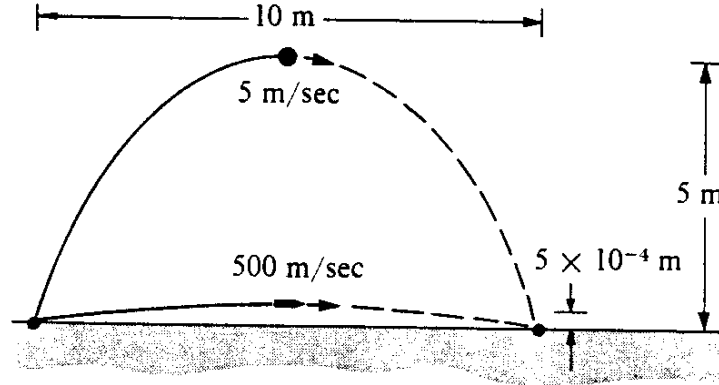
$$g_{00} = 1 + h_{00} = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right). \quad (383)$$

We kunnen een schatting maken van deze correctie op de minkowskimetriek, want $\frac{\Phi}{c^2} = -\frac{GM}{c^2 r}$ en we vinden -10^{-9} aan het aardoppervlak, -10^{-6} aan het oppervlak van de zon, en -10^{-4} aan het oppervlak van een witte dwerg. We zien dat de zwakke-veld limiet een uitstekende benadering is.

Vergelijking (383) toont dat ruimtetijdromming ervoor zorgt dat de tijdcoördinaat t in het algemeen niet de eigentijd meet. Hiertoe nemen we een klok die in rust is op een bepaald punt in ons coördinatensysteem (dan geldt $dx^i/dt = 0$). Het eigentijdinterval $d\tau$ tussen twee tikken van deze klok wordt gegeven door $c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00} c^2 dt^2$, waarmee we vinden

$$d\tau = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt. \quad (384)$$

Dit geeft het interval in eigentijd $d\tau$ dat correspondeert met een interval dt in coördinatentijd voor een stationaire waarnemer in de buurt van een massief object, in een gebied met gravitatie potentiaal Φ . Omdat Φ negatief is, is dit eigentijdinterval korter dan het corresponderende interval voor een stationaire waarnemer op grote afstand van het object, waar $\Phi \rightarrow 0$ en dus $d\tau = dt$. Merk op dat we dit reeds hebben afgeleid uit het equivalentieprincipe; zie vergelijking (9) met $\Phi = gh$.



Figuur 54: Banen van een bal en een kogel door de ruimte. Gezien vanuit een laboratorium hebben de banen een verschillende kromming.

Het ruimtetijdinterval wordt gegeven door

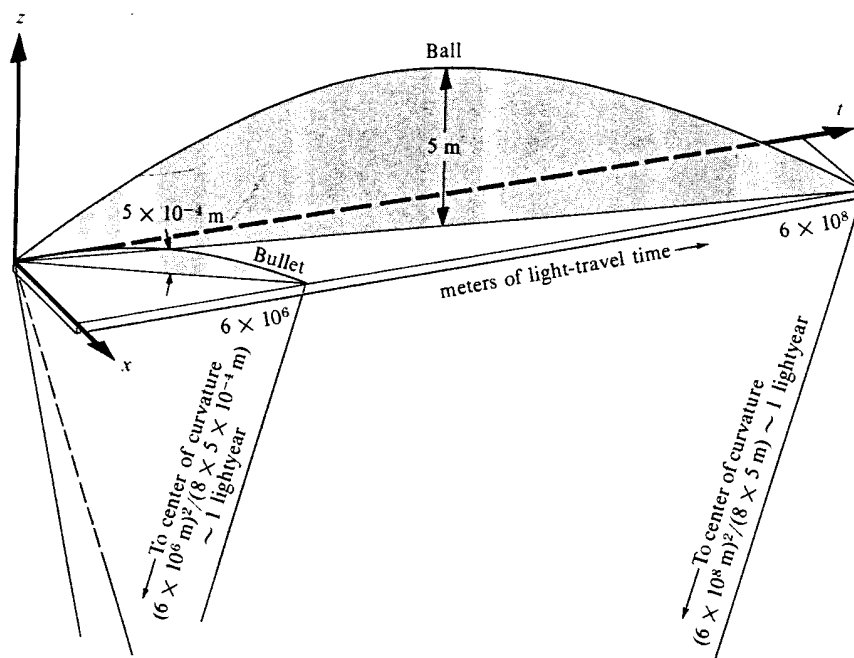
$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) (cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (385)$$

Deze vergelijking beschrijft een geometrie van ruimtetijd waarin deeltjes op geodeten bewegen die precies dezelfde banen volgen als die van deeltjes in een vlakke ruimtetijd waarin de newtoniaanse gravitatiekracht actief is. We hebben hiermee een gekromd ruimtetijdbeeld gevonden voor Newtons gravitatie. De kromming is alleen in de tijdrichting. Kromming in de tijd is niets anders dan de gravitationele roodverschuiving: tijd schrijdt voort met verschillende snelheden op

verschillende plaatsen, derhalve is tijd gekromd. Deze gravitationele roodverschuiving bepaalt volledig de banen van deeltjes in een gravitatieveld. De gehele newtoniaanse gravitatie is alleen tijdskromming.

Wellicht gaat het bovenstaande tegen ons gevoel in. Immers niets lijkt zo vanzelfsprekend als het idee dat gravitatie een manifestatie is van kromming van de ruimte. Kijk bijvoorbeeld naar de banen van twee objecten in de ruimte, zoals getoond in Fig. 54. Een van de objecten is een bal die met een relatief lage snelheid van 5 m/s beweegt en een hoogte bereikt van 5 m. Het andere object is de kogel uit een geweer. Deze kogel beweegt met hoge snelheid (500 m/s). Als we de figuur bekijken, dan lijkt de baan van de bal sterker gekromd dan die van de kogel.

Het punt is echter dat we niet naar een kromming van de ruimte dienen te kijken, maar naar de kromming van ruimtetijd. Hiertoe tekenen we de banen nogmaals in Fig. 55, maar nu in minkowski ruimtetijd. We zien dat nu de banen van de bal en kogel een gelijke kromming hebben in ruimtetijd. In werkelijkheid heeft echter geen van de banen een kromming! Ze zien



Figuur 55: Banen van een bal en een kogel door ruimtetijd. Gezien vanuit een laboratorium hebben de banen dezelfde kromming. We vergelijken de baanlengte ten opzichte van de booglengte van de cirkel: (straal) = (horizontale afstand)² / 8(hoogte).

er gekromd uit omdat we vergeten zijn dat de ruimtetijd waarin ze getekend zijn, zelf gekromd is. De kromming van ruimtetijd is precies zodanig, dat de banen zelf volledig recht zijn: het zijn immers geodeten.

7.8 De zwakke-veld limiet van de einsteinvergelijkingen

De einsteinvergelijkingen (373) stellen dat de einsteintensor evenredig is met de energie-impuls tensor, $G_{\mu\nu} = \text{constante } T_{\mu\nu}$. We willen de evenredigheidsfactor bepalen, door de zwakke-veld limiet te nemen. Hiertoe hoeven we alleen de 00-component te beschouwen. We vinden dan

$$R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} = \text{constante}(T_{00}). \quad (386)$$

In de zwakke-veld limiet is ruimtetijd slechts weinig gekromd en bestaan er coördinaten waarvoor $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ met $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, terwijl de metriek stationair is. Er geldt dus $g_{00} \approx 1$. Verder kunnen we de definitie (340) van de krommingstensor gebruiken om R_{00} te vinden. Er geldt

$$R_{00} = \partial_0 \Gamma_{0\mu}^\mu - \partial_\mu \Gamma_{00}^\mu + \Gamma_{0\mu}^\nu \Gamma_{\nu 0}^\mu - \Gamma_{00}^\nu \Gamma_{\nu\mu}^\mu. \quad (387)$$

In ons coördinatenstelsel zijn de $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ klein, zodat we de laatste twee termen in eerste-orde in $h_{\mu\nu}$ kunnen verwaarlozen. Ook is de metriek stationair in ons coördinatenstelsel, en vinden we

$$R_{00} \approx -\partial_i \Gamma_{00}^i. \quad (388)$$

In onze discussie van de newtoniaanse limiet, hebben we in vergelijking (380) gevonden dat $\Gamma_{00}^i \approx \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j h_{00}$ in eerste-orde in $h_{\mu\nu}$. Dus geldt

$$R_{00} \approx -\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00}. \quad (389)$$

We kunnen nu onze benaderingen voor g_{00} en R_{00} substitueren in vergelijking (386) en vinden in de zwakke-veld limiet

$$\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} \approx \text{constante} \left(T_{00} - \frac{1}{2} T \right). \quad (390)$$

We hebben hierbij gebruikt dat $R = \text{constante } T$ met $T \equiv T^\mu_\mu$, door vergelijking (373) met gemengde componenten te schrijven, $R^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu R = \text{constante } T^\mu_\nu$, en deze te contraheren door $\mu = \nu$ te stellen (merk op dat $\delta^\mu_\mu = 4$).

Om voortgang te kunnen maken, moeten we iets aannemen over de soort materie die het zwakke gravitationele veld produceert. We nemen hiervoor een perfecte vloeistof. Voor de meeste klassieke materieverdelingen geldt $P/c^2 \ll \rho$ en we kunnen de energie-impuls tensor voor stof nemen; zie vergelijking (226). Er geldt

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu, \quad (391)$$

en hiermee vinden we $T = \rho c^2$. Verder nemen we aan dat de deeltjes die de vloeistof vormen, snelheden $\vec{U}$ hebben die in ons coördinatenstelsel klein zijn ten opzichte van c . We doen de aanname $\gamma_U \approx 1$ en dus $U_0 \approx c$. Vergelijking (390) reduceert dan tot

$$\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} \approx \frac{1}{2} \text{constante } \rho c^2. \quad (392)$$

We merken op dat $\delta^{ij} \partial_i \partial_j = \nabla^2$. Verder hebben we met vergelijking (383) $h_{00} = 2\Phi/c^2$, met Φ de gravitatiepotentiaal. Als we de evenredigheidsconstante nu kiezen als $\text{constante} = 8\pi G/c^4$, dan vinden we de poissonvergelijking voor newtoniaanse gravitatie (zie ook vergelijking (18))

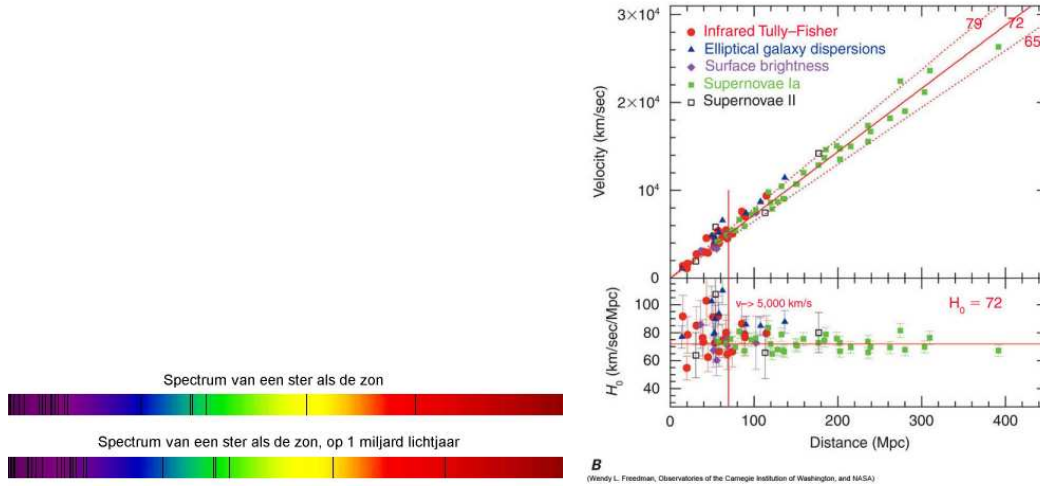
$$\nabla^2 \Phi \approx 4\pi G \rho. \quad (393)$$

Deze identificatie verifieert onze aanname dat de evenredigheidsfactor tussen de einsteintensor en de energie-impuls tensor gelijk is aan $8\pi G/c^4$.

7.9 De kosmologische constante

De einsteinvergelijkingen (373) zijn niet uniek. Einstein ontdekte al snel dat het niet mogelijk bleek om een statisch model van het universum te construeren op basis van de veldvergelijkingen. Deze vergelijkingen geven altijd oplossingen die corresponderen met een expanderend of contraherend heelal. Toen Einstein dit werk in 1916 uitvoerde was alleen onze melkweg bekend,

en dat lijkt op een uniforme verdeling van vaste sterren. Door het invoeren van de kosmologische constante Λ was Einstein in staat om statische modellen van het universum te creëren (maar die blijken allemaal instabiel te zijn). Later werd ingezien dat de melkweg slechts één van de vele sterrenstelsels is, terwijl in 1929 Edwin Hubble de uitdijing van het universum ontdekte. Hij bepaalde de afstanden en roodverschuivingen van nabij gelegen sterrenstelsels en zag dat het universum expandeert; zie Fig. 56. De kosmologische constante bleek niet nodig te zijn. Sterker nog, als Einstein meer vertrouwen had gehad in zijn vergelijkingen, had hij deze expansie van het universum kunnen voorspellen. Tegenwoordig hebben we een andere kijk op deze zaak, maar daarover later meer.



Figuur 56: Links: de snelheid van een sterrenstelsel is te bepalen uit het dopplereffect. De afstand wordt bepaald uit de helderheid van standaardkaarsen; rechts: het blijkt dat sterrenstelsels sneller van ons af bewegen naarmate ze verder weg staan. De hubbleconstante is $H_0 = 72$ km/s/Mpc. Sterrenstelsels bewegen niet door de ruimte, maar drijven als het ware met de expanderende ruimte mee.

Wat Einstein deed was het volgende. We weten dat $\nabla_\mu G_{\mu\nu} = 0$ en ook $\nabla_\mu T_{\mu\nu} = 0$, en we hebben in vergelijkingen (290) en (310) gezien dat ook $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$. We mogen elke constante veelvoud van $g_{\mu\nu}$ optellen bij $G_{\mu\nu}$ en krijgen dan nog steeds een consistente verzameling veldvergelijkingen. Het is gebruikelijk om de evenredigheidsconstante aan te duiden met Λ , en we vinden dan

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (394)$$

waarbij Λ een nieuwe universele natuurconstante is, die we de kosmologische constante noemen. Wat we hiermee opgeven is dat de ‘gemodificeerde einsteintensor’ $G'_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$ niet meer gelijk is aan nul als ruimtetijd vlak is! Verder is $G_{\mu\nu}$ niet meer een rechtstreekse maat voor de kromming.

Door vergelijking (394) weer met gemengde indices te schrijven en te contraheren vinden we $R = \frac{8\pi G}{c^4}T + 4\Lambda$. Invullen in vergelijking (394) levert

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right) + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (395)$$

We volgen nu dezelfde procedure als in hoofdstuk 7.8 en vinden de veldvergelijkingen in de zwakke-veld limiet voor newtoniaanse gravitatie

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho - \Lambda c^2. \quad (396)$$

Voor een sferische massa M vinden we het gravitatieveld

$$\vec{g} = \nabla\Phi = -\frac{3GM}{2r^2}\hat{r} + c^2\Lambda r\hat{r}, \quad (397)$$

en we zien dat de kosmologische term correspondeert met een gravitationele *afstoting*, waarvan de sterkte evenredig met r toeneemt.

Tegenwoordig hebben we een andere kijk op de kosmologische constante. Merk op dat de energie-impuls tensor van een perfecte vloeistof gegeven wordt door

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)U^\mu U^\nu + Pg^{\mu\nu}. \quad (398)$$

We stellen ons voor dat er een bepaalde ‘substantie’ is met een vreemde toestandsvergelijking $P - \rho c^2$. Een dergelijke substantie is iets dat we nog niet zijn tegengekomen, omdat het een negatieve druk heeft! De energie-impuls tensor voor deze substantie is

$$T_{\mu\nu} = -Pg_{\mu\nu} = \rho c^2 g_{\mu\nu}. \quad (399)$$

Hierbij dienen we het volgende op te merken. Allereerst hangt de energie-impuls tensor voor deze vreemde substantie alleen van de metrische tensor af: het is derhalve een eigenschap van het vacuum zelf en we noemen ρ de energiedichtheid van het vacuum. Ten tweede, de vorm van $T_{\mu\nu}$ is hetzelfde als die van de constante kosmologische term in vergelijking (394). We kunnen de kosmologische constante dus zien als een universele constante die de energiedichtheid van het vacuum bepaalt,

$$\rho_{\text{vacuum}}c^2 = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}. \quad (400)$$

Als we de energie-impuls tensor van het vacuum aanduiden met $T_{\mu\nu}^{\text{vacuum}} = \rho_{\text{vacuum}}c^2 g_{\mu\nu}$, kunnen we de gemodificeerde veldvergelijkingen schrijven als

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\text{vacuum}}), \quad (401)$$

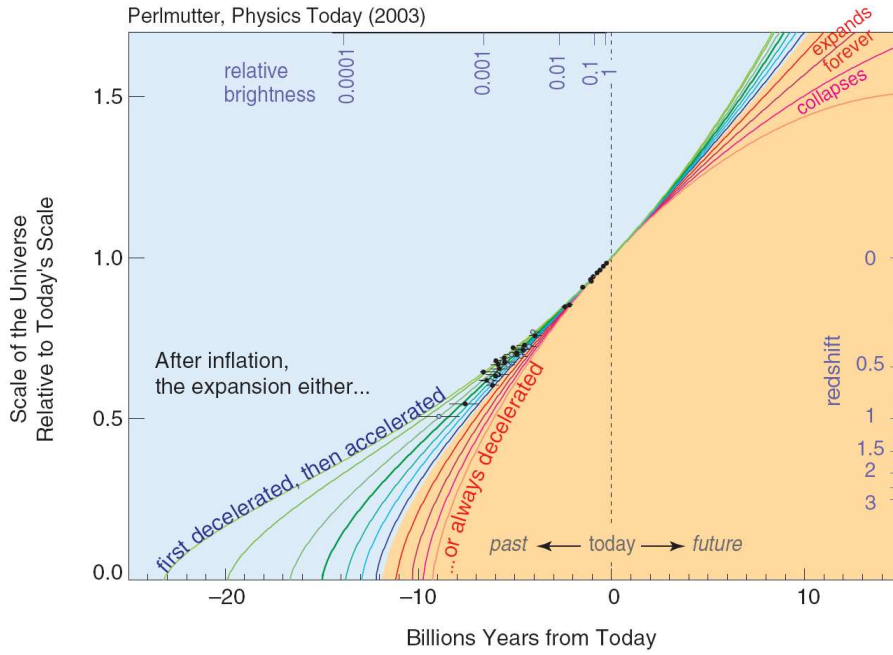
met $T_{\mu\nu}$ de energie-impuls tensor van de aanwezige materie of straling.

Als $\Lambda \neq 0$, dan dient hij op zijn minst zó klein te zijn dat ρ_{vacuum} verwaarloosbare gravitationele effecten heeft ($|\rho_{\text{vacuum}}| < \rho_{\text{materie}}$) voor gevallen waarbij de newtoniaanse gravitatie-theorie een goede beschrijving van de meetgegevens geeft. De systemen met kleinste dichtheid waarop de wetten van Newton worden toegepast, zijn kleine clusters van sterrenstelsels. Hiermee kunnen we de volgende limiet plaatsen

$$|\rho_{\text{vacuum}}c^2| = \left|\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}\right| \leq \rho_{\text{cluster}} \sim 10^{-29} \text{ g/cm}^{-3} \quad (402)$$

op de waarde van de kosmologische parameter. Het is evident dat Λ zó klein is, dat hij volledig onbelangrijk is op de schaal van een ster.

Hoe kunnen we de energiedichtheid van het vacuum berekenen? De eenvoudigste berekeningen sommeren de quantummechanische nulpuntsenergie van alle in de natuur bekende velden. Het antwoord dat gevonden wordt is ongeveer 120 ordes van grootte hoger dan de bovengrens op Λ die we net bepaald hebben. Dit is niet begrepen en er dient een fysisch mechanisme te bestaan dat de kosmologische constante klein maakt. Recente meetgegevens duiden erop dat de kosmologische constante niet precies gelijk is aan nul. De sterkste aanwijzing komt van metingen aan verre Type



Figuur 57: De historie van de expansie van het universum. In het verleden was het effect van de massadichtheid belangrijker dan dat van de kosmologische constante en vertraagde de expansie van het universum. Echter als het volume van het universum toeneemt, dan neemt de dichtheid af. Het effect van de vacuumentergie is constant. Als het volume groot genoeg wordt, dan zal het universum voor altijd expanderen.

Ia supernovae, die zeggen dat de expansie van het universum op dit moment *toeneemt*. Dit wordt getoond in Fig. 57. Zonder kosmologische constante verwachten we dat door de aantrekkende kracht van alle materie in het universum, de expansie zou vertragen en misschien zelfs aanleiding zou geven voor een contractie van het universum. Als de kosmologische constante echter van nul verschilt, kan de negatieve druk van het vacuum ervoor zorgen dat het universum versneld uitdijt.

7.10 Alternatieve relativistische theorieën voor gravitatie

De einsteinvergelijkingen zijn niet uniek, zoals we gezien hebben in de vorige sectie. Het is ook mogelijk om radicaal nieuwe gravitatie theorieën te construeren. We bespreken in het volgende een aantal.

7.10.1 Scalaire gravitatie theorieën

In de newtoniaanse beschrijving van gravitatie wordt het gravitatieveld voorgesteld door de scalar Φ . Dit veld voldoet aan de poissonvergelijking $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$. Omdat materie relativistisch wordt beschreven door de energie-impuls tensor $T_{\mu\nu}$, is de enige scalar met de dimensie massadichtheid die we kunnen maken T^μ_μ . Verder zijn plaats en tijd onderdeel van de viervector x^μ en nemen we ook de afgeleide naar de tijd mee (via $\square^2 \equiv \nabla^\mu \nabla_\mu = -\partial_{ct} + \nabla^2$). Een consistente scalaire relativistische theorie van gravitatie wordt gegeven door de veldvergelijking

$$\square^2 \Phi = -\frac{4\pi G}{c^2} T^\mu_\mu. \quad (403)$$

Deze theorie is echter onjuist gebleken (en voorspelde onder andere niet waargenomen effecten op de baan van mercurius). Verder is er geen koppeling tussen gravitatie en elektromagnetisme, waardoor we geen gravitationele roodverschuiving hebben, en ook geen afbuiging van licht door materie.

7.10.2 Brans - Dicke theorie

Een gravitatie-theorie gebaseerd op een vectorveld kan worden uitgesloten, omdat een dergelijke theorie voorspelt dat massieve deeltjes elkaar zullen afstoten in plaats van aantrekken. Het is wel mogelijk om relativistische theorieën te formuleren met combinaties van scalaire, vector en tensorvelden. De meest belangrijke van dit soort theorieën is die van Robert Dicke en Carl Brans uit 1961. Brans en Dicke gingen in de formulering van hun theorie ook uit van het equivalentieprincipe en verkregen op die wijze een beschrijving van gravitatie in termen van kromming van ruimtetijd. In plaats van de gravitatieconstante G te behandelen als een natuurconstante, introduceerden ze een scalair veld ϕ dat de sterkte van G bepaalt. Dit wil zeggen dat het scalaire veld ϕ de sterkte van de koppeling van materie aan gravitatie bepaalt. De gekoppelde vergelijkingen voor het scalaire veld en het gravitatieveld kunnen geschreven worden als

$$\begin{aligned}\square^2\phi &= -4\pi\lambda (T^M)^\mu{}_\mu, \\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R &= \frac{8\pi}{c^4\phi} (T^M_{\mu\nu} + T^\phi_{\mu\nu}).\end{aligned}\tag{404}$$

We zien dat de effecten van materie worden voorgesteld door de energie-impuls tensor $T^M_{\mu\nu}$ en een koppelingsconstante λ die het scalaire veld bepaalt. Het scalaire veld bepaalt de waarde van G en de veldvergelijkingen relateren de kromming aan de energie-impuls tensoren van het scalaire veld $T^\phi_{\mu\nu}$ en de materie $T^M_{\mu\nu}$. Historisch wordt de koppelingsconstante geschreven als $\lambda = 2/(3 + 2\omega)$. In de limiet $\omega \rightarrow \infty$ vinden we $\lambda \rightarrow 0$, en wordt ϕ niet beïnvloed door de massaverdeling. We kunnen ϕ dan gelijkstellen aan $\phi = 1/G$. In de limiet $\omega \rightarrow 0$ gaat $T^\phi_{\mu\nu} \rightarrow 0$ en reduceert de Brans-Dicke theorie tot die van Einstein.

De Brans-Dicke theorie is belangrijk, omdat hij laat zien dat men alternatieve theorieën kan ontwikkelen die consistent zijn met het equivalentieprincipe. Een van de voorspellingen van de Brans-Dicke theorie is dat de effectieve gravitatieconstante G een functie van de tijd kan zijn en bepaald wordt door het scalaire veld ϕ . Een verandering in G zou de banen van planeten beïnvloeden en een redelijke conservatieve conclusie van meetgegevens zegt dat $\omega \geq 500$. Daarmee lijkt Einsteins theorie de correcte theorie voor gravitatie, althans voor lage energieën.

7.10.3 Torsietheorieën

In onze discussie van gekromde ruimtetijd hebben we aangenomen dat de variëteit geen torsie heeft. Dit is geen noodzakelijke eis, en we kunnen de discussie van ruimtetijd generaliseren met een torsietensor,

$$T^\mu{}_{\nu\sigma} = \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu},\tag{405}$$

die niet gelijk is aan nul. Typisch wordt torsie veroorzaakt door de quantummechanische spin van deeltjes. Dergelijke theorieën zijn wiskundig gecompliceerd. Gravitatie-theorieën met ruimtetijd torsie worden vaak Einstein-Cartan theorieën genoemd en zijn uitvoerig onderzocht.

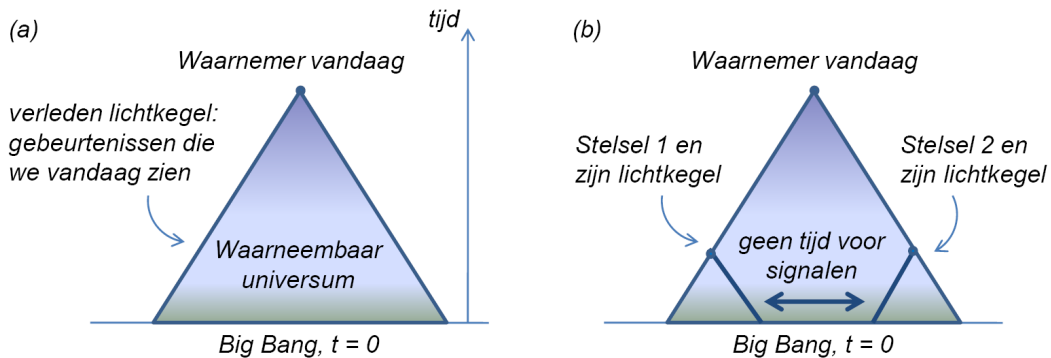
8 Relativistische kosmologie

8.1 Introductie

In de vorige hoofdstukken hebben we de speciale en de algemene relativiteitstheorie behandeld. De concepten van gekromde ruimte en tijd zijn bediscussieerd, we weten welk verband er bestaat tussen de metriek en de aanwezige massa en energie, en zijn in staat een verkregen metriek te gebruiken om fysisch meetbare grootheden (afstanden en tijden) te berekenen. De volgende stap die gemaakt kan worden, is het toepassen van de theorie op enkele specifieke problemen, en dit is precies waar we in dit hoofdstuk mee zullen beginnen. Hier zullen we een van de meest voorkomende toepassingen van de ART behandelen: de theorie van de oerknal. We zullen dan zien dat een gevolg van de relativiteitstheorie is dat het heelal uitdijt, en dat de snelheid van uitdijning te berekenen is wanneer we massa en energie kennen waarmee het heelal gevuld is. Verder zullen we zien dat het model niet compleet is: waarnemingen laten zien dat er enkele onvolkomenheden in de oerknaltheorie zijn opgesloten. Deze zullen we behandelen, en daarna pogen op te lossen door de theorie uit te breiden met een nieuw idee: de kosmologische inflatie.

8.2 Het kosmologisch principe

We zullen ons nu gaan bezighouden met de toepassing van de relativiteitstheorie op het heelal. Het is belangrijk om in te zien dat de delen van het universum dat we kunnen waarnemen, op zijn minst in principe, is gelimiteerd tot de gebieden die voldoende tijd gehad hebben om ons via lichtsignalen te bereiken vanaf de Big Bang. We geven dit schematisch weer in Fig. 58. Een vraag

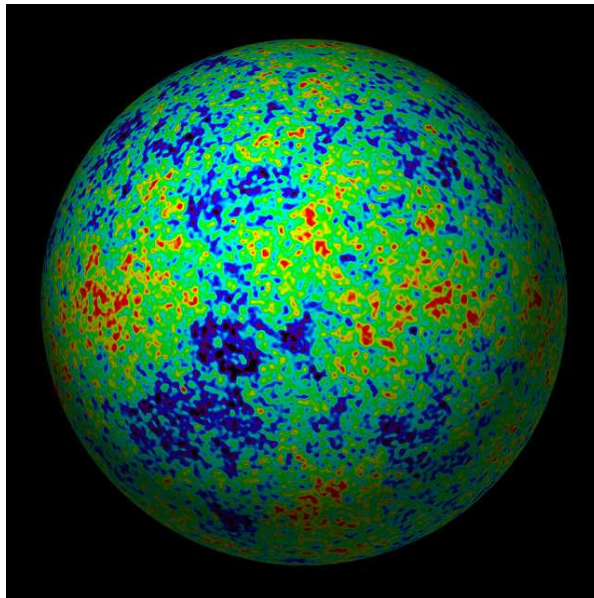


Figuur 58: (a) De verleden lichtkegel van een waarnemer vormt de grens van het waarneembare gebied dat we de deeltjeshorizon noemen. Als deze waarnemer in de toekomst een andere waarneming doet, dat is dit gebied naar boven en naar de zijkanten groter geworden. Het gebied buiten de randen bevat gebeurtenissen die in de toekomst waarneembaar kunnen worden. Met licht ziet de waarnemer slechts gebeurtenissen die op de lichtkegel liggen, maar de gebeurtenissen binnen deze kegel kunnen informatie gestuurd hebben met lagere snelheid. Het diagram laat zien dat er grenzen zijn aan het waarneembare gebied. (b) Twee sterrenstelsels liggen in tegengestelde richtingen van elkaar en op grote afstand, zodat hun licht het universum toont toen het veel jonger was. Ze liggen zo ver uit elkaar dat ze onvoldoende tijd hebben gehad om te communiceren: hun verleden lichtkegels bereiken de Big Bang voordat ze elkaar snijden. Dit is het gebruikelijke beeld van de Big Bang zonder inflatie en toont waarom de homogeniteit van het universum moeilijk te begrijpen is voor het standaard Big Bang scenario. Het vereist dat de Big Bang op nagenoeg gelijke wijze begonnen is op niet-verbonden lokaties.

dringt zich dan meteen op: op welke grond nemen we aan dat louter relativiteitstheorie genoeg is

om de evolutie van het heelal te beschrijven? Er zijn immers nog enkele andere natuurkrachten, die vele ordes van grootte krachtiger zijn dan de zwaartekracht. Dit is inderdaad het geval, maar we moeten ons bedenken dat deze krachten op kosmische schaal vrijwel geen invloed uitoefenen: de sterke en zwakke kernkracht werken alleen op schalen van de orde van femtometers, en de elektromagnetische kracht speelt een verwaarloosbare rol aangezien sterren, sterrenstelsels, en alle andere materie elektrisch neutraal zijn op macroscopische schaal. Het gevolg is dan ook dat alleen de zwaartekracht een rol kan spelen in de dynamica van het heelal, en dus dat we relativiteitstheorie kunnen gebruiken om deze dynamica te onderzoeken.

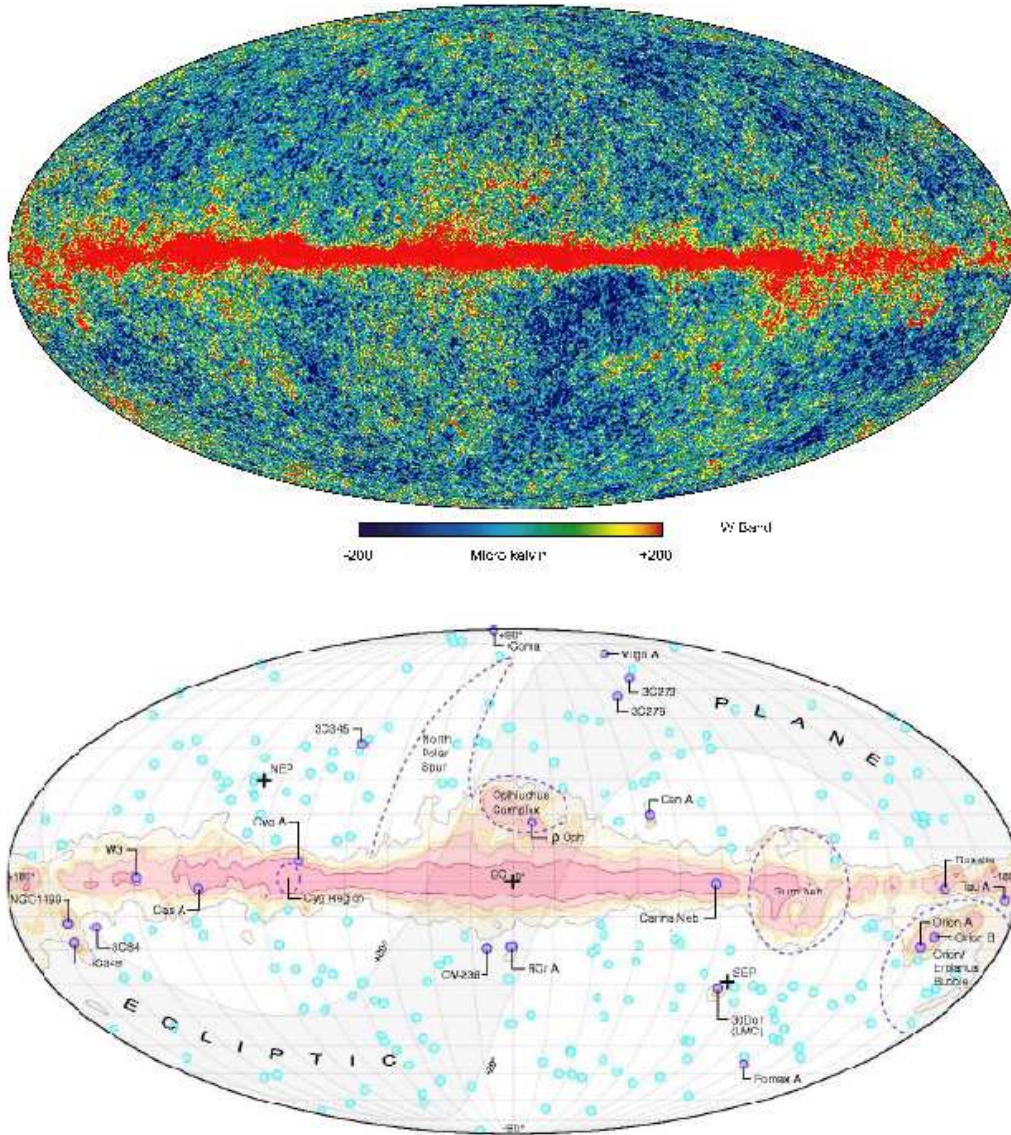
Wat weten we van het heelal? Een van de eerste dingen die opvalt wanneer we naar de nachthemel kijken, is dat het er in elke richting hetzelfde uit lijkt te zien. Wanneer iets beter bekeken, lijkt dit toch niet helemaal zo te zijn: planeten volgen een pad ten opzichte van de vaste sterren, meteorenregens verschijnen op gezette tijden en op verschillende plaatsen aan de hemel, en hier en daar lijkt de sterrendichtheid groter dan op een andere plek. Echter, al deze onregelmatigheden zijn alleen te ontwaren wanneer het heelal bekeken wordt op een schaal zo groot als wij kunnen zien in een enkel beeld van een telescoop of het blote oog; op een schaal gezien van enkele honderden megaparsecs zijn deze onregelmatigheden uitgesmeerd, en lijkt het heelal wel degelijk erg hetzelfde, gezien in alle richtingen. Deze eigenschap draagt de naam *isotropie*. De



Figuur 59: De kosmische microgolf achtergrondstraling (CMBR) is een vorm van elektromagnetische straling die het universum vult. De CMBR wordt verklaard door de oerknaltheorie als het nagloeien van het waterstofplasma 380.000 jaar na de oerknal. Dat is de periode van recombinatie van protonen en elektronen tot waterstof. De CMBR heeft het spectrum van de thermisch straling van een zwart lichaam met een temperatuur van 2,725 K (tot een precisie van 50 delen op 1 miljoen) en isotroop tot ongeveer 1 deel in 10^5 .

isotropie van het heelal wordt veel meer kracht bijgezet wanneer niet alleen gekeken wordt naar de verdeling van materie in het heelal, maar ook naar de verdeling van licht en straling. Volgens Gamow begon ons universum als een extreem hete en gecomprimeerde neutrale bol in een stralingsbad. Vanwege haar grote interne energie expandeerde deze vuurbal zó snel, dat dit proces gewoonlijk de Big Bang wordt genoemd. Tegenwoordig verschilt het geaccepteerde ‘standaard model’ van het beginnend universum in details van Gamow’s beeld, maar het concept van een Big Bang wordt ondersteund door de ontdekking in 1965 van de achtergrondstraling door Pen-

zias en Wilson. Al in 1965 meetten Penzias en Wilson dat de aarde gebombardeerd wordt door enorme aantallen fotonen die, ongeacht uit welke richting zij komen, allemaal⁷² dezelfde energie hebben (deze energie komt overeen met een temperatuur van ongeveer 2,725 Kelvin). Dit betekent dat alle zichtbare delen van het heelal dezelfde temperatuur hebben: blijkbaar is ook de stralingsenergie geheel isotroop verdeeld over het zichtbare heelal. Recente meetgegevens van de Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) worden getoond in figuur 60. De mikro-



Figuur 60: Meetgegevens verzameld met de Wilkinson Microwave Anisotropy Probe. Boven: de temperatuurverdeling in galactische coördinaten. Beneden: een referentiekaart die emissie van de melkweg, het Cygnus complex en andere bronnen toont.

golf achtergrondstraling wordt geïnterpreteerd als de straling die overgebleven is van het initiële stralingsbad van het beginnend universum. Uit de ruimtelijke verdeling van de straling kunnen we informatie verkrijgen over het universum toen het ongeveer 380.000 jaar oud. Sinds

⁷²Ook nu kijken we naar het heelal op zeer grote schaal; dit betekent dat we de lokale afwijkingen van de energie van de fotonen door lokale invloeden van sterren, gaswolken, etc, buiten beschouwing laten.

die tijd hebben de fotonen een roodverschuiving ondergaan door expansie van het universum. Voor tijden kleiner dan 380.000 jaar na de Big Bang was de temperatuur te hoog voor een ongestoorde voortplanting van de fotonen en was bijvoorbeeld ook waterstofgas niet stabiel. De meetgegevens van WMAP duiden op een temperatuur van 2,725 K met diverse anisotropiën. De grootste anisotropie is afkomstig van de beweging van ons melkwegstelsel ten opzichte van het de kosmische achtergrondstraling⁷³. Belangrijk zijn vooral de anisotropiën op het 10^{-5} niveau op een schaal van ongeveer 10 boogminuten tot enkele graden. Deze kleine variaties zijn het gevolg van het zogenaamde Sachs-Wolf effect, waardoor fotonen van de achtergrondstraling een gravitationele roodverschuiving krijgen. Volgens het inflatiemodel ligt de oorsprong van deze variaties in quantum fluctuaties die gedurende de inflatie era expandeerden en resulteerden in primordiale fluctuaties. Uit deze laatste fluctuaties is de huidige structuur van ons universum ontstaan. De belangrijkste conclusies van WMAP tot nu toe kunnen als volgt worden samengevat:

- Het universum is $13,72 \pm 0,12$ miljard jaar oud.
- De diameter van het universum is minstens 78 miljard lichtjaar.
- Het universum bestaat uit $4,6 \pm 0,1$ % gewone baryonische materie, uit $23,3 \pm 1,3$ % van een onbekend soort ‘dark matter’ genaamd, omdat deze niet zichtbaar is, maar wel gravitationele effecten heeft, en uit $72,1 \pm 1,5$ % van iets dat we ‘dark energy’ noemen. Dit laatste is een hypothetische energievorm die het hele universum doordringt en een negatieve druk uitoefent, waardoor er effectief een afstotende gravitatiekracht ontstaat.
- De kosmologische scenario’s voor inflatie zijn consistent met de waarnemingen.
- De Hubble constante is $70,1 \pm 1,3$ km/s/Mpc.
- Als de huidige theorieën worden toegepast op de WMAP meetgegevens, dan is er een indicatie dat het universum eeuwig zal expanderen.

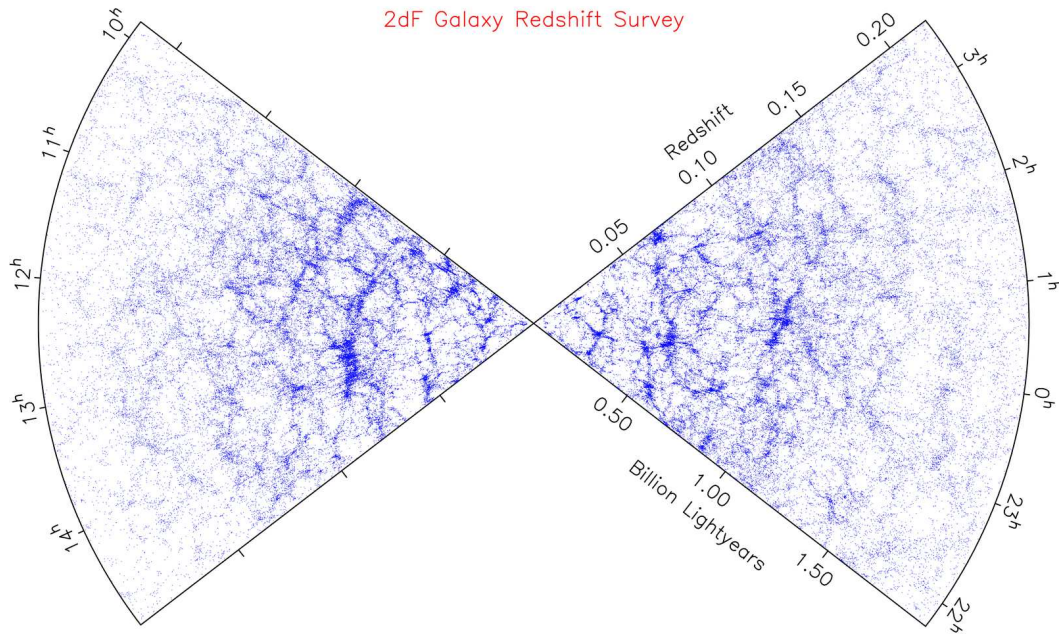
Veel van deze conclusies zullen we in het vervolg van dit hoofdstuk afleiden. Naast het overtuigende bewijs geleverd door COBE en WMAP, zijn er meer aanwijzingen voor de juistheid van de Big Bang theorie, bijvoorbeeld de abundantie van de lichte elementen, de zogenaamde primordiale nucleosynthese.

Ook de materieverdeling op grote schaal in het universum is isotroop. Dit wordt getoond in Fig. 61. In het binnengebied, waar het onderzoek meer volledig is, worden gaten, knopen en draden zichtbaar, maar op de grootste schalen is de verdeling van sterrenstelsels gelijk voor praktisch elk gebied in het universum. Wanneer deze isotropie wordt samengevoegd met de gedachte dat de aarde geen speciale positie inneemt, dan moeten we aannemen dat het heelal er van *elke* positie gezien er het zelfde uitziet (de zogenaamde aanname van *homogeniteit*) in alle richtingen. Deze combinatie van isotropie en homogeniteit wordt vaak als startpunt genomen van de toepassing van relativiteitstheorie op het heelal, en draagt als naam *het kosmologisch principe*:

vanaf elke positie in het heelal, lijken materie en energie gelijkmatig verdeeld te zijn, wanneer bekeken op een schaal van ongeveer 100 Mpc.

Als wij een model willen bouwen dat de evolutie van het heelal succesvol beschrijft, dan moet dit het kosmologisch principe hebben ingebouwd, danwel een manier bevatten waarop het op een of andere manier een logisch gevolg is van de details van het model. Wij zullen in het vervolg het kosmologisch principe zelf inbouwen in onze beschrijving.

⁷³Er is dus een voorkeur voor een referentiesysteem in het universum: een systeem dat is rust is ten opzichte van de kosmische achtergrondstraling. Dit breekt Lorentzinvariantie en leidt ook tot het niet gelden van behoud van energie en impuls.



Figuur 61: De 2dF roodverschuiving survey heeft spectra gemeten van 245.591 objecten, voornamelijk sterrenstelsels. Getoond worden de hoekposities en roodverschuivingen van deze sterrenstelsels. Het lijkt alsof er minder sterrenstelsels op grote afstand worden gemeten, maar dat wordt veroorzaakt door het feit dat dan alleen maar de helderste stelsels zichtbaar zijn.

Willen wij de algemene relativiteitstheorie gebruiken om het heelal te beschrijven, dan ligt het voor de hand een metriek te kiezen die een materie- en energieverdeling oplevert die in overeenstemming is met het kosmologisch principe. Dit blijkt niet een heel moeilijke taak te zijn. In de eerste plaats hadden we al opgemerkt dat zwaartekracht de enige kracht is die op deze schaal een rol speelt in de evolutie van het heelal, en dit betekent dat we geen rekening hoeven te houden met de ingewikkelde quantummechanische details van de andere drie krachten, danwel de wisselwerking van onze metriek met deze krachten opdat de gewenste homogeniteit en isotropie gevonden wordt. In plaats daarvan kunnen we de metriek en de verdeling van massa en energie als direct gecorreleerd zien zonder invloeden van de andere krachten. Zo volgt dan ook dat als de metriek zelf geen voorkeursrichting danwel voorkeurspositie kent, de energieverdeling dit ook niet zal hebben.

Het is niet zo heel moeilijk om een metriek te vinden die aan deze eis voldoet. Alvorens dit te doen, zullen we nu even een paar van de ons al bekende metrieken beschouwen. De Schwarzschild-metriek is isotroop, maar niet homogeen; de metriek die newtoniaanse zwaartekracht opleverde, vergelijking(385), is ook isotroop maar niet homogeen. De Minkowskimetriek, daarentegen, is zowel isotroop als homogeen! Maar de Minkowskimetriek zou tekort schieten om het heelal te beschrijven, aangezien we al gezien hadden in het vorige hoofdstuk dat deze metriek strikt genomen alleen een oplossing is van de Einsteinvergelijkingen in de afwezigheid van materie en energie: een leeg heelal dus. Bovendien beperken we ons met deze keuze van de metriek meer dan het kosmologisch principe verlangt: het principe zegt inderdaad dat het heelal er vanaf elke positie gezien, in alle richtingen er hetzelfde uit behoort te zien, maar niet dat dit uitzicht *op elk tijdstip* hetzelfde hoeft te zijn. Het is dan ook toegestaan om een *tijdsafhankelijkheid* aan de Minkowskimetriek toe te kennen, mits deze maar in alle ruimtelijke richtingen hetzelfde is. Deze tijdsafhankelijkheid voegt men toe door middel van een (op dit moment nog) onbekende functie

$a(t)$, genaamd de *schaalfactor*, en de metriek wordt gegeven door

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix}. \quad (406)$$

Deze metriek draagt de naam *vlakke Robertson-Walker metriek*, en speelt een hoofdrol in de kosmologie⁷⁴. De fysische betekenis van de schaafactor $a(t)$ is snel in te zien door het lijnelement ds^2 uit te schrijven. We vinden

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + a^2(t) dx^2 + a^2(t) dy^2 + a^2(t) dz^2 \\ &= a^2(t) dx^i dx_i \\ &= a^2(t) d\vec{x}^2, \end{aligned} \quad (407)$$

waar de tweede stap geldt voor een speciale waarnemer die een afstand wil meten, en voor wie daarom geldt $dt = 0$. Integreren om een eindige afstand S te berekenen levert

$$\begin{aligned} S &= \int a(t) d\vec{x} \\ &= a(t) \int d\vec{x}. \end{aligned} \quad (408)$$

Blijkbaar is de gemeten afstand S in de vlakke Robertson-Walker ruimte niets anders dan de afstand $\int d\vec{x}$ zoals die gemeten zou zijn in een minkowskimetriek, maal de functie $a(t)$. Dit verklaart de naam *schaalfactor*: $a(t)$ geeft aan hoeveel groter (als $a(t) > 1$) of hoeveel kleiner (als $a(t) < 1$) een gemeten afstand is bij een gegeven coördinaatafstand, vergeleken met de overeenkomstige gemeten afstand in een minkowskimetriek. Bovendien kunnen we nu de tijdsafhankelijkheid van de schaafactor interpreteren: als $a(t)$ een stijgende functie is in de tijd, betekent dit dat gemeten afstanden steeds groter worden. De implicatie van dit is enorm: het betekent dat twee, zeg, sterren op vaste coördinaatafstand, zich van elkaar zullen verwijderen met een snelheid gelijk aan $\dot{a}(t)$. Vanaf de aarde gezien (of, overeenkomstig het kosmologisch principe, vanaf *elk willekeurig punt* in het heelal) lijken deze sterren zich van elkaar te verwijderen met een snelheid $\dot{a}(t)$. Dit geldt voor elke willekeurige twee sterren of alle andere materie of straling in het heelal: alles verwijdt zich van elkaar met een snelheid gedictieert door de tijdsafgeleide van de schaafactor: we spreken in dat geval van een *uitdijend heelal*. Op dezelfde manier volgt dat als $a(t)$ een dalende functie in de tijd is, gemeten afstanden afnemen in de tijd, en het heelal krimpt. De tijdsafgeleide $\dot{a}(t)$ van de schaafactor is daarom een maat voor de snelheid waarmee het heelal uitdijt of inkrimpt; de tweede tijdsafgeleide $\ddot{a}(t)$ van de schaafactor is een maat voor de verandering van de uitdijingssnelheid.

8.3 De wet van Hubble

Een uitdijend of inkrimpend heelal heeft als kenmerk dat de golflengte van het licht van de sterren, oprekt of inkrimpt, en daardoor de kleur van dit licht roder danwel blauwer wordt. Dit betekent dat, in een uitdijend heelal, uitgezonden sterrenlicht roder aankomt in onze telescopen dan het

⁷⁴Er zijn nog twee andere metrieken denkbaar die voldoen aan het kosmologisch principe, te weten de sferische en de hyperbolische Robertson-Walker metrieken, en deze leiden tot een ruimte die niet alleen uitdijt, maar ook gekromd is. Deze beschrijven dan ook een heelal waarin aanvankelijk evenwijdige lopende lichtstralen convergeren respectievelijk divergeren. Echter, de theorie van *kosmologische inflatie* leidt ertoe dat de vlakke Robertson-Walker metriek de beste beschrijving geeft van het heelal waarin wij leven. Bovendien wordt deze vorm van de metriek bevestigd door experiment. Wij komen hierop terug in het volgende hoofdstuk.

uitgezonden wordt door de sterren, en bovendien dat deze roodverschuiving een maat is voor de uitdijingssnelheid $\dot{a}(t)$ van het heelal. Dit verband zullen we nu onderzoeken. We beschouwen hiertoe een lichtstraal in dit heelal. Volgens de relativiteitstheorie volgt deze lichtstraal een lichtachtig pad,

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + a^2(t) dx^2 \\ &\equiv 0. \end{aligned} \quad (409)$$

We nemen hier aan, zonder verlies van algemeenheid, dat het licht zich langs de x -richting voortbeweegt. Als deze lichtstraal is uitgezonden op tijdstip t_e (emissie) en gemeten is op het huidige tijdstip t_o (ontvangst), dan kunnen we deze relatie integreren om te zien hoeveel coördinaatafstand R het licht aflegt tussen de emissie en ontvangst. Er geldt

$$R = \int_0^R dx = \int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (410)$$

We beschouwen nu een waarnemer op grote afstand die licht in pulsjes uitzendt, en een tweede waarnemer die deze pulsjes ontvangt; hun onderlinge coördinaatsafstand is R . De zender stuurt twee pulsjes weg, een tijd δt_e van elkaar. De ontvanger zal de pulsjes iets later na elkaar ontvangen, aangezien het heelal ondertussen uitdijt: hij meet dat de pulsjes een tijd δt_o na elkaar aankomen. Aangezien de coördinaatafstand tussen de twee waarnemers niet verandert tijdens uitdijing van het heelal⁷⁵, moet er nu gelden

$$c \int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (411)$$

Beide kanten van de vergelijking worden vermenigvuldigd met de factor c ; deze delen we weg. De rechterkant van deze vergelijking kunnen we schrijven als

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_o + \delta t_o}^{t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (412)$$

Wil dit gelijk zijn aan de linkerkant van de vergelijking (411), dan moet gelden

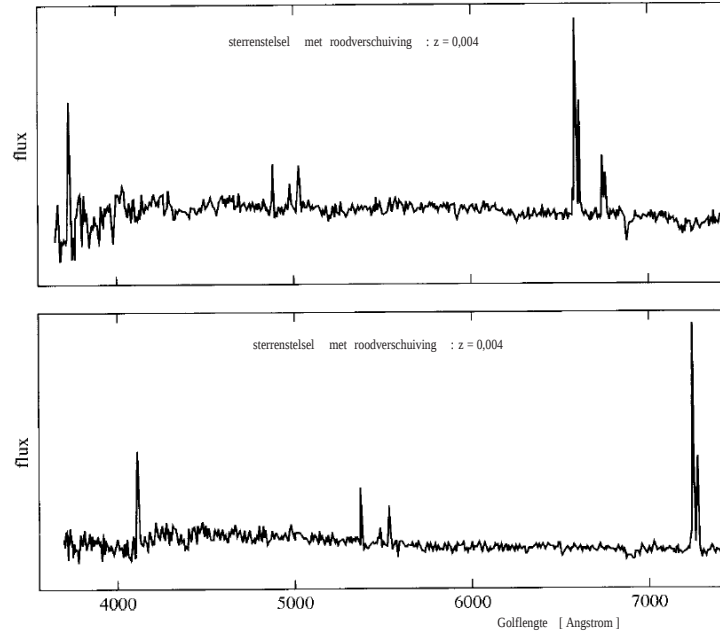
$$\int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_o + \delta t_o}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = 0. \quad (413)$$

Als we aannemen dat δt_o en δt_e zó klein zijn dat de schaafactor maar weinig verandert in deze integralen (dit wil zeggen: we nemen aan dat het heelal veel minder snel uitdijt dan de pulsen na elkaar uitgezonden worden), dan kunnen we $a(t)$ als constant nemen, en zegt deze laatste eis dat

$$\frac{\delta t_o}{\delta t_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}. \quad (414)$$

Dit is een relatie tussen de tijden tussen pulsjes zoals gemeten en zoals verzonden. Dit verschil wordt direct bepaald door de grootte van het heelal ten tijde van uitzending (t_e) en ontvangst (t_o). Als we de duur tussen de pulsjes nu opvatten als de trillingstijd van een lichtgolf, dan kunnen we een uitspraak doen over de verhouding in frequentie $\omega \equiv 2\pi\delta t^{-1}$ (kleur) van het licht zoals verzonden en ontvangen. We vinden dan de formule voor de *kosmologische roodverschuiving* z .

⁷⁵In de kosmologie gebruiken we een coördinatenstelsel dat met de universele expansie mee oprekt. We noemen dergelijke coördinaten, *mebewegende coördinaten*.



Figuur 62: De kosmologische roodverschuiving. De spectra van twee sterrenstelsels worden getoond als de ontvangen intensiteit als functie van de golflengte ($1 \text{ Angstrom} = 10^{-10} \text{ m}$). De heldere lijnen van de twee spectra corresponderen met een verschuiving van $\Delta\lambda/\lambda \equiv z = 0,1$. Dit wordt de kosmologische roodverschuiving genoemd.

Er geldt

$$1 + z \equiv \frac{\omega_e}{\omega_o} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}. \quad (415)$$

We zien dat de roodverschuiving z een maat is voor de verandering van de kleur van het licht, ten gevolge van de uitdijing van het heelal. Experimenteel gezien betekent dit, dat we door meting van de kleurverschuiving van sterrenlicht kunnen bepalen wat de huidige waarde is van de schaafactor, ten opzichte van die ten tijde dat het licht uitgezonden werd. Dit geeft ons daarmee een maat voor de tijdsevolutie van de schaafactor, en daarmee voor de uitdijingsnelheid van het heelal.

Voor sterren die niet te ver weg staan van onze telescopen heeft het licht niet veel tijd nodig om de afstand te overbruggen, en kan de schaafactor nooit heel erg veranderd zijn tussen de momenten van uitzending en ontvangst van het sterrenlicht. Dit betekent dat we de schaafactor ten tijde van uitzending, $a(t_e)$, goed kunnen benaderen door de Taylor-reeks

$$a(t_e) \approx a(t_o) + \dot{a}(t_o)(t_e - t_o). \quad (416)$$

Ingevuld in de formule voor de kosmologische roodverschuiving, volgt op deze manier

$$\begin{aligned} 1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} &\approx a(t_o) \left(a(t_o) + \dot{a}(t_o)(t_e - t_o) \right)^{-1} \\ &\approx 1 + \frac{\dot{a}(t_o)}{a(t_o)}(t_o - t_e), \end{aligned} \quad (417)$$

waar in de laatste stap de wiskundige regel is gebruikt dat $(1 + x)^m \approx 1 + mx$, welke geldt als $mx \ll 1$; dit is hier het geval, aangezien $(t_e - t_o)$ een maat is voor de afstand tussen zender

en ontvanger, en we hadden aangenomen dat deze klein is. Het tijdsverschil ($t_e - t_o$) laat zich omzetten in een afstand tussen de zender en ontvanger door een factor c te plaatsen. Op deze manier is nu de roodverschuiving van sterrenlicht gerelateerd geraakt aan de afstand d tot de ster als

$$z \approx \frac{\dot{a}(t_o)}{a(t_o)} cd. \quad (418)$$

De combinatie $\frac{\dot{a}(t_o)}{a(t_o)}$ draagt de naam *Hubble constante* en is een maat voor de snelheid waarmee het heelal op dit moment uitdijt. Hij is vernoemd naar Edwin Hubble, die dit lineaire verband tussen roodverschuiving en afstand tot de sterren al in 1929 wist te meten; hiermee werd het eerste experimentele bewijs geleverd voor het uitdijen van het heelal. Sindsdien zijn de metingen steeds nauwkeuriger geworden, en is de waarde van de Hubble constante vastgesteld op, in eenheden die in de waarnemende sterrenkunde gebruikelijk zijn, $H(t_o) = 70,1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$; in standaardeenheden is de waarde ongeveer $H(t_o) = 2,1 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$. Deze experimentele waarde zullen we later nodig hebben om de leeftijd van het heelal te schatten.

8.4 De Friedmannvergelijkingen

Een van de grootste opgaven van de kosmologie is het bepalen wat de expliciete vorm is van de functie $a(t)$: wanneer dit bekend is, weten we namelijk hoe de grootte van het heelal (en mogelijk zijn oorsprong en toekomstig gedrag) evolueert in de tijd. De vraag is dan ook: hoe kunnen we de vorm van de schaalfactor bepalen? Het antwoord wordt, zoals altijd, uiteindelijk gedictieerd door de aanwezigheid van materie en energie in het heelal. Immers, de vorm en het gedrag van een metriek is via de Einsteinvergelijkingen gekoppeld aan de energie-impuls tensor $T_{\mu\nu}$, en het ligt dan ook voor de hand om de vraag te stellen welke energie-impuls tensor als gevolg heeft dat de Einsteinvergelijkingen de Robertson-Walker metriek als oplossing kent. Merk op hoe dit afwijkt van de gebruikelijke procedure: meestal bij het doen van relativiteitstheorie, is de energie-impuls tensor het *startpunt* van berekeningen, en is de metriek een *gevolg*; de huidige situatie is een van de weinige keren dat de metriek bekend is, en er een energie-impuls tensor gevonden dient te worden.

Dit is geen triviaal probleem: het vraagstuk wordt bemoeilijkt door het feit dat er een wisselwerking plaatsvindt tussen de tijdsafhankelijkheid van de metriek, en de vorm van de energie-impuls tensor. Denk ter illustratie aan een gas in een ballon: niet alleen wordt de grootte van de ballon bepaald door de druk van het gas in de ballon, maar deze druk is zelf weer een functie van de grootte (grootte van de ballon) van het volume waarin het gas opgesloten is. Op dezelfde manier wordt de metriek (een maat voor de grootte van het heelal) niet alleen *bepaald* door de aanwezige energie en materie, maar oefent deze metriek ook zelf weer een *invloed* uit op de energie-impuls tensor: een ingewikkelde wisselwerking is het gevolg.

Het kosmologisch principe biedt uitkomst. Willen energie en materie homogeen en isotroop verdeeld zijn over het heelal, dan moet de energie-impuls tensor overeenkomstig gekozen worden, wat betekent dat deze tensor geen plaatsafhankelijkheid mag kennen. Verder doet de eis van een uitgesmeerde hoeveelheid materie ons denken aan een *perfecte vloeistof*. Vloeistoffen worden gekenmerkt door een druk P en een energiedichtheid ρ , die, zoals beargumenteerd, nu ten hoogste van de tijd mogen afhangen. Voor vloeistoffen is een energie-impuls tensor bekend, en deze wordt gegeven door (zie ook vergelijking (230)), maar merk op dat we ρ nu als *energiedichtheid* definiëren in plaats van een *massadichtheid*)

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(\rho + P)U^\mu U^\nu + P g^{\mu\nu}. \quad (419)$$

waarin U^μ de viersnelheid is van een waarnemer die in rust is ten opzichte van de vloeistof. Er geldt dat $U^\mu = (c, 0, 0, 0)$.

Nu het kosmologisch principe ons tot aannames heeft geleid voor de vorm van de metriek en de vorm van de energie-impuls tensor, kunnen de Einsteinvergelijkingen worden gebruikt om het verband tussen de twee objecten te vinden; het resultaat zal zijn dat er een direct verband bestaat tussen de schaalfactor $a(t)$ en de druk $P(t)$ en energiedichtheid $\rho(t)$ van het heelal. Hiertoe dienen de Riccitenor en Riemannscalar behorend bij de Robertson-Walker metriek te worden berekend. Dit is een eenvoudige opgave, en leidt tot

$$\begin{aligned} R_{00} &= 3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, \\ R_{ij} &= -\left(2\dot{a}^2(t) + a(t)\ddot{a}(t)\right)\delta_{ij}, \\ R &= -6 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - 6 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}. \end{aligned} \quad (420)$$

Wanneer deze worden ingevuld in de linkerkant van de Einsteinvergelijkingen en de energie-impuls tensor ingevuld in de rechterkant, wordt een tensorvergelijking gevonden die in principe 10 verschillende relaties geeft tussen de schaalfactor en de druk en dichtheid van de aanwezige energie en materie. Echter, uiteindelijk levert dit ons slechts twee relaties op, aangezien de tensoren alleen niet-nul componenten op de diagonaal kennen, en de drie ruimtelijke componenten hiervan dezelfde informatie bevatten (kosmologisch principe!). Voor $\mu = 0, \nu = 0$ levert dit

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = +\frac{8\pi G}{3c^2}\rho(t), \quad (421)$$

en voor $\mu = i, \nu = i$ levert dit

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = -\frac{8\pi G}{c^2}P(t). \quad (422)$$

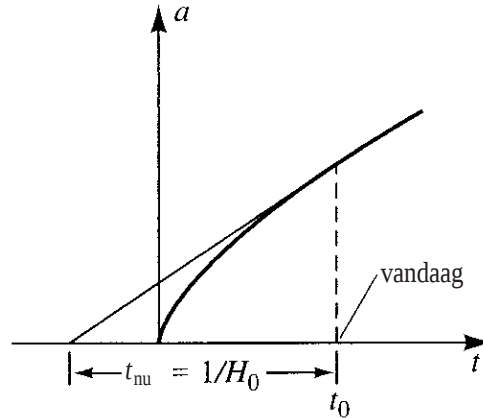
Het is gebruikelijk deze tweede vergelijking te herschrijven door de eerste vergelijking te substitueren; de twee resulterende vergelijkingen zijn dan

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 &= +\frac{8\pi G}{3c^2}\rho(t), \\ \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} &= -\frac{4\pi G}{3c^2}\left(3P(t) + \rho(t)\right). \end{aligned} \quad (423)$$

Deze twee vergelijkingen geven het verband tussen de energiedichtheid en druk van de vloeistof waarmee we het heelal gevuld hebben, en de schaalfactor. Zij heten de *Friedmannvergelijkingen*, en vormen het hart van de kosmologie. Vraagstukken over de evolutie van de grootte van het heelal zijn hiermee tot een simpel stappenplan gereduceerd: beargumenteer wat de druk $P(t)$ en dichtheid $\rho(t)$ is van de energie en materie in het heelal, los de Friedmannvergelijkingen op, en vindt dan de expliciete vorm van de schaalfactor $a(t)$ (en daarmee de mate van uitdijning of inkrimping van het heelal). In sectie 8.5 zullen we deze vergelijkingen expliciet oplossen voor enkele speciale gevallen, en hieruit het model van de oerknal construeren. Alvorens dit te doen zullen we enkele directe, algemene gevolgen (dus geldend voor *alle* oplossingen) van de Friedmannvergelijkingen bekijken.

Ten eerste voorspellen de Friedmannvergelijkingen dat het heelal een begin heeft gehad. Dit kan worden geconcludeerd op basis van het feit dat, voor ons bekende soorten materie en energie, de

dichtheid en druk beide positieve grootheden zijn⁷⁶ en de rechterkant van de tweede Friedmann-vergelijking daarom negatief is: hieruit volgt dat $\ddot{a}(t)$ negatief is: de uitdijingsnelheid van het heelal neemt af in de tijd. Gecombineerd met Hubble's experimentele feit dat het heelal op dit moment uitdijt, $\dot{a}(t_{\text{nu}}) > 0$, leidt dit direct tot de conclusie dat op een bepaald moment in de historie van het heelal, de schaafactor $a(t)$ de waarde nul heeft aangenomen. Dit correspondeert met een heelal waarin alle materie en energie opgeborgen is geweest in een volume ter grootte nul. De Friedmannvergelijkingen voorspellen dan ook dat de ruimtetijd begonnen is als *een singulariteit met oneindige energiedichtheid*, en daarna (om onduidelijke redenen) is gaan uitdijen. Dit moment wordt gezien als het begin van het heelal, en draagt de naam *oerknal*. Hierop voort-



Figuur 63: De Hubble constante is gerelateerd aan een schaafactor en levert een bovengrens op de leeftijd van het heelal.

bordurend, kan de tijd verlopen sinds de oerknal opgevat worden als de leeftijd van het heelal. Een schatting van de leeftijd kan gemaakt worden door op te merken dat de schaafactor $a(t)$ zijn huidige waarde heeft gekregen terwijl het is gegroeid met een ‘snelheid’ gelijk aan $\dot{a}(t)$. Een maat voor de leeftijd van het heelal kan daarom worden gegeven door de huidige waarde van de schaafactor, gedeeld door zijn huidige snelheid. Dit levert in het algemeen een overschattig op, aangezien de tweede Friedmannvergelijking ons al leerde dat de snelheid van uitdijning $\dot{a}(t)$ niet altijd dezelfde waarde heeft gehad maar steeds kleiner is geworden. Het volgt daarom dat de leeftijd t_{nu} van het heelal een bovengrens heeft gegeven door

$$t_{\text{nu}} < \frac{a(t_{\text{nu}})}{\dot{a}(t_{\text{nu}})}. \quad (424)$$

Aan de rechterkant van deze ongelijkheid herkennen we de inverse van de *Hubble constante* die we al eerder geïntroduceerd hadden, $H(t) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$. Het essentiële verschil met de laatste keer dat wij deze tegenkwamen, is dat H toen nog alleen op het huidige tijdstip werd genomen, waar we vanaf nu $H(t)$ ook op andere tijden zullen beschouwen⁷⁷. Zoals besproken is $H(t)$ een fysisch meetbare grootheid, te bepalen door de roodverschuiving van dichtbijgelegen sterren te meten, en is bekend een waarde te hebben van ongeveer 70 (km/s)/Mpc. Als we deze waarde invullen in vergelijking (424), levert op een bovengrens voor de leeftijd van het heelal van ongeveer 15 miljard jaar.

⁷⁶In de volgende sectie zullen we zien dat er ook een energiesoort bestaat waarvoor dit niet opgaat; echter, zoals we eveneens zullen aantonen, heeft deze energiesoort een verwaarloosbare invloed in de eerste paar miljarden jaren van het heelal, en kan daarom worden genegeerd wanneer we voorspellingen willen doen over het vroege heelal.

⁷⁷Merk op dat het daarom strikt genomen niet correct meer is om H aan te duiden als een *constante*: hij is immers tijdsafhankelijk. Het is echter algemeen gebruik om $H(t)$ nog altijd aan te duiden met de naam *Hubble constante*, en dat zullen we in het vervolg dan ook blijven doen.

8.5 Oplossingen van de Friedmannvergelijkingen

Het heelal is, voor zover wij kunnen overzien en hebben kunnen meten, gevuld met energie en materie die we in drie groepen kunnen verdelen. Ten eerste is er de *koude materie*: atomen, molekulen en alles wat daarvan gemaakt is. Denk hierbij aan sterren, sterrenstelsels, gaswolken, nevels, de aarde en alles wat erop leeft, en ook de mysterieuze donkere materie. Ten tweede is er *straling*, waarmee we alles bedoelen wat zich met (vrijwel) de lichtsnelheid voortbeweegt: fotonen uitgezonden door sterren, de fotonen van de kosmische achtergrondstraling (deze waren we al tegen gekomen bij de introductie van het kosmologische principe), maar ook zeer snel bewegende massieve deeltjes horen in deze categorie. Ten derde is er de geheimzinnige energie die, zoals we zullen zien, het heelal versneld doet uitdijen, en waarvan de oorsprong nog een groot mysterie is; dit soort energie zullen we aanduiden met de naam *kosmologische constante*⁷⁸.

Elk van deze soorten materie en of energie zal een specifieke evolutie van het heelal voorspellen, en doel van deze sectie is het oplossen van de Friedmannvergelijkingen voor deze gevallen. Hiertoe zullen we uitdrukkingen moeten opschrijven voor de energiedichtheid en druk ten gevolge van elk van deze drie soorten van energie en materie. We zullen daarbij aannemen dat de dichtheid en druk evenredig zijn aan elkaar

$$P(t) = n\rho(t). \quad (425)$$

Deze vergelijking wordt de *toestandsvergelijking* genoemd van de energie of materie. De waarde van de evenredigheidsconstante n is afhankelijk van meerdere factoren (waaronder de temperatuur, het type materie of energie, mate van interactie met andere soorten energie, en quantummechanische eigenschappen), maar kan in de huidige context als constant worden beschouwd.

Om de waarde van n te vinden, kan men kennis uit de thermodynamica gebruiken (dit is immers de studie is van macroscopische grootheden als druk en interne energie van materie) en met name de eerste hoofdwet, de wet van behoud van totale energie. In andere takken van fysica is dit inderdaad de manier waarop n bepaald wordt. Echter, in het geval van de kosmologie is dit niet nodig: zoals dadelijk zal blijken, *dicteren* de Friedmannvergelijkingen wat de waarde is van n . Voor elke gegeven vorm van de energiedichtheid $\rho(t)$, volgt dan ook direct de druk $P(t)$. Dit is niet verbazingwekkend: de Friedmannvergelijkingen volgen uit de Einsteinvergelijkingen, en deze hebben, zoals we gezien hebben in hoofdstuk 7, het behoud van energie ingebouwd.

8.5.1 Heelal gedomineerd door koude materie

In het geval van de koude materie kunnen we een goede aanname doen voor de vorm van de energiedichtheid $\rho(t)$. Een energiedichtheid is altijd gedefinieerd als een hoeveelheid energie of materie gedeeld door een volume. Nu wordt met volume uiteraard het *fysische* volume bedoeld, een produkt van fysisch gemeten lengte, breedte, en hoogte. Elk van deze drie grootheden zijn afstanden, en fysische afstanden worden (zoals we al gezien hadden) direct bepaald door de schaalfactor $a(t)$. Het ligt dan ook voor de hand om de dichtheid van de koude materie te schrijven als

$$\rho(t) = \frac{A}{a^3(t)}, \quad (426)$$

waarin A een constante is; het is een maat voor de hoeveelheid energie en materie ten tijde dat de schaalfactor precies de waarde $a(t) = 1$ had; de waarde ervan is niet zo relevant in

⁷⁸In de literatuur duiken ook andere namen op, veelal afhankelijk van de context waarin deze energie beschreven wordt, en zonder dat er een duidelijk onderscheid gehanteerd wordt tussen de eventuele subtiele verschillen tussen al deze concepten: *vacuum energie*, *donkere energie*, *quintessence veld*, etc.

de volgende discussie. We zullen aannemen dat deze A niet van waarde verandert; fysisch betekent dit dat de koude materie niet omgezet wordt in een van de andere soorten energie. De Friedmannvergelijkingen nemen dan de volgende vorm aan,

$$\begin{aligned}\dot{a}^2(t) &= \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{A}{a(t)}, \\ \ddot{a}(t) &= -\frac{4\pi G}{3c^2} (1+3n) \frac{A}{a^2(t)}.\end{aligned}\tag{427}$$

Bovenstaande differentiaalvergelijkingen zullen wij dadelijk expliciet oplossen om de schaafactor als functie van de tijd te vinden; eerst zullen we laten zien dat deze vergelijkingen, zoals beloofd, ook de waarde van de constante n bepalen. Differentieer hiertoe de eerste van deze vergelijkingen naar de tijd

$$2\ddot{a}(t) = -\frac{8\pi G}{3c^2} \frac{A}{a^2(t)},\tag{428}$$

en substitueer deze in de tweede van de vergelijkingen. We vinden dan

$$-\frac{4\pi G}{3c^2} A = -\frac{4\pi G}{3c^2} (1+3n) A,\tag{429}$$

wat alleen waar kan zijn wanneer de evenredigheidparameter n gelijk is aan 0. Hiermee is gevonden dat de druk $P(t) = n\rho(t)$ ten gevolge van koude materie gelijk is aan nul. Fysisch betekent dit dat deze materie te weinig energetisch is om de deeltjes van deze materie genoeg snelheid te geven om een significante druk uit te oefenen. Het is precies om deze reden dat we deze materie het predikaat ‘koud’ hebben gegeven.

Nu er uitdrukkingen gevonden zijn voor de energiedichtheid en druk voor het geval van koude materie, kunnen we deze uitdrukkingen substitueren in de Friedmannvergelijkingen, en deze pogen op te lossen om zo de schaafactor $a(t)$ te vinden. De volgende differentiaalvergelijkingen worden dan gevonden,

$$\begin{aligned}a(t)\dot{a}^2(t) &= \frac{8\pi G}{3c^2} A, \\ a^2(t)\ddot{a}(t) &= -\frac{4\pi G}{3c^2} A.\end{aligned}\tag{430}$$

Het is niet moeilijk in te zien dat de oplossing van deze vergelijkingen gegeven wordt door de functie

$$a(t) = Bt^{3/2},\tag{431}$$

waarin B een integratieconstante is⁷⁹. Een oplossing is gevonden! Louter op basis van het kosmologisch principe en een voor de hand liggende aanname voor de energiedichtheid van de aanwezige materie, is nu gevonden hoe het heelal evolueert in de tijd. Interessant om te zien is het volgende: de gevonden oplossing voorspelt dat het heelal uitdijt: $\dot{a}(t) > 0$, maar dat deze uitdijing steeds minder snel gaat: $\ddot{a} < 0$; dit is precies wat we verwachten op basis van het feit dat zwaartekracht een aantrekkende werking heeft.

⁷⁹De constante factoren in de uitdrukking voor de schaafactor zijn fysisch weinig interessant: ze herdefiniëren enkel de afstandsmaat waarin afstanden gemeten worden. Om uitspraken te doen over de uitdijing van het heelal is alleen de *verhouding* tussen de schaafactoren van twee tijdstippen van belang. De constanten B vallen er daarom altijd uit.

8.5.2 Heelal gedomineerd door straling

Ook voor het geval van straling kunnen we een goede aanname doen voor de vorm van de energiedichtheid. Wederom geldt dat de dichtheid van straling (fotonen) afneemt naarmate het heelal uitdijt en dus dat $\rho(t) \propto a^{-3}(t)$. Bovendien geldt dat er een extra afname van de energiedichtheid optreedt ten gevolge van de gravitationele roodverschuiving. Voor fotonen geldt dat de energie is gegeven voor $E = h\nu = \hbar\omega$, waar ν de frequentie (ω de hoekfrequentie $2\pi\nu$) is van de fotonen. Uitgedrukt in de golflengte λ is deze relatie gegeven door $E = (2\pi\hbar c)/\lambda$, waar de golflengte λ een fysische afstand is, en daardoor schaalt met $a(t)$. Het gevolg is dan ook dat de stralingsenergiedichtheid afneemt met een extra factor $a(t)$ ten gevolge van deze roodverschuiving, en we dus verwachten dat deze energiedichtheid gegeven wordt door

$$\rho(t) = \frac{A}{a^4(t)}. \quad (432)$$

(waarin A een constante is). Op dezelfde manier als eerder, kunnen we de Friedmannvergelijkingen gebruiken om de waarde van de constante n te bepalen, en daarmee een functie voor de druk $P(t)$. Er wordt dan gevonden dat $n = 1/3$, en straling daarom de volgende druk kent,

$$P(t) = \frac{A}{3} \frac{1}{a^4(t)}. \quad (433)$$

Met behulp van de gevonden uitdrukkingen voor energiedichtheid en druk, kunnen we ze vervolgens in de Friedmannvergelijkingen substitueren en vinden we voor het stralingsgedomineerde heelal

$$\begin{aligned} a^2(t)\dot{a}^2(t) &= +\frac{8\pi G}{3c^2}A, \\ a^3(t)\ddot{a}(t) &= -\frac{8\pi G}{3c^2}A. \end{aligned} \quad (434)$$

De oplossing voor deze vergelijkingen is snel gevonden. Er geldt

$$a(t) = B\sqrt{t}, \quad (435)$$

waarin B een integratieconstante is. Deze oplossing vertelt ons dat een heelal gevuld met straling, uitdijt, $\dot{a}(t) > 0$, en dat de uitdijingssnelheid afneemt, $\ddot{a}(t) < 0$, wederom precies zoals we zouden verwachten op basis van het gegeven dat zwaartekracht een aantrekkende invloed uitoefent. Ook is te zien dat de uitdijing van een stralingsgedomineerd heelal sneller gaat dan de uitdijing van een heelal gedomineerd door koude materie. Dit heeft een belangrijke consequentie, waar we dadelijk op zullen terugkomen.

8.5.3 Heelal gedomineerd door een kosmologische constante

Tenslotte zullen we een heelal beschouwen dat gevuld is met een energievorm die wij hebben aangeduid met de naam ‘kosmologische constante’. We hebben de implicaties voor een deel al in sectie 7.9 besproken. Per definitie wordt hiermee een energievorm bedoeld, waarvan de energiedichtheid niet afneemt tijdens het uitdijen of inkrimpen van het heelal: $\rho(t)$ zal als een constante ρ_c worden gekozen,

$$\rho(t) = \rho_c = \text{const.} \quad (436)$$

Fysisch betekent dit dat deze energievorm niet een gevolg kan zijn van ‘normale’ materie of straling: voor alle soorten straling en materie geldt immers dat de dichtheid afneemt wanneer het uitgesmeerd wordt over een steeds groter wordend volume. De kosmologische constante kan

daarom misschien het best⁸⁰ worden gezien als een eigenschap van de ruimtetijd *zelf* (en niet van iets *op* de ruimtetijd): een energie die gedragen wordt door de ruimtetijd en daarom niet afhangt van de grootte van de ruimtetijd. Het is een experimenteel feit dat er wel degelijk een energievorm in het heelal aanwezig is dat aan deze eigenschap voldoet: ongeveer driekwart van *alle* energie, lijkt van deze bijzondere vorm te zijn. We zullen hier later op terugkomen; op dit moment zullen we wederom de Friedmannvergelijkingen gebruiken om uit te rekenen hoe de druk van deze materie eruit ziet. Op dezelfde manier als eerder, kan uit de Friedmannvergelijkingen worden gevonden dat $n = -1$, en dus dat de druk ten gevolge van de kosmologische constante eveneens constant is, en gegeven wordt door

$$P(t) = -\rho(t) = -\rho_c = \text{const.} \quad (437)$$

Merk op dat deze druk *negatief* is! Nu druk en dichtheid zijn gevonden, kunnen de Friedmannvergelijkingen gebruikt worden om de schaafactor uit te rekenen. Zij worden gegeven door

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_c, \\ \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} &= \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_c. \end{aligned} \quad (438)$$

De oplossing is wederom eenvoudig te vinden, en is

$$a(t) = a_0 e^{\sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2}\rho_c}t}, \quad (439)$$

waarin a_0 een integratieconstante is. De uitdijing van dit heelal is exponentieel, en gaat dientengevolge *steeds sneller*. Merk op hoe dit indruist tegen ons begrip van zwaartekracht: we zouden verwachten dat een aantrekkende kracht de uitdijingssnelheid van het heelal zou afremmen (zoals ook het geval was voor een heelal gevuld met koude materie of straling). Wederom blijkt hier dat de kosmologische constante een bijzonder vreemde soort energie is!

8.6 Het Standaard Model van de kosmologie

Het heelal dijt uit. Dit was een direct gevolg van de Friedmannvergelijkingen, en was bovendien experimenteel geverifieerd. Dit betekent dat de energiedichtheid van de verschillende energievormen vroeger vele malen groter was dan tegenwoordig. Dit uit zich in een afnemende hoeveelheid energie die deeltjes kunnen uitwisselen. De uitwisselingsenergie van de deeltjes bepaalt in welke mate zij interactie aangaan met andere deeltjes, en zo volgt dat er verschillende maten van interactie hebben plaatsgevonden naarmate het heelal ouder werd en groeide.

Nu we de schaafactoren ten gevolge van verschillende soorten energie en materie hebben berekend, kunnen wij ze gebruiken om een model te maken van de geschiedenis van het heelal: wanneer hebben welke fysische processen plaatsgevonden? We zullen hierbij gebruik moeten maken van een aantal verschillende takken van de fysica, zoals de atoomfysica en de subatomaire fysica. Het resultaat staat bekend als het *Standaard Model van de kosmologie*. De berekeningen die we nu zullen doen, nemen niet alle subtiele (en belangrijke!) aspecten van het verhaal in beschouwing, maar zullen desondanks tot goede schattingen leiden van de ordes van grootte van de tijden waarop belangrijke gebeurtenissen hebben plaatsgevonden.

⁸⁰Een andere mogelijkheid die is bestudeerd, is dat energie niet behouden is op kosmische schaal: er wordt spontaan materie en/of energie gecreëerd uit het niets, en dit in precies de juiste hoeveelheden om de afname van de dichtheid ten gevolge van het groeien van het volume te compenseren. Deze aanpak is echter niet erg succesvol gebleken, en wordt door weinig kosmologen aangehangen.

We zullen aannemen dat de interactie tussen verschillende soorten materie altijd heeft plaatsgevonden door uitzending van fotonen of gluonen. Dit is in overeenstemming met onze kennis van de atoom- en subatomaire fysica, die zegt dat, inderdaad, de interactie tussen quarks (voornamelijk) wordt bewerkstelligd door uitzending van gluonen, en de interactie tussen elektronen en protonen door uitzending van fotonen. Beide typen deeltjes zijn massaloos, en kunnen we daarom opvatten als straling. De energiedichtheid voor straling in een uitdijend heelal zijn we al tegengekomen: we hadden toen gezien dat de energiedichtheid van straling schaaft met $a^{-4}(t)$. De energie per foton⁸¹ is niets anders dan de energiedichtheid maal het volume; de laatste schaaft met $a^3(t)$, en zo volgt dat de energie E_{foton} van een enkel foton het volgende verband kent met de schaaftactor,

$$E_{\text{foton}} \propto \frac{1}{a(t)}. \quad (440)$$

Deze relatie geldt zowel in een stralingsgedomineerde- als koude materie gedomineerd heelal. Het is pas wanneer de specifieke functie voor de schaaftactor wordt ingevuld, dat het verschil tussen beide situaties zichtbaar wordt. Dit leidt tot functies voor de energieën van een foton in een stralingsgedomineerd heelal ($E_{\text{foton, straling}}$) en in een materie gedomineerd heelal ($E_{\text{foton, materie}}$), gegeven door

$$E_{\text{foton, straling}} = A_{\text{stralings}} t^{-1/2}, \quad E_{\text{foton, materie}} = A_{\text{materie}} t^{-2/3}. \quad (441)$$

Hierin zijn de A 's constanten, die nog nader bepaald zullen worden.

Deze twee vergelijkingen zijn de sleutel tot het berekenen van de leeftijd van het heelal op het moment dat belangrijke fysische gebeurtenissen plaatsvonden. Het enige dat gedaan moet worden, is invullen welke energie de fotonen op dat moment gehad hebben, en dan de bijbehorende tijdstippen uitrekenen. Hiertoe is wel nog wat extra informatie nodig: de constanten $A_{\text{stralings}}$ en A_{materie} zullen een waarde toegekend moeten worden, en verder moet er een idee zijn van wanneer welk van de twee vergelijkingen gebruikt mag worden. Dit wil zeggen: kunnen we een schatting maken van de leeftijd van het heelal waarop de invloed ten gevolge van koude materie dominanter werd dan die ten gevolge van straling?

De laatste vraag kunnen we beantwoorden met behulp van een experimenteel gegeven: als er gemeten wordt hoeveel energie er ongeveer per volume-eenheid aan fotonen en aan atomen is in het heelal, dan wordt er gevonden dat er op dit tijdstip ongeveer 1000 keer meer energiedichtheid ten gevolge van materie is, dan ten gevolge van fotonen. Er geldt

$$\left(\frac{\rho_{\text{materie}}}{\rho_{\text{fotonen}}} \right)_{\text{nu}} \approx 1000. \quad (442)$$

De linkerkant van deze vergelijking schaaft, volgens vergelijkingen (426) en (432), met de schaaftactor

$$a(t_{\text{nu}}) \propto 1000. \quad (443)$$

Er staat hier nu het evenredigheids-teken ($\propto$), omdat we alleen weten dat de dichtheden evenredig zijn met schaaftactoren. We kennen de waarden van de evenredigheidsconstanten niet. Het zal blijken dat we die ook niet nodig hebben.

Vergelijking (443) geldt in het huidige heelal, $t = t_{\text{nu}}$. We kennen echter ook een dergelijke vergelijking ten tijde van het moment waarop de energiedichtheid ten gevolge van straling even

⁸¹Net als eerder zullen we, voor het gemak, alleen fotonen bij naam noemen, en in het achterhoofd houden dat de volgende resultaten ook gelden voor gluonen.

groot was als die ten gevolge van materie: per definitie zijn deze dichtheden dan gelijk. Er geldt

$$\left(\frac{\rho_{\text{materie}}}{\rho_{\text{fotonen}}} \right)_{\text{omslag}} \equiv 1. \quad (444)$$

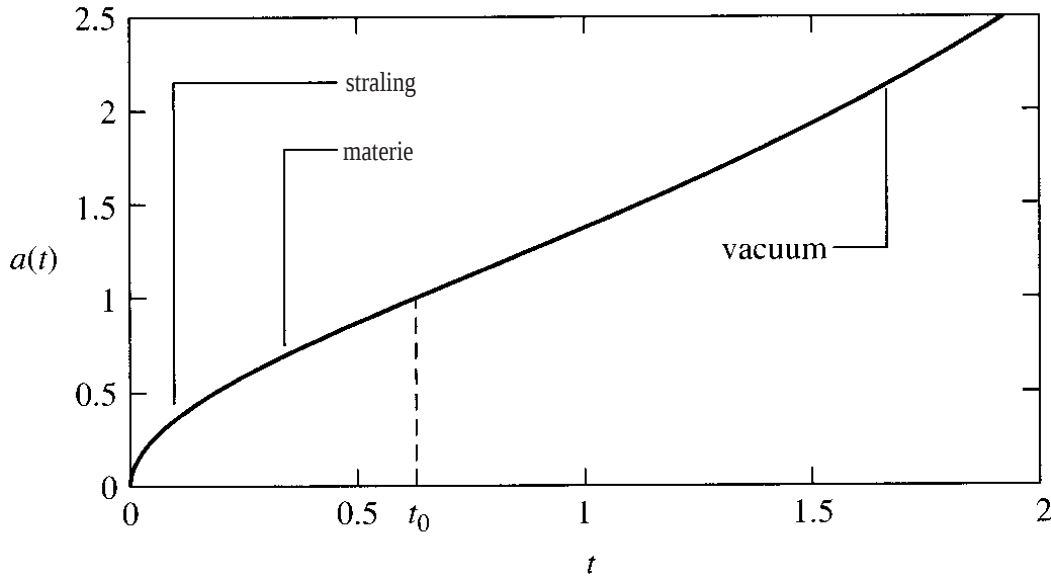
We bedoelen met het label *omslag*, ten tijde van het omslagpunt van een stralingsgedomineerd heelal naar een materiegedomineerd heelal. Er geldt vervolgens weer

$$a(t_{\text{omslag}}) \propto 1. \quad (445)$$

Ook hier geldt dat we alleen weten dat er een evenredigheid is. Echter, en dit is van cruciaal belang, de onbekende evenredigheidsconstante is *dezelfde* als in vergelijking (441). Dit betekent dat we de twee vergelijkingen (442) en (444) op elkaar kunnen delen en dan vinden

$$(a)_{\text{nu}} = 1000 \cdot (a)_{\text{omslag}}, \quad (446)$$

nu *zonder* evenredigheidsteken. Merk op dat we het wegvallen van evenredigheidsconstanten in de schaalfactoren al hadden voorspeld in een voetnoot van een vorige sectie.



Figuur 64: Evolutie van het universum binnen het vlakke Friedmann-Robertson-Walker model. Hierbij is de willekeurige aanname gedaan dat de energiedichtheid gelijk verdeeld is over straling, materie en vacuüm. Vlak na de Big Bang is de expansie gedomineerd door straling ($a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$), daarna door materie ($a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$) en uiteindelijk door het vacuum ($a(t) \propto e^{Ht}$). De huidige leeftijd van het heelal wordt gegeven door t_0 .

Vergelijking (446) dat het heelal ten tijde van het omslagpunt, ongeveer 1000 keer kleiner was dan dat het nu is. Dit is genoeg informatie om het moment van omslagpunt te berekenen: we hoeven alleen maar deze verhouding van schaalfactoren om te zetten in een verhouding tussen de leeftijd van het heelal nu en tijdens het omslagpunt, en dan de huidige leeftijd van het heelal in te vullen. De eerste stap kunnen we doen door te bedenken dat in het huidige heelal de schaalfactor gaat als $\propto t^{2/3}$, en ten tijde van het omslagpunt, bij benadering, eveneens (immers, net *na* het omslagpunt was het heelal materiegedomineerd geworden). We vinden dan ook voor de relatie tussen de leeftijd van het heelal nu, en de leeftijd van het heelal ten tijde van het omslagpunt

$$t_{\text{nu}}^{2/3} = 1000 t_{\text{omslag}}^{2/3} \quad \rightarrow \quad t_{\text{omslag}} \approx \frac{t_{\text{nu}}}{10^5}. \quad (447)$$

Een schatting van de leeftijd van het heelal hadden we al gevonden in de bespreking van de wet van Hubble, en gevonden was $t_{\text{nu}} \approx 10^{10}$ jaar. Ingevuld geeft dit dat het heelal op het moment dat het van stralingsgedomineerd overging naar materiegedomineerd, een leeftijd had van ongeveer 10^5 jaar.

De leeftijd van het heelal kunnen we ook gebruiken om de constanten A_{straling} en A_{materie} te bepalen. We zullen met de laatste beginnen. Hiertoe gebruiken we weer een experimenteel gegeven: de fotonen die ons vanuit het heelal bereiken, hebben nagenoeg allemaal⁸² een temperatuur van 2,7 Kelvin. Dit komt overeen⁸³ met een energie van de orde van 10^{-23} Joule. Ingevuld in de tweede vergelijking (441) (het heelal is immers tegenwoordig materiegedomineerd), tezamen met het feit dat het heelal nu ongeveer 10^{10} jaar oud is, wordt de constante A_{materie} vastgelegd. We vinden

$$A_{\text{materie}} \approx 10^{-12} J s^{2/3} \approx 10^{-2} \text{GeV} s^{2/3}. \quad (448)$$

We hebben hier de constante omgezet in de eenheid Giga-elektroVolt maal seconde^{2/3}; dit omdat we dadelijk energieën uit de subatomaire fysica nodig zullen hebben, en voor deze waarden de eenheid Joule een onhandig grote maat voor de energie is.

Tenslotte zullen we ook de waarde van de constante A_{straling} bepalen. Hiertoe hoeven we ons alleen te realiseren dat op het omslagpunt van het stralingsgedomineerde heelal naar een materiegedomineerd heelal, per definitie

$$(E_{\text{foton, straling}})_{\text{omslag}} \equiv (E_{\text{foton, materie}})_{\text{omslag}}. \quad (449)$$

Vergelijking (441) ingevuld, tezamen met de al gevonden waarde voor A_{materie} en het feit dat ten tijde van het omslagpunt het heelal ongeveer 10^5 jaar oud was, geeft dan direct een orde van grootte voor de waarde van de constante A_{straling} . We vinden

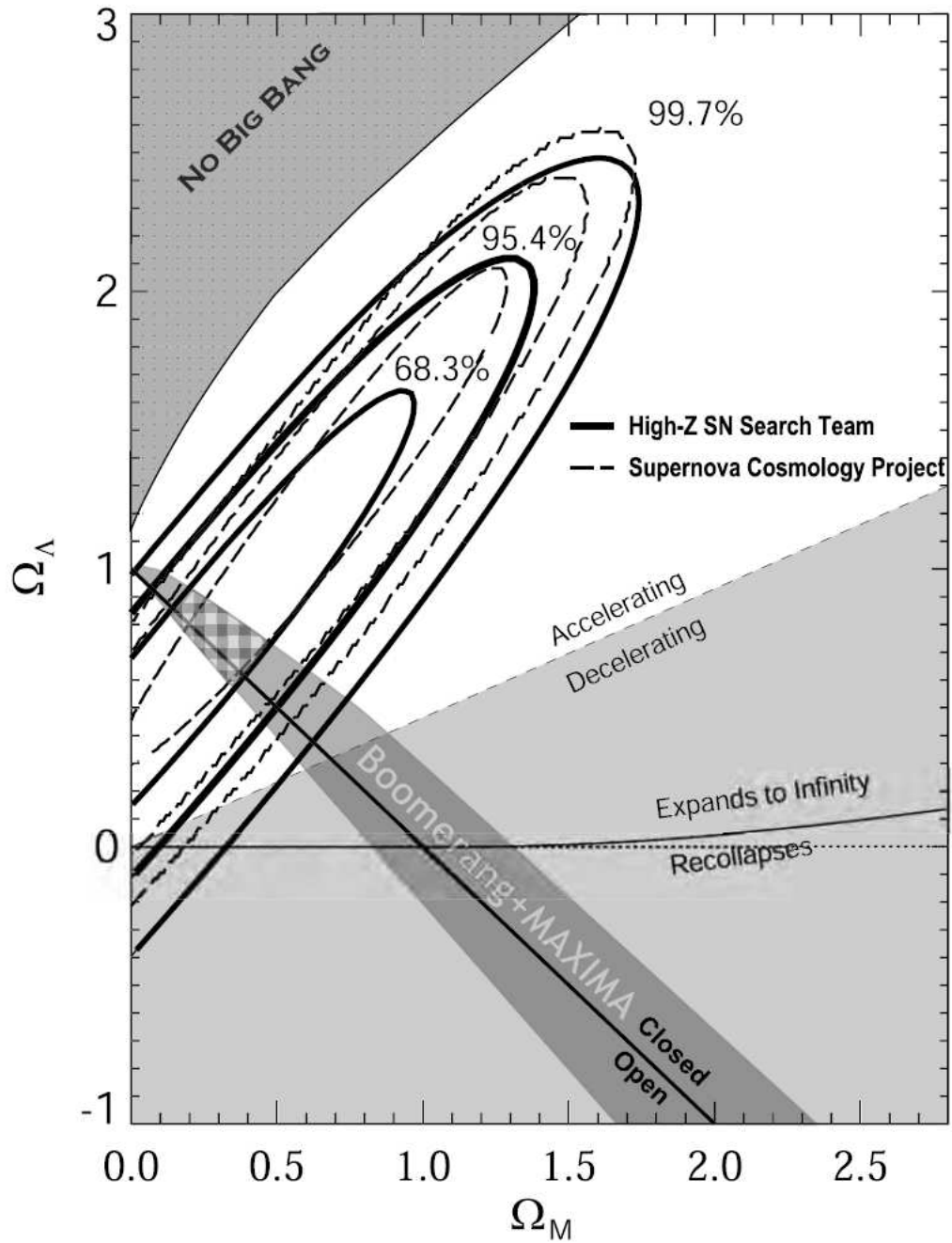
$$A_{\text{straling}} \approx 10^{-13} J s^{1/2} \approx 10^{-3} \text{GeV} s^{1/2}. \quad (450)$$

Hiermee liggen de twee relaties (441) tussen de energie van een foton en de leeftijd van het heelal geheel vast. We zullen deze nu gebruiken om een idee te krijgen van de geschiedenis van het heelal, door uit te rekenen wanneer enkele belangrijke fysische gebeurtenissen hebben plaatsgevonden.

Als voorbeeld beschouwen we het moment waarop quarks samensmolten tot baryonen, en dit moment draagt de naam *baryogenese*. De subatomaire fysica leert ons dat dit plaatsvond op het moment dat de energie van de gluonen te veel was afgenomen door de uitdijning van het heelal om de quarks nog de energie te leveren de onderlingen aantrekkingskracht het hoofd te kunnen bieden: dit vond plaats bij een energie van ongeveer 1 GeV. In welk van de twee vergelijkingen (441) moeten we deze waarde stoppen? Vond baryogenese plaats in een stralingsgedomineerd heelal, of een materie-gedomineerd heelal? Het antwoord is dat het plaatsvond in het stralingsgedomineerde heelal. Dit kunnen we zien doordat we al gezien hadden dat het omslagpunt plaatsvond toen de leeftijd van het heelal ongeveer 10^5 jaar was, en dit via vergelijking (441) overeenkomt met een deeltjesenergie van ongeveer 10^{-5} GeV. Dit is veel minder dan de energie tijdens baryogenese, en dus volgt dat dit proces plaats heeft gevonden in het stralingsgedomineerde heelal. We moeten daarom nu de eerste vergelijking (441) gebruiken om uit te rekenen op welk tijdstip baryogenese heeft plaatsgevonden. Hiertoe vullen we de energie van 1 GeV in, en

⁸²Zie ook de discussie op het begin van dit hoofdstuk. Daar werd dit experimentele feit al genoemd, en gebruikt om het kosmologisch principe te motiveren.

⁸³Het verband tussen energie en temperatuur wordt bepaald door de zogenaamde *Boltzmannconstante* $k_B = 1,4 \cdot 10^{-23}$ J/K.



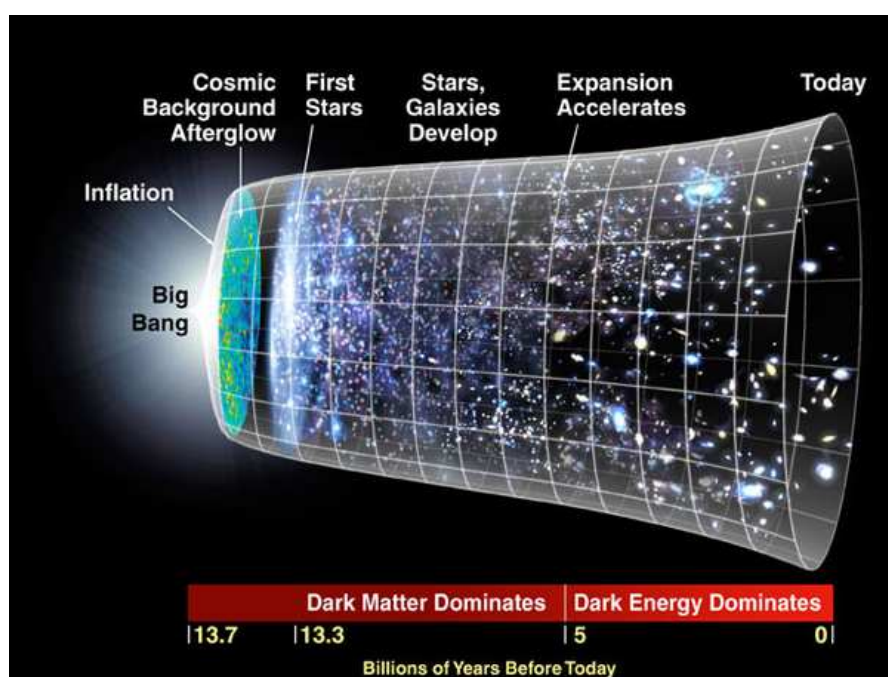
Figuur 65: Structuur van het universum volgens type Ia supernovae metingen en CMBR metingen. De horizontale as toont de fractie van de kritisch dichtheid ρ_0 (dat is de dichtheid die nodig is om een vlak heelal te krijgen) voor materie, $\Omega_M = \rho/\rho_0$. De verticale as is de fractie donkere energie Ω_Λ , die wordt bijgedragen door de kosmologische constante Λ . Als deze optellen tot 1, dan is het heelal vlak, want dat is de totale energiedichtheid gelijk aan de kritische dichtheid. Vlakke heelallen liggen op de schuine neerwaartse lijn. De gebieden boven deze lijn hebben meer massa en corresponderen met een gekromd en gesloten heelal; de gebieden eronder met een open heelal. De verschillende ovale gebieden tonen de delen van het diagram die consistent zijn met de meetgegevens. Er is maar een klein deel van het diagram waar de meetgegevens overlappen. Het centrum van dit gebied correspondeert met een model waarbij de massadichtheid van het universum 30% is en de energiedichtheid van de kosmologische constante 70% van de kritische dichtheid. We vinden een vlak expanderend heelal.

vinden dan een leeftijd van ongeveer 10^{-4} seconde. Blijkbaar zijn de quarks samengesmolten tot de eerste protonen en neutronen toen het heelal nog maar een tienduizendste seconde oud was!

Op dezelfde manier zijn de tijdstippen van andere belangrijke fysische processen uit te rekenen. Zo leert de quantumveldentheorie ons dat de electromagnetische kracht en de zwakke kernkracht vroeger een aspect waren van een enkele kracht (*elektrozwakke kracht*), en dat zij van elkaar zijn ontkoppeld toen de fotonen een energie hadden van ongeveer 10^3 GeV, en op dezelfde manier als zojuist voorgerekend volgt dat het heelal op dat moment ongeveer 10^{-10} seconde oud was.

Een tabel met enkele interessante fysische processen, de bijbehorende energieën, en de daaruit volgende leeftijden van het heelal volgt.

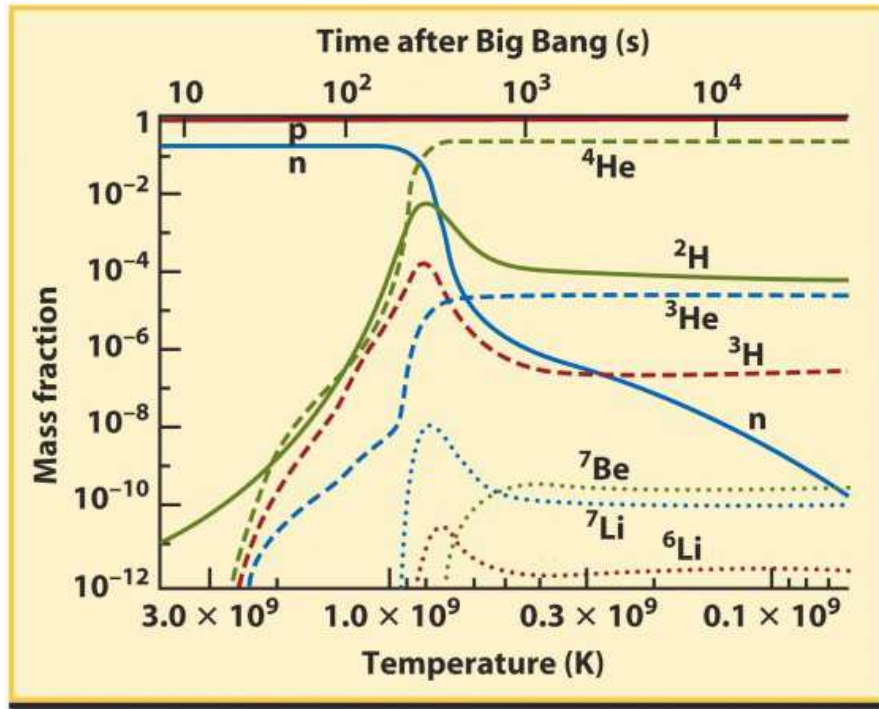
Gebeurtenis	Fysische gebeurtenis	Energie per foton	Leeftijd
oerknal	begin van het heelal	∞ (?)	0 s
inflatie	heelal dijt versneld uit	?	?
ontkoppeling	elektrozwakke kracht ontkoppelt	10^3 GeV	10^{-10} s
baryogenese	quarks vormen baryonen	1 GeV	10^{-4} s
nucleosynthese	baryonen vormen atoomkernen	10^{-3} GeV	100 s
recombinatie	elektronen binden aan atoomkernen	10^{-9} GeV	10^5 jaar
omslag	heelal wordt materiegedomineerd	10^{-9} GeV	10^5 jaar
het heden	fotonen hebben energie van 2,7 Kelvin	10^{-12} GeV	10^{10} jaar



Figuur 66: Schematische weergave van enkele interessante fysische processen en de bijbehorende leeftijden van het heelal.

Hiermee hebben we een globaal beeld gevormd van de geschiedenis van het heelal: het Standaard Model van de kosmologie. We zullen dit nu in woorden samenvatten. Het heelal is ongeveer 10^{10} jaar oud, en is vanaf zijn ontstaan aan het uitdijen geweest, waardoor de energie per foton en gluon altijd is blijven afnemen. Het is begonnen als stralingsgedomineerd ($a(t) \propto \sqrt{t}$). Quarks smolten samen tot baryonen na ongeveer 10^{-4} seconden, baryonen smolten samen tot atoomkernen na ongeveer 100 seconden, en elektronen bonden zich aan deze atoomkernen na ongeveer

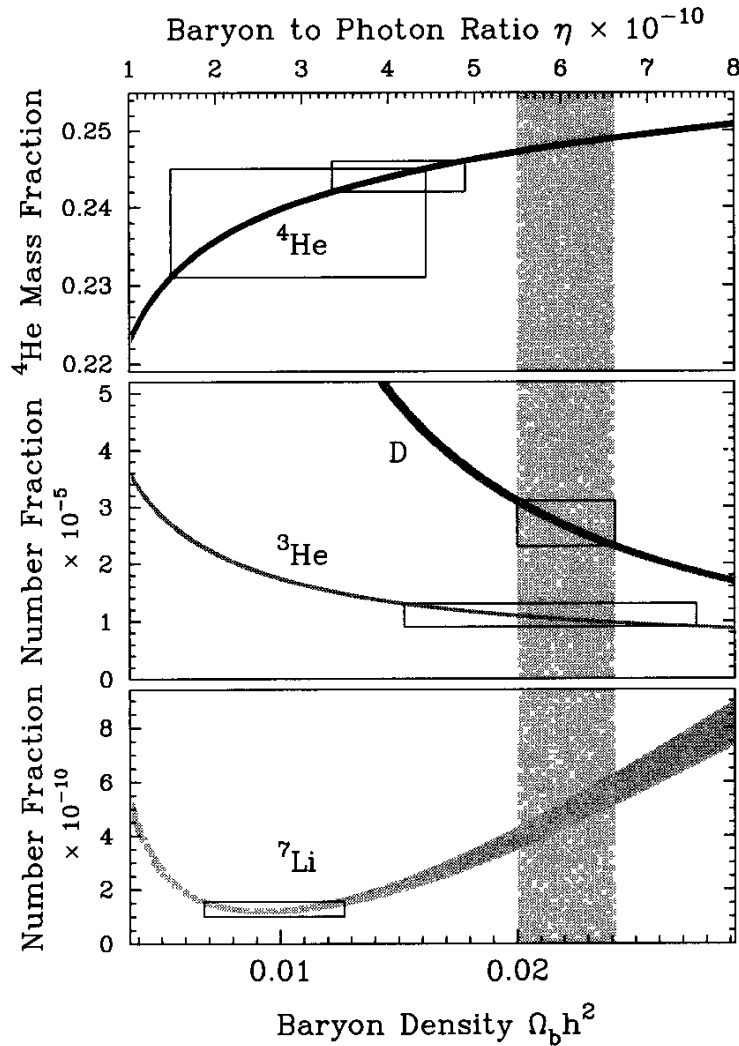
10^5 jaar. Op ongeveer hetzelfde moment ging het heelal over van stralingsgedomineerd naar materiegedomineerd ($a(t) \propto t^{3/2}$). In de resterende tijd tot tegenwoordig, zijn de sterren gevormd, nevels, planeten, en leven.



Figuur 67: Voorspellingen voor de primordiale abundenties van de lichtste elementen, getoond als functie van tijd en temperatuur na de Big Bang.

Primordiale nucleosynthese begon pas toen het universum meer dan 10 seconden oud was en door haar expansie was afgekoeld tot een temperatuur van ongeveer 3×10^9 K. Voor deze tijd was de temperatuur zo hoog, dat de lichte kernen, gevormd door nucleon en nucleaire botsingen, na hun vorming ook weer direct uiteen vielen. Voor temperaturen lager dan 3×10^9 K en dus voor tijden groter dan 10 s na de Big Bang bleef ^4He gebonden, terwijl de lichtere kernen nog steeds uiteen vielen. Hierdoor kon nucleosynthese nog steeds geen aanvang nemen. Echter, ongeveer 3 minuten later, waarbij de temperatuur door verdere expansie afgekoeld was tot minder dan 10^9 K, waren deutronen gevormd door de reactie $n + p \rightarrow d + \gamma$ stabiel. Vervolgens leidde neutronen protonvangst door deutronen tot ^3H en ^3He . Het ^3H gaat via beta-verval over in ^3He en dat kan op haar beurt door neutronvangst weer overgaan in ^4He . De bijdrage van dit laatste proces is echter klein ten opzichte van de vorming van ^4He door directe neutronvangst van ^3He of door de reactie $d + ^3\text{He} \rightarrow p + ^4\text{He}$. Botsingen tussen ^3H en ^3He met ^4He creëerde kleine hoeveelheden ^7Li en ^7Be . Dit laatste kan via beta-verval overgaan in het stabiele ^7Li , hetgeen weer de reactie $p + ^7\text{Li} \rightarrow ^4\text{He} + ^4\text{He}$ kan aangaan. Ook andere lichte kernen kunnen op deze wijze vernietigd worden, bijvoorbeeld $n + ^3\text{He} \rightarrow p + ^3\text{H}$. De hoeveelheden ^2H , ^3H , ^3He , ^4He en ^7Li geproduceerd in de Big Bang is derhalve gevoelig voor de baryondichtheid, of wel de verhouding van baryonen tot fotonen (ongeveer 3×10^{-10}), maar ook voor de expansiesnelheid (snelheid van afkoeling) van het beginnend universum. De relatieve abundantie van een gegeven kern is gevoelig voor de reactiesnelheid van diverse kernreacties. Figuur 67 toont de abundenties van de lichte kernen gevormd in de Big Bang ten opzichte van de abundantie van waterstof. Hoe groter de baryonendichtheid, ofwel de massafractie in figuur 68, des te groter is de vernietigingssnelheid van d , ^3H en ^3He . De gemeten

abondanties van d , ${}^3\text{He}$ en ${}^7\text{Li}$ komen overeen met een η dicht bij het minimum in de ${}^7\text{Li}$ curve. De ${}^4\text{He}$ -kern heeft de grootste abundantie vanwege haar grote bindingsenergie. De expansiesnel-



Figuur 68: Voorspellingen en metingen voor de primordiale abundanties van de lichtste elementen, getoond als functie van de baryon-foton verhouding η .

heid van het universum neemt toe met het aantal neutrinofamilies en berekeningen bevestigen dat er drie neutrinofamilies bestaan. Dit komt overeen met waarnemingen van Z^0 verval. De resultaten van Big Bang nucleosynthese zijn in overeenstemming met het WMAP resultaat dat het universum bestaat uit $4,6 \pm 0,1$ % gewone baryonische materie, uit $23,3 \pm 1,3$ % van een onbekend soort ‘dark matter’ genaamd, omdat deze niet zichtbaar is, maar wel gravitationele effecten heeft, en uit $72,1 \pm 1,5$ % van iets dat we ‘dark energy’ noemen.

Dit model is niet compleet. Zo weten we niet wat er gebeurd is op tijdschalen van de orde van $< 10^{-44}$ seconde. De reden is, dat op dat moment de afstandsschalen zo klein geweest zijn dat quantumeffecten een rol hebben moeten spelen in de interactie tussen deeltjes, en wij op dit moment (nog) niet beschikken over een theorie die zulke effecten weet te beschrijven in combinatie met zwaartekracht. Vermoedelijk zal een soortgelijke theorie (*quantumzwaartekracht*) verklaren waar de quarks en elektronen vandaan gekomen zijn, en waarom er meer deeltjes zijn dan antideeltjes: in het Standaard Model van de kosmologie hebben we de aanwezigheid en hoeveelheid

van zulke deeltjes als *gegeven* beschouwd.

Verder zijn er redenen om aan te nemen dat het heelal in zijn allereerste fractie van een seconde een periode heeft gekend van extreme snelle expansie: *inflatie*. Het is om deze reden dat we dit alvast in de tabel hebben ingevuld. Dit is het onderwerp van het volgende hoofdstuk, en zal daar worden besproken.

Merk op, tenslotte, dat het experimenteel moeilijk is om uitspraken te doen over de geschiedenis van het heelal van voor recombinitie (10^5 jaar). Immers, het is vanaf dat moment geweest dat fotonen, per definitie van recombinitie, te weinig energie hadden om nog interactie te hebben met atomen (materie), en daarom pas vanaf dat moment vrij konden rondbewegen. Dit betekent dat het meten aan fotonen ons niet verder terug kan doen kijken dan het tijdstip van recombinitie. Het is om deze reden dat nieuwe typen telescopen gebruikt worden om het vroege heelal te bestuderen: telescopen gebaseerd op neutrino's (Antares en KM3NeT, Amanda en IceCube), zwaartekrachtsgolven (Virgo, LIGO, GEO600, Einstein Telescope en LISA).

9 Kosmologische inflatie

Het Standaard Model van de kosmologie geeft ons een globaal beeld van de evolutie van het heelal, maar kent enkele subtiele, maar ernstige tekortkomingen: er is een aantal zaken die nadere verklaring behoeven. Hier zullen we deze nader beschouwen, en vervolgens een oplossing aandragen die deze tekortkomingen in een klap oplost: kosmologische inflatie. De details van de inflatie hangen af van het model dat gekozen wordt; in dit hoofdstuk zullen we een inflatiemodel in detail beschrijven om uit te werken hoe lang inflatie geduurd heeft. Inflatie dient slechts een korte tijd geduurd te hebben, om aansluiting te vinden bij het oerknalmodel uit het vorige hoofdstuk, en we zullen dan ook een mechanisme introduceren om dit te doen: verhitte Tenslotte zullen we dit mechanisme uitwerken.

9.1 Tekortkomingen van het Standaard Model

Ten eerste is er het *horizon probleem*. Om dit probleem goed te beschrijven, moet het concept van de *horizon* worden behandeld. De horizon van een waarnemer is de grootste afstand waarover een invloed, elke invloed, gereisd kan hebben om deze waarnemer te bereiken; het is dus een bovenlimiet voor de grootte van de ruimte waarmee de waarnemer nog in causaal contact kan staan. We hadden al gezien dat geen enkele invloed sneller kan gaan dan het licht, en zo volgt dat de horizon van een waarnemer ook de grootte is van het zichtbare heelal van deze waarnemer.

Thermisch evenwicht tussen verschillende gebieden van het heelal kan alleen zijn bewerkstelligd door middel van de fotonen van de kosmologische achtergrondstraling. Echter, deze fotonen zijn, zoals we al hadden gezien, ontkoppeld van de materie ongeveer 10^5 jaar na de oerknal: na dit moment is het niet meer mogelijk geweest om verschillende gebieden van het heelal in thermisch evenwicht met elkaar te brengen. Tijdens deze ont koppeling was de horizon van een waarnemer vele malen kleiner dan nu, en we zouden daarom verwachten dat gebieden waarin tegenwoordig fotonen met dezelfde temperatuur worden gevonden, veel kleiner zijn dan het nu zichtbare heelal. Het tegenovergestelde blijkt waar te zijn: meetgegevens laten zien dat ons *hele* zichtbare heelal nagenoeg dezelfde temperatuur heeft (we hadden dit feit eerder al gebruikt om het kosmologisch principe te rechtvaardigen). De paradox die hieruit volgt noemen we het horizon probleem.

Ten tweede is er het *vlakheidsprobleem*. Metingen wijzen uit dat het heelal tegenwoordig een metriek heeft die extreem vlak is: de vlakke Robertson-Walker metriek uit het vorige hoofdstuk. We hadden echter al berekend dat de uitdijing van het heelal voorspelt dat de kromming van het heelal steeds kleiner dient te worden: $\Omega \rightarrow 0$ als t groter wordt. Dit impliceert dat de metriek in het vroege heelal *nog veel meer* geleken heeft op de perfect vlakke Robertson-Walker metriek, teneinde de huidige vlakheid te verklaren. Dit is het vlakheidsprobleem: via welk mechanisme is de vroegste waarde van de vlakheid zo dicht bij de perfecte Robertson-Walker vlakheid komen te liggen? Deze vraag kan ontweken worden door *aan te nemen* dat het heelal altijd al precies vlak is geweest. Dit leidt echter tot de vraag *waarom* het heelal begonnen is met precies de kritische dichtheid. Het Standaard Model van de kosmologie geeft geen antwoord op deze vragen.

Tenslotte is er het *probleem van de missende deeltjes*. Veel van de moderne theorieën van deeltjesfysica voorspellen het bestaan van exotische, nog niet gemeten deeltjes; voorbeelden zijn supersymmetrische deeltjes en de magnetische monopolen. Deze deeltjes zijn typisch heel zwaar, en zijn daarom moeilijk (danwel praktisch onmogelijk) te creëren in aardse deeltjesversnellers. Echter, in het heel vroege heelal zijn temperaturen hoog genoeg geweest om de natuurlijke creatie van zulke deeltjes aannemelijk te maken. Geen van deze deeltjes is ooit geobserveerd⁸⁴. De vraag

⁸⁴Op zijn minst een enkele keer heeft een onderzoeksgroep beweert een magnetische monopool gemeten te hebben, maar het is daarna geen enkele andere onderzoeksgroep ooit gelukt dit resultaat te reproduceren. Veel deeltjesfysici zijn daarom erg sceptisch over het resultaat, en negeren deze bewering.

is dan ook: als deze deeltjes inderdaad geproduceerd zijn in het vroege heelal, waarom zijn ze dan nooit meer teruggevonden?

Al deze problemen kunnen in één klap worden opgelost door het Standaard Model van de kosmologie uit te breiden met een nieuw concept: *kosmologische inflatie*. Dit is de aanname dat het heelal, vlak na de oerknal, een periode heeft gekend van extreme snelle uitdijning. Mathematisch zullen we dit als volgt definiëren: ten tijde van inflatie geldt⁸⁵

$$\dot{a}(t) > 0, \quad \ddot{a}(t) > 0. \quad (451)$$

Door inflatie te introduceren, kunnen we de drie tekortkomingen van het Standaard Model oplossen. Zo wordt het horizonprobleem opgelost door het feit dat tijdens de inflationaire periode, de schaalfactor $a(t)$ extreem groot wordt. Dit betekent dat een stuk van het heelal waarin thermisch evenwicht al was opgetreden vóór de start van de inflatieperiode, opgeblazen wordt tot veel grotere proporties dan de horizon van een waarnemer in dit deel van het heelal. Het gevolg is dan ook dat, nadat de inflatieperiode is afgelopen, het zichtbare heelal voor deze waarnemer geheel in thermisch evenwicht is, precies zoals we vandaag de dag meten!

Het vlakheidsprobleem wordt opgelost door het feit dat elke ruimte, wanneer opgeblazen tot voldoende grote proporties, vlak lijkt voor een lokale waarnemer. Dit is volkomen vergelijkbaar met het aardoppervlak, dat zo groot is vergeleken met ons lokale waarnemers, dat het ons voorkomt als plat.

Tenslotte is ook het probleem van de missende deeltjes op een triviale manier opgelost door de introductie van een inflatieperiode. Immers, als het heelal tot enorme proporties is opgeblazen, zullen alle exotische deeltjes die gecreëerd zijn vóór de aanvang van de inflatieperiode, worden uitgesmeerd over een zeer groot volume. Dit maakt de kans er een tegen te komen in aardse detectoren bijzonder klein. Uiteraard verklaart inflatie alleen waarom de *aanvankelijke* exotische deeltjes niet gevonden worden, en doet zij geen uitspraak over de deeltjes die eventueel *na* de inflatieperiode gecreëerd zijn. Overigens verwachten we ook niet dat zulke deeltjes in een latere stadium gecreëerd worden. De reden hiervoor is dat, zoals al genoemd, zulke exotische deeltjes typisch heel hoge massa hebben, en het dus heel moeilijk is zulke deeltjes te creëren in een heelal waarin de energiedichtheid afneemt ten gevolge van de expansie.

9.2 De dynamica van kosmologische inflatie

We gaan ons nu bezighouden met de vraag hoe kosmologische inflatie gerealiseerd kan worden: op welke manier kunnen de Friedmannvergelijkingen toegepast worden om inflatie te bewerkstelligen? Een manier hadden we al gezien in de discussie van de kosmologische constante, waar we hadden geconcludeerd dat een energievorm met constante dichtheid ρ_c en toestandsvergelijking $\rho = -P$ een heelal oplevert dat exponentieel uitdijt. Dit is echter niet de enige mogelijkheid om aan vergelijking (451) te voldoen. Als we de tweede Friedmannvergelijking beschouwen, zien we dat inflatie optreedt wanneer de rechterkant van deze vergelijking groter is dan nul; in termen van de toestandsvergelijking, betekent dit dat inflatie gevonden wordt voor alle materie of energie die de eigenschap $n < -\frac{1}{3}$ hebben.

Zulke energie wordt in de klassieke natuurkunde niet gevonden. Echter, in de quantumfysica zijn zulke energievormen wel degelijk te realiseren, door energie te beschrijven in termen van *velden* in plaats van deeltjes. We zullen dan ook nu verder gaan met het definiëren van een veld, en dit zodanig te construeren dat het een energiedichtheid en druk kent die voldoen aan een

⁸⁵Merk op dat een heelal met een kosmologische constante precies aan deze definitie voldoet, en dus dat we onze huidige uitdijning als inflatie zouden kunnen bestempelen. We zullen echter de naam inflatie reserveren voor versnelde expansie in het *vroege* heelal.

toestandsvergelijking waarin $n < -\frac{1}{3}$. Het is dan vervolgens aan experimentele natuurkunde om uit te maken of dit veld gemeten kan worden.

Het model dat het meest gebruikt wordt, is dat van een scalarveld $\Phi(t)$ dat alleen afhankelijk is van de tijd en niet van de ruimte. Immers, het kosmologisch principe suggereert dat alle energie en materie homogeen en isotroop verdeeld dient te zijn, en de keuze voor een vector- of tensorveld is niet in overeenstemming met de eis van isotropie vanwege de rotatie-afhankelijkheid van zulke velden; verder zou een plaatsafhankelijkheid niet in overeenstemming zijn met de eis van homogeniteit. Een scalarveld kent een Lagrangiaan-dichtheid gegeven door

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\Phi(t))(\partial_\nu\Phi(t)) - V(\Phi(t)), \quad (452)$$

waar in het huidige geval, alle ruimtelijke afgeleiden geen bijdragen leveren. Bij elke Lagrangiaan-dichtheid hoort een actie S , gegeven door

$$S = \int d^3x dt \sqrt{-g} \mathcal{L} \quad (453)$$

waarin, zoals eerder beargumenteerd, g de determinant is van de metriek; in het huidige geval gebruiken we de vlakke Robertson-Walker metriek, vergelijking (8.4), en is de determinant daarom gegeven door

$$g = -a^6(t). \quad (454)$$

Via de Euler-Lagrange vergelijkingen kunnen we nu de bewegingsvergelijking voor het scalarveld $\Phi(t)$ afleiden. Dit is een wat lange berekening, maar relatief eenvoudig aangezien het veld louter van de tijd afhangt, en het resultaat is dan ook snel gevonden. Het scalarveld $\Phi(t)$ evolueert in de tijd volgens de bewegingsvergelijking

$$\ddot{\Phi}(t) + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\Phi}(t) + c^2\partial_\Phi V(\Phi(t)) = 0. \quad (455)$$

Merk op dat de details van de evolutie van het scalarveld afhangen van de potentiële energiedichtheid $V(\Phi(t))$; de verschillende soorten modellen van kosmologische inflatie worden dan ook gekenmerkt door de keuze van deze grootte. We zullen hier nog niet in detail op in gaan; in alles wat volgt zullen we geen aannames maken voor de vorm van $V(\Phi(t))$, en dientengevolge blijven al onze volgende conclusies zo algemeen mogelijk.

Elke Lagrangiaandichtheid leidt tot een energie-impuls tensor

$$T_{\mu\nu} = (\partial_\mu\Phi)(\partial_\nu\Phi) + g_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (456)$$

Deze uitdrukking kunnen we gebruiken om de druk en dichtheid ten gevolge van het scalarveld te berekenen. Hiertoe vullen we onze huidige Lagrangiaandichtheid en metriek in, en vergelijken we de resulterende energie-impuls tensor met die van de Friedmann vloeistof, vergelijking (419). De uitdrukkingen voor de dichtheid en druk kunnen dan direct worden afgelezen, en gevonden wordt dat deze gegeven zijn door

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\dot{\Phi}^2(t) + V(\Phi(t)), \\ P(t) &= \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\dot{\Phi}^2(t) - V(\Phi(t)). \end{aligned} \quad (457)$$

Merk op dat de eerste term gezien kan worden als de kinetische energiedichtheid van het scalarveld, en de tweede term als de potentiële energiedichtheid; de uitdrukking voor de dichtheid ρ van de totale energie klopt dan ook precies met wat we zouden verwachten⁸⁶.

We beschouwen een heelal dat, in zijn vroegste epoch, gevuld is met de gebruikelijke soorten energie: koude materie, straling, een kosmologische constante, en voegen nu een inflatonveld toe. Al deze invloeden bepalen, via de Friedmannvergelijkingen, de mate waarin de schaalfactor evolueert in de tijd. Als de invloed van het inflatonveld het grootst is, zal het heelal een periode ingaan van exponentiële uitdijning. Het gevolg is dan, dat de andere invloeden vrijwel meteen verwaarloosd kunnen worden. Immers, de energiedichtheid en druk van een gebruikelijke vorm van energie en materie, is evenredig met de inverse van de schaalfactor tot een bepaalde macht (zie onze resultaten uit het vorige hoofdstuk), en zullen daarom asymptotisch (en, voor typische inflatiemodellen, heel snel) naar nul gaan. Alle termen in de Friedmannvergelijkingen die evenredig zijn met druk en dichtheid kunnen we daarom negeren bij de beschrijving van het heelal in een inflatie periode. Al met al is nu gevonden dat we het heelal in een inflatieperiode kunnen beschrijven door de Friedmannvergelijking met daarin louter de invloed van het inflatonveld gesubstitueerd, en, uiteraard, de bewegingsvergelijking voor dat inflaton veld, 455. De resulterende set bewegingsvergelijkingen noemen we de *inflatievergelijkingen*

$$\begin{aligned}\ddot{\Phi}(t) + 3H(t)\dot{\Phi}(t) + c^2\partial_{\Phi}V(\Phi(t)) &= 0, \\ H^2(t) &= \frac{8\pi G}{3c^2} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \dot{\Phi}^2(t) + V(\Phi(t)) \right).\end{aligned}\tag{458}$$

Het doen van inflatiekosmologie kunnen we nu als volgt samenvatten: beargumenteer een vorm voor de potentiële energiedichtheid $V(\Phi(t))$, substitueer deze in de inflatievergelijkingen, en los de resulterende set bewegingsvergelijkingen op om de expliciete vorm voor de schaalfactor $a(t)$ en het inflatonveld $\Phi(t)$ te vinden.

Merk op dat het niet gegarandeerd is dat een gevonden oplossing $a(t), \Phi(t)$ inderdaad inflatie ($\dot{a}(t) > 0, \ddot{a}(t) > 0$) beschrijft, voor elke willekeurige vorm voor de potentiële energiedichtheid $V(\Phi(t))$. In de volgende sectie zullen we daarom criteria afleiden die, mits hieraan voldaan wordt, inflatie zullen garanderen.

9.3 De vereenvoudigde inflatievergelijkingen

Nu deze uitdrukkingen gevonden zijn, kunnen we ons buigen over de vraag op welke manier een scalarveld gebruikt kan worden om inflatie te realiseren. Dit is geen triviale vraag: we hadden al gezien dat inflatie volgt wanneer dichtheid en druk leiden tot een toestandsvergelijking met $n < -\frac{1}{3}$, maar beide grootheden hangen op een niet-triviale manier af van de waarde van het scalarveld $\Phi(t)$, welke zelf weer gedictieerd wordt door de bewegingsvergelijking. Het is om deze reden dat men op dit moment vaak de *aanname van langzame evolutie*⁸⁷ maakt: aangenomen wordt dat het scalarveld heel langzaam evolueert in de tijd, zodanig dat we mogen aannemen dat de $\dot{\Phi}$ -termen in uitdrukking (457) voor de dichtheid en druk verwaarloosbaar zijn (fysisch gezien betekent dit dat de kinetische energie van het veld veel kleiner is dan de potentiële energie),

$$\frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \dot{\Phi}^2(t) \ll V(\Phi(t)).\tag{459}$$

⁸⁶De uitdrukkingen voor de dichtheid en druk hadden ook gevonden kunnen worden door *aan ten nemen* dat ρ deze vorm zou hebben, en daarna, zoals voorgedaan was in het vorige hoofdstuk, de Friedmannvergelijkingen te gebruiken om de bijbehorende druk te vinden.

⁸⁷In het Engels: de *Slow Roll Condition*.

Er geldt dan

$$\begin{aligned}\rho(t) &\approx +V(\Phi(t)), \\ P(t) &\approx -V(\Phi(t)).\end{aligned}\tag{460}$$

Merk op dat, onder deze aanname, de toestandsvergelijking de waarde $n = -1$ heeft gekregen, en dit voor alle keuzes voor de potentiële energie $V(\Phi(t))$. In het vorige hoofdstuk hadden we al gezien dat deze waarde van n leidt tot exponentiële expansie van het heelal, en zo is gevonden dat, onder de aanname van langzame evolutie, exponentiële inflatie gevonden wordt *ongeacht de details van het model*. Het scalarveld zullen we in het vervolg dan ook aanduiden met de naam *inflatonveld*; de deeltjes die we aan dit veld kunnen toekennen heten *inflatonen*.

We zullen verder aannemen dat $\ddot{\Phi}(t)$ veel kleiner is dan $3H\dot{\Phi}(t)$, zodat we de eerste term in vergelijking (458) kunnen verwaarlozen; fysisch betekent deze aanname dat we ervan uitgaan dat $\dot{\Phi}(t)$ maar heel langzaam van waarde verandert. Deze voorwaarde is belangrijk, want het zegt effectief dat de kinetische energiedichtheid van het inflaton lang klein blijft, en daarmee voorkomt dat inflatie te snel ten einde komt.

Onder deze aannames zien de inflatievergelijkingen er eenvoudiger uit,

$$\begin{aligned}3H(t)\dot{\Phi}(t) + c^2\partial_{\Phi}V(\Phi(t)) &= 0, \\ H^2(t) - \frac{8\pi G}{3c^2}V(\Phi(t)) &= 0.\end{aligned}\tag{461}$$

Deze zullen we de *Vereenvoudigde Inflatie Vergelijkingen* (VIV) noemen. Voordat we deze gaan oplossen, zullen we eerst twee belangrijke parameters afleiden die ons zeggen wanneer we deze aannames mogen gebruiken. Samengevat gelden de VIV alleen zolang aan

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\dot{\Phi}^2(t)}{V(\Phi(t))} \ll 1, \quad \text{en} \quad \frac{\ddot{\Phi}(t)}{3H(t)\dot{\Phi}(t)} \ll 1\tag{462}$$

voldaan is. Beide eisen kunnen worden herschreven met behulp van de twee VIV zelf, en zo in een vorm worden gegoten waarin alleen de potentiële energiedichtheid $V(\Phi(t))$ voorkomt. Dit maakt het makkelijk om voor een gegeven inflatiemodel snel te zien of de vereenvoudigde inflatievergelijkingen gebruikt mogen worden.

De eerste eis kan worden herschreven als volgt

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\dot{\Phi}^2(t)}{V(\Phi(t))} &= \frac{1}{18H^2(t)} \frac{(\partial_{\Phi}V(\Phi(t)))^2}{V(\Phi(t))} \\ &= \frac{1}{6} \frac{c^4}{8\pi G} \left(\frac{\partial_{\Phi}V(\Phi(t))}{V(\Phi(t))} \right)^2 \ll 1,\end{aligned}\tag{463}$$

waar in de eerste stap de eerste VIV is gebruikt, en in de tweede stap de tweede. We definiëren nu de inflatieparameter ϵ als

$$\epsilon \equiv \frac{1}{6} \frac{c^4}{8\pi G} \left(\frac{\partial_{\Phi}V(\Phi(t))}{V(\Phi(t))} \right)^2,\tag{464}$$

en zoals nu gebleken is, moet deze veel kleiner zijn dan 1 om de eerste van de twee VIV te mogen gebruiken. De fysische interpretatie van de parameter ϵ is snel af te lezen: ϵ is een maat voor de steilheid van de functie $V(\Phi(t))$, en de eis dat deze parameter heel klein is, zegt dus dat we

aannemen dat $V(\Phi(t))$ heel vlak is. De parameter heeft ook een heel andere betekenis, die we kunnen vinden door op te merken dat de VIV kunnen worden gebruikt om aan te tonen dat

$$-\frac{\dot{H}(t)}{H^2(t)} = \frac{1}{3}\epsilon. \quad (465)$$

Als $\epsilon \ll 1$ geldt dat de linkerkant van deze vergelijking veel kleiner is dan 1. Dit is niks anders dan zeggen dat er inflatie aan de gang is, en dit kunnen we zien als volgt. De definitie van de Hubble constante, $H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ zegt dat deze vergelijking geschreven kan worden als

$$1 - \frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}^2(t)} = \frac{1}{3}\epsilon \ll 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}^2(t)} \gg 0, \quad (466)$$

en de ongelijkheid garandeert dat $\ddot{a}(t) \gg 0$: versnelde uitdijing van het heelal. De conclusie is dan ook dat de eis $\epsilon \ll 1$ niet alleen betekent dat de vereenvoudigde inflatievergelijkingen gebruikt mogen worden, maar ook *dat inflatie gegarandeerd is*. De laatste opmerking verklaart de naam *inflatieparameter*.

De tweede eis in vergelijking (462) kan eveneens worden herschreven,

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\Phi}(t)}{3H(t)\dot{\Phi}(t)} &= -\frac{1}{9H^2(t)} \left(c^2 \partial_{\Phi}^2 V(\Phi(t)) + 3\dot{H}(t) \right) \\ &= -\frac{c^4}{24\pi G} \frac{\partial_{\Phi}^2 V(\Phi(t))}{V(\Phi(t))} + \frac{\epsilon}{9} \ll 1, \end{aligned} \quad (467)$$

waarin in de eerste stap de tijdsafgeleide van de eerste VIV is gebruikt, en in de tweede stap de tweede VIV is gebruikt samen met de conditie gegeven in vergelijking (refepscondition). Als we nu de eis op parameter ϵ gebruiken, $\epsilon \ll 1$, zien we dat de tweede term genegeerd kan worden. We definiëren dan een parameter η als

$$\eta \equiv -\frac{c^4}{24\pi G} \frac{\partial_{\Phi}^2 V(\Phi(t))}{V(\Phi(t))}, \quad (468)$$

en nu blijkt dat deze veel kleiner moet zijn dan 1 om de tweede van de VIV te mogen gebruiken. De fysische interpretatie van de parameter η is snel in te zien: η is een maat voor de snelheid waarmee $V(\Phi(t))$ van steilheid verandert, en de eis dat deze parameter klein is zegt dat we aannemen dat $V(\Phi(t))$ lang vlak *blijft*.

Dit alles maakt dat we kunnen concluderen dat we de VIV kunnen gebruiken om inflatie te beschrijven voor elke keuze voor de potentiële energiedichtheid $V(\Phi(t))$, mits het maar een functie is die erg vlak is ($\epsilon \ll 1$) en langere tijd vlak blijft ($\eta \ll 1$). Deze eis *garandeert* bovendien dat exponentiële inflatie het gevolg is.

9.4 Een voorbeeld van een inflatiemodel

We zullen nu de vereenvoudigde inflatievergelijkingen oplossen voor een *massief* inflatonveld, oftewel een quantumveld dat opgebouwd is uit deeltjes met massa m . Uit de veldentheorie is bekend⁸⁸ dat de Lagrangiaandichtheid voor een tijdsafhankelijk scalarveld voor een deeltje met massa m gegeven wordt door

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2(t) - \frac{m^2}{2} \left(\frac{c}{\hbar} \right)^2 \Phi^2(t), \quad (469)$$

⁸⁸Dit is de zogenaamde Klein Gordon vergelijking. Het is de relativistische tegenhanger van de Schrödinger-vergelijking voor een deeltje met spin 0.

waarin $\hbar$ de gereduceerde constante van Planck is ($\hbar = h/2\pi$). We kunnen hier aflezen dat de potentiële energiedichtheid $V(\Phi(t))$ van dit veld gegeven wordt door

$$V(\Phi(t)) = \frac{m^2}{2} \left(\frac{c}{\hbar} \right)^2 \Phi^2(t), \quad (470)$$

en de VIV luiden dan ook

$$\begin{aligned} 3H(t)\dot{\Phi}(t) + m^2 \left(\frac{c^4}{\hbar^2} \right) \Phi(t) &= 0, \\ H^2(t) - \frac{8\pi G}{6} \frac{m^2}{\hbar^2} \Phi(t) &= 0. \end{aligned} \quad (471)$$

Dit zijn twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen: de oplossing van de een beïnvloedt direct die van de ander, en vice versa. Het is vaak een hele uitdaging om zulke systemen van gekoppelde differentiaalvergelijkingen op te lossen, maar in dit geval blijkt het niet zo moeilijk te zijn. We kunnen de afhankelijkheid van één vergelijking gebruiken om die van de ander te elimineren. In dit geval kan dat als volgt: wanneer we de wortel nemen van de tweede VIV, vinden we een uitdrukking voor de Hubble constante $H(t)$,

$$H(t) = \pm \sqrt{\frac{8\pi G}{6}} \frac{m}{\hbar} \Phi(t), \quad (472)$$

(het $\pm$ -teken is het gevolg van het nemen van een wortel; we zullen dadelijk uitmaken welk van de twee tekens gekozen dient te worden om inflatie correct te beschrijven), en deze constante kunnen we gebruiken om de eerste van de VIV onafhankelijk te maken van $H(t)$. Ingevuld in vergelijking (471) krijgen we nu een differentiaalvergelijking die alleen nog maar van $\Phi(t)$ afhangt. Er geldt

$$\pm 3\sqrt{\frac{8\pi G}{6}} \frac{m}{\hbar} \Phi(t)\dot{\Phi}(t) + m^2 \frac{c^4}{\hbar^2} \Phi(t) = 0. \quad (473)$$

We kunnen vervolgens $m\Phi(t)$ wegdelen aan beide kanten, en vinden

$$\dot{\Phi}(t) \pm \frac{mc^4}{3\hbar} \sqrt{\frac{6}{8\pi G}} = 0. \quad (474)$$

De overgebleven differentiaalvergelijking is eenvoudig op te lossen: we zijn op zoek naar een functie die, wanneer gedifferentieerd, een constante oplevert: een lineaire functie! De oplossing is dan ook

$$\Phi(t) = \Phi_0 \mp \frac{mc^4}{3\hbar} \sqrt{\frac{6}{8\pi G}} t. \quad (475)$$

Hierin is Φ_0 een constante; het is duidelijk dat dit de waarde is van het inflatonveld op het begin van zijn tijdsevolutie (dus als $t = 0$).

We hebben nu een van de twee gezochte functies gevonden. De volgende stap is om een uitdrukking te vinden voor de schaafactor $a(t)$. Dit kunnen we doen door de tweede VIV te gebruiken, en hierin het gevonden antwoord voor het inflatonveld te substitueren. De VIV ziet er dan uit als

$$\begin{aligned} H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} &= \pm \sqrt{\frac{8\pi G}{6}} \frac{m}{\hbar} \left(\Phi_0 \mp \frac{mc^4}{3\hbar} \sqrt{\frac{6}{8\pi G}} t \right) \\ &= \pm \sqrt{\frac{8\pi G}{6}} \frac{m}{\hbar} \Phi_0 - \frac{m^2 c^4}{3\hbar^2} t. \end{aligned} \quad (476)$$

We zijn nu op het punt aangekomen dat we een uitspraak kunnen doen over welk van de twee tekens te kiezen: het onderste of het bovenste teken van de $\pm$ of $\mp$. Willen we een *uitdijend* heelal beschrijven, dan zal per definitie moeten gelden dat $\dot{a}(t) > 0$. Aan vergelijking (476) is te zien dat dit zeker niet het geval kan zijn als het onderste teken gekozen wordt, omdat dan voor alle tijdstippen volgt dat $H(t) < 0$. We zullen daarom vanaf nu het bovenste teken kiezen. Merk op dat met deze keuze het nog steeds niet *gegarandeerd* is dat $\dot{a}(t) > 0$: de rechterkant van de vergelijking (476) kan nog altijd negatief zijn voor bepaalde tijden t . We zullen hier later op terugkomen; voor nu is het alleen van belang op te merken dat de gemaakte keuze in ieder geval de *mogelijkheid* biedt om $\dot{a}(t) > 0$ te vinden.

We zullen nu proberen de differentiaalvergelijking (476) op te lossen. Met de gemaakte keuze voor het teken, is de vergelijking te schrijven als

$$\dot{a}(t) = \left(\sqrt{\frac{8\pi G}{6}} \frac{m}{\hbar} \Phi_0 - \frac{m^2 c^4}{3\hbar^2} t \right) a(t) \quad (477)$$

Het is nu minder eenvoudig om direct in te zien hoe de oplossing gekozen moet worden. Toch kunnen we dit doen door stap voor stap te kijken hoe de oplossing er ongeveer uit zou moeten zien. Ten eerste moet de oplossing zodanig zijn, dat de afgeleide ervan ongeveer de functie zelf weer oplevert. Een e-macht lijkt voor de hand te liggen, maar is niet genoeg: de afgeleide moet namelijk ook nog een lineaire functie in t opleveren! De exponent van de e-macht zou daarom een *kwadraat* van een lineaire functie moeten zijn: via de kettingregel van differentiëren geeft dit dan precies een lineaire functie terug. We stellen daarom de volgende oplossing voor,

$$a(t) = e^{-(\kappa + \lambda t)^2}, \quad (478)$$

en laten hierin de constanten κ en λ nog even vrij; we gaan nu op zoek naar waarden voor deze constanten zodanig dat deze aanname de VIV inderdaad oplost. Vul hiertoe vergelijking (478) in in vergelijking (477), en we vinden

$$-2\kappa\lambda - 2\lambda^2 t = \sqrt{\frac{8\pi G}{6}} \frac{m}{\hbar} \Phi_0 - \frac{m^2 c^4}{3\hbar^2} t. \quad (479)$$

We kunnen nu direct aflezen voor welke waarden van κ en λ deze vergelijking klopt: blijkbaar moeten we kiezen

$$\kappa = \frac{\sqrt{8\pi G}}{2c^2} \Phi_0, \quad \text{en} \quad \lambda = \frac{mc^2}{\hbar\sqrt{6}}. \quad (480)$$

We vinden dat onze aanname voor $a(t)$ inderdaad een oplossing is van de VIV (477), mits wij de constanten κ en λ maar kiezen als bovenstaand. Hiermee hebben we dus de oplossing voor $a(t)$ gevonden, en tezamen met de gevonden uitdrukking voor het inflatonveld $\Phi(t)$ is het gehele probleem opgelost. De oplossing schrijven we hier nogmaals op en luidt

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \Phi_0 - \frac{mc^4}{3\hbar} \sqrt{\frac{6}{8\pi G}} t, \\ a(t) &= e^{-\left(-\frac{\sqrt{8\pi G}}{2c^2} \Phi_0 + \frac{mc^2}{\hbar\sqrt{6}} t\right)^2}. \end{aligned} \quad (481)$$

Tot zover de wiskunde; we zullen nu overgaan tot het fysisch interpreteren van deze functies.

Wat de oplossing voor het inflatonveld Φ betreft, zien we dat deze afneemt in de tijd. Maar daalt hij langzaam genoeg? We hadden immers gezien dat versnelde uitdijning volgt wanneer de functie $V(\Phi(t))$, hier $V = \Phi^2(t)$, een langzaam dalende functie in de tijd is. Is dat hier het geval?

Verder zegt de oplossing voor de schaafactor iets eigenaardigs: in de exponent van de e-macht zien we *minus* een kwadraat staan, en dit betekent dat de schaafactor *krimpt* in de tijd! Dit zou een inkrimpend heelal betekenen, en zeker geen inflatie. Bovendien hadden we in de vorige sectie gezien dat de VIVs altijd een exponentieel uitdijend heelal zouden moeten opleveren (dit wil zeggen: de exponent zou lineair moeten zijn, waar we hier een kwadratische exponent hebben gevonden).

De reden dat we op deze vreemde resultaten uitkomen, is omdat we nog niet de twee voorwaarden voor het gebruik van de VIV hebben toegepast: $\epsilon \ll 1$ en $\eta \ll 1$. We mogen daarom niet verwachten dat de resultaten van het gebruik van de VIV hier gevonden zouden worden. We zullen daarom nu de twee voorwaarden voor het gebruik van de VIVs expliciet gebruiken om onze gevonden oplossing te herinterpreteren.

Zoals we gezien hadden in de vorige sectie, is inflatie alleen gegarandeerd als de inflatieparameter ϵ veel kleiner is dan 1. Als we de definitie van de inflatieparameter invullen, vinden we

$$\begin{aligned}\epsilon &\equiv \frac{1}{6} \frac{3c^4}{8\pi G} \left(\frac{\partial_\Phi V(\Phi(t))}{V(\Phi(t))} \right)^2 \\ &= \frac{c^4}{12\pi G} \frac{1}{\Phi^2(t)} \ll 1.\end{aligned}\tag{482}$$

Als aan deze conditie is voldaan, is inflatie gegarandeerd. Wat de parameter η betreft, deze blijkt in dit geval aan dezelfde conditie te moeten voldoen. We vinden

$$\begin{aligned}\eta &\equiv -\frac{c^4}{24\pi G} \left(\frac{\partial_\Phi^2 V(\Phi(t))}{V(\Phi(t))} \right) \\ &= -\frac{c^4}{12\pi G} \frac{1}{\Phi^2(t)} \\ &= -\epsilon.\end{aligned}\tag{483}$$

Dit betekent dat als we kunnen aantonen dat een van de twee parameters, zeg ϵ , veel kleiner is dan 1, de ander dat ook is. We zullen nu uitzoeken wanneer dit het geval is. Hiertoe vullen we uitdrukking (refinflatieoplossing) voor het inflatonveld in en nemen we de wortel van beide kanten. We vinden dan dat we de conditie kunnen schrijven als

$$t \ll \frac{3\hbar}{mc^4} \sqrt{\frac{8\pi G}{6}} \Phi_0 - \frac{\hbar}{mc^2} \sqrt{6}.\tag{484}$$

Dit levert een tijdslimiet op: alleen zolang er niet meer tijd verstreken is dan deze t , zal inflatie blijven aanhouden. Maar het zegt meer: als we aannemen dat inflatie nog niet tot dit tijdstip geduurd heeft, dan geldt eveneens dat

$$t \ll \frac{3\hbar}{mc^4} \sqrt{\frac{8\pi G}{6}} \Phi_0.\tag{485}$$

Dit tijdstip noemen we t_{eind} en vanaf ongeveer dit tijdstip zal inflatie ophouden.

$$t_{\text{eind}} \equiv \frac{3\hbar}{mc^4} \sqrt{\frac{8\pi G}{6}} \Phi_0.\tag{486}$$

We gebruiken dit om de oplossing voor de schaafactor te herinterpreteren. Immers, de exponent van vergelijking (481) uitgeschreven levert

$$-\left(-\frac{\sqrt{8\pi G}}{2c^2} \Phi_0 + \frac{mc^2}{\hbar\sqrt{6}} t \right)^2 = -\frac{8\pi G}{4c^4} \Phi_0^2 + \sqrt{\frac{8\pi G}{6}} \frac{m}{\hbar} \Phi_0 t - \frac{m^2 c^4}{6\hbar^2} t^2.\tag{487}$$

De eerste term hiervan is een constante, en levert slechts een extra factor op in de uitdrukking voor de schaalfactor. De twee andere termen zijn te vereenvoudigen met behulp van onze inflatievoorwaarde (485), omdat deze zegt dat de laatste term veel kleiner is dan de middelste, en daarom verwaarloosd kan worden zolang $t \ll t_{\text{eind}}$. Het gevolg is dat de exponent vereenvoudigt tot

$$-\left(-\frac{\sqrt{8\pi G}}{2c^2}\Phi_0 + \frac{mc^2}{\hbar\sqrt{6}}t\right)^2 \approx -\frac{8\pi G}{4c^4}\Phi_0^2 + \sqrt{\frac{8\pi G}{6}}\frac{m}{\hbar}\Phi_0 t. \quad (488)$$

Wanneer we dit terug substitueren in de uitdrukking voor de schaalfactor, vinden we

$$a(t) = e^{-\frac{8\pi G}{4c^4}\Phi_0^2} \cdot e^{+\sqrt{\frac{8\pi G}{6}}\frac{m}{\hbar}\Phi_0 t}, \quad (489)$$

wat nu wel degelijk een stijgende functie in de tijd is: inflatie! Zo zien we dat de VIV, inderdaad, precies het gedrag opleveren dat we in de vorige sectie al voorspeld hadden.

Om dit voorbeeld af te sluiten, zullen we de gevonden resultaten gebruiken om getallen toe te kennen aan ons model van het massieve inflatonveld. Hiertoe nemen we enkele waarden voor de grootheden m en Φ_0 , zoals deze in de literatuur gebruikelijk zijn⁸⁹. Er geldt

$$m \approx 10^{13} \frac{\text{GeV}}{c^2} \approx 10^{-14} \text{kg}, \quad \Phi_0 \approx 10^{23} \frac{\sqrt{\text{m} \cdot \text{kg}}}{\text{s}}. \quad (490)$$

Als we deze waarden invullen in de gevonden uitdrukking voor de tijdsduur t_{eind} , zien we dat inflatie ongeveer $t \approx 10^{-35}$ s heeft geduurd. Dit is een onvoorstelbaar korte tijd, maar de expansie van het heelal is desondanks enorm geweest. Dit kunnen we uitrekenen door de schaalfactor op het begin van inflatie (gegeven door vergelijking (489), met $t = 0$) te vergelijken met de waarde van de schaalfactor op het eind van inflatie (gegeven door vergelijking (481); met de eindtijd t_{eind} ingevuld is deze $a(\text{eind}) = e^0$). We vinden dan

$$\frac{a(\text{eind})}{a(\text{begin})} = e^{\frac{8\pi G}{4c^4}\Phi_0^2}. \quad (491)$$

Door van beide kanten de logaritme te nemen, en de waarden van m en Φ_0 in te vullen, wordt gevonden hoeveel e-machten groter het heelal is geworden tijdens de inflatieperiode van ons model. Er wordt dan gevonden dat het heelal tientallen e-machten is gegroeid. Dit is een gigantische expansie, in een enorm korte tijd: inflatie!

9.5 Het afbreken van de inflatieperiode

Het is niet wenselijk dat inflatie voor altijd doorgaat. Dit zou namelijk een heelal opleveren dat extreem leeg en ijl is, omdat alle materie en energie zou worden uitgesmeerd over een enorm groot (en altijd doorgroeiend) volume. Baryogenese, nucleosynthese, en recombinitie zouden nooit plaatsvinden, laat staan de vorming van sterren, planeten, en leven. Het feit dat wij bestaan is een duidelijk signaal dat kosmologische inflatie slechts een eindige hoeveelheid tijd heeft plaatsgevonden. Bovendien zou de expansiesnelheid onderhand een vrijwel oneindig grote waarde hebben aangenomen, en dat is duidelijk niet in overeenstemming met onze metingen. Het is dan ook zaak om een mechanisme te vinden waarmee de inflatieperiode werd gestopt. Ook moet dit mechanisme er zorg voor dragen dat, aan het eind van de inflatieperiode, het heelal zich

⁸⁹Er zijn meerdere theoretische en experimentele redenen om aan te nemen dat deze waarden nodig zijn om ons huidige heelal uit de inflatieperiode te doen komen, maar de afleiding hiervan is geavanceerd en wordt hier niet behandeld.

opnieuw gevuld heeft met fotonen zodat het stralingsgedomineerd is geworden, en zo aansluiting vindt bij het Standaard Model van de kosmologie uit het vorige hoofdstuk.

Deze twee voorwaarden kunnen beide in de inflatiemodellen worden opgenomen door gebruik te maken van de quantummechanische eigenschappen van het inflatonveld. De quantumveldentheorie leert ons dat elk veld een mate kent van interactie met andere quantumvelden, en dat deze interactie bepaalt hoe snel de quanta (deeltjes) van het ene veld over kunnen gaan in die van het andere veld. Het zou dan ook mogelijk moeten zijn om de dynamica van het inflatonveld $\Phi(t)$ zodanig uit te breiden, dat het in rekening neemt dat het inflatonveld vervalt naar nieuwe deeltjes die, via een of andere keten van vervalsprodukten, fotonen opleveren. Tijdens een inflatieperiode zal deze uitbreiding weinig uitmaken op de evolutie van het heelal: de gecreëerde fotonen vullen de Friedmannvergelijkingen weliswaar aan met een extra energiedichtheid en druk ten gevolge van straling, maar deze schalen met a^{-4} en gaan daarom meteen naar nul tijdens een periode van extreme uitdijning. Fysisch betekent dit dat er weliswaar fotonen worden gecreëerd, maar dat deze worden uitgesmeerd over een extreem groot volume, en daarom een verwaarloosbare energiedichtheid hebben. Echter, als we een manier kunnen bedenken om de extreme expansie te stoppen, krijgt de omzetting van inflatonen naar fotonen een kans om groot genoeg te worden om de evolutie van het heelal te domineren. Wanneer alle inflatonen zijn vervallen naar (uiteindelijk) fotonen, zal het heelal vanaf dat moment stralingsgedomineerd zijn. Het Standaard Model van de kosmologie uit het vorige hoofdstuk kan dan de evolutie overnemen.

Het is niet eenvoudig om quantumveldentheorie te gebruiken om het verval van inflatonen naar andere deeltjes te beschrijven. Dit heeft er voornamelijk mee te maken dat er zeer weinig bekend is over het gedrag van quantumvelden in andere tijdruimten dan minkowksruimtetijd. Het is echter wel mogelijk een kwalitatieve beschrijving te geven, en dit zullen we dan ook nu gaan doen voor het meest conventionele model voor de overgang van inflatonen naar fotonen.

In woorden zegt dit model het volgende: in de potentiële energiedichtheid $V(\Phi(t))$ van het inflaton veld bevindt zich ergens een diepe en steile dip. Wanneer het inflatonveld bij deze dip is aangekomen, zal het zijn potentiële energiedichtheid omzetten in kinetische energiedichtheid (op dezelfde manier als een knikker zijn potentiële energie omzet in kinetische energie wanneer die in een put rolt). Er geldt dan niet meer dat de inflatieparameter ϵ veel kleiner is dan 1 en inflatie breekt af. Omdat het heelal dan stopt met zijn extreem snelle uitdijning, zullen fotonen die vanaf dat moment worden gecreëerd uit het verval van het inflatonveld, niet meer worden uitgesmeerd over een enorm groot volume. De stralingsenergiedichtheid ten gevolge van fotonen heeft dan de kans om te groeien, en op den duur de dichtheid ten gevolge van het inflatonveld over te nemen. Op dat moment is het heelal stralingsgedomineerd geworden, en kan het Standaard Model van de kosmologie de beschrijving van de evolutie overnemen. Dit model staat bekend onder de naam *Verhittingsfase*⁹⁰

De dynamica van de verhittingsfase kan niet meer beschreven worden door de vereenvoudigde inflatievergelijkingen, omdat tijdens deze fase niet meer geldt dat $\epsilon \ll 1$ en $\eta \ll 1$. We zullen dus terug moeten gaan naar de oorspronkelijke inflatievergelijkingen (458). Deze voldoen echter ook niet, omdat ze geen rekening houden met de afname van het inflatonveld naar fotonen, of met het feit dat er een groeiende energiedichtheid is ten gevolge van straling. We corrigeren dit door aan de eerste inflatonvergelijking (458) een term toe te voegen, die de afname van inflaton veldsterkte beschrijft ten gevolge van het verval naar andere deeltjes. We nemen aan dat de afname van de veldsterkte goed beschreven wordt door een term evenredig met de tijdsafgeleide van de veldsterkte, zoals ook de wrijvingskracht op een knikker in een put evenredig is met

⁹⁰Engels: *Reheating Phase*. De prefix *re-* is misleidend: het suggereert dat het heelal al eens eerder verhit is geweest. Of dit het geval is, kan waarschijnlijk alleen worden beantwoord door een theorie van quantumzwaartekracht.

de snelheid van de knikker. Deze analogie is uiteraard geen *bewijs* van de stelling dat het verval naar andere deeltjes beschreven wordt door een term evenredig aan $\dot{\Phi}(t)$. Geavanceerde quantummechanische berekeningen wijzen echter uit dat het verval inderdaad door een term van deze vorm beschreven kan worden. We zullen daarom aan de eerste inflatievergelijking een term $\Gamma\dot{\Phi}(t)$ toevoegen, waarin Γ een maat is voor de vervalssterkte van het inflatonveld,

$$\ddot{\Phi}(t) + (3H(t) + \Gamma)\dot{\Phi}(t) + \partial_{\Phi}V(\Phi(t)) = 0. \quad (492)$$

Ten tweede zal ook de tweede inflatievergelijking (458) aangepast moeten worden, omdat die nog geen rekening houdt met het feit dat, naarmate het inflatonveld vervalst, er een groeiende energiedichtheid $\rho_{\gamma}(t)$ zal zijn ten gevolge van straling. Hiertoe voegen we deze dichtheid toe en vinden

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \left(\rho_{\Phi}(t) + \rho_{\gamma}(t) \right). \quad (493)$$

Ook kennen we aan de tweede Friedmannvergelijking een druk en dichtheid ten gevolge van straling toe. Er geldt

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) = -\frac{4\pi G}{3c^2} \left(\rho_{\gamma}(t) + 3P_{\gamma}(t) + \rho_{\Phi} + 3P_{\Phi}(t) \right). \quad (494)$$

Dit kunnen we vereenvoudigen, want we hadden al gezien dat de druk ten gevolge van straling gelijk is aan $\rho_{\gamma}/3$. Verder kunnen we de druk ten gevolge van het inflatonveld schrijven als

$$P_{\Phi} = n(t)\rho_{\Phi}. \quad (495)$$

Tijdens inflatie zelf was $n = -1$, maar tijdens de verhittingsfase weten we nog niet wat n is. We weten zelfs niet of het een constante zal zijn, en om deze reden staat er nu nog een tijdsafhankelijkheid. De tweede Friedmannvergelijking luidt nu

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) = -\frac{4\pi G}{3c^2} \left(2\rho_{\gamma}(t) + (3n(t) + 1)\rho_{\Phi}(t) \right). \quad (496)$$

In principe zijn we nu klaar: vergelijkingen (492), (493), en (494) vertellen ons hoe het inflatonveld zijn energie omzet in fotonen, hoe het inflatonveld afneemt, en hoe de schaalfactor evolueert tijdens dit proces. In principe hoeven we nu alleen een vervalsmaat Γ , de vorm $V(\Phi(t))$ van de potentiaalput, en een toestandsparameter $n(t)$ in te vullen, en deze vergelijkingen op te lossen; hiermee ligt de hele evolutie van het verhittingsproces vast.

Het is echter gebruikelijk om deze vergelijkingen te herschrijven in een vorm waarin het inflatonveld $\Phi(t)$ niet meer expliciet voorkomt, en in plaats daarvan de energiedichtheid ρ_{Φ} gebruikt wordt (dit is namelijk een inzichtelijker grootheid dan het veld). Deze herschrijving gaat als volgt. Om de eerste van deze vergelijkingen te vinden, dient de tijdsafgeleide van $\rho_{\Phi}(t) = \frac{1}{2c^2}\dot{\Phi}^2(t) + V(\Phi(t))$ te worden genomen,

$$\dot{\rho}_{\Phi}(t) = \frac{1}{c^2}\dot{\Phi}(t)\ddot{\Phi}(t) + \dot{\Phi}(t)\partial_{\Phi}V(\Phi(t)), \quad (497)$$

en te worden ingevuld in vergelijking (492). Samen met het feit dat $\frac{1}{c^2}\dot{\Phi}(t) = \rho_{\Phi}(t) + P_{\Phi}(t)$ en de schrijfwijze (495), geeft dit precies vergelijking (498). Een tweede vergelijking kan worden gevonden door de eerste Friedmannvergelijking te differentiëren naar de tijd, en dan de tweede Friedmannvergelijking te gebruiken om $\ddot{a}/a$ te elimineren. Het resultaat is

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\Phi}(t) &= -\left(3H(t) + \Gamma\right)\left(n(t) + 1\right)\rho_{\Phi}(t), \\ \dot{\rho}_{\gamma}(t) &= -4H(t)\rho_{\gamma}(t) + \Gamma\left(n(t) + 1\right)\rho_{\Phi}(t), \\ H^2(t) &= \frac{8\pi G}{3c^2} \left(\rho_{\Phi}(t) + \rho_{\gamma}(t) \right). \end{aligned} \quad (498)$$

Deze set vergelijkingen heten de *verhittingsvergelijkingen*. In de volgende sectie zullen we deze vergelijkingen oplossen voor een speciale keuze van de functies Γ , $V(\Phi(t))$ en $n(t)$.

9.6 Een voorbeeld van de verhittingsfase

De verhittingsvergelijkingen vormen een set van drie gekoppelde differentiaalvergelijkingen, en zijn in de regel lastig op te lossen. We zullen daarom een kunstgreep toepassen: we zullen aannemen dat het inflatonveld per oscillatie in de potentiaalput maar weinig energie overdraagt naar fotonen, en tegelijkertijd dat het heelal maar weinig van grootte verandert tijdens een enkele oscillatie. Met andere woorden, we nemen aan dat de tijdschaal waarop de oscillaties plaatsvinden veel korter is dan de tijdschalen van het verval van het inflatonveld en de uitdijning van het heelal. De eerste aanname legt een eis op voor de grootte van de functie Γ , de tweede aanname is waarschijnlijk goed te motiveren aangezien het heelal zich tijdens de verhittingsfase niet meer in een exponentieel uitdijende fase bevindt. Onder deze aannames, kunnen we de energiedichtheid van het inflatonveld per oscillatie als een constante nemen. Er geldt

$$\begin{aligned}\rho_\Phi &= \frac{1}{2c^2}\dot{\Phi}^2(t) + V(\Phi(t)) \\ &= \rho_{\max} = \text{const.}\end{aligned}\tag{499}$$

Laat het nogmaals benadrukt zijn dat deze vergelijking alleen geldt *per oscillatie*: elke volgende oscillatie zal $\rho_{\max}$ een kleinere waarde hebben dan de oscillatie daarvoor.

Onder deze aanname kunnen we de verhittingsvergelijkingen vereenvoudigen: het zal namelijk blijken dat we nu de toestandsparameter $n(t)$ een waarde zullen kunnen toekennen wanneer we de functie $V(\Phi(t))$ toegewezen hebben, en dat deze waarde dan *constant* zal blijken te zijn. Merk hiertoe op dat de toestandsparameter en de druk en dichtheid aan elkaar gerelateerd zijn,

$$n(t) + 1 = \frac{\rho_\Phi(t) + P_\Phi(t)}{\rho_\Phi(t)}.\tag{500}$$

De aanname van de snelle oscillatie van het inflatonveld maakt dat we de teller en noemer kunnen vervangen door constanten, te weten hun *gemiddelden* over een enkele oscillatie. Een dergelijk gemiddelde $\langle f(t) \rangle$ definiëren we als de integraal van alle waarden die een functie $f(t)$ aanneemt tijdens de oscillatie, gedeeld door de periodetijd T van de oscillatie,

$$\langle f(t) \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.\tag{501}$$

Omdat we alle tijdsafhankelijkheid nu weg-integreren, zal de uitdrukking voor de toestandsparameter $n(t)$ een *constante* opleveren; dit zal het oplossen van de verhittingsvergelijkingen een stuk eenvoudiger maken!

Alvorens dit te doen, zullen we eerst de tijdsgemiddelden (500) moeten uitrekenen. Dit lijkt een probleem op te leveren: om deze integralen uit te rekenen, hebben we de functies $\rho_\Phi(t)$ en $P_\Phi(t)$ nodig, en die probeerden we nu juist uit te rekenen door de Verhittingsvergelijkingen op te lossen. Dit lijkt een impasse, maar is het niet: we kunnen de integralen over de tijd namelijk herschrijven naar integralen over het inflatonveld, en hiervan weten we wel degelijk iets: het inflatonveld oscilleert tussen twee uiterste waarden,

$$\Phi_0 \equiv \Phi(t = 0), \quad \text{en} \quad \Phi_{1/2} \equiv \Phi(t = \frac{T}{2}).\tag{502}$$

Hierbij is Φ_0 de waarde die het inflatonveld heeft wanneer het op het punt staat te beginnen met de oscillatie: het is de waarde van het inflatonveld wanneer het bovenaan de put is. De tweede

is de waarde die het inflatonveld heeft wanneer het halverwege de oscillatie is: het is de waarde van het inflatonveld wanneer het op de bodem van de put is, en op het punt staat weer omhoog te klimmen.

Het zal blijken dat we hieraan genoeg hebben om de integralen uit te rekenen. De gemiddelden kunnen herschreven worden als

$$\langle f(t) \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{\Phi_0}^{\Phi_{1/2}} \frac{f(t)}{\dot{\Phi}(t)} d\Phi. \quad (503)$$

Via onze aanname dat de energiedichtheid van het veld als constante kan worden gezien tijdens een enkele oscillatie, volgt dat

$$\rho_\Phi = \frac{1}{2c^2} \dot{\Phi}^2(t) + V(\Phi(t)) = \rho_{max} \quad \rightarrow \quad \dot{\Phi}(t) = \pm \sqrt{2c^2 (\rho_{max} - V(\Phi(t)))}, \quad (504)$$

en hiermee kunnen we het gemiddelde $\langle f(t) \rangle$ schrijven als

$$\langle f(t) \rangle = \pm \frac{2}{T} \int_{\Phi_0}^{\Phi_{1/2}} f(t) \left(2c^2 (\rho_{max} - V(\Phi(t))) \right)^{-1/2} d\Phi. \quad (505)$$

Dit is een handige uitdrukking. Door nu de algemene uitdrukkingen voor de energiedichtheid en druk ten gevolge van het inflatonveld in te vullen, wordt gevonden dat de teller en noemer van vergelijking (500) geschreven kunnen worden als

$$\begin{aligned} \langle \left(\rho_\Phi(t) + p_\Phi(t) \right) \rangle &= \pm \frac{2}{T} \sqrt{2c^2 \rho_{max}} \int_{\Phi_0}^{\Phi_{1/2}} \left(1 - \frac{V(\Phi(t))}{\rho_{max}} \right)^{1/2} d\Phi, \\ \langle \rho_\Phi(t) \rangle &= \pm \frac{2}{T} \sqrt{\frac{\rho_{max}}{2c^2}} \int_{\Phi_0}^{\Phi_{1/2}} \left(1 - \frac{V(\Phi(t))}{\rho_{max}} \right)^{-1/2} d\Phi. \end{aligned} \quad (506)$$

De toestandsparameter $n(t)$ is dan

$$n(t) + 1 = \frac{2c^2 \int_{\Phi_0}^{\Phi_{1/2}} \left(1 - \frac{V(\Phi)}{\rho_{max}} \right)^{1/2} d\Phi}{\int_{\Phi_0}^{\Phi_{1/2}} \left(1 - \frac{V(\Phi)}{\rho_{max}} \right)^{-1/2} d\Phi}. \quad (507)$$

Het enige wat nu nog gedaan moet worden, is invullen wat de vorm $V(\Phi(t))$ is van de potentiaalput waarin het inflatonveld oscilleert, en de waarden Φ_0 en $\Phi_{1/2}$ die het inflatonveld heeft op het laagste en het hoogste punt van de put.

We kiezen nu een specifieke put en rekenen de toestandsparameter uit. Als dat gedaan is, is het oplossen van de verhittingsvergelijkingen nog maar een kleine stap. In navolging van het uitgewerkte voorbeeld van het inflatiemodel, zullen we het geval beschouwen van een massief inflatonveld. Zoals we al gezien hadden, geldt dan voor de potentiële energiedichtheid

$$V(\Phi(t)) = \frac{m^2}{2} \left(\frac{c}{\hbar} \right)^2 \Phi^2(t), \quad (508)$$

waar m de massa is van de inflatondeeltjes. Deze functie definieert de put als een parabool, met het laagste punt bij $\Phi = 0$. Het is dan makkelijk in te zien dat onderaan deze put, de waarde van het inflatonveld gelijk is aan nul,

$$\Phi_{1/2} = 0. \quad (509)$$

Om de waarde van Φ_0 te bepalen, dienen we te bedenken dat als het inflaton net op het punt staat met de oscillatie te beginnen, het nog geen kinetische energiedichtheid heeft, $\dot{\Phi} = 0$, en als gevolg hiervan is de totale energiedichtheid gelijk aan louter de potentiële energiedichtheid. Er geldt

$$\rho_{\Phi} = V(\Phi) = \frac{m^2}{2} \left(\frac{c}{\hbar} \right)^2 \Phi_0^2. \quad (510)$$

We hadden aangenomen dat de totale energiedichtheid constant was gedurende een enkele oscillatie, $\rho_{\Phi} = \rho_{max}$, en zo volgt dat de waarde van het inflatonveld op het hoogste punt van de put gegeven wordt door

$$\Phi_0 = \pm \sqrt{\frac{2\rho_{max}}{m^2} \left(\frac{\hbar}{c} \right)^2}. \quad (511)$$

We kunnen nu de integralen in de teller en de noemer van vergelijking (507) evalueren. Wanneer we de potentiaalput gegeven door vergelijking (508) invullen, wordt de noemer

$$\int_{\Phi_0}^{\Phi_{1/2}} \left(1 - \frac{1}{\rho_{max}} \frac{m^2}{2} \left(\frac{c}{\hbar} \right)^2 \Phi^2 \right)^{-1/2} d\Phi. \quad (512)$$

Om onze notatie iets te vergemakkelijken, zullen we een variabele x introduceren, waarvoor geldt

$$x \equiv \frac{m}{\sqrt{2\rho_{max}}} \left(\frac{c}{\hbar} \right) \Phi. \quad (513)$$

De integraal in vergelijking (512) ziet er dan al heel wat vriendelijker uit. We vinden

$$\frac{\sqrt{2\rho_{max}}}{m} \left(\frac{\hbar}{c} \right) \int_1^0 (1 - x^2)^{-1/2} dx. \quad (514)$$

Deze kunnen we direct oplossen door gebruik te maken van een standaardintegraal, en er wordt gevonden dat

$$\frac{\sqrt{2\rho_{max}}}{m} \left(\frac{\hbar}{c} \right) \int_1^0 (1 - x^2)^{-1/2} dx = -\frac{\sqrt{2\rho_{max}}}{m} \left(\frac{\hbar}{c} \right) \arcsin(1). \quad (515)$$

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van de integraal $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x)$, waar de functie $y = \arcsin(x)$ de oplossing is van de vergelijking $\sin y = x$, en het feit dat de arcsin van nul gelijk is aan nul.

De integraal van de teller van vergelijking (507) wordt

$$\int_{\Phi_0}^{\Phi_{1/2}} \left(1 - \frac{1}{\rho_{max}} \frac{m^2}{2} \left(\frac{c}{\hbar} \right)^2 \Phi^2 \right)^{1/2} d\Phi. \quad (516)$$

Ook nu kunnen we de notatie iets vergemakkelijken door de variabele x te introduceren, waardoor de integraal geschreven worden als

$$\frac{\sqrt{2\rho_{max}}}{m} \left(\frac{\hbar}{c} \right) \int_1^0 (1 - x^2)^{1/2} dx. \quad (517)$$

Bovenstaande vergelijking kunnen we oplossen door gebruik te maken van $\int (1 - x^2)^{1/2} dx = \frac{1}{2} \{ \arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2} \}$. Er wordt dan gevonden dat

$$\frac{\sqrt{2\rho_{max}}}{m} \left(\frac{\hbar}{c} \right) \int_1^0 (1 - x^2)^{1/2} dx = -\frac{\sqrt{2\rho_{max}}}{m} \left(\frac{\hbar}{c} \right) \frac{1}{2} \arcsin(1). \quad (518)$$

Nu de teller en noemer gevonden zijn, volgt de waarde van de toestandsparameter n direct als

$$n(t) + 1 = \frac{-2\frac{\sqrt{2\rho_{max}}}{m} \left(\frac{\hbar}{c}\right) \frac{1}{2} \arcsin(1)}{-\frac{\sqrt{2\rho_{max}}}{m} \left(\frac{\hbar}{c}\right) \arcsin(1)} = 1 \quad \rightarrow \quad n(t) = 0. \quad (519)$$

Na deze wiskundige verhandeling keren we terug naar de fysica. We hebben gevonden dat de inflatonen zich, tijdens de verhittingsfase, gedragen als een drukloos gas. Dit is precies wat we in het vorige hoofdstuk hadden bestempeld als koude materie, waarvoor geldt $n = 0$! Merk verder op dat de gevonden waarde van n niet afhangt van de amplitude van de oscillatie. Dit betekent fysisch dat we deze n mogen blijven gebruiken voor elke oscillatie, ondanks het feit dat elke volgende oscillatie een kleinere amplitude kent.

Met de wetenschap dat $n = 0$, vereenvoudigen de verhittingsvergelijkingen tot de vorm

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\Phi}(t) &= -(3H(t) + \Gamma)\rho_{\Phi}(t), \\ \dot{\rho}_{\gamma}(t) &= -4H(t)\rho_{\gamma}(t) + \Gamma\rho_{\Phi}(t), \\ H^2(t) &= \frac{8\pi G}{3c^2}(\rho_{\Phi}(t) + \rho_{\gamma}(t)). \end{aligned} \quad (520)$$

De strategie voor het oplossen van deze vergelijkingen is als volgt: we doen een aanname voor de vorm van de Hubble constante $H(t)$, en vullen deze vervolgens in in de eerste verhittingsvergelijking. Dit geeft dan een differentiaalvergelijking voor ρ_{Φ} die op dat moment ontkoppeld is van de andere twee vergelijkingen en daarom onafhankelijk opgelost kan worden. Als deze opgelost is, kunnen we de oplossing $\Phi(t)$ en onze aanname voor $H(t)$ gebruiken in de derde Verhittingsvergelijking. Dit geeft dan een algebraïsche vergelijking voor de energiedichtheid $\rho_{\gamma}(t)$, zodat $\rho_{\gamma}(t)$ direct volgt. Alledrie de functies zijn dan gevonden, maar aangezien ze pas een oplossing vormen wanneer ze aan alledrie de differentiaalvergelijkingen voldoen, zullen we de functies nog in de tweede verhittingsvergelijking moeten invullen om te controleren of alles consistent is. Zo ja, dan is onze oplossing correct; zo niet, dan is onze aanvankelijke aanname voor de Hubble constante niet de juiste geweest, en zullen we een nieuwe poging moeten doen.

Wat zou een goede aanname voor $H(t)$ zijn? Fysisch kunnen we ons de volgende voorstelling maken: aan het begin van de verhittingsfase is de enige significante vorm van energiedichtheid die van het inflatonveld, waarvan we gezien hebben dat deze zich gedraagt als koude materie. Hierbij hoort, volgens onze berekeningen, een Hubble constante gelijk aan $H(t) = \frac{2}{3t}$. Daarna wordt het inflatonveld omgezet in fotonen, zodat na verloop van tijd de energiedichtheid ten gevolge van straling gaat domineren over die ten gevolge van inflatonen. Deze dichtheid kent een Hubble constante gelijk aan $H(t) = \frac{1}{2t}$. Al met al ligt het dan ook voor de hand om een functie $H(t)$ te kiezen die voor kleine t gelijk is aan $H(t) = \frac{2}{3t}$, en voor groeiende t steeds meer gaat lijken op $H(t) = \frac{1}{2t}$. Er zijn in principe oneindig veel functies te vinden die aan deze eis voldoen, waarvan de volgende een aantal voorbeeld is,

$$H(t) = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} e^{-\alpha t} \right). \quad (521)$$

In principe zouden we dergelijke functies kunnen proberen in te vullen, en dan (hopelijk) uitvinden of de correcte functie erbij zit. Dit blijkt in ieder geval voor deze functie niet het geval te zijn. Een oplossing van de inflatievergelijkingen is dan ook nog niet gevonden, en we weten dan ook nog steeds niet wat het tijdsverloop is van de energiedichtheden ρ_{Φ} , ρ_{γ} en van de schaalfactor $a(t)$. Maar goed beschouwd zijn we eigenlijk niet zo geïnteresseerd in die gedetailleerde tijdsevolutie. Eigenlijk willen we alleen maar weten of ons model de juiste hoeveelheid fotonen kan opleveren, opdat het Standaard Model van de kosmologie de evolutie van het heelal kan overnemen. Om deze vraag naar tevredenheid te beantwoorden hoeven we de verhittingsvergelijkingen

(520) alleen maar *bij benadering* op te lossen. Dit is een stuk makkelijker dan het vinden van een complete oplossing.

De strategie is als volgt: we zullen het probleem opsplitsen in twee delen: eerst bekijken we de tijdsevolutie aan het *begin* van de verhittingsfase, oftewel in het tijdsdomein waarin het inflatonveld de energiedichtheid domineert, en hiervoor benaderde oplossingen opschrijven. Daarna zullen we de tijdsevolutie beschouwen aan het *eind* van de verhittingsfase, oftewel het tijdsdomein waarin de fotonen de energiedichtheid domineren, en daarvoor benaderde oplossingen opschrijven. En passant vinden we daarbij een waarde voor het tijdstip t_{omslag} waarin de energiedichtheid ten gevolge van fotonen het overneemt van de energiedichtheid ten gevolge van inflatonen. De gevonden oplossingen zullen een aantal vrije constanten bevatten, en deze zullen we waardes toekennen door te eisen dat de oplossingen uit de twee verschillende tijdsdomeinen in elkaar overgaan rond het moment t_{omslag} . Op deze manier worden functies ρ_Φ , ρ_γ en $a(t)$ gevonden, die bij benadering de verhittingsvergelijkingen oplossen.

We beschouwen eerst het tijdsdomein waarin de energiedichtheid ten gevolge van de inflatonen veel groter is dan die ten gevolge van fotonen. Hiervoor geldt

$$\rho_\Phi \gg \rho_\gamma. \quad (522)$$

In dit regime wordt de Hubble constante gegeven door $H(t) = \frac{2}{3t}$, en kunnen we de derde verhittingsvergelijking schrijven als

$$\frac{4}{9t^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_\Phi. \quad (523)$$

Hieruit volgt direct een uitdrukking voor de energiedichtheid van het inflatonveld,

$$\rho_\Phi(t) = \frac{3c^2}{8\pi G} \frac{4}{9t^2}. \quad (524)$$

Dit substitueren we in de eerste verhittingsvergelijking, om te controleren of deze dan ook is opgelost. We vinden

$$-\frac{8}{9t^2} \frac{3c^2}{8\pi G} = -\left(\frac{2}{t} + \Gamma\right) \frac{3c^2}{8\pi G} \frac{4}{9t^2}, \quad (525)$$

en dit kan alleen waar zijn als geldt dat

$$\Gamma \ll \frac{2}{t}. \quad (526)$$

Dit vertelt ons dat we onze oplossing (528) alleen mogen gebruiken voor tijdstippen kleiner dan $t \approx \Gamma^{-1}$. Dit is wat we verwachten: immers, als het inflatonveld snel zou vervallen naar fotonen (oftewel Γ groot), dan breekt al snel het moment aan (oftewel $t = \Gamma^{-1}$) waarop de energiedichtheid ρ_Φ niet meer groter is dan ρ_γ .

De gevonden uitdrukking voor ρ_Φ kan nu worden ingevuld in de tweede verhittingsvergelijking, en dit levert een differentiaalvergelijking op voor de energiedichtheid ρ_γ ten gevolge van fotonen. Er geldt

$$\dot{\rho}_\gamma(t) = -\frac{8}{3t} \rho_\gamma + \Gamma \frac{3c^2}{8\pi G} \frac{4}{9t^2}. \quad (527)$$

Deze vergelijking is niet moeilijk om op te lossen, en de oplossing wordt gegeven door

$$\rho_\gamma(t) = \frac{1}{t^2} \left(\frac{\rho_{\gamma<}}{t^{2/3}} + \frac{12t}{45} \frac{3c^2}{8\pi G} \Gamma t \right). \quad (528)$$

Hierin is $\rho_{\gamma<}$ een constante, die vrij mag worden ingevuld. We zullen deze nu een waarde toekennen met behulp van een fysisch argument: we hadden al gezien dat tijdens de inflatieperiode alle energiedichtheid ten gevolge van normale materie en straling naar nul is gegaan, als gevolg van de enorme expansie van het volume waarin deze energievormen opgesloten waren. We kunnen daarom eisen dat tijdens de verhittingsfase (dit wil zeggen: aan het eind van inflatie) de energiedichtheid ρ_γ gelijk dient te zijn aan nul. Inflatie hield op op het moment t_{eind} , gegeven in 486; wanneer dit wordt ingevuld in vergelijking (528) en we eisen dat de uitkomst nul is, vinden we voor de constante $\rho_{\gamma<}$

$$\rho_{\gamma<} = -\frac{12}{45}\Gamma \frac{3c^2}{8\pi G} \left(\frac{3\hbar}{mc^4} \sqrt{\frac{8\pi G}{6}} \Phi_0 \right)^{5/3}. \quad (529)$$

Hiermee is de complete oplossing bekend! Aan het begin van de verhittingsfase worden $H(t)$, $\rho_\Phi(t)$ en $\rho_\gamma(t)$ gegeven door

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{2}{3t}, \\ \rho_\Phi(t) &= \frac{3c^2}{8\pi G} \frac{4}{9t^2}, \\ \rho_\gamma(t) &= \frac{1}{t^2} \left(-\frac{12}{45}\Gamma \frac{3c^2}{8\pi G} \left(\frac{3\hbar}{mc^4} \sqrt{\frac{8\pi G}{6}} \Phi_0 \right)^{5/3} \frac{1}{t^{2/3}} + \frac{12t}{45} \frac{3c^2}{8\pi G} \Gamma t \right). \end{aligned} \quad (530)$$

Deze oplossing geldt alleen voor tijden $t \ll \Gamma^{-1}$.

Als tweede stap in onze analyse zullen we de verhittingsvergelijkingen oplossen voor tijden waarin de fotonendichtheid veel groter is geworden dan de dichtheid van inflatonen. Dan geldt

$$\rho_\gamma \gg \rho_\Phi. \quad (531)$$

In dit regime geldt dat de Hubble constante gegeven wordt door $H(t) = \frac{1}{2t}$, en wordt de derde verhittingsvergelijking

$$\frac{1}{4t^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_\gamma. \quad (532)$$

hieruit volgt direct een uitdrukking voor de energiedichtheid $\rho_\gamma(t)$,

$$\rho_\gamma(t) = \frac{3c^2}{8\pi G} \frac{1}{4t^2}. \quad (533)$$

Vervolgens gebruiken we de uitdrukking voor de Hubble constante om de eerste verhittingsvergelijking te schrijven als

$$\dot{\rho}_\Phi(t) = -\left(\frac{3}{2t} + \Gamma\right) \rho_\Phi(t). \quad (534)$$

De oplossing voor deze differentiaalvergelijking is makkelijk te vinden, en is gelijk aan

$$\rho_\Phi(t) = \frac{\rho_{\Phi>}}{t^{3/2}} e^{-\Gamma t}. \quad (535)$$

Hierin is $\rho_{\Phi>}$ een constante, die vrij is in te vullen. We zullen er een waarde aan toekennen door middel van een fysisch argument. Het argument is dat van *continuïteit*: we zullen eisen dat onze gevonden oplossingen voor de energiedichtheden ρ_Φ in de twee tijdsdomeinen, netjes op elkaar

aansluiten rond het moment $t_<$ dat het heelal niet meer door inflatie gedomineerd is. Dit komt er op neer dat we eisen dat voldaan is aan

$$\frac{3c^2}{8\pi G} \frac{4}{9t_<^2} = \frac{\rho_{\Phi>}}{t_<^{3/2}} e^{-\Gamma t_<}. \quad (536)$$

Merk op dat we hier een beetje smokkelen. Immers, aan de linkerkant staat de uitdrukking voor ρ_{Φ} die gevonden is voor het tijdsdomein waarin geldt $\rho_{\gamma} \ll \rho_{\Phi}$, terwijl de rechterkant de uitdrukking is voor ρ_{Φ} die gevonden is voor het tijdsdomein waarin geldt $\rho_{\gamma} \gg \rho_{\Phi}$. Nu hadden we al gezien dat de linkerkant gebruikt mag worden mits $t < t_<$, en we zullen nog aantonen dat de rechterkant gebruikt mag worden mits $t > t_>$, waar $t_>$ een nog nader te bepalen waarde heeft. Het is dan ook duidelijk dat bovenstaande eis alleen gesteld mag worden wanneer $t_<$ en $t_>$ niet te ver uit elkaar liggen. Het is zeker niet gegarandeerd dat dit het geval zal zijn, en we zullen dat op het eind dus expliciet moeten checken. Als dit het geval is, kunnen we deze twee tijdstippen als een enkel tijdstip beschouwen, en zullen deze de naam t_{omslag} geven. Voor nu nemen we aan dat dit het geval is, en dan levert vergelijking (536) de volgende relatie voor de constante $\rho_{\Phi>}$,

$$\rho_{\Phi>} = \frac{3c^2}{8\pi G} \frac{4}{9} e^{\Gamma t_{\text{omslag}}} \frac{1}{\sqrt{t_{\text{omslag}}}}. \quad (537)$$

De gevonden uitdrukkingen mogen toegepast worden wanneer aan vergelijking (531) voldaan is. Dan geldt

$$\frac{3c^2}{8\pi G} \frac{1}{4t^2} \gg \frac{\rho_{\Phi>}}{t^{3/2}} e^{-\Gamma t}. \quad (538)$$

Dit levert ons een tijdstip $t_>$ op, waarna de gevonden uitdrukkingen mogen worden gebruikt. Helaas is het niet mogelijk om $t_>$ in een formule uit te drukken, maar gegeven waarden voor alle constanten in vergelijking (538) kan er wel een *numerieke* waarde aan $t_>$ toegekend worden; zoals al aangegeven is de hoop dat deze niet te ver uit de buurt van $t_<$ ligt.

Hiermee is de totale oplossing bekend! We concluderen dat aan het eind van de verhittingsfase de functies $H(t)$, $\rho_{\Phi}(t)$ en $\rho_{\gamma}(t)$ gegeven worden door

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{1}{2t}, \\ \rho_{\Phi}(t) &= \left(\frac{3c^2}{8\pi G} \frac{4}{9} e^{\Gamma t_<} \frac{1}{\sqrt{t_<}} \right) \frac{1}{t^{3/2}} e^{-\Gamma t}, \\ \rho_{\gamma}(t) &= \frac{3c^2}{8\pi G} \frac{1}{4t^2}. \end{aligned} \quad (539)$$

$$(540)$$

Hiermee is onze analyse afgerond! We hebben nu twee verzamelingen oplossingen gevonden voor de functies $H(t)$, $\rho_{\Phi}(t)$ en ρ_{γ} , waarvan er een geldig is bij aanvang(inflatongedomineerde deel) van de verhittingsfase, en er een geldig is in het fotongedomineerde deel. We hebben daarbij zorg gedragen dat het eerste deel netjes aansluit op de waarden van ρ_{Φ} en ρ_{γ} die gelden aan het eind van de inflatieperiode, en dat het tweede deel netjes aansluit op het eerste deel. Verder hebben we uitgezocht wanneer het omslagpunt plaatsvindt, en gevonden dat de eerste verzameling oplossingen gebruikt mag worden zolang $t < t_<$, en de tweede verzameling oplossingen gebruikt mag worden wanneer $t > t_>$. We zullen onze uitkomsten kwantificeren, om te zien hoelang de verhitting ongeveer heeft geduurd, en om te controleren of $t_<$ en $t_>$ inderdaad netjes op elkaar aansluiten.

Hiertoe zetten we ons voorbeeld voort, en nemen we wederom aan dat de massa m van het inflaton en de constante Φ_0 gegeven worden door

$$m \approx 10^{13} \cdot \frac{\text{GeV}}{c^2} \approx 10^{-14} \text{kg}, \quad \text{en} \quad \Phi_0 \approx 10^{23} \cdot \frac{\sqrt{\text{m} \cdot \text{kg}}}{\text{s}}. \quad (541)$$

Verder kiezen we de vervalsconstante Γ als

$$\Gamma \approx 10^{32} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (542)$$

Waar komt deze waarde vandaan? Goed beschouwd is het een aanname. De constante Γ hebben we geïntroduceerd als een maat voor de snelheid waarmee inflatonen vervallen (via een of andere keten van deeltjes) naar fotonen. Aangezien er weinig bekend is over de manier waarop inflatonen gekoppeld zijn aan andere deeltjes, is het voor een deel speculatie met welke snelheid het verval plaatsvindt. Er is echter een vuistregel in de quantumveldentheorie, die zegt dat hoe zwaarder een deeltje is, hoe eerder het zal vervallen naar andere deeltjes. We kiezen Γ evenredig met m en stellen

$$\Gamma \approx \frac{mc^2}{\hbar}. \quad (543)$$

(beide kanten hebben nu de eenheid $1/\text{s}$). Met deze aanname kunnen we de waarden van de tijdstippen $t_<$ en $t_>$ uitrekenen. De eerste waarde wordt gevonden door vergelijking (526) op te lossen, en de tweede waarde door vergelijking (538) op te lossen. We vinden dan

$$t_< \approx 10^{-32} \text{ s}, \quad \text{en} \quad t_> \approx 10^{-32} \text{ s}. \quad (544)$$

Deze waarden zijn (voor zover onze benaderingen in staat zijn een verschil te tonen) hetzelfde, en noemen we het omslagpunt t_{omslag} . Na dit tijdstip heeft het inflatonveld zoveel energie overgedragen aan fotonen, dat het heelal stralingsgedomineerd is geworden. De constante $\rho_{\Phi>}$ ligt hiermee ook vast. Vergelijking (537) levert

$$\rho_{\Phi>} \approx 10^{42} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}\sqrt{\text{s}}}. \quad (545)$$

Hiermee zijn alle constanten bepaald, en ligt de evolutie van de verhittingsfase geheel vast. Het gedrag in de tijd van de functies $H(t)$, $\rho_{\Phi}(t)$, en $\rho_{\gamma}(t)$ is nu bekend. Voor alle tijdstippen tussen het eind van inflatie, t_{eind} , en het omslagpunt t_{omslag} gebruiken we hiervoor vergelijkingen (530) en voor de tijdstippen na het omslagpunt gebruiken we (540). Nadat het heelal door straling gedomineerd wordt, kan het Standaard Model van de kosmologie de evolutie overnemen. Het omslagpunt t_{omslag} is daarmee ook het tijdstip geworden waarop de verhittingsfase ten einde is geraakt: verhitting duurt in ons model niet langer dan 10^{-32} seconde.

10 Gravitatiestraling

Friedmann et al.

11 Detectie van gravitatiestraling

Friedmann et al.

A Appendix - Meetkunde

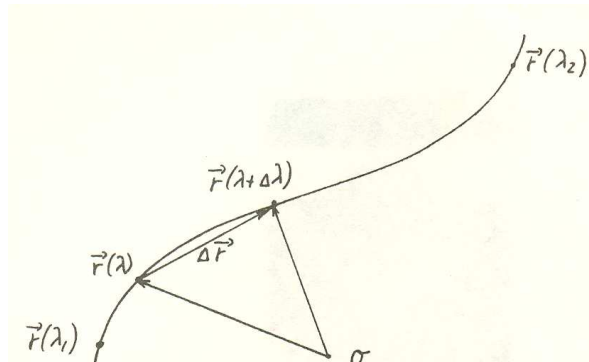
Het begrip differentieerbare variëteit komt voort uit het werk van Gauss en Riemann. In de ‘Elementen’ van Euclides wordt de meetkunde opgebouwd uitgaande van postulaten en axioma’s. Eén van deze postulaten, het vijfde, lijkt minder vanzelfsprekend dan de overige, en men heeft in de loop der eeuwen gepoogd dit postulaat te bewijzen met behulp van de andere postulaten. Het vijfde postulaat stelt het volgende: laat l_1 en l_2 rechten zijn die de rechte l snijden met hoeken β en α , dan impliceert $\alpha + \beta < 180^\circ$ dat l_1 en l_2 elkaar snijden, aan die kant van de rechte l waar ook de hoeken β en α liggen. Er is een aantal equivalente formuleringen van het vijfde postulaat. Twee ervan luiden als volgt:

- Door een punt P buiten een rechte l is precies één rechte te trekken die l niet snijdt (parallelpostulaat).
- De som van de hoeken van een driehoek is 180° .

De pogingen om het parallelpostulaat te bewijzen uit de overige faalden alle en gaandeweg kwam met tot het inzicht dat meetkunde waarbij het parallelpostulaat niet geldig is tot de logische mogelijkheden behoort. Een dergelijke meetkunde heet een niet-euclidische meetkunde.

A.1 Niet-euclidische meetkunde

Uit brieven blijkt dat C.F. Gauss (1777 - 1855) al in 1824 een vergaand inzicht in de niet-euclidische meetkunde had. Hij maakte dit echter niet publiek omdat hij hiervan teveel opschudding verwachtte. De niet-euclidische meetkunde werd ook onafhankelijk door J. Bolyai (1802 - 1860) en N.I. Lobachevski (1793 - 1856) geformuleerd.



Figuur 69: De raakvector in een punt van een kromme. Voor $\Delta\lambda \rightarrow 0$ nadert $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta\lambda}$ tot de raakvector.

Fig. 69 toont dat een kromme is voor te stellen door de vergelijking $\vec{r} = \vec{r}(\lambda)$, met λ de parameter van de kromme. Voor de componenten (x, y, z) van de vector $\vec{r}$ geldt $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$ en $z = z(\lambda)$. Een raakvector aan de kromme wordt gegeven door

$$\frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(\lambda + \Delta\lambda) - \vec{r}(\lambda)}{\Delta\lambda}. \quad (546)$$

De booglengte langs de kromme tussen de punten $\vec{r}(\lambda_1)$ en $\vec{r}(\lambda_2)$ wordt gegeven door

$$s \equiv \int_{\vec{r}(\lambda_1)}^{\vec{r}(\lambda_2)} |d\vec{r}| = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right| d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\lambda}} d\lambda. \quad (547)$$

De booglengte s tot een vast punt op de kromme is ook te gebruiken als parameter in plaats van λ , immer $s = s(\lambda)$. Men schrijft $\vec{r} = \vec{r}(s)$, en de raakvector is dan

$$\vec{t} \equiv \frac{d\vec{r}}{ds}. \quad (548)$$

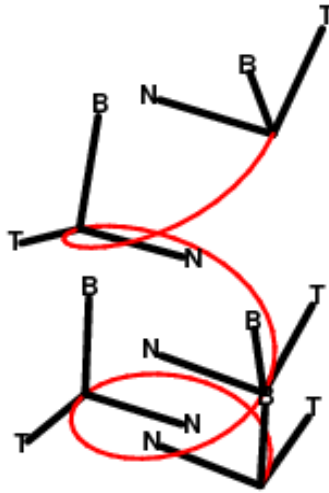
Merk op dat dit een eenheidsvector is, $\vec{t} \cdot \vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = 1$, omdat $(ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$. Uit $\vec{t} \cdot \vec{t} = 1$ volgt door differentiatie naar s , dat $\vec{t} \cdot \dot{\vec{t}} = 0$, zodat $\dot{\vec{t}} = \frac{d\vec{t}}{ds}$ loodrecht op $\vec{t}$, dus op de raaklijn staat. De hoofdnormaal $\vec{n}$ is per definitie de eenheidsvector in de richting van $\dot{\vec{t}}$, dus

$$\dot{\vec{t}} = \kappa \vec{n} \quad \text{met } \kappa = \kappa(s). \quad (549)$$

Uit het bovenstaande volgt $\vec{t} \cdot \vec{n} = 0$ en uit vergelijking (549) met $\vec{n}^2 = 1$, dat $\kappa = \left| \dot{\vec{t}} \right|$, waarbij κ de *kromming* van de curve is. Tenslotte wordt de binormaal $\vec{b}$ gedefinieerd door

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}. \quad (550)$$

Fig. 70 toont dat in ieder punt $\vec{r}(s)$ van de kromme er nu een drietal vectoren $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ bestaat.



Figuur 70: Meebewegend orthonormaal coördinatenstelsel $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ van een kromme. De triade bestaat uit de tangentvector $\vec{t}$, de normaalvector $\vec{n}$ en de binormaalvector $\vec{b}$.

Dit stelsel heet de meebewegende triade. Ze vormen een orthonormaal stelsel.

Uit vergelijking (550) volgt $\vec{b} \cdot \vec{t} = 0$. Differentiatie naar s geeft, met vergelijkingen (549) en (550)

$$0 = \dot{\vec{b}} \cdot \vec{t} + \vec{b} \cdot \dot{\vec{t}} = \dot{\vec{b}} \cdot \vec{t} + \kappa \vec{b} \cdot \vec{n} = \dot{\vec{b}} \cdot \vec{t}. \quad (551)$$

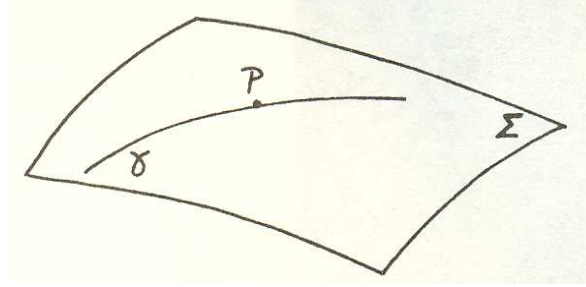
Uit $\vec{b} \cdot \vec{b} = 1$ volgt $\dot{\vec{b}} \cdot \vec{b} = 0$ en we zien dat $\dot{\vec{b}}$ parallel is aan vector $\vec{n}$. Men definieert $\tau = \tau(s)$ met $\dot{\vec{b}} = -\tau \vec{n}$, waarbij τ de *torsie* van de kromme wordt genoemd. Tenslotte volgt uit $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$ dat

$$\dot{\vec{n}} = \dot{\vec{b}} \times \vec{t} + \vec{b} \times \dot{\vec{t}} = -\tau \vec{n} \times \vec{t} + \kappa \vec{b} \times \vec{n} = \tau \vec{b} - \kappa \vec{t}. \quad (552)$$

Samenvattend geldt

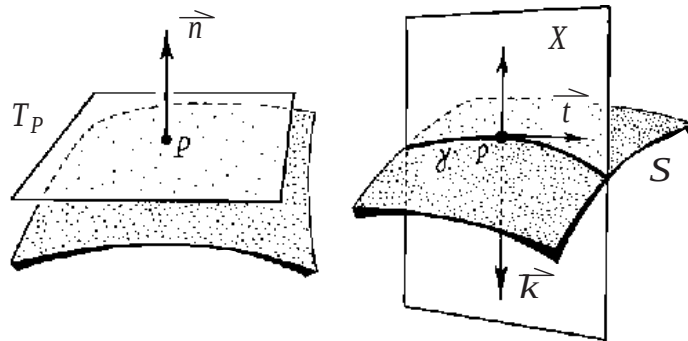
$$\begin{aligned}\dot{\vec{t}} &= \kappa \vec{n} \\ \dot{\vec{n}} &= -\kappa \vec{t} + \tau \vec{b} \\ \dot{\vec{b}} &= -\tau \vec{n}\end{aligned}\tag{553}$$

en dit zijn de formules van Frenet (1847) en Serret (1850). Een gevolg hiervan is dat bij gegeven kromming en torsie door integratie van deze eerste-orde differentiaalvergelijkingen de kromme op een verplaatsing na (integratieconstanten) vastligt.



Figuur 71: Kromme door punt P in het oppervlak Σ . Beschouw alle krommen door P . De verzameling van alle raakvectoren in P van al deze krommen vormt de tangentsvectorruimte T_P .

Vervolgens beschouwen we gebogen oppervlakken in E^3 . In de tijd voor Gauss werd een gebogen oppervlak voorgesteld door $z = f(x, y)$ of $w(x, y, z) = 0$. In het bijzonder kan men krommen in een dergelijk oppervlak beschouwen en voor deze krommen kan men uiteraard de bovenstaande begrippen invoeren. Fig. 71 toont dat γ een kromme in het oppervlak Σ is met P een punt op γ . Dan heeft γ een raakvector $\frac{d\vec{r}}{d\lambda}$ in het punt P . Beschouw nu alle mogelijke krommen in Σ door P , dan vormt de verzameling van alle bijbehorende raakvectoren $\frac{d\vec{r}}{d\lambda}$ een twee-dimensionale vectorruimte T_P , de raakvectorruimte, tangentsvectorruimte of raakvlak genoemd. De normaal $\vec{n}$ in P op het oppervlak Σ is de eenheidsvector in P loodrecht op T_P . Het volgende resultaat was reeds vóór Gauss bekend.



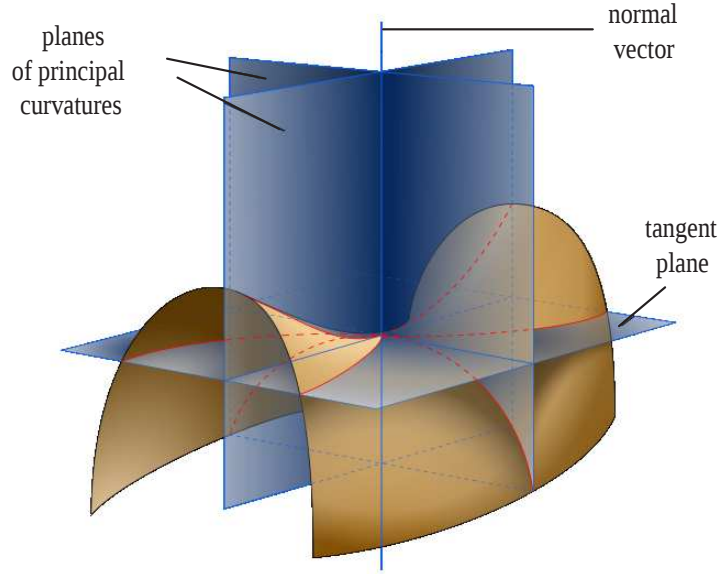
Figuur 72: Door P gaat een vlak X dat normaalvector $\vec{n}$ bevat. Het vlak X snijdt gebogen oppervlak Σ langs curve γ . De eenheidsvector $\vec{t}$ is tangential aan γ en geeft de richting van deze snede. De vector $\vec{t}$ ligt in het tangentsvlak T_P .

Stelling van Euler (1760): Zij P een punt van het oppervlak Σ en zij $\vec{n}$ de normaal in P op Σ (zie

Fig. 72). Zij X een vlak door $\vec{n}$ en zij γ de doorsnijding van X en Σ (dit is een kromme) en laat κ de kromming van γ in P zijn. Dan bestaat er een vlak X_1 (respectievelijk X_2) door $\vec{n}$ waarvoor κ_γ maximaal (respectievelijk minimaal) is en men noemt deze kromming dan κ_1 (respectievelijk κ_2). Als het vlak X een hoek θ maakt met X_1 , dan geldt

$$\kappa_\gamma = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta. \quad (554)$$

De krommingen κ_1 en κ_2 heten de hoofdkrommingen. Fig. 73 geeft een beeld van de kromming van ruimte met negatieve kromming (dit lijkt op een zadeloppervlak). De theorie van de gebogen



Figuur 73: Schets van een gebogen oppervlak waarbij de vlakken met hoofdkrommingen zijn aangegeven, evenals het tangentenvlak.

oppervlakken werd aanzienlijk verder ontwikkeld door C.F. Gauss in zijn artikel 'Disquisitiones generales circa superficies curvas' uit 1827. Gauss beschreef hierin een oppervlak met behulp van de parametervoorstelling $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ en $z = z(u, v)$ of samengevat $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ en zoals Fig. 74 toont ontstaan hiermee op het oppervlak krommen $u = \text{constant}$ en $v = \text{constant}$. We benadrukken dat een punt op het oppervlak Σ wordt vastgelegd door twee reële parameters u en v , namelijk $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Een kromme $\vec{r} = \vec{r}(\lambda)$ in het oppervlak Σ is dus ook te geven door een parametervoorstelling $u = u(\lambda)$ en $v = v(\lambda)$. De afstand ds tussen twee infinitesimaal van elkaar verwijderde punten $\vec{r}(u, v)$ en $\vec{r}(u + du, v + dv)$ wordt gegeven door $(ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$ met

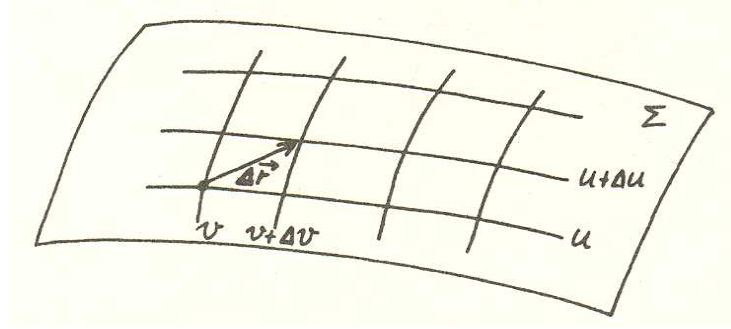
$$d\vec{r} = \vec{r}(u + du, v + dv) - \vec{r}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv. \quad (555)$$

We vinden hiermee voor de afstand

$$(ds)^2 = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) \cdot (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u (du)^2 + 2\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v dudv + \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v (dv)^2. \quad (556)$$

Met de traditionele afkortingen $E \equiv \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u$, $F \equiv \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$ en $G \equiv \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$ vinden we

$$(ds)^2 = E(du)^2 + 2F dudv + G(dv)^2, \quad (557)$$



Figuur 74: Coördinaten van Gauss voor de beschrijving van een gebogen oppervlak.

met E , F en G functies van u en v . Deze kwadratische vorm voor $(ds)^2$ heet de eerste fundamenteelvorm of de *metriek*. Als het oppervlak Σ een plat vlak is dan geldt bijvoorbeeld

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dr)^2 + r^2(d\phi)^2, \quad (558)$$

naar gelang men voor (u, v) cartesische coördinaten of poolcoördinaten kiest. Tegenwoordig noteert men voor (u, v) ook wel (x^1, x^2) , dus

$$(ds)^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} dx^i dx^j, \quad g_{ij} = g_{i,j}(x^1, x^2), \quad (559)$$

met

$$g_{11}(x^1, x^2) \equiv E(x^1, x^2) = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1, \quad g_{12} = g_{21} \equiv F = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2, \quad \text{en} \quad g_{22} \equiv G = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2, \quad (560)$$

waarbij $\vec{e}_1 \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} = \vec{r}_u$ de raakvector aan de coördinaatlijn $x^2 = \text{constant}$ en $\vec{e}_2 \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} = \vec{r}_v$ de raakvector aan de coördinaatlijn $x^1 = \text{constant}$ is. Dus $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ji}$. De vectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ vormen een basis van de twee-dimensionale raakvectorruimte in $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ aan Σ . Iedere raakvector in dit punt is een lineaire combinatie van $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$,

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^2 a^i \vec{e}_i \quad \text{en ook} \quad \vec{b} = \sum_{i=1}^2 b^i \vec{e}_i. \quad (561)$$

Voor het inproduct in de raakvectorruimte geldt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^2 a^i \vec{e}_i \cdot \sum_{j=1}^2 b^j \vec{e}_j = a^1 b^1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + a^1 b^2 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + a^2 b^1 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + a^2 b^2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} a^i b^j. \quad (562)$$

Zij γ een kromme in het oppervlak Σ en laat A en B twee punten op γ zijn, dan definieert men de booglengte s_γ langs γ tussen A en B als $s_\gamma = \int_A^B ds$. Als de kromme γ wordt voorgesteld door $u = u(\lambda)$ en $v = v(\lambda)$, dan volgt in verband met $ds = \frac{ds}{d\lambda} d\lambda$ dat

$$s_\lambda = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \sqrt{E \left(\frac{du}{d\lambda} \right)^2 + 2F \left(\frac{du}{d\lambda} \frac{dv}{d\lambda} \right) + G \left(\frac{dv}{d\lambda} \right)^2} d\lambda = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(x^1, x^2) \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} d\lambda. \quad (563)$$

Laat A en B twee punten van het oppervlak Σ zijn, dan is de *geodeet* door A en B die kromme γ in Σ waarvoor de booglengte s_γ tussen A en B minimaal (of extremaal) is. In het euclidische vlak is een rechte een geodeet en omgekeerd. Op de bol is een grote cirkel (dit is een cirkel waarvan het vlak door het middelpunt van de bol gaat) een geodeet en omgekeerd. Merk op dat de intrinsieke meetkunde van het oppervlak, dat is de meetkunde van twee-dimensionale wezens die in het oppervlak leven en die geen weet hebben van de drie-dimensionale ruimte, geheel bepaald wordt door de metriek $(ds)^2$. De hoofdkrommingen κ_1 en κ_2 van een punt P in Σ zijn intrinsieke eigenschappen van het oppervlak. Dit is eenvoudig in te zien aan de hand van het volgende voorbeeld. Voor een plat vlak (bijvoorbeeld een vel papier) geldt $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ en $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$. Als het vel papier tot een cylinder wordt gevouwen, dan gebeurt er niets met de metriek, maar κ_2 wordt ongelijk aan nul. Het opmerkelijke is nu, dat er een combinatie van κ_1 en κ_2 bestaat die ongewijzigd blijft bij het vouwen van het papier. Dit is de gausskromming.

Theorema egregium van Gauss: De gausskromming $\kappa \equiv \kappa_1 \kappa_2$ is een intrinsieke grootheid, dit wil zeggen geheel bepaald door de metriek, namelijk

$$\kappa = -\frac{1}{4W^4} \begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} - \frac{1}{2W} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v - F_u}{W} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{F_v - G_u}{W} \right) \right\}, \quad (564)$$

met $W \equiv \sqrt{EG - F^2}$.

Merk op dat κ slechts afhangt van de metriek via E , F en G en eerste en tweede orde afgeleiden hiervan, waardoor κ inderdaad een intrinsieke grootheid is. De hoofdkrommingen hangen bovendien nog af van de wijze waarop het oppervlak is ingebed in de drie-dimensionale ruimte. De gausskromming is een functie van u en v , $\kappa = \kappa(u, v)$. Oppervlakken van constante kromming zijn oppervlakken waarvoor $\kappa(u, v) = \text{constant}$. Hiervan bestaan drie typen, namelijk

1. het sferische vlak (eenheidsbol) met metriek

$$(ds)^2 = (du)^2 + \sin^2 u (dv)^2 \quad \text{met} \quad \kappa = +1; \quad (565)$$

2. het euclidische vlak (in poolcoördinaten) met metriek

$$(ds)^2 = (du)^2 + u^2 (dv)^2 \quad \text{met} \quad \kappa = 0; \quad (566)$$

3. het hyperbolische vlak met metriek

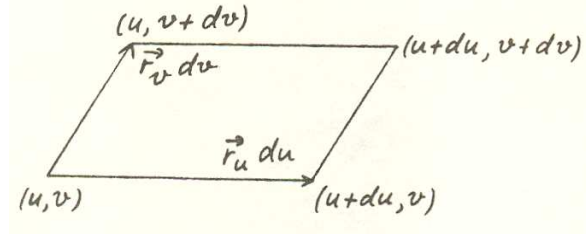
$$(ds)^2 = (du)^2 + \sinh^2 u (dv)^2 \quad \text{met} \quad \kappa = -1. \quad (567)$$

Het laatste geval is de niet-euclidische meetkunde van Gauss-Lobachevski-Bolyai.

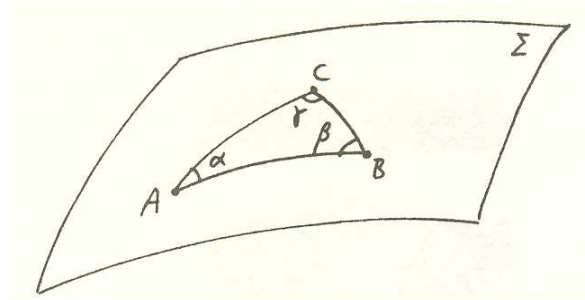
In het volgende beschouwen we een infinitesimaal parallellogram in Σ (zie Fig. 75). De zijden $\vec{r}_u du$ en $\vec{r}_v dv$ resulteren in een oppervlakte $d\sigma = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$. Merk op dat $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ omdat $\sin^2 \chi + \cos^2 \chi = 1$. Dus volgt

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (568)$$

De stelling uit de euclidische meetkunde die zegt dat de som van de hoeken van een driehoek π is kan nu worden gegeneraliseerd. Een driehoek in het oppervlak Σ is een drietal punten A , B en C in Σ verbonden door de geodeten tussen puntenparen (zie Fig. 76). Laat $\vec{t}_1$ en $\vec{t}_2$ eenheids-



Figuur 75: Een infinitesimaal parallellogram in een gebogen oppervlak.



Figuur 76: Een geodetendriehoek.

raakvectoren in A zijn aan de twee geodeten (de zijden AB en AC van de geodetendriehoek) door A , dan is de hoek α gedefinieerd met behulp van

$$\cos \alpha = \vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} t_1^i t_2^j. \quad (569)$$

Voor B en C analoog. Dan geldt

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \int \kappa d\sigma, \quad (570)$$

waarbij de integraal over het oppervlak van de geodetendriehoek wordt uitgevoerd en κ de gausskromming is. In het bijzondere geval van een oppervlak met constante kromming geldt $\alpha + \beta + \gamma - \pi = \kappa \Delta$, waarin Δ het oppervlak van de driehoek is; voor $\kappa = 0$ wordt inderdaad het resultaat uit de euclidische meetkunde teruggevonden.

A.2 Riemannse meetkunde

De tweede belangrijke stap in de ontwikkeling van de differentiaalmeetkunde werd gezet door B. Riemann (1826 - 1866) in een colloquium, gehouden op 10 juni 1854, voor de filosofische faculteit van de universiteit van Göttingen, waarvan de titel luidde 'Ueber die hypothesen welke der Geometrie zu Grunde liegen'. Hierin gaf hij aan hoe een twee-dimensionaal gekromd oppervlak kan worden gegeneraliseerd tot 'eind n fach ausgedehnte Mänigfaltigkeit' en bovendien introduceerde hij een afstandsbeğrip voor de n -dimensionale ruimte (riemannse meetkunde). De 'n fach ausgedehnte Mänigfaltigkeit' is wat tegenwoordig een n -dimensionale differentieerbare variëteit wordt genoemd.

De generalisatie is als volgt: Gauss beschreef de punten van een twee-dimensionaal oppervlak met behulp van een tweetal reële coördinaten $(u, v) \equiv (x^1, x^2)$. Riemann beschreef de punten van

een n -dimensionale differentieerbare variëteit met behulp van reële coördinaten $(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Bij Gauss is de afstand tussen twee infinitesimaal verwijderde punten

$$(ds)^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(x^1, x^2) dx^i dx^j \quad (571)$$

en bij Riemann wordt dit gegeneraliseerd tot

$$(ds)^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x^1, \dots, x^n) dx^i dx^j. \quad (572)$$

De afstand tussen twee punten op een kromme $\gamma \equiv x^i = x^i(\lambda)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) in een n -dimensionale ruimte wordt hiermee gegeneraliseerd tot (zie vergelijking (563))

$$s_\lambda = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x^1, \dots, x^n) \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} d\lambda. \quad (573)$$

Een kromme heet weer een geodeet als s_γ extremaal is. In het bijzondere geval van een euclidische ruimte geldt $g_{ij} = \delta_{ij}$, zodat vergelijking (573) overgaat in

$$s_\lambda = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i}{d\lambda} \right)^2} d\lambda. \quad (574)$$

Als γ een rechte lijn is⁹¹, krijgt men

$$s_\lambda^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i}{d\lambda} \right)^2 \left\{ \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \right\}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i}{d\lambda} \right)^2 (\lambda_B - \lambda_A)^2 = \sum_{i=1}^n (B^i - A^i)^2. \quad (575)$$

Dit is de stelling van Pythagoras voor een n -dimensionale ruimte.

Een verdere belangrijke bijdrage van Riemann is zijn generalisatie van de kromming van Gauss tot een n -dimensionale ruimte: *de krommingstensor van Riemann*. De krommingstensor speelt een uitermate belangrijke rol in Einstein's gravitatietheorie.

⁹¹In dat geval geldt $x^i = a^i \lambda + b^i$ en wordt bijvoorbeeld $\lambda_A = \frac{x_A^i - b^i}{a^i}$. Dan geldt $\frac{dx^i}{d\lambda} = a^i$ waardoor de afgeleide niet meer van λ afhangt en buiten de integraal gehaald kan worden. Verder schrijven we $x_A^i = A^i$.

B Appendix - Lineaire algebra

B.1 Vectorrekening over de reële ruimte

B.1.1 Scalaren en vectoren

We onderscheiden

- *scalaren* (of *scalaire grootheden*): door een *getal* bepaalde grootheden, zoals massa en temperatuur.
- *vectoren*: door een *richting* en een *getal* bepaalde grootheden, zoals snelheid en kracht. Dit getal heet de *grootte* of de *absolute waarde* van de vector.

Notaties

a, b, p, x , etc. zijn *scalaren*

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \vec{A}, \vec{B}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \underline{x}, \underline{y}$ zijn *vectoren*

$|\mathbf{A}| = A$ is de *absolute waarde* van $\mathbf{A}$.

$\mathbf{a}$ heet een *eenheidsvector* als $|\mathbf{a}| = 1$.

$\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$ betekent: $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ hebben dezelfde richting. Er geldt dan ook $\mathbf{B} \parallel \mathbf{A}$.

$\mathbf{A}$ en $-\mathbf{A}$ zijn vectoren met gelijke grootte en tegengestelde richtingen.

Opmerkingen

- Vectoren kunnen door *pijlen* gerepresenteerd worden. Alle evenwijdige, gelijkgerichte, even lange pijlen stellen éénzelfde ‘vrije’ vector voor.
- De *nulvector* $\mathbf{0}$ is een vector met onbepaalde richting en met grootte 0.
- Uit $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$ en $A = B$ volgt $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ en omgekeerd.

B.1.2 Product van een scalar en een vector

Voor het product van een scalar en een vector geldt de volgende definitie:

als $c > 0$, dan $(c\mathbf{A}) \parallel \mathbf{A}$ en $|c\mathbf{A}| = cA$;

als $c < 0$, dan $(c\mathbf{A}) \parallel -\mathbf{A}$ en $|c\mathbf{A}| = -cA$;

als $c = 0$, dan $c\mathbf{A} = \mathbf{0}$;

met als gevolg dat wanneer $\mathbf{a}$ de eenheidsvector is in de richting van $\mathbf{A}$ dan is $\mathbf{A} = A\mathbf{a}$.

B.1.3 Som en verschil van vectoren

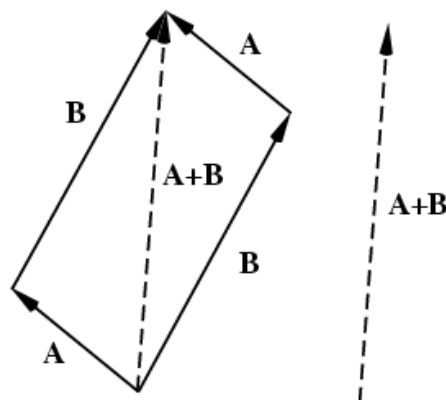
Elke twee vectoren $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ hebben een som, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$. Als het beginpunt van de pijl die $\mathbf{B}$ representeert samenvalt met het eindpunt van de pijl die $\mathbf{A}$ voorstelt, dan wordt $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ gerepresenteerd door de pijl vanaf het beginpunt van de $\mathbf{A}$ -pijl naar het eindpunt van de $\mathbf{B}$ -pijl. Dit wordt weergegeven in Fig. 77.

Voor optellen van vectoren gelden de *axioma's*

- | | |
|---|--|
| 1. $\forall_{\mathbf{A}, \mathbf{B}} [\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}]$ | commutatieve eigenschap |
| 2. $\forall_{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}} [(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})]$ | associatieve eigenschap |
| 3. $\exists_0 \forall_{\mathbf{A}} [\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}]$ | $\mathbf{0}$ heet het neutrale element |
| 4. $\forall_{\mathbf{A}} \exists_{-\mathbf{A}} [\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}]$ | inversiteits eigenschap |

Voor vermenigvuldigen van vectoren met scalaren gelden de *axioma's*

1. $\forall_{p,q,\mathbf{A}}[(p+q)\mathbf{A} = p\mathbf{A} + q\mathbf{A}]$ eerste distributieve eigenschap
2. $\forall_{p,\mathbf{A},\mathbf{B}}[p(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = p\mathbf{A} + p\mathbf{B}]$ tweede distributieve eigenschap
3. $\forall_{p,q,\mathbf{A}}[p(q\mathbf{A}) = (pq)\mathbf{A}]$ associatieve eigenschap
4. $\forall_{\mathbf{A}}[1\mathbf{A} = \mathbf{A}]$ neutraliteitseigenschap van het getal 1.



Figuur 77: Representatie van het optellen van twee vectoren $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$. Het resultaat is de vector $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Verder geldt de definitie

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \text{ en } \mathbf{A} - \mathbf{B} \text{ heet het verschil van } \mathbf{A} \text{ en } \mathbf{B}.$$

B.1.4 Lineaire afhankelijkheid; ontbinden van vectoren, kentallen

De som $p\mathbf{A} + q\mathbf{B}$ heet een lineaire combinatie van $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, terwijl $p\mathbf{A} + q\mathbf{B} + r\mathbf{C}$ een lineaire combinatie heet van $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$.

Definitie: een stelsel vectoren heet *lineair onafhankelijk* als geen van die vectoren gelijk is aan een lineaire combinatie van andere vectoren uit dat stelsel.

Stelling: $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$ zijn lineair onafhankelijk dan en slechts dan als uit $p\mathbf{A} + q\mathbf{B} + r\mathbf{C} = \mathbf{0}$ volgt dat $p = q = r = 0$.

Als $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$, dan heten $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ de componenten van $\mathbf{C}$ in de richtingen van $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$.

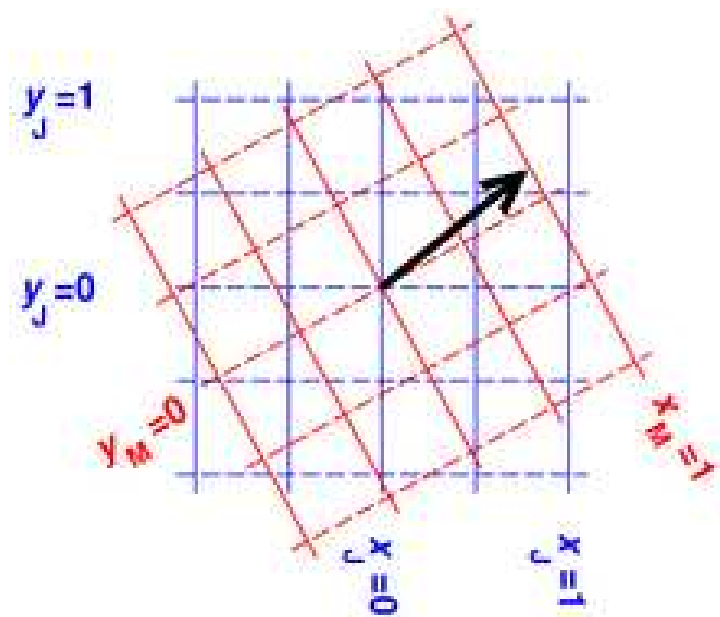
Als $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ en $\mathbf{k}$ de *eenheidsvectoren* zijn in de richtingen van de positieve x -, y - en z -as van een cartesiaans coördinatenstelsel, dan is

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}. \quad (576)$$

Elke vector $\mathbf{A}$ is dus gelijk aan een lineaire combinatie van de onderling lineair onafhankelijke vectoren $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ en $\mathbf{k}$. De getallen A_1 , A_2 en A_3 noemen we de *kentallen* van $\mathbf{A}$ ten opzichte van de basis $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Blijkbaar geldt

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_1 + B_1)\mathbf{i} + (A_2 + B_2)\mathbf{j} + (A_3 + B_3)\mathbf{k},$
2. $c\mathbf{A} = cA_1\mathbf{i} + cA_2\mathbf{j} + cA_3\mathbf{k},$
3. $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}.$



Figuur 78: De vector $\mathbf{A}$ kan ontbonden worden in een lineaire combinatie van de onderling lineair onafhankelijke vectoren $\mathbf{i}$ en $\mathbf{j}$ die een basis vormen. Dit kan zowel in het coördinatenstelsel $\{x_J, y_J\}$ als in $\{x_M, y_M\}$.

B.1.5 Inwendig of scalair product van vectoren

Definitie

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv A \cdot B \cdot \cos \angle(\mathbf{A}; \mathbf{B}) \quad (577)$$

Het *inwendig product* van vectoren is dus een *scalar*.

Eigenschappen

1. $\forall_{\mathbf{A}, \mathbf{B}} [\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}]$ commutatieve eigenschap
2. $\forall_{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}} [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}]$ distributieve eigenschap

Uit de definitie volgt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 \quad \text{en} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{als} \quad \mathbf{A} \perp \mathbf{B}. \quad (578)$$

Dus ook $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ en $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$ en dus

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \sum_{i=1}^3 A_i B_i. \quad (579)$$

Merk op dat als $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, dan is $A = 0$ of $B = 0$ of $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$.

B.1.6 Voorbeelden

1. Als $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, dan is $A = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$.

2. Gegeven: $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ en $\mathbf{B} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$.

Te bewijzen: $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$.

Bewijs:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \\ &= 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-7) \\ &= 10 - 3 - 7 = 0,\end{aligned}\tag{580}$$

dus $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$.

3. Gegeven: $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ en $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Te berekenen: $\cos \angle(\mathbf{A}; \mathbf{B})$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= AB \cdot \cos \angle(\mathbf{A}; \mathbf{B}) \\ &= \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \cos \angle(\mathbf{A}; \mathbf{B}) \\ &= \sqrt{50} \cdot \sqrt{6} \cdot \cos \angle(\mathbf{A}; \mathbf{B}).\end{aligned}\tag{581}$$

Verder geldt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 3 - 8 - 5 = -10.\tag{582}$$

Dus $10\sqrt{3} \cdot \cos \angle(\mathbf{A}; \mathbf{B}) = -10$, ofwel $\cos \angle(\mathbf{A}; \mathbf{B}) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

B.2 Lineaire ruimten en lineaire afbeeldingen

B.2.1 Lineaire ruimten

Elke verzameling, waarbinnen de elementen ‘opgeteld’ en ‘met een scalar vermenigvuldigd’ kunnen worden, wordt een *lineaire ruimte* ofwel een *vectorruimte* genoemd en de elementen ervan heten vectoren.

Definitie: Een verzameling L heet een *lineaire ruimte* over een getallenlichaam K als geldt

- $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L \exists! \mathbf{c} \in L [\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}]$
- $\forall p \in K, \mathbf{a} \in L \exists! \mathbf{b} \in L [p\mathbf{a} = \mathbf{b}]$,

terwijl de volgende acht axioma's gelden

1. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L [\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}]$
2. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in L [(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})]$
3. $\exists \mathbf{0} \in L \forall \mathbf{a} \in L [\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}]$
4. $\forall \mathbf{a} \in L \exists -\mathbf{a} \in L [\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}]$
5. $\forall p, q \in K, \mathbf{a} \in L [(p + q)\mathbf{a} = p\mathbf{a} + q\mathbf{a}]$
6. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L, p \in K [p(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = p\mathbf{a} + p\mathbf{b}]$
7. $\forall p, q \in K, \mathbf{a} \in L [p(q\mathbf{a}) = (pq)\mathbf{a}]$
8. $\forall \mathbf{a} \in L [1\mathbf{a} = \mathbf{a}]$

We hebben in hoofdstuk B.1 reeds gezien dat vectoren aan bovenstaande axioma's voldoen. Hier bekijken we een en ander op meer abstractie wijze en het getallenlichaam K kan $K \in \mathbb{R}$, respectievelijk $K \in \mathbb{C}$, zijn. Men spreekt dan van een *reële*, respectievelijk *complexe*, vectorruimte L . In paragraaf B.1 hebben we ons beperkt tot een discussie van reële vectorruimten. Ook in deze paragraaf beschouwen we enkel reële vectorruimten. Later zullen we de discussie uitbreiden tot complexe vectorruimten.

B.2.2 Eigenschappen

Als L een lineaire ruimte is gelden de volgende *Stellingen*

1. $\exists! \mathbf{0} \in L \forall \mathbf{a} \in L [\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}]$
2. $\forall \mathbf{a} \in L \exists! -\mathbf{a} \in L [\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}]$

Definitie $\mathbf{a} - \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$

Stellingen

1. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in L [\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{b}]$
2. $\forall \mathbf{a} \in L [0\mathbf{a} = \mathbf{0}]$
3. $\forall \mathbf{a} \in L [(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}]$
4. $\forall p \in \mathbb{R} [p\mathbf{0} = \mathbf{0}]$

B.2.3 Lineaire onafhankelijkheid, basis, dimensie

Definitie: Een deelverzameling S van een lineaire ruimte L heet een *onafhankelijke stelsel vectoren* als $S \neq \{\mathbf{0}\}$, terwijl geen enkel element van S gelijk is aan een lineaire combinatie van andere elementen van S .

Stelling 1: Als $\mathbf{0} \in S$, dan is S een afhankelijk stelsel.

Stelling 2: $S = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ is dan en slechts dan een onafhankelijk stelsel als uit $\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ volgt dat $c_i = 0$ voor alle $i = 1, \dots, n$.

Definitie: B heet een *basis* van de lineaire ruimte L als

1. $B \subset L$,
2. B een onafhankelijk stelsel is,
3. elk element van L gelijk is aan een lineaire combinatie van elementen van B .

Als $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ dan geldt

$$\forall \mathbf{a} \in L \exists \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R} \left[\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i \right]. \quad (583)$$

Deze getallen a_1 tot en met a_n heten de *kentallen* van $\mathbf{a}$ ten opzichte van de basis B . We noemen $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ‘de’ basis van R_3 van de drietallige getalgrepen.

Stelling 3: Als de lineaire ruimte L een basis heeft die uit n elementen bestaat, dan bestaat elke basis van L uit n elementen.

Definitie: De *dimensie* van L is het aantal elementen van de basis van L .

B.2.4 Inwendig product, norm en orthogonaliteit van vectoren

Definitie: Een *inwendig product* binnen een vectorruimte L is een afbeelding van $L \times L$ naar $\mathbb{R}$, waarvoor, als $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}$ het aan $\mathbf{a} \in L$ en $\mathbf{b} \in L$ toegevoegde getal is, geldt

1. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L [(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})]$
2. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in L [(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c})]$
3. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L, p \in \mathbb{R} [(p\mathbf{a}, \mathbf{b}) = p(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$
4. $\forall \mathbf{a} \in L [(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0]; (\mathbf{a}, \mathbf{0}) = 0$

Het getal $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \angle(\mathbf{A}; \mathbf{B})$ zullen we ‘het’ inwendig product in V_3 noemen. Met ‘het’ inwendig product in $\mathbb{R}_n$ duiden we aan

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i b_i. \quad (584)$$

Dit inwendig product noteren we dus door de eerste vector als *rijvector* en de tweede als *kolomvector* te schrijven.

Definitie: De *norm* $|\mathbf{a}|$ van de vector $\mathbf{a}$ is het getal $\sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$.

Definitie: De vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ zijn *onderling orthogonaal* dan en slechts dan als $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

B.2.5 Lineaire afbeeldingen

Een *afbeelding* van de verzameling A naar de verzameling B is een relatie waarvan A de originalenverzameling is en B de beeldverzameling omvat, terwijl elk origineel één beeld heeft (een functie is dus een afbeelding).

Definitie: Een afbeelding $\mathcal{F}$ van de lineaire ruimte L_1 naar de lineaire ruimte L_2 heet een *lineaire afbeelding* als

$$1. \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L_1 [\mathcal{F}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathcal{F}(\mathbf{a}) + \mathcal{F}(\mathbf{b})] \text{ en}$$

$$2. \forall \mathbf{a} \in L_1, p \in \mathbb{R} [\mathcal{F}(p\mathbf{a}) = p\mathcal{F}(\mathbf{a})] .$$

Merk op dat als $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ een basis is van L dan is de afbeelding van L naar $\mathbb{R}_n$, waarvoor geldt dat het beeld van $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i$ de ‘kentalvector’ $(a_1, \dots, a_n)$ is, een lineaire afbeelding.

B.3 Matrixrekening

B.3.1 Matrices

Het stelsel van k lineaire vergelijkingen met n onbekenden x_1 tot en met x_n ,

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdot & & & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot & & \cdot \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + & \dots & + & a_{kn}x_n & = & b_k \end{array} \quad (585)$$

is volkomen gekarakteriseerd door de getalverzamelingen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_k \end{pmatrix}. \quad (586)$$

Het eerste van deze getallenschema's heet een *matrix van de orde* $k \times n$; deze matrix bevat namelijk k rijen en n kolommen. De andere twee getalgroepen zijn blijkbaar kolomvectoren, die ook opgevat kunnen worden als matrices van de orde $n \times 1$, respectievelijk $k \times 1$.

Definitie: Een matrix is een in rijen en kolommen gesorteerde getalverzameling.

De getallen van die verzameling heten de *elementen* van de matrix. Ze worden bij voorkeur met twee indices genoteerd, waarvan de eerste het rangnummer van de rij en de tweede dat van de kolom aangeeft.

Als het aantal rijen k en het aantal kolommen n is dan heet $k \times n$ de orde van de matrix. Als $k = n$ dan heet de matrix een *vierkante matrix* van de orde n ofwel een $n \times n$ matrix.

De matrix met elementen a_{ij} , ($i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n$) wordt dan wel kortweg aangeduid met

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), (k \times n). \quad (587)$$

Opmerkingen:

1. Elke rij van een matrix is op zichzelf beschouwd een rijvector en elke kolom van de matrix een kolomvector.
2. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ betekent dat $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ van dezelfde orde, $k \times n$, zijn en dat $a_{ij} = b_{ij}$ voor elke $i = 1, \dots, k$ en elke $j = 1, \dots, n$.

B.3.2 Determinant van een matrix

De *determinant* van de matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ is het getal

$$|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad (588)$$

De *ondermatrix* $\mathbf{A}_{ij}$ van de matrix $\mathbf{A}$ is de matrix die ontstaat als uit $\mathbf{A}$ de i^{de} rij en de j^{de} kolom weggelaten worden.

Voorbeeld: Als $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, dan is $\mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$.

De determinant van de vierkante matrix $\mathbf{A}$, $(n \times n)$ is het getal

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}|, (i = 1, \dots, n), \quad (589)$$

en ook

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}|, (j = 1, \dots, n). \quad (590)$$

Dit zijn de formules voor het *ontwikkelen* van det $\mathbf{A}$ volgens de i^{de} rij, respectievelijk volgens de j^{de} kolom.

Voorbeeld: We ontwikkelen volgens de eerste rij.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 15 + 22 + 9 = 46. \quad (591)$$

B.3.3 Product van een matrix met een kolomvector

Definitie: Het product van een $k \times n$ -matrix $\mathbf{A}$ met een n -dimensionale kolomvector $\mathbf{x}$ is gelijk aan de k -dimensionale kolomvector $\mathbf{b}$ waarvan het i^{e} -element, $(i = 1, \dots, k)$, gelijk is aan het inwendig product van de i^{e} -rijvector van de matrix $\mathbf{A}$ met de kolomvector $\mathbf{x}$.

Dus als $\mathbf{A} = (a_{ij}), (k \times n)$ en $\mathbf{x} = (x_i), (n \times 1)$, dan is $\mathbf{b} = (b_i), (k \times 1)$, waarbij $b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, (i = 1, \dots, k)$.

Het hele vergelijkingenstelsel van de paragraaf B.3.1 kan dus genoteerd worden als $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

B.3.4 Matrix als transformatie-operator

Als $\mathbf{A} = (a_{ij}), (k \times n)$, dan definieert $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ een afbeelding van $\mathbf{x}$ naar $\mathbb{R}_k$,

$$\mathbf{A} : x \in \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbf{Ax} (= \mathbf{y} \in \mathbb{R}_k). \quad (592)$$

Deze afbeelding is blijkbaar een *lineaire afbeelding*, want

1. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_n [\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay}]$ en
2. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_n, p \in \mathbb{C} [\mathbf{A}(p\mathbf{x}) = p\mathbf{Ax}]$.

Stellingen:

1. Als $\mathbf{A} = (a_{ij}), (k \times n)$, terwijl $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ de basis van $\mathbb{R}_n$ is, dan is $\mathbf{Ae}_i$ de i^{e} -kolomvector van $\mathbf{A}$, $(i = 1, \dots, n)$.
2. Als T een lineaire afbeelding is van $\mathbb{R}_n$ naar $\mathbb{R}_k$, dan bestaat er een matrix $\mathbf{A}$, $(k \times n)$, zodanig, dat voor elke $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n$ geldt, dat het beeld van $\mathbf{x}$ onder de transformatie T (dus $T\mathbf{x}$) gelijk is aan het product $\mathbf{Ax}$.

Deze matrix $\mathbf{A}$ is de matrix waarvan de i^{e} -kolomvector, $(i = 1, \dots, n)$, het T -beeld van de i^{e} basisvector $\mathbf{e}_i$ van $\mathbb{R}_n$ (dus $T\mathbf{e}_i$) is. Deze $\mathbf{A}$ heet de *transformatiematrix* van de afbeelding T .

B.3.5 Som van matrices

Als $\mathbf{A} = (a_{ij}), (k \times n)$ en $\mathbf{B} = (b_{ij}), (k \times n)$, dan is de afbeelding $\mathbf{C}$ die aan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n$ als beeld toevoegt $\mathbf{Cx} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bx}$ een lineaire afbeelding. De transformatiematrix van deze afbeelding is

$$\mathbf{C} = (c_{ij}), (k \times n), \quad \text{met} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n). \quad (593)$$

Deze matrix $\mathbf{C}$ noemen we de *som* van matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$. Merk op dat enkel matrices van gelijke orde een som hebben. De vermenigvuldiging met een kolomvector is distributief ten opzichte van matrixoptelling. Bovendien is matrixoptelling commutatief en associatief.

Voorbeeld: Als $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, dan

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+0 \\ 0+(-1) & 1+2 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad (594)$$

en

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-0 \\ 0-(-1) & 1-2 & 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (595)$$

B.3.6 Product van scalar met matrix

Als $\mathbf{A} = (a_{ij}), (k \times n)$, dan is $\mathbf{A} + \mathbf{A} = (a_{ij} + a_{ij}) = (2a_{ij})$. Deze matrix van orde $k \times n$ noemen we $2\mathbf{A}$. Analooft kan het product van een matrix met een willekeurige scalar gedefinieerd worden als

$$p\mathbf{A} = (pa_{ij}). \quad (596)$$

Zowel ten opzichte van optellen van matrices als van scalaren is deze vermenigvuldiging distributief, $(p+q)\mathbf{A} = p\mathbf{A} + q\mathbf{A}$ en $p(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = p\mathbf{A} + p\mathbf{B}$. Bovendien geldt de associatieve eigenschap $(pq)\mathbf{A} = p(q\mathbf{A})$, terwijl kennelijk $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Samenvattend concluderen we dat de verzameling van matrices van een bepaalde orde een lineaire ruimte is.

B.3.7 Product van matrices

Definitie: Het product $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ van de matrix $\mathbf{A} = (a_{ij}), (k \times m)$ met de matrix $\mathbf{B} = (b_{ij}), (m \times n)$, is de matrix $\mathbf{C} = (c_{ij}), (k \times n)$, waarvan

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^m a_{ih}b_{hj}, (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n). \quad (597)$$

Het element c_{ij} van $\mathbf{C}$ is dus gelijk aan het inwendig product van de i^e rijvector van $\mathbf{A}$ met de j^e kolomvector van $\mathbf{B}$.

Voorbeeld: Als $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, dan

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(3) + 2(1) + 1(-2) & 1(-4) + 2(5) + 1(2) \\ 4(3) + 0(1) + 2(-2) & 4(-4) + 0(5) + 2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}. \quad (598)$$

Opmerkingen

1. De vermenigvuldiging van een matrix met een kolomvector is een bijzonder geval van deze matrixvermenigvuldiging: een kolomvector is immers een matrix van de orde $m \times 1$.
2. Het product $\mathbf{AB}$ bestaat slechts dan als het aantal kolommen van $\mathbf{A}$ gelijk is aan het aantal rijen van $\mathbf{B}$.

Matrix vermenigvuldiging is in het algemeen niet commutatief, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Het verschil tussen deze twee volgordes noemen we de *commutator*,

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv \mathbf{AB} - \mathbf{BA}. \quad (599)$$

Tenslotte merken we op dat matrixvermenigvuldiging wel associatief is ($(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{ABC}$) en distributief ($(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ en $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$).

B.3.8 Diagonale matrices

Onder de *hoofddiagonaal* van een vierkante matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ van de n -de orde verstaan we de getallenrij $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$. Een *diagonale matrix* is een vierkante matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$, waarvoor geldt, dat $a_{ij} = 0$ als $i \neq j$, terwijl er minstens één i is waarvoor $a_{ii} \neq 0$. Alleen in de hoofddiagonaal staan dus elementen die ongelijk nul zijn.

Als $\mathbf{P}$ een diagonale matrix is waarvan alle diagonaalelementen gelijk aan p zijn en $\mathbf{B}$ een zodanige matrix is, dat $\mathbf{PB}$, respectievelijk $\mathbf{BP}$ bestaat, dan is volgens de definitie van matrixvermenigvuldiging en vermenigvuldigen met een scalar

$$\mathbf{PB} = p\mathbf{B}, \quad \text{respectievelijk} \quad \mathbf{BP} = p\mathbf{B}. \quad (600)$$

Een diagonale matrix, waarvan alle diagonaaltermen onderling gelijk zijn heet daarom een *scalaire matrix*. Een scalaire matrix, waarvan alle diagonaaltermen gelijk zijn aan 1 wordt aangeduid met de letter $\mathbf{I}$. Zo een *eenheidsmatrix* $\mathbf{I}$ is *neutraal element* ten opzichte van matrixvermenigvuldiging.

B.3.9 Geadjungeerde en inverse matrices

Definitie: De *geadjungeerde* matrix $\text{adj } \mathbf{A} = (\alpha_{ij})$, $(n \times n)$, van de matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $(n \times n)$, is de matrix, waarvan het algemene element gelijk is aan $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} |\mathbf{A}_{ji}|$.

Definitie: Als $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, dan heet $\mathbf{B}$ een *rechterinverse* van $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}$ een *linkerinverse* van $\mathbf{B}$.

Voorbeeld: Omdat $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$, is iedere matrix in het product de inverse van de ander.

Stelling 1: Als $\mathbf{A}$ een $(k \times n)$ -matrix is, $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_{k \times k}$ en $\mathbf{CA} = \mathbf{I}_{n \times n}$, dan $\mathbf{B} = \mathbf{C}$, $(n \times k)$.

Bewijs: $\mathbf{B} = \mathbf{I}_{n \times n} \mathbf{B} = (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = \mathbf{CI}_{k \times k} = \mathbf{C}$.

Stelling 2: Als $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ en $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, dan is $\mathbf{A}$ vierkant.

Bewijs: Als $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $(k \times n)$, dan $\mathbf{B} = (b_{ij})$, $(n \times k)$, $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, $(k \times k)$, en $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, $(n \times n)$.

De som van de diagonaalelementen van respectievelijk $\mathbf{AB}$ en $\mathbf{BA}$ is dan $k = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji}$ en $n = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k a_{ij} b_{ji}$, dus $n = k$.

Definitie: Als $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ dan heten $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ elkaars *inverse matrix*: $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$ en $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Een matrix die een inverse heeft heet *regulier*, terwijl een matrix die geen inverse heeft *singulier* heet. Iedere reguliere matrix is vierkant. Als $\mathbf{A}$ regulier is dan heeft $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ juist één oplossing, namelijk $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Door gebruik te maken van de definities van de determinant, kan men laten zien dat

$$\mathbf{A}(\text{adj } \mathbf{A}) = (\text{adj } \mathbf{A})\mathbf{A} = (\det \mathbf{A})\mathbf{I}, \quad (601)$$

dus als $\det \mathbf{A} \neq 0$ en $\mathbf{B} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}$, dan $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$. We vinden dus dat als $\det \mathbf{A} \neq 0$, dan is $\mathbf{A}$ regulier en $\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}$.

Een matrix is dan en slechts dan regulier als zijn determinant ongelijk is aan nul. Een vierkante matrix is dan en slechts dan singulier als zijn determinant gelijk is aan nul.

Voorbeeld: Als $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, dan

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + (4) \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -81, \quad (602)$$

terwijl

$$|\mathbf{A}_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11, \quad |\mathbf{A}_{12}| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -1, \quad |\mathbf{A}_{13}| = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -17, \quad (603)$$

$$|\mathbf{A}_{21}| = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10, \quad |\mathbf{A}_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -23, \quad |\mathbf{A}_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 14, \quad (604)$$

$$|\mathbf{A}_{31}| = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8, \quad |\mathbf{A}_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 14, \quad |\mathbf{A}_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad (605)$$

zodat

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -11 & 10 & -8 \\ 1 & -23 & -14 \\ -17 & -14 & -5 \end{pmatrix}, \quad \text{dus} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 11 & -10 & 8 \\ -1 & 23 & 14 \\ 17 & 14 & 5 \end{pmatrix}. \quad (606)$$

B.3.10 De getransponeerde van een matrix; symmetrische en alternerende matrices

Als $\mathbf{A} = (a_{ij})$ een $(k \times n)$ -matrix is en $\mathbf{B} = (b_{ij})$ een $(n \times k)$ -matrix, terwijl $b_{ij} = a_{ji}$ voor elke $i = 1, \dots, n$ en elke $j = 1, \dots, k$, dan heten $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ elkaars *getransponeerde*, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ en $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$.

Voorbeeld: De getransponeerde van $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ is $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1. De getransponeerde van een vierkante matrix wordt dus verkregen door die matrix te 'spiegelen ten opzichte van de hoofddiagonaal'.
2. De getransponeerde van een kolomvector is een rijvector en omgekeerd.

Stellingen:

1. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.

3. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$.

4. Als $\mathbf{x}$ een kolomvector is dan is $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$.

Definitie: $\mathbf{A}$ heet een *symmetrische matrix* als $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

$\mathbf{A}$ heet een *alternerende* (*anti-symmetrische* of *scheefsymmetrische*) matrix als $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

Voorbeeld: De matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ is symmetrisch, terwijl de matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ anti-symmetrisch is.

B.3.11 Orthogonale matrices

Definitie: De matrix $\mathbf{A}$ heet *orthogonaal* als $\mathbf{AA}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$, dus als $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$.

Stelling 1: Een orthogonale matrix is een matrix waarvan de rijvectoren zowel als de kolomvectoren een *orthonormaal* stelsel vormen (dit wil zeggen dat elke twee onderling verschillende rijvectoren, respectievelijk kolomvectoren, onderling orthogonaal zijn, terwijl al die vectoren de norm 1 hebben).

Stelling 2: Als $\mathbf{A}$ orthogonaal is, dan geldt voor elke $\mathbf{x}$ (van de juiste dimensie) dat $|\mathbf{Ax}| = |\mathbf{x}|$. We concluderen dat de norm van een vector invariant is voor een transformatie waarvan de transformatiematrix orthogonaal is. Het omgekeerde van deze stelling geldt ook: als voor een lineaire afbeelding de norm invariant is, dan is de transformatiematrix orthogonaal.

Bewijs: $|\mathbf{Ax}|^2 = (\mathbf{Ax})^T (\mathbf{Ax}) = (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T) (\mathbf{Ax}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{I} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$.

Voorbeeld: De lineaire transformatie $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \mathbf{x}$ is orthogonaal. Het beeld van $\mathbf{x} = (a, b, c)$ is $\mathbf{y} = \left(\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{6}} - \frac{c}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{2b}{\sqrt{6}}, \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{6}} + \frac{c}{\sqrt{2}} \right)$ en beide vectoren hebben lengte $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

C Appendix - Fundamentele constanten

$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$	lichtsnelheid
$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Js}$	constante van Planck
$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$	lading van het elektron
$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$	massa van het elektron
$m_p = 1.672 \times 10^{-27} \text{ kg}$	massa van het proton
$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$	permittiviteit van het vacuum
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$	permeabiliteit van het vacuum
$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ 1/mol}$	constante van Avogadro
$k = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$	constante van Boltzmann

D Appendix - Coördinatensystemen

D.1 Cartesiaanse coördinaten

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{l} &= dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}} && \text{lijn-element} \\
 d\tau &= dxdydz && \text{volume-element} \\
 \nabla t &= \frac{\partial t}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} && \text{gradiënt} \\
 \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} && \text{divergentie} \\
 \nabla \times \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} && \text{rotatie} \\
 \Delta t &= \nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} && \text{Laplace operator}
 \end{aligned}$$

D.2 Sferische coördinaten

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{l} &= dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} && \text{lijn-element} \\
 d\tau &= r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi && \text{volume-element} \\
 \nabla t &= \frac{\partial t}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} && \text{gradiënt} \\
 \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} && \text{divergentie} \\
 \nabla \times \mathbf{v} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} && \text{rotatie} \\
 \Delta t &= \nabla^2 t = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} && \text{Laplace operator}
 \end{aligned}$$

D.3 Cilindrische coördinaten

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{l} &= ds \hat{\mathbf{s}} + s d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + dz \hat{\mathbf{z}} && \text{lijn-element} \\
 d\tau &= s ds d\phi dz && \text{volume-element} \\
 \nabla t &= \frac{\partial t}{\partial s} \hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} && \text{gradiënt} \\
 \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s v_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} && \text{divergentie} \\
 \nabla \times \mathbf{v} &= \left[\frac{1}{s} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s} \left[\frac{\partial}{\partial s} (s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{z}} && \text{rotatie} \\
 \Delta t &= \nabla^2 t = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial t}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} && \text{Laplace operator}
 \end{aligned}$$

FUNDAMENTELE THEOREMAS

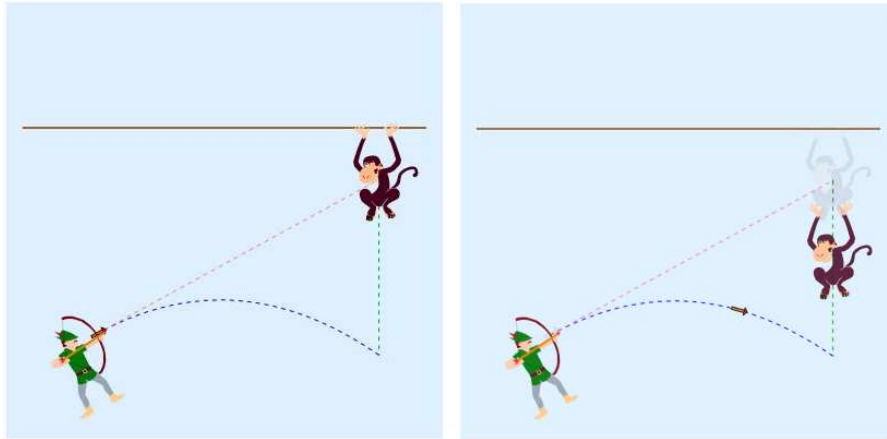
$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} &= f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) && \text{Gradiënt theorema} \\
 \int (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau &= \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} && \text{Divergentie theorema (stelling van Gauss)} \\
 \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} &= \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} && \text{Rotatie theorema (stelling van Stokes)}
 \end{aligned}$$

E Appendix - Oefenopgaven

OPGAVEN WEEK 1

Naam: _____

Opgave 1: Robin Hood is van plan om op een aap te schieten die aan een tak in een boom hangt. Fig. 80 laat zien dat de Robin precies op de aap mikt, en hij heeft niet in de gaten dat de pijl een parabolische baan zal volgen die onder de huidige positie van de aap door zal gaan. De aap ziet de boog afgaan, laat de tak los en valt uit de boom, in de verwachting dat hij de



Figuur 79: Links: Robin Hood mikt precies op de aap; rechts: de aap laat de tak los op het moment dat de boog afgaat.

pijl zal ontwijken. (a) Laat zien dat de aap geraakt zal worden, onafhankelijk van de snelheid waarmee de pijl wordt afgevuurd (zolang die snelheid maar groot genoeg is om de afstand naar de boom te overbruggen). Neem aan dat de reactietijd van de aap verwaarloosbaar is. (b) We noemen $\vec{v}_0$ de snelheid van de pijl op het moment dat die van de boog komt. Bepaal de snelheid van de pijl ten opzichte van de aap op een willekeurige tijd t gedurende de vlucht van de pijl. (c) Neem aan dat de horizontale afstand tussen de schutter en de boom gelijk is aan $x = 50$ m, en de verticale afstand tussen de schutter en de tak waaraan de aap hangt $h = 10$ m. Wat is de minimum beginsnelheid van de pijl als de aap geraakt wordt, net voordat hij op de grond valt (de verticale afstand van de grond tot de tak is 11,2 m)?

Opgave 2: Een kanonskogel wordt afgevuurd met een beginsnelheid van 42,2 m/s, onder een hoek van 30° met de horizontale richting, en van een hoogte van 40 m. Hoe ver komt de kogel?

Opgave 3: Hoe groot is de vrije-val versnelling voor een object ter hoogte van de baan van de Space Shuttle (400 km boven het aardoppervlak)?

Opgave 4: Een projectiel wordt verticaal omhoog geschoten van het aardoppervlak met een snelheid van $v_i = 8$ km/s. Wat is de maximale hoogte die het bereikt (verwaarloos luchtwrijving)?

Opgave 5: Een projectiel wordt verticaal omhoog geschoten van het aardoppervlak met een beginsnelheid van $v_i = 15$ km/s. Wat is de snelheid van het projectiel, ver verwijderd van de aarde (verwaarloos luchtwrijving)?

OPGAVEN WEEK 2

Naam: _____

Opgave 1: Een planeet met een holle kern bestaat uit een uniforme dikke bolvormige schil met massa M , buitenstraal R en binnenstraal $R/2$.

- (a) Hoeveel massa (percentage) is dichter dan $\frac{3}{4}R$ van het middelpunt van de planeet?
- (b) Hoe groot is het gravitatieveld op afstand $\frac{1}{4}R$ van het middelpunt?
- (c) Hoe groot is het gravitatieveld op afstand $\frac{3}{4}R$ van het middelpunt?

Opgave 2: In het boek ‘Een reis naar de maan’ van Jules Verne, worden astronauten gelanceerd door een gigantisch kanon van de aarde naar de maan.

- (a) We schatten dat de snelheid die nodig is om de maan te bereiken gelijk is aan de ontsnappingsnelheid van de aarde, en schatten de lengte van het kanon als 900 voet (ongeveer 300 m, zoals vermeld in het boek). Wat is de kans dat de astronauten de ‘lancering’ overleven?
- (b) In het boek, voelen de astronauten in hun ruimteschip de effecten van de gravitatie van de aarde totdat het ruimteschip het evenwichtspunt bereikt waar de gravitationele werking van de maan gelijk is aan die van de aarde. Op dit punt keert alles om en wat het plafond van het ruimteschip was, wordt nu de vloer. Hoe ver van de aarde ligt dit evenwichtspunt?
- (c) Is deze beschrijving van wat de astronauten ervaren redelijk? Is dit wat er echt gebeurd is voor de Apollo astronauten tijdens hun bezoek aan de maan?

Opgave 3: We bekijken een voorwerp met massa m dat aan een veer hangt met veerconstante C . Het systeem voldoet aan de wet van Hooke en dat betekent dat de uitrekking u van de veer evenredig is met de grootte van de kracht F die op de veer wordt uitgeoefend, dus $F = Cu$. Als de veer over een afstand u wordt uitgerekt, dan heeft de massa een potentiële energie gegeven door $V = \frac{1}{2}Cu^2$.

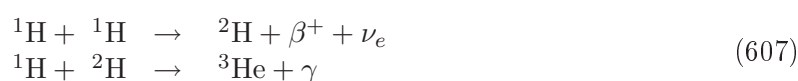
- (a) Verklaar de vergelijking $V = \frac{1}{2}Cu^2$.

Als de massa nu wordt losgelaten dan treedt er oscillatie op. De snelheid $\dot{u}$ is maximaal als de veer door de evenwichtstoestand gaat (waar $u = 0$ is). De Lagrangiaan wordt gegeven door $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 - \frac{1}{2}Cu^2$.

- (b) Maak gebruik van de Euler-Lagrangevergelijking en leidt de wet van Newton af voor dit massa-veersysteem.

Opgave 4: Ons zonnestelsel is gemaakt uit gas afkomstig van een supernova. Al het uranium op aarde is gemaakt in deze supernova. Gedetailleerde berekeningen van de fysica van supernova explosies suggereren dat het aantal geproduceerde ^{235}U kernen 1,7 maal groter was dan het aantal ^{238}U kernen. Sinds hun productie verval ^{235}U met een halfwaardetijd van $t_{\frac{1}{2}} = 7,0 \times 10^8$ jaar en ^{238}U met halfwaardetijd van $t_{\frac{1}{2}} = 4,5 \times 10^9$ jaar. Hoe lang geleden vond de supernova explosie plaats, gegeven dat de verhouding ^{235}U tot ^{238}U zoals gevonden in gesteente gelijk is aan 0,007? (Hint: in radioactief verval neemt het aantal nog niet vervallen kernen af volgens de relatie $N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$ met τ de levensduur.)

Opgave 5: De zon en andere sterren produceren hun energie door kernfusie. Een van de fusiereacties, de proton-proton cyclus, bestaat uit de volgende reacties:



gevolgd door in 10^{-5} van de gevallen



of in 85 procent van de gevallen



- (a) Toon aan dat het netto effect van deze reacties gelijk is aan $(4 {}^1\text{H}) \rightarrow {}^4\text{He} + (2\beta^+) + (2\nu_e) + (1 \text{ of } 2) \gamma$.
- (b) Toon aan dat een rustenergie van 24,7 MeV vrijkomt in deze cyclus (en dan tellen we de 1,02 MeV die vrijkomt als elk van de positronen annihileert met een elektron niet eens mee).
- (c) De zon straalt met een energie van ongeveer 4×10^{26} W. Neem aan dat dit wordt veroorzaakt door de conversie van vier protonen naar helium, gammastraling en neutrino's, hetgeen 26,7 MeV vrijmaakt. Wat is het verbruik van protonen in de zon (in protonen per seconde).
- (d) Hoe lang kan de zon nog schijnen op deze wijze? (neem aan dat de helft van de massa van de zon (2×10^{30} kg) door protonen gevormd wordt).

OPGAVEN WEEK 3

Naam: _____

Opgave 1: Ga uit van vergelijking (53) op bladzijde 34. Maak gebruik van een grove benadering waarbij we de afgeleide $\frac{dP}{dr}$ in een klap schrijven als $\frac{dP}{dr} \approx \frac{P}{R}$ (zie ook blz. 36).

(a) Laat zien dat voor een ster met massa M , straal R , de gemiddelde druk bij benadering gegeven wordt door

$$P \approx \frac{3GM^2}{4\pi R^4}. \quad (610)$$

(b) Laat zien dat dezelfde relatie leidt tot de benadering $T \sim \frac{M}{R}$ voor de gemiddelde temperatuur van de ster.

Opgave 2: (Hint: lastige opgave; overweeg om deze als laatste te doen). In de stad Kamiokande in Japan staat de zogenaamde Kamiokande II detector. Deze detector is ontworpen om proton verval te bestuderen. Met Kamiokande II werd op 23 februari 1987 in slechts 12 seconden een totaal van 12 neutrino interacties geregistreerd. Deze meting viel samen met de explosie van supernova SN1987A die op ongeveer 170.000 lichtjaar van de aarde stond. Reeds lang hiervoor hadden astrofysici berekend dat bij een dergelijke explosie binnen een aantal seconden een energie van ongeveer 10^{46} J zou vrijkomen. Hiervan zou ongeveer 99 % vrijkomen in de vorm van neutrino's, die het heelal in gejaagd zouden worden, terwijl voor het spectaculaire zichtbare vuurwerk en de kinetische energie van de restanten ten hoogste een procent van de energie ter beschikking zou staan.

De Kamiokande II detector is in staat antineutrino's aan te tonen via de reactie

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n \quad (611)$$

aan protonen in normaal water. De protonen die gebonden zijn in zuurstof kunnen hierbij verwaarloosd worden, omdat deze niet wezenlijk tot de totale telsnelheid bijdragen. De energie en de richting van de positronen kan met de detector bepaald worden (uit de richting en de intensiteit van de door de positronen opgewekte Čerenkovstraling). De actieve massa van de detector is 2100 ton water (1 ton $\equiv$ 1000 kg). De theoretische werkzame doorsnede voor deze reactie is energieafhankelijk en kan bij de hier optredende energieën uit de volgende relatie afgeleid worden

$$\sigma = 10^{-45} \text{ m}^2 \cdot \left(\frac{E \text{ in MeV}}{10 \text{ MeV}} \right)^2, \quad (612)$$

waarbij de energie van de neutrino's E gelijk gesteld kan worden aan de energie van de positronen. De 12 geregistreerde neutrino's hadden in het gewogen gemiddelde een energie $\langle E_\nu \rangle = 12,8$ MeV en $(\langle E_\nu \rangle)^{1/2} = 10,9$ MeV.

(a) Wat is het totale aantal neutrino's dat vrijkwam bij de explosie van de supernova? Ga ervan uit dat de zes neutrinosoorten ν_e , $\bar{\nu}_e$, ν_μ , $\bar{\nu}_\mu$, ν_τ , en $\bar{\nu}_\tau$, waarvan enkel het $\bar{\nu}_e$ met de Kamiokande II detector aangetoond kan worden, met vergelijkbare energieën en in vergelijkbare hoeveelheden geproduceerd werden.

(b) Hoe groot is de totale in de vorm van neutrino's vrijgekomen energie in de explosie van SN1987A? Vergelijk dit met de theoretische voorspelling en vorm een oordeel over de overeenstemming.

(c) Het eerst gemeten $\bar{\nu}_e$ had een energie van 20,0 MeV. Het laatst gemeten neutrino kwam 12,4 seconde later en had een energie van 8,9 MeV. Welke limiet wordt hiermee op de massa van het

neutrino geplaatst? Neem hierbij aan dat de supernova explosie minstens 10 s en hoogstens 20 s geduurd heeft. De benadering $y = (1 - (x/C)^2)^{-1/2} \approx 1 + x^2/2C^2 + \dots$ voor $x \ll C$ kan hier nuttig zijn.

Opgave 3: Er geldt $n = 3$ en we hebben de compacte uitdrukking $y_i = a^r{}_i x_r$, waarbij we gebruik maken van de Einsteinsommatieconventie.

- (a) Schrijf expliciet de vergelijkingen op die worden voorgesteld door de uitdrukking $y_i = a^r{}_i x_r$.
 (b) Verklaar waarom een uitdrukking als $a_{ii}x^i$ zonder enige betekenis is.
 (c) Gebruik de sommatieconventie om

$$a_{11}b^{11} + a_{21}b^{12} + a_{31}b^{13} + a_{41}b^{14} \quad (613)$$

compact weer te geven (ken ook een waarde toe aan n).

- (d) Idem voor

$$a_{11}b^{11} + a_{12}b^{12} + a_{13}b^{13} + a_{14}b^{14} + a_{15}b^{15}. \quad (614)$$

- (e) Idem voor

$$c^1{}_{i1} + c^2{}_{i2} + c^3{}_{i3} + c^4{}_{i4} + c^5{}_{i5} + c^6{}_{i6} + c^7{}_{i7} + c^8{}_{i8}. \quad (615)$$

Opgave 4: Als a_{ij} constanten zijn, bereken dan de partiële afgeleiden

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(a_{ij}x^i x^j). \quad (616)$$

Hint: het antwoord is $\frac{\partial}{\partial x^k}(a_{ij}x^i x^j) = a_{ki}x^i + a_{ik}x^i = (a_{ik} + a_{ki})x^i$.

Opgave 5: We bekijken nu wat lineaire algebra met tensoren.

- (a) Toon aan dat geldt

$$(x^1, x^2, x^3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = a_{ij}x^i x^j. \quad (617)$$

- (b) Schrijf de kwadratische vorm $3x^2 + y^2 - 2z^2 - 5xy - 6yz = 10$ door gebruik te maken van een symmetrische matrix.

- (c) In een orthonormaal coördinatenstelsel wordt de afstand $d(\vec{x}, \vec{y})$ tussen de punten met plaatsvectoren $\vec{x}$ en $\vec{y}$ gegeven door

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y})^T (\vec{x} - \vec{y})}. \quad (618)$$

We voeren de coördinatentransformatie $\vec{x}' = A\vec{x}$ of $\vec{x} = B\vec{x}'$ met $B = A^{-1}$ uit. Wat is de formule voor de afstand $d(\vec{x}', \vec{y}')$ in het getransformeerde systeem?

Hint, het antwoord is

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(\vec{x}' - \vec{y}')^T G (\vec{x}' - \vec{y}')} = d(\vec{x}', \vec{y}') \quad (619)$$

met $G \equiv B^T B = (A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = (AA^T)^{-1}$.

OPGAVEN WEEK 4

Naam: _____

Opgave 1: Welke van de onderstaande uitdrukkingen zijn consistent met de sommatieconventie en welke niet. Geef altijd de reden voor uw keuze. Laat u niet afleiden door de keuze voor de symbolen.

1. $g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\gamma$
2. $g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta = g_{\beta\gamma}a^\beta b^\gamma$
3. $g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta = g_{\alpha\beta}a^\alpha c^\beta$
4. $T_{\alpha\gamma}^\alpha a^\gamma = g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta$
5. $T_{\beta\gamma}^\alpha a^\alpha c^\beta c^\gamma = b^\alpha$
6. $\partial x^\alpha / \partial x^\beta = \delta_\beta^\alpha$
7. $\partial g_{\alpha\beta} / \partial x^\gamma = 0$
8. $g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\delta'}} = g_{\gamma\delta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\beta'}}$
9. $g'_{\alpha\beta} a^{\alpha'} b^{\beta'} = g_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta$
10. $a^\alpha (g_{\beta\gamma} b^\beta b^\gamma) = b^\gamma$
11. $T_{\alpha\beta}^\alpha = T_{\beta\beta}^\beta$
12. $g_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}$

Opgave 2: Deze opgave is bedoeld om uit te vinden of u op correcte wijze indices naar boven of beneden kunt halen. We beschouwen twee dimensies, waarbij de indices $A, B, \dots$ de waarden 1 of 2 kunnen aannemen. De metrische tensor wordt gegeven door

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} F & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (620)$$

met F een constante. Beschouw de vectoren

$$a_A = (1, 0), \quad b_A = (0, 1), \quad c^A = (1, 0), \quad d^A = (0, 1). \quad (621)$$

(a) Bepaal de inverse van de metrische tensor g^{AB} .

(b) Bepaal $a^A, b^A, c_A, d_A, \vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a} \cdot \vec{c}$ en $\vec{a} \cdot \vec{d}$.

Opgave 3: In deze opgave gaan we coördinatentransformaties bestuderen (voor toelichting, zie sectie 4.4 op bladzijde 60).

(a) Bereken de transformatiematrix (zie vergelijking (88) voor de coördinatentransformatie $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ met $\xi = x$ en $\eta = 1$.

(b) Bereken de jacobiaan (dat is de determinant van de transformatiematrix; zie vergelijking (89)) en laat zien dat voor bovenstaande transformatie soms geldt $J = 0$.

(c) Het is belangrijk dat een afbeelding één op één is en dat komt wiskundig tot uitdrukking in de eis dat de jacobiaan van de coördinatentransformatie $J \neq 0$.

Zijn de volgende coördinatentransformaties goede afbeeldingen? Bereken de jacobiaan en vermeld de punten waarvoor de afbeeldingen falen.

1. $\xi = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \eta = \arctan(\frac{y}{x})$;
2. $\xi = \ln x, \eta = y$;
3. $\xi = \arctan(\frac{y}{x}), \eta = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Opgave 4: Teken de volgende curven. Welke hebben hetzelfde pad? Bepaal ook hun raakvectoren waar de parameter gelijk is aan nul.

- (a) $x = \sin \lambda, y = \cos \lambda$;
- (b) $x = \cos(2\pi t^2), y = \sin(2\pi t^2 + \pi)$;
- (c) $x = s, y = s + 4$;
- (d) $x = s^2, y = -(s - 2)(s + 2)$;
- (e) $x = \mu, y = 1$.

Opgave 5: De relatie tussen cartesische (x, y) en poolcoördinaten (r, θ) wordt gegeven door $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ en de inverse relaties $x = r \cos \theta$ en $y = r \sin \theta$.

- (a) Bereken alle elementen van de transformatiematrices $\Lambda^{\alpha'}_{\beta}$ en $\Lambda^{\mu}_{\nu'}$ voor de transformatie van cartesische (het stelsel zonder accent) naar polaire (met accenten op de indices) coördinaten.
- (b) Stel $f = x^2 + y^2 + 2xy$ en in cartesische coördinaten $\vec{V} \rightarrow (x^2 + 3y, y^2 + 3x), \vec{W} \rightarrow (1, 1)$. Bereken f als functie van r en θ , en bepaal de componenten van $\vec{V}$ en $\vec{W}$ voor de polaire basis door ze uit te drukken als functies van r en θ .
- (c) Bepaal de componenten van $\tilde{d}f$ in cartesische coördinaten en verkrijg ze in poolcoördinaten door (i) directe berekening in poolcoördinaten, en (ii) door transformeren van de cartesische componenten.
- (d) Gebruik de metrische tensor in poolcoördinaten om de polaire componenten van de 1-vormen $\tilde{V}$ en $\tilde{W}$ geassocieerd met $\vec{V}$ en $\vec{W}$ te vinden.
- (e) Bepaal de polaire componenten van $\tilde{V}$ en $\tilde{W}$ door transformatie van de cartesische componenten.

OPGAVEN WEEK 5 en 6

Naam: _____

Opgave 1: Een vrij deeltje beweegt met snelheid v langs de y -as, zoals gezien in een zeker lorentzstelsel. Op tijd $t = 0$, gezien vanuit dit lorentzstelsel, is het deeltje in de oorsprong.

- (a) U kunt aannemen dat de snelheid v van dit deeltje constant is. Waarom?
- (b) Bereken de positie van het deeltje als functie van de eigentijd τ met behulp van de tijddilatatieformule.
- (c) Bereken nogmaals de positie van het deeltje als functie van de eigentijd, maar nu met behulp van de lorentztransformaties.
- (d) Gebruik uw antwoord uit (b) of (c) om de viersnelheid u^μ van het deeltje te berekenen. Laat zien dat geldt $\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -c^2$.

Opgave 2: Via het formalisme van Lagrange kunnen we aantonen dat het kortste pad tussen twee punten in een euclidische ruimte, een rechte lijn is; dit is op het college voorgerekend. We vragen ons in deze opgave af of iets analoogs geldt in een minkowskiruimtetijd. Oftewel: is het kortste pad tussen twee *puntgebeurtenissen* ook een rechte lijn?

- (a) Laat zien dat de afstand tussen twee puntgebeurtenissen wordt gegeven door de volgende integraal:

$$S = \int \left(- \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right) dx. \quad (622)$$

- (b) Kies een lorentzstelsel waarin de twee gebeurtenissen plaatsvinden op hetzelfde tijdstip. Gebruik daarna de Euler-Lagrange vergelijkingen om aan te tonen dat S minimaal is wanneer het pad tussen de twee gebeurtenissen een rechte lijn is.
- (c) De conclusie uit opgave (b) is dat voor deze *specifieke* waarnemer inderdaad geldt dat de afstand tussen twee puntgebeurtenissen een rechte lijn is. Beargumenteer, zonder opnieuw de Euler-Lagrange vergelijkingen op te lossen, dat dezelfde conclusie ook moet gelden voor *alle waarnemers* in minkowksistelsels.

Opgave 3: In Stanford, Californie, staat een lineaire deeltjesversneller genaamd SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) Two-mile Accelerator. Dit is een instrument van ongeveer 2 mijl lang waarin een constant elektrisch veld $\mathcal{E}$ is aangebracht, dat sterk genoeg is om elektronen vanuit rust te doen versnellen tot zij een energie E hebben van 40 GeV (zoals gemeten in het ruststelsel van het apparaat). We nemen aan dat het ruimtelijk deel van de relativistische impuls $\vec{p}$ voldoet aan de volgende bewegingsvergelijking:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{\mathcal{E}}, \quad (623)$$

waarin t de tijd is zoals gemeten in het ruststelsel van de pijp, en e de elektrische lading van het elektron (hierdoor is $e\vec{\mathcal{E}}$ niets anders dan de kracht $\vec{F}$ op het elektron).

- (a) Neem aan dat het elektron start vanuit rust aan een kant van het apparaat, en dat het elektrisch veld langs de x -as is. Gebruik de bewegingsvergelijking om uit te rekenen wat de positie x is van het elektron als functie van de tijd t . Hint: bereken eerst $v(t)$; wanneer deze gevonden is, integreer deze om $x(t)$ te vinden. U houdt een integratieconstante over; kies deze zodanig dat geldt dat het elektron een positie $x = 0$ heeft op tijdstip $t = 0$.

(b) Laat zien dat de elektronen, ten opzichte van het apparaat, niet sneller kunnen gaan dan het licht. (Opmerking: via opgave 4b, volgt hieruit dat de elektronen niet sneller kunnen gaan dan het licht ten opzichte van *elke* waarnemer.)

(c) De elektronen versnellen door de aanwezigheid van het elektrisch veld $\mathcal{E}$, en winnen daardoor aan energie, zoals gezien vanuit het apparaat. Schrijf de uitdrukking op voor deze energie als functie van de tijd t . Schrijf ook de energie op gezien vanuit het elektron.

(d) De lengte van de versneller is twee mijl. Gebruik uw antwoorden uit (a) en (c) om te bepalen hoe groot het elektrisch veld moet zijn opdat de elektronen een energie (ten opzichte van het apparaat) van $E = 40$ GeV hebben wanneer zij aan de andere kant van de versneller uitkomen (opmerking: de wetten van de elektrodynamica dicteren dat de elektronen een beetje energie verliezen ten gevolge van hun versnelling; dit effect mag u verwaarlozen).

(e) Welke snelheid, ten opzichte van het apparaat, hebben de elektronen, wanneer zij de versneller uitkomen?

Opgave 4: In het college is de regel voor het optellen van snelheden afgeleid: wanneer twee waarnemers in lorentzstelsels bewegen ten opzichte van elkaar met snelheid v in de x -richting en beiden kijken naar de snelheid van een voorbijvliegend deeltje, dan gelden de volgende relaties tussen de snelheden $\vec{u}$ en $\vec{u}'$ van het deeltje, zoals gemeten door de twee waarnemers:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x + v}{1 + \frac{u_x v}{c^2}}, \\ u'_y &= \frac{1}{\gamma} \frac{u_y}{1 + \frac{v u_x}{c^2}}, \\ u'_z &= \frac{1}{\gamma} \frac{u_z}{1 + \frac{v u_x}{c^2}}, \end{aligned}$$

waarin

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

(a) Bewijs deze formules met behulp van de lorentztransformaties.

(b) Laat zien dat als een van de twee waarnemers (zeg: de waarnemer die we aanduiden zonder accentje) het deeltje ziet bewegen met een snelheid $\vec{u}$ lager dan de lichtsnelheid c , elke andere waarnemer (met accentje) ook een snelheid $\vec{u}'$ zal meten kleiner dan c . Neem hierbij niet zondermeer aan dat het deeltje in x -richting beweegt.

(c) Dezelfde opgave als (b), maar deze keer voor snelheden $\vec{u}$ groter dan c , oftewel: laat zien dat als voor een waarnemer geldt $\vec{u} > c$, dan voor elke andere waarnemer eveneens geldt $\vec{u}' > 0$.

Opgave 5: Deze opgave gaat over een van de beroemde *paradoxen* uit de speciale relativiteitstheorie. Doel is aan te tonen dat, wanneer netjes en consequent gewerkt wordt, er geen tegenstrijdigheden blijken te bestaan.

We beschouwen in deze opgave een boer die een ladder die hij graag wil opbergen, maar op het probleem stuit dat zijn ladder langer is dan zijn schuur. De boer besluit heel hard te gaan rennen met zijn ladder, omdat hij uit de relativiteitstheorie heeft begrepen dat dan, voor zijn vrouw gezien die stilstaat naast de schuur, de ladder verkort zal lijken. Als hij maar hard genoeg rent, beredeneert hij, ondervindt de ladder een lorentzcontractie en zal de ladder wel degelijk netjes in de schuur passen. Echter, onder het rennen bemerkt hij dat voor *hem*, juist de *schuur* korter

is geworden: de ladder past er nu al helemaal niet meer in! De paradox is dan ook de volgende: de boerin claimt dat de ladder wel degelijk in de schuur past, en tegelijkertijd claimt de boer dat de ladder niet past. Kunnen ze beiden gelijk hebben, of is er sprake van een tegenstrijdigheid?

We stellen ons voor dat de ladder lampjes heeft op de voor en achterkant, en beschouwen de volgende puntgebeurtenissen: de lampjes geven beide een flits af op hetzelfde moment zoals gezien door de boerin. Het lorentzframe van de boerin zullen we aanduiden met coördinaten zonder accentje, en het lorentzframe van de boer zullen we aanduiden met coördinaten met accentje.

(a) Schrijf de viervectoren dx^μ respectievelijk dx'^μ op die het verschil in tijd en afstand aangeven tussen de twee puntgebeurtenissen, zoals gezien door boerin respectievelijk boer. Noem hierbij de lengte van de ladder L respectievelijk L' . Neem hierbij aan dat beiden hun assenstelsels zo hebben gekozen, dat de boer in de x -richting aan het rennen is. Let op: met de gegeven informatie kan nog niet elke component van de viervectoren een waarde toegekend worden. Laat deze componenten onbepaald.

(b) Schrijf de lorentztransformaties op tussen de twee viervectoren. Neem hierbij aan dat de boer rent met constante snelheid v in x -richting. Hoe zijn de lengtes L en L' aan elkaar gerelateerd?

(c) Bepaal uit de lorentztransformaties eveneens het tijdsverschil tussen de twee gebeurtenissen. Laat zien dat deze niet gelijk is aan nul voor de boer, ook al is deze het wel voor de boerin.

Het feit dat de boer een tijdsverschil ongelijk nul ziet tussen de twee puntgebeurtenissen, is de kern van de oplossing van de paradox. Het betekent fysisch het volgende: vanuit zijn stelsel gezien, heeft de boerin de voor en achterkant van de ladder *niet op hetzelfde moment geregistreerd*, en is, aldus de boer, haar ruimtelijke afstand tussen de twee puntgebeurtenissen niet de juiste lengte van de ladder. Immers, zo beredeneert hij, in de tijd (door u uitgerekend in (c)) die zij te lang heeft gewacht tussen registratie van voor en achterkant van de ladder, was hij al een stukje verder gerend met snelheid v : uiteraard komt daar dan een lengte van de ladder uit die te kort is! Hij oppert daarom dat zij moet corrigeren voor het feit dat ze te lang gewacht heeft om de voor en achterkant te registreren.

(d) Wat is de afstand die de boer oppert dat zijn vrouw zou moeten optellen bij haar gevonden lengte?

(e) Wat is de lengte van de ladder, zoals de boer denkt dat hij zijn vrouw heeft zien meten? (denk goed over deze vraag na, en overtuig uzelf dat u deze niet al heeft beantwoord in opgave (b)!).

(f) Het is bij de lengte uit opgave (e) dat de boer denkt dat zijn vrouw de correctie van opgave (d) zou moeten optellen. Doe deze correctie, en beargumenteer dat de paradox nu is opgelost.

OPGAVEN WEEK 7

Naam: _____

Opgave 1: Stel voor dat we leven op het oppervlak van een bol. We introduceren de gebruikelijke sferische coördinaten (r, θ, ϕ) en laten $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi)$ de gebruikelijke set orthonormale sferische basisvectoren zijn. Het lijnelement in sferische coördinaten wordt dan gegeven door

$$d\vec{s} = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \hat{e}_\phi. \quad (624)$$

We beperken ons nu tot het oppervlak van de bol en leggen de conditie $r = \text{constant}$ op. We kiezen de coördinaten $(x^1, x^2) = (\theta, \phi)$ op het boloppervlak. Het lijnelement op het oppervlak van de bol kan in termen van de *natuurlijke basisvectoren* geschreven worden als

$$d\vec{s} = d\theta \vec{e}_\theta + d\phi \vec{e}_\phi, \quad \text{met} \quad \vec{e}_\theta = r \hat{e}_\theta, \quad \vec{e}_\phi = r \sin \theta \hat{e}_\phi. \quad (625)$$

Met deze definitie wordt het kwadratische lijnelement gegeven door

$$ds^2 = (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\phi)^2. \quad (626)$$

(a) In termen van sferische coördinaten (r, θ, ϕ) kunnen we de positievector schrijven als

$$\vec{r} = r \sin \theta \cos \phi \vec{i} + r \sin \theta \sin \phi \vec{j} + r \cos \theta \vec{k}. \quad (627)$$

De drie natuurlijke basisvectoren worden gegeven door $\vec{e}_r = \partial \vec{r} / \partial r$, $\vec{e}_\theta = \partial \vec{r} / \partial \theta$ en $\vec{e}_\phi = \partial \vec{r} / \partial \phi$. Bepaal deze vectoren en geef de lengte van elke vector. Merk op dat in het volgende alleen de basisvectoren op het oppervlak, $\vec{e}_\theta$ en $\vec{e}_\phi$, relevant zijn.

(b) Bepaal de metrische tensor en haar inverse.

(c) Bereken alle Christoffelsymbolen Γ_{ij}^k waarbij de indices lopen over de verzameling (θ, ϕ) .

(d) Hoeveel onafhankelijke componenten heeft de Riemann-tensor? Gebruik hierbij de symmetrie-eigenschappen van dit object.

(e) Bereken de componenten van de Riemann-tensor.

(f) Bereken de componenten van de Ricci-tensor.

(g) Bereken de scalaire kromming (Ricci-kromming).

(h) Bereken de componenten van de Einstein-tensor op het oppervlak van de bol.

Opgave 2: In deze opgave testen we onze kennis van het berekenen van covariante afgeleiden. We gebruiken de geometrie van het oppervlak van een twee-dimensionale bol,

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (628)$$

en een vector $\vec{V}$ met componenten $V^A = (0, 1)$. Bereken de vier componenten van $\nabla_A v^B$ en bereken dan de twee grootheden $\nabla_\theta \nabla_\phi v^\theta$ en $\nabla_\phi \nabla_\theta v^\theta$ en onderzoek of deze covariante afgeleiden commuteren.

Opgave 3: Bereken de componenten van de divergentie voor sferische coördinaten in de drie-dimensionale euclidische ruimte. Hint: voor de covariante divergentie van vector $\vec{V}$ geldt $\nabla \cdot \vec{V}$ en voor de componenten ervan $V^i_{;i}$. Zie bladzijde 111 van het dictaat voor een voorbeeld.

Opgave 4: Geef een afleiding van onderstaande uitdrukking voor de christoffelsymbolen in termen van de partiële afgeleiden van de componenten van metrische tensor g ,

$$\Gamma^\gamma_{\beta\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}). \quad (629)$$

Geef alle ontbrekende stappen tussen vergelijkingen (299) en (303) van het dictaat.

Opgave 5: Bewijs vergelijking (359) in het dictaat,

$$\nabla_{\vec{U}}\nabla_{\vec{U}}\vec{\xi} = -\mathbf{R}(_, \vec{U}, \vec{\xi}, \vec{U}), \quad (630)$$

met $\mathbf{R}$ de krommingstensor van Riemann en $\vec{U}$ de viersnelheid, door uit te gaan van de definitie van de Riemannntensor gegeven in vergelijking (338),

$$A_{\alpha;\mu\nu} - A_{\alpha;\nu\mu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]A_\alpha \equiv R^\beta_{\alpha\mu\nu}A_\beta, \quad (631)$$

met A_α de componenten van een willekeurige 1-vorm. (Dit is een uitdagende opgave.)

OPGAVEN WEEK 8

Naam: _____

Opgave 1: Bereken de gravitationele roodverschuiving van een foton met gegeven frequentie ν dat uitgezonden wordt van het oppervlak van de zon (massa 2×10^{30} kg en straal 7×10^8 m).

Opgave 2: We willen een oplossing van de Einsteinvergelijkingen vinden voor ruimtetijd buiten een statisch massief object (bijvoorbeeld een ster) met massa M . We maken gebruik van symmetrie en nemen aan dat het lijnelement wordt gegeven door

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (632)$$

(a) Welke waarden nemen A en B aan in de limiet $r \rightarrow \infty$ als we een asymptotisch vlakke oplossing willen verkrijgen?

(b) Bereken de connecties $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ (een groot deel van deze connectiecoëfficiënten is gelijk aan nul).

(c) Gebruik de Einsteinvergelijkingen $R_{\mu\nu} = 0$ voor het vacuüm buiten het massieve object om een verzameling vergelijkingen voor $A(r)$ en $B(r)$ te vinden.

(d) Laat zien dat combineren van de uitdrukkingen gevonden in vraag (c) leidt tot $A'(r)B(r) + B'(r)A(r) = 0$ en dus $A(r)B(r) = \text{const}$. Gebruik het resultaat van vraag (a) om deze constante te bepalen. Laat zien dat $\frac{d^2}{dr^2}(rA(r)) = 0$ en los dit op (Hint: dat levert $A(r) = (1 - r_S/r)$, met r_S een constante. Laat zien dat $r_S = 2GM/c^2$ door te vergelijken met de Newtoniaanse limiet). Op deze manier hebben we de zogenaamde Schwarzschild oplossing gevonden, die vele belangrijke toepassingen heeft in de relativistische astrofysica.

Opgave 3: In deze opgave beschouwen we *behouden* grootheden. De geodetenvergelijking is $\nabla_{\vec{U}}\vec{U} = 0$ en omdat ook τ/m een goede parameter langs een geodeet is, kunnen we deze vergelijking ook schrijven als

$$\nabla_{\vec{p}}\vec{p} = 0 \rightarrow p^\alpha p_{\beta;\alpha} = 0 \rightarrow p^\alpha p_{\beta,\alpha} - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} p^\alpha p_\gamma = 0 \rightarrow m \frac{dp_\beta}{d\tau} = \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} p^\alpha p_\gamma. \quad (633)$$

De term rechts van het laatste gelijkteken is relatief eenvoudig, er geldt

$$\begin{aligned} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} p^\alpha p_\gamma &= \frac{1}{2} g^{\gamma\nu} (g_{\nu\beta,\alpha} + g_{\nu\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\nu}) p^\alpha p_\gamma \\ &= \frac{1}{2} (g_{\nu\beta,\alpha} + g_{\nu\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\nu}) g^{\gamma\nu} p_\gamma p^\alpha \\ &= \frac{1}{2} (g_{\nu\beta,\alpha} + g_{\nu\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\nu}) p^\nu p^\alpha. \end{aligned} \quad (634)$$

Het product $p^\nu p^\alpha$ is symmetrisch in ν en α , terwijl de eerste en derde term binnen haakjes samen antisymmetrisch zijn in ν en α . Deze moeten daarom tegen elkaar wegvallen, waardoor alleen de middelste term overblijft,

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} p^\alpha p_\gamma = \frac{1}{2} g_{\nu\alpha,\beta} p^\nu p^\alpha. \quad (635)$$

Een volledig algemene uitdrukking voor een geodeet is dus ook

$$m \frac{dp_\beta}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{\nu\alpha,\beta} p^\nu p^\alpha. \quad (636)$$

Dit levert het belangrijke resultaat: *als alle componenten van $g_{\alpha\nu}$ onafhankelijk zijn van x^β voor een bepaalde index β , dan is p_β constant langs de baan van het deeltje.*

Beschouw de volgende metrieken gegeven in termen van het lijnelement:

1. $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$;
2. $ds^2 = -(1 - 2M/r)dt^2 + (1 - 2M/r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$, met M een constante;
3. $ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\rho^2} dt^2 - 2a\frac{2Mr \sin^2\theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2\theta}{\rho^2} \sin^2\theta d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2$, met M en a constanten. Verder hebben we de verkorte notatie $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta$ ingevoerd;
4. $ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]$, met k een constante en $R(t)$ een willekeurige functie van t .

De eerste vergelijking wordt bekend verondersteld. De andere vergelijkingen komen we later nog tegen. Hun namen zijn achtereenvolgens de Schwarzschild, Kerr, en Robertson-Walker metrieken.

(a) Geef voor elke metriek zoveel mogelijk behouden grootheden p_α van de vierimuls van een vrijvallend deeltje.

(b) Schrijf de eerste metriek in de vorm

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (637)$$

Maak hiervan gebruik en beargumenteer dat ook de Schwarzschild en de Robertson-Walker (RW) metriek sferisch symmetrisch zijn. Neemt hierdoor het aantal behouden grootheden p_α toe?

(c) We kunnen laten zien dat voor bovenstaande metriek en voor de Schwarzschild, Kerr en RW metrieken, een geodeet die begint met $\theta = \pi/2$ en $p^\theta = 0$, dus een die tangentiaal aan het equatoriale vlak begint, altijd geldt dat $\theta = \pi/2$ en $p^\theta = 0$. Hint: gebruik de vergelijking $\vec{p} \cdot \vec{p} = m^2$ om p^r te vinden uitgedrukt in m , andere behouden grootheden, en bekende functies van positie.

(d) Voor de RW metriek geldt dat sferische symmetrie impliceert dat als een geodeet begint met $p^\theta = p^\phi = 0$, deze dan gelijk aan nul blijven. Laat zien dat de geodetenvergelijking in het geval dat $k = 0$, dan p^r een behouden grootte is.

Opgave 4: In deze opgave werken we het onderwerp *behouden grootheden* nog wat verder uit.

(a) Laat zien dat als een vectorveld ξ^α voldoet aan de Killing vergelijking

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0, \quad (638)$$

dan langs een geodeet geldt dat $p^\alpha \xi_\alpha = \text{const}$. Dit is een coördinaten-onafhankelijke wijze om de behoudswet die we uit vergelijking (636) hebben afgeleid, te karakteriseren. We hoeven enkel te weten of een metriek Killing velden toelaat.

(b) Vind tien Killing velden van de Minkowskimetriek.

(c) Laat zien dat als $\vec{\xi}$ en $\vec{\eta}$ Killing velden zijn, dan is $\alpha\vec{\xi} + \beta\vec{\eta}$ ook een Killing veld voor constante α en β .

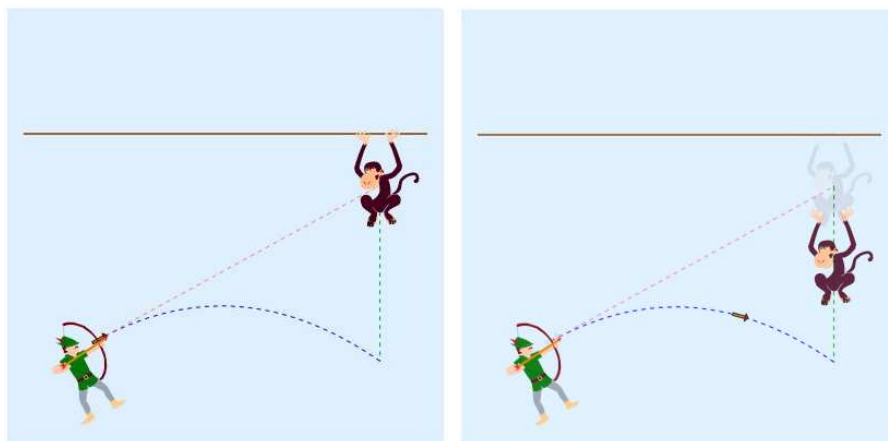
(d) Toon aan dat Lorentztransformaties van de velden in (b) de lineaire combinaties genoemd in opgave (c) produceren.

(e) Gebruik de resultaten van (a) om de Killing vectoren van de metrieken in opgave 4 te bepalen.

OPGAVEN WEEK 1 - Oplossingen

Naam: _____

Opgave 1: Robin Hood is van plan om op een aap te schieten die aan een tak in een boom hangt. Fig. 80 laat zien dat de Robin precies op de aap mikt, en hij heeft niet in de gaten dat de pijl een parabolische baan zal volgen die onder de huidige positie van de aap door zal gaan. De aap ziet de boog afgaan, laat de tak los en valt uit de boom, in de verwachting dat hij de



Figuur 80: Links: Robin Hood mikt precies op de aap; rechts: de aap laat de tak los op het moment dat de boog afgaat.

pijl zal ontwijken. (a) Laat zien dat de aap geraakt zal worden, onafhankelijk van de snelheid waarmee de pijl wordt afgevuurd (zolang die snelheid maar groot genoeg is om de afstand naar de boom te overbruggen). Neem aan dat de reactietijd van de aap verwaarloosbaar is.

Voor de baan van de pijl geldt

$$x_p(t) = v_0 \cos \theta t, \quad y_p(t) = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (639)$$

terwijl voor de aap geldt

$$x_a(t) = x_a = 50 \text{ m}, \quad y_a(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 = 10 \text{ m} - \frac{1}{2}gt^2. \quad (640)$$

De pijl bereikt x_a op tijdstip

$$x_p(t) = v_0 \cos \theta t = x_a \rightarrow t = \frac{x_a}{v_0 \cos \theta}. \quad (641)$$

De pijl raakt de aap als geldt dat

$$y_p(t) = y_a(t) \rightarrow v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow v_0 \sin \theta t = h. \quad (642)$$

Dit dient te gebeuren op het tijdstip gegeven door vergelijking (641). Dat levert de conditie

$$v_0 \sin \theta \cdot \frac{x_a}{v_0 \cos \theta} = h \rightarrow \tan \theta = \frac{h}{x} = \frac{10 \text{ m}}{50 \text{ m}}, \quad (643)$$

en hieraan is *altijd* voldaan, want dat is de definitie van een tangens.

(b) We noemen $\vec{v}_0$ de snelheid van de pijl op het moment dat die van de boog komt. Bepaal de snelheid van de pijl ten opzichte van de aap op een willekeurige tijd t gedurende de vlucht van de pijl.

De snelheid van de pijl ten opzichte van de aap is gelijk aan de snelheid van de pijl ten opzichte van de boog plus de snelheid van de boog ten opzichte van de aap,

$$\vec{v}_{\text{pijl tov aap}} = \vec{v}_{\text{pijl tov boog}} + \vec{v}_{\text{boog tov aap}}. \quad (644)$$

De snelheid van de boog ten opzichte van de aap is gelijk aan min de snelheid van de aap ten opzichte van de boog,

$$\vec{v}_{\text{pijl tov aap}} = \vec{v}_{\text{pijl tov boog}} - \vec{v}_{\text{aap tov boog}}. \quad (645)$$

Er geldt

$$\vec{v}_{\text{pijl tov boog}} = \vec{v}_0 + \vec{g}t \quad \text{en} \quad \vec{v}_{\text{aap tov boog}} = \vec{g}t. \quad (646)$$

Invullen in vergelijking (645) levert

$$\vec{v}_{\text{pijl tov aap}} = \vec{v}_{\text{pijl tov boog}} - \vec{v}_{\text{aap tov boog}} = (\vec{v}_0 + \vec{g}t) - \vec{g}t = \vec{v}_0. \quad (647)$$

Je kunt dit ook zien door pijl en aap in een vrijvallend referentiesysteem te beschouwen. Volgens het equivalentieprincipe speelt gravitatie dan geen rol (er is geen term $\vec{g}t$) en enkel de relatieve snelheid $\vec{v}_0$ blijft over en die hangt niet van de tijd af.

(c) Neem aan dat de horizontale afstand tussen de schutter en de boom gelijk is aan $x = 50$ m, en de verticale afstand tussen de schutter en de tak waaraan de aap hangt $h = 10$ m. Wat is de minimum beginsnelheid van de pijl als de aap geraakt wordt, net voordat hij op de grond valt (de verticale afstand van de grond tot de tak is 11,2 m)?

We beschouwen de beweging van de pijl. Op het moment dat de pijl neerkomt, geldt

$$x_p = v_0 \cos \theta t = 50 \rightarrow t = \frac{50}{v_0 \cos \theta} \quad \text{en} \quad y_p = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 = 10 - 11,2 = -1,2 \text{ m}. \quad (648)$$

Invullen van de tijd van inslag in de formule voor y_p levert

$$v_0 \sin \theta \frac{50}{v_0 \cos \theta} - \frac{1}{2}g \left(\frac{50}{v_0 \cos \theta} \right)^2 = -1,2 \text{ m}. \quad (649)$$

In de eerste term valt v_0 eruit en is $\sin \theta / \cos \theta = \tan \theta = 10/50$. We vinden dan

$$10 \text{ m} - \frac{1}{2}g \frac{2500}{v_0^2 \cos^2 \theta} = -1,2 \text{ m} \rightarrow \frac{1}{2}g \frac{2500}{v_0^2 \cos^2 \theta} = 11,2 \text{ m} \rightarrow v_0^2 \cos^2 \theta = \frac{2500g}{2 \times 11,2 \text{ m}}. \quad (650)$$

Er geldt $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ en $\cos \theta = x / \sqrt{x^2 + h^2} = 50 \text{ m} / \sqrt{50^2 + 10^2} = 0,981$ en we vinden

$$v_0 = \sqrt{\frac{2500 \times 9,8}{22,4 \times \cos^2 \theta}} = 33 \text{ m/s}. \quad (651)$$

Opgave 2: Een kanonskogel wordt afgevuurd met een beginsnelheid van 42,2 m/s, onder een hoek van 30° met de horizontale richting, en van een hoogte van 40 m. Hoe ver komt de kogel?

We beschouwen de baan van de kogel. Als de kogel de grond raakt, geldt

$$x = v_0 \cos \theta t \quad \text{en} \quad y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 = -40 \text{ m}. \quad (652)$$

We schrijven de laatste vergelijking als $gt^2 - 42,2t - 80 = 0$ en lossen deze op met de abc-formule⁹² en vinden (met $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ de oplossingen $t_1 = -1,424 \text{ s}$ en $t_2 = 5,731 \text{ s}$. We gebruiken de laatste waarde voor t . Invullen van deze waarde voor t in vergelijking (652) geeft

$$x = (42,2 \text{ m/s}) \cos 30^\circ (5,731 \text{ s}) = 209 \text{ m} \quad \text{en} \quad y = -40 \text{ m}. \quad (653)$$

Opgave 3: Hoe groot is de vrije-val versnelling voor een object ter hoogte van de baan van de Space Shuttle (400 km boven het aardoppervlak)?

Dat wordt gegeven door vergelijking (13) uit het dictaat. Er geldt

$$a = \frac{GM}{r^2}. \quad (654)$$

Er geldt $G = 6,6720 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}$, de massa van de aarde bedraagt $M_\oplus = 5,9742 \times 10^{24} \text{ kg}$ en de straal van de aarde is $R_\oplus = 6378,137 \text{ km}$ (op de evenaar). Invullen levert

$$a = \frac{GM}{r^2} = \frac{(6,6720 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1})(5,9742 \times 10^{24} \text{ kg})}{((6378,137 + 400) \times 10^3 \text{ m})^2} = 8,68 \text{ m/s}^2. \quad (655)$$

Opgave 4: Een projectiel wordt verticaal omhoog geschoten van het aardoppervlak met een snelheid van $v_i = 8 \text{ km/s}$. Wat is de maximale hoogte die het bereikt (verwaarloos luchtwrijving)?

De maximum hoogte kan gevonden worden uit energiebehoud. We nemen het oppervlak van de aarde als het beginpunt met $U_i = -GM_\oplus m/R_\oplus$ en $K_i = \frac{1}{2}mv_i^2$. Op de grootste hoogte geldt $K_f = 0$. Energiebehoud levert dan

$$K_f + U_f = K_i + U_i \rightarrow 0 - \frac{GM_\oplus m}{r_f} = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_\oplus m}{R_\oplus}. \quad (656)$$

Vermenigvuldigen met $-1/(GM_\oplus m)$, gebruikmaken van $GM_\oplus = gR_\oplus^2$ en oplossen naar r_f levert

$$\frac{1}{r_f} = -\frac{v_i^2}{2GM_\oplus} + \frac{1}{R_\oplus} = -\frac{v_i^2}{2gR_\oplus^2} + \frac{1}{R_\oplus} \rightarrow r_f = 1/\left(\frac{1}{R_\oplus} - \frac{v_i^2}{2gR_\oplus^2}\right) = R_\oplus/\left(1 - \frac{v_i^2}{2gR_\oplus}\right). \quad (657)$$

We substitueren de numerieke waarden voor v_i , $R_\oplus$ en g en vinden r en de hoogte $h = r - R_\oplus$.

$$r_f = R_\oplus/\left(1 - \frac{(8000 \text{ m/s})^2}{2(9,8 \text{ m/s}^2)(6,37 \times 10^6 \text{ m})}\right) = 2,05R_\oplus \quad (658)$$

en we vinden $h = r - R_\oplus = 1,05R_\oplus = 6,69 \times 10^6 \text{ m}$.

Opgave 5: Een projectiel wordt verticaal omhoog geschoten van het aardoppervlak met een beginsnelheid van $v_i = 15 \text{ km/s}$. Wat is de snelheid van het projectiel, ver verwijderd van de aarde (verwaarloos luchtwrijving)?

Ver van de aarde betekent $r \gg R_\oplus$. De beginsnelheid is groter dan de ontsnappingssnelheid 11 km/s , dus is de totale energie van het projectiel positief en zal deze van de aarde ontsnappen met aan het einde positieve kinetische energie. We gebruiken weer energiebehoud om deze kinetische

⁹²De oplossing van $ax^2 + bx + c = 0$ wordt gegeven door $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

energie te vinden en bepalen daarna de eindsnelheid. Energiebehoud met $r_f = \infty$, zodat $U_f = 0$, stelt

$$K_f + U_f = K_i + U_i \rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_{\odot}m}{R_{\odot}}. \quad (659)$$

We lossen hieruit v_f^2 op en gebruiken $GM_{\odot}/R_{\odot}^2 = g$. Dit levert

$$v_f^2 = v_i^2 - \frac{2GM_{\odot}}{R_{\odot}} = v_i^2 - 2gR_{\odot}. \quad (660)$$

Invullen van de bekende waarden voor g en $R_{\odot}$ levert

$$v_f = \sqrt{(15 \times 10^3 \text{ m/s})^2 - 2(9,8 \text{ m/s}^2)(6,37 \times 10^6 \text{ m})} = 10^4 \text{ m/s} = 10 \text{ km/s}. \quad (661)$$

OPGAVEN WEEK 2 - Oplossingen

Naam: _____

Opgave 1: Een planeet met een holle kern bestaat uit een uniforme dikke bolvormige schil met massa M , buitenstraal R en binnenstraal $R/2$.

(a) Hoeveel massa (percentage) is dichter dan $\frac{3}{4}R$ van het middelpunt van de planeet?

De massa van dat deel van de dikke schil dat dichter bij het centrum is dan $\frac{3}{4}R$ is de dichtheid keer het volume van de dikke schil met buitenstraal $\frac{3}{4}R$ en binnenstraal $\frac{1}{2}R$. We berekenen eerst de dichtheid en het volume, daarna de massa.

De massa M' (de massa van de dikke schil met buitenstraal $\frac{3}{4}R$ en binnenstraal $\frac{1}{2}R$) is de dichtheid ρ keer het volume V' , dus $M' = \rho V'$. De dichtheid is de massa M gedeeld door het volume V ,

$$\rho = \frac{M}{V} = M / \left[\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 \right] = \frac{M}{7\pi R^3/6}. \quad (662)$$

Het volume V' van de dikke schil met buitenstraal $\frac{3}{4}R$ en binnenstraal $\frac{1}{2}R$ bedraagt

$$V' = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{3R}{4}\right)^3 - \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{19}{48}\pi R^3. \quad (663)$$

De massa M' van de schil is dus gelijk aan

$$M' = \rho V' = \frac{6}{7} \frac{M}{\pi R^3} \frac{19}{48} \pi R^3 = \frac{19}{56} M. \quad (664)$$

(b) Hoe groot is het gravitatieveld op afstand $\frac{1}{4}R$ van het middelpunt?

Binnen de bol met straal $\frac{1}{4}R$ bevindt zich geen massa. Derhalve is het gravitatieveld daar gelijk aan nul.

(c) Hoe groot is het gravitatieveld op afstand $\frac{3}{4}R$ van het middelpunt?

Het gravitatieveld op $r = \frac{3}{4}R$ wordt enkel veroorzaakt door de massa die dichter bij het middelpunt ligt dan $\frac{3}{4}R$. Dat is dus de massa M' en het gravitatieveld bedraagt

$$\vec{g} = -\frac{GM'}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{G \frac{19}{56} M}{\left(\frac{3}{4}R\right)^2} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{38}{63} \frac{GM}{R^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (665)$$

We kunnen dit ook uitrekenen met de wet van Gauss. Er geldt dan het verband tussen massaverdeling en gravitatieflux,

$$\oiint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G \iiint \rho dV \rightarrow 4\pi r^2 g = -4\pi G M_I \rightarrow \left(\frac{3R}{4}\right)^2 g = -G \frac{19}{56} M \rightarrow g = -\frac{38}{63} \frac{GM}{R^2}. \quad (666)$$

Opgave 2: In het boek ‘Een reis naar de maan’ van Jules Verne, worden astronauten gelanceerd door een gigantisch kanon van de aarde naar de maan.

(a) We schatten dat de snelheid die nodig is om de maan te bereiken gelijk is aan de ontsnappingssnelheid van de aarde, en schatten de lengte van het kanon als 900 voet (ongeveer 300 m, zoals vermeld in het boek). Wat is de kans dat de astronauten de ‘lancering’ overleven?

De ontsnappingssnelheid v van de aarde bedraagt

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{R} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}} = \sqrt{\frac{2(6,6720 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1})(5,9742 \times 10^{24} \text{ kg})}{(6,378137 \text{ m})}} = 11,2 \text{ km/s}, \quad (667)$$

en dat is de snelheid waarmee het ruimteschip de loop van het kanon verlaat. Deze snelheid wordt opgebouwd. Er geldt

$$s = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \text{ en } v = at \rightarrow a = \frac{v}{t} = v\sqrt{\frac{a}{2s}} \rightarrow a = \frac{v^2}{2s} = \frac{(11,2 \times 10^3 \text{ m/s})^2}{(300 \text{ m})} \approx 20900 \text{ g}. \quad (668)$$

Het is niet erg waarschijnlijk dat de astronauten dit overleven. Wellicht bevatten de stoelen een geavanceerd dampingsysteem (maar daar zegt het boek niets over ...).

(b) In het boek, voelen de astronauten in hun ruimteschip de effecten van de gravitatie van de aarde totdat het ruimteschip het evenwichtspunt bereikt waar de gravitationele werking van de maan gelijk is aan die van de aarde. Op dit punt keert alles om en wat het plafond van het ruimteschip was, wordt nu de vloer. Hoe ver van de aarde ligt dit evenwichtspunt?

Op dat punt is de waarde van het gravitatieveld van de aarde gelijk aan dat van de maan. We noemen d de afstand van de aarde tot de maan, M de massa van de aarde, m die van de maan. Voor de afstand R van het middelpunt de aarde tot het evenwichtspunt geldt dan

$$\frac{GM}{R^2} = \frac{Gm}{(d-R)^2} \rightarrow (M-m)R^2 - 2MdR + Md^2 = 0. \quad (669)$$

We lossen bovenstaande vergelijking op met de abc-formule en vinden

$$R_{1,2} = \frac{2Md \pm \sqrt{4M^2d^2 - 4(M-m)Md^2}}{2(M-m)} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - \frac{M-m}{M}d^2}}{(M-m)/M} = \frac{d \pm d\sqrt{1 - \frac{M-m}{M}}}{(M-m)/M}, \quad (670)$$

waarbij we in de eerste stap door $2M$ gedeeld hebben en in de tweede stap d^2 buiten de wortel hebben gehaald. Invullen van $M = 5,9742 \times 10^{24} \text{ kg}$, $m = 7,349 \times 10^{22} \text{ kg}$, $d = 384.400 \text{ km}$ levert $\frac{M-m}{M} = 0,9873$ en we vinden $R_1 = 0,899d$ en $R_2 = 1,127d$. Het zal duidelijk zijn dat we $R_1 = 0,899d = 346.000 \text{ km}$ moeten hebben voor de lokatie van het evenwichtspunt.

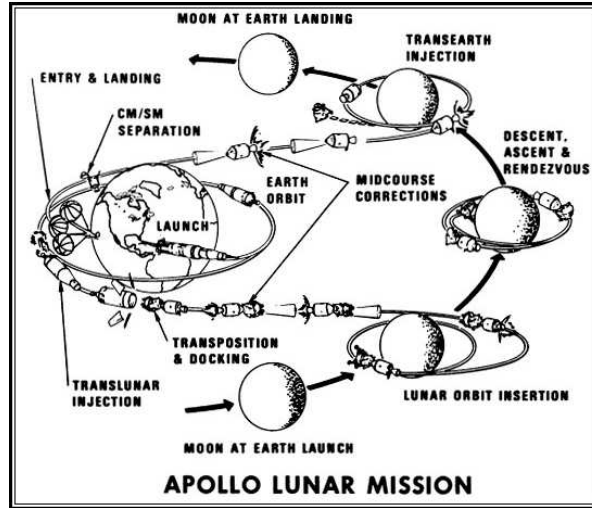
(c) Is deze beschrijving van wat de astronauten ervaren redelijk? Is dit wat er echt gebeurd is voor de Apollo astronauten tijdens hun bezoek aan de maan?

Nee. Astronauten voelen enkel gewicht als het ruimteschip stilstaat in een gravitatieveld, of versneld wordt omdat motoren worden ontstoken (tijdens lancering en koerscorrecties). Tijdens het 'coasten' met constante snelheid is men in vrije val en dus gewichtloos.

Opgave 3: We bekijken een voorwerp met massa m dat aan een veer hangt met veerconstante C . Het systeem voldoet aan de wet van Hooke en dat betekent dat de uitrekking u van de veer evenredig is met de grootte van de kracht F die op de veer wordt uitgeoefend, dus $F = Cu$. Als de veer over een afstand u wordt uitgerekt, dan heeft de massa een potentiële energie gegeven door $V = \frac{1}{2}Cu^2$.

(a) Verklaar de vergelijking $V = \frac{1}{2}Cu^2$.

De kracht wordt gegeven door $F = -Cu$ (merk op dat de kracht tegengesteld gericht is aan de uitwijking). Omdat we in dit geval de kracht kunnen afleiden uit een potentiaal, schrijven we



Figuur 81: Verschillende stadia tijdens de vlucht naar de maan van een Saturnus raket tijdens het Apollo programma.

$\vec{F} = -m\nabla\Phi = -m\frac{d\Phi}{du} = -Cu$. Integreren levert $\Phi = \frac{Cu^2}{2m}$. De potentiaal is de potentiële energie per kg. Voor de potentiële energie geldt dus $V = m\Phi = \frac{1}{2}Cu^2$.

Als de massa nu wordt losgelaten dan treedt er oscillatie op. De snelheid $\dot{u}$ is maximaal als de veer door de evenwichtstoestand gaat (waar $u = 0$ is). De Langrangiaan wordt gegeven door $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 - \frac{1}{2}Cu^2$.

(b) Maak gebruik van de Euler-Langrangevergelijking en leidt de wet van Newton af voor dit massa-veersysteem.

De Euler-Langrangevergelijking luidt als volgt

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) \rightarrow \frac{\partial L}{\partial u} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right). \quad (671)$$

Er geldt

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -Cu \quad \text{en} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = m\dot{u}. \quad (672)$$

Invullen in de Euler-Langrangevergelijking levert

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) \rightarrow -Cu = \frac{d}{dt}(m\dot{u}) = m\ddot{u}, \quad (673)$$

en dit correspondeert met de tweede wet van Newton voor deze situatie, $F = ma \rightarrow -Cu = m\ddot{u}$.

Opgave 4: Ons zonnestelsel is gemaakt uit gas afkomstig van een supernova. Al het uranium op aarde is gemaakt in deze supernova. Gedetailleerde berekeningen van de fysica van supernova explosies suggereren dat het aantal geproduceerde ^{235}U kernen 1,7 maal groter was dan het aantal ^{238}U kernen. Sinds hun productie vervalt ^{235}U met een halfwaardetijd van $t_{\frac{1}{2}} = 7,0 \times 10^8$ jaar en ^{238}U met halfwaardetijd van $t_{\frac{1}{2}} = 4,5 \times 10^9$ jaar. Hoe lang geleden vond de supernova explosie plaats, gegeven dat de verhouding ^{235}U tot ^{238}U zoals gevonden in gesteente gelijk is aan 0,007? (Hint: in radioactief verval neemt het aantal nog niet vervallen kernen af volgens de relatie $N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$ met τ de levensduur.)

Voor het verval van het ^{235}U geldt⁹³ $N_{235}(t) = N_{235}(0)/2^{(t/0,7)}$ met t in miljard jaar. Evenzo vinden we voor het verval van het ^{238}U de relatie $N_{238}(t) = N_{238}(0)/2^{(t/4,5)}$.

We delen bovenstaande vergelijkingen door elkaar en vinden

$$\frac{N_{235}(t)}{N_{238}(t)} = \frac{N_{235}(0)}{N_{238}(0)} \frac{2^{(t/4,5)}}{2^{(t/0,7)}}. \quad (674)$$

Er geldt $N_{235}(t)/N_{238}(t) = 0,007$ en $N_{235}(0)/N_{238}(0) = 1,7$. Ook geldt $2^a/2^b = 2^{(a-b)}$. We vinden

$$0,007 = 1,7 \times 2^{t\left(\frac{1}{4,5} - \frac{1}{0,7}\right)} \rightarrow {}^2\log\left(\frac{0,007}{1,7}\right) = t\left(\frac{1}{4,5} - \frac{1}{0,7}\right), \quad (675)$$

waar we beide kanten door 1,7 gedeeld hebben en de ${}^2\log$ van beide kanten hebben genomen. Ook geldt ${}^2\log(a) = {}^{10}\log(a)/{}^{10}\log(2)$. We vinden nu

$$t = \frac{{}^{10}\log\left(\frac{0,007}{1,7}\right)}{{}^{10}\log 2} / \left(\frac{1}{4,5} - \frac{1}{0,7}\right) = 6,6 \text{ miljard jaar}. \quad (676)$$

Opgave 5: De zon en andere sterren produceren hun energie door kernfusie. Een van de fusiereacties, de proton-proton cyclus, bestaat uit de volgende reacties:



gevolgd door in 10^{-5} van de gevallen

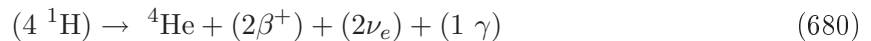


of in 85 procent van de gevallen

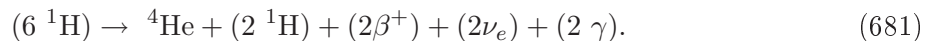


(a) Toon aan dat het netto effect van deze reacties gelijk is aan $(4 {}^1\text{H}) \rightarrow {}^4\text{He} + (2\beta^+) + (2\nu_e) + (1 \text{ of } 2) \gamma$.

Gewoon optellen van de reacties geeft in het eerste geval



en in het tweede geval



Netto wordt er evenveel waterstof omgezet per cyclus.

(b) Toon aan dat een rustenergie van 24,7 MeV vrijkomt in deze cyclus (en dan tellen we de 1,02 MeV die vrijkomt als elk van de positronen annihileert met een elektron niet eens mee).

⁹³Als u dat makkelijker vindt kunt u ook gebruikmaken van de relatie $N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$ met τ de levensduur. Het verband tussen halfwaardetijd $t_{\frac{1}{2}}$ en de levensduur τ wordt gevonden uit $N(t_{\frac{1}{2}}) = \frac{N(0)}{2} = N(0)e^{-t_{\frac{1}{2}}/\tau}$. Hieruit volgt $t_{\frac{1}{2}} = \tau \ln 2$. Verder gewoon bovenstaande logica volgen.

We hebben de volgende rustmassa's: $m_{1\text{H}} = 1,007825 \text{ u}$, $m_{4\text{He}} = 4,02603 \text{ u}$, $m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$, met u de atomaire massa-eenheid, $1 \text{ u} = 1,660\,538\,782(83) \times 10^{-27} \text{ kg} = 931,5 \text{ MeV}/c^2$. Je vindt dan het massaverschil uit

$$\begin{aligned}\Delta m &= (4m_{1\text{H}} - 2m_{e^-}) - (m_{4\text{He}} + 2m_{e^+}) \\ &= 0,028697 \text{ u} - 4m_e = (26,73 - 2,044) \text{ MeV}/c^2 = 24,7 \text{ MeV}/c^2.\end{aligned}\quad (682)$$

Dit komt overeen met een rustenergieverschil van $\Delta E_0 = \Delta mc^2 = 24,7 \text{ MeV}$.

(c) De zon straalt met een energie van ongeveer $4 \times 10^{26} \text{ W}$. Neem aan dat dit wordt veroorzaakt door de conversie van vier protonen naar helium, gammastraling en neutrino's, hetgeen $26,7 \text{ MeV}$ vrijmaakt. Wat is het verbruik van protonen in de zon (in protonen per seconde).

Het aantal proton-proton cycli per seconde is

$$\frac{P}{\Delta E} = \frac{(4 \times 10^{26} \text{ W})}{(26,7 \text{ MeV})(1,602 \times 10^{-13} \text{ J/MeV})} = 0,936 \times 10^{38} \text{ s}^{-1}.\quad (683)$$

Het verbruik in de zon is dan $3,75 \times 10^{38}$ waterstofatomen (1H) per seconde. Vermenigvuldig dit met $m_{1\text{H}} = 1,67353 \times 10^{-27} \text{ kg}$ voor een verbruik van $6,28 \times 10^{11} \text{ kg/s}$.

(d) Hoe lang kan de zon nog schijnen op deze wijze? Neem aan dat de helft van de massa van de zon ($2 \times 10^{30} \text{ kg}$) door protonen gevormd wordt.

Als er in totaal 10^{30} kg aan protonbrandstof voorradig is, dan zal de zon gedurende

$$T = \frac{(10^{30} \text{ kg})}{(6,28 \times 10^{11} \text{ kg/s})} = 1,6 \times 10^{18} \text{ seconde} \quad \text{of ook} \quad T = 5,0 \times 10^{10} \text{ jaar} \quad (684)$$

schijnen.

OPGAVEN WEEK 3 - Oplossingen

Naam: _____

Opgave 1: Ga uit van vergelijking (53) op bladzijde 34. Maak gebruik van een grove benadering waarbij we de afgeleide $\frac{dP}{dr}$ in een klap schrijven als $\frac{dP}{dr} \approx \frac{P}{R}$ (zie ook blz. 36).

(a) Laat zien dat voor een ster met massa M , straal R , de gemiddelde druk bij benadering gegeven wordt door

$$P \approx \frac{3GM^2}{4\pi R^4}. \quad (685)$$

We gaan uit van vergelijking (53) op bladzijde 34,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_I \rho}{r^2} \rightarrow \frac{P}{R} \approx \frac{GM \rho}{R^2} \rightarrow P = \frac{GM}{R} \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \rightarrow P = \frac{3GM^2}{4\pi R^4}. \quad (686)$$

In de eerste stap hebben we dP vervangen door de benadering $P_{\text{steroppervlak}} - P_{\text{stercentrum}}$ (dat is een negatief getal) en evenzo dr door $R = R_{\text{steroppervlak}} - R_{\text{stercentrum}}$.

(b) Laat zien dat dezelfde relatie leidt tot de benadering $T \sim \frac{M}{R}$ voor de gemiddelde temperatuur van de ster.

We gaan weer uit van vergelijking (53) op bladzijde 34,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_I}{r^2} \rho = -\frac{GM_I}{r^2} \frac{P \mu}{kT} \rightarrow \frac{P}{R} \approx \frac{\mu GM}{R^2} \frac{P}{kT} \rightarrow T = \frac{\mu G M}{k R}. \quad (687)$$

Merk op dat het symbool $\sim$ staat voor ‘evenredig aan’.

CHECK DEZE OPGAVE!!! ZIE PERKINS ASTROPHYSICS PAGE 334

Opgave 2: (Hint: lastige opgave; overweeg om deze als laatste te doen). In de stad Kamiokande in Japan staat de zogenaamde Kamiokande II detector. Deze detector is ontworpen om proton verval te bestuderen. Met Kamiokande II werd op 23 februari 1987 in slechts 12 seconden een totaal van 12 neutrino interacties geregistreerd. Deze meting viel samen met de explosie van supernova SN1987A die op ongeveer 170.000 lichtjaar van de aarde stond. Reeds lang hiervoor hadden astrofysici berekend dat bij een dergelijke explosie binnen een aantal seconden een energie van ongeveer 10^{46} J zou vrijkomen. Hiervan zou ongeveer 90 % vrijkomen in de vorm van neutrino's, die het heelal in gejaagd zouden worden, terwijl voor het spectaculaire zichtbare vuurwerk en de kinetische energie van de restanten ten hoogste een procent van de energie ter beschikking zou staan.

De Kamiokande II detector is in staat antineutrino's aan te tonen via de reactie

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n \quad (688)$$

aan protonen in normaal water. De protonen die gebonden zijn in zuurstof kunnen hierbij verwaarloosd worden, omdat deze niet wezenlijk tot de totale telsnelheid bijdragen. De energie en de richting van de positronen kan met de detector bepaald worden (uit de richting en de intensiteit van de door de positronen opgewekte Čerenkovstraling). De actieve massa van de detector is 2100 ton water (1 ton $\equiv$ 1000 kg). De theoretische werkzame doorsnede voor deze reactie is energieafhankelijk en kan bij de hier optredende energieën uit de volgende relatie afgeleid worden

$$\sigma = 10^{-45} \text{ m}^2 \cdot \left(\frac{E \text{ in MeV}}{10 \text{ MeV}} \right)^2, \quad (689)$$

waarbij de energie van de neutrino's E gelijk gesteld kan worden aan de energie van de positronen. De 12 geregistreerde neutrino's hadden in het gewogen gemiddelde een energie $\langle E_\nu \rangle = 12,8$ MeV en $(\langle E_\nu \rangle)^{1/2} = 10,9$ MeV.

(a) Wat is het totale aantal neutrino's dat vrijkwam bij de explosie van de supernova? Ga ervan uit dat de zes neutrinosoorten ν_e , $\bar{\nu}_e$, ν_μ , $\bar{\nu}_\mu$, ν_τ , en $\bar{\nu}_\tau$, waarvan enkel het $\bar{\nu}_e$ met de Kamiokande II detector aangetoond kan worden, met vergelijkbare energieën en in vergelijkbare hoeveelheden geproduceerd werden.

Antwoord: Allereerst rekenen we uit hoeveel actieve protonen aanwezig zijn in de Kamiokande II detector.

$$N_p^{\text{actief}} = (2 \text{ protonen/H}_2\text{O}) \left(\frac{2.1 \times 10^9 \text{ gram H}_2\text{O}}{M_{\text{H}_2\text{O}} = 18} \right) \times N_A = 1.4 \times 10^{32}. \quad (690)$$

De werkzame doorsnede per actief proton bedraagt

$$\sigma = 10^{-45} \text{ m}^2 \cdot \left(\frac{E}{10 \text{ MeV}} \right)^2 = 10^{-45} \text{ m}^2 \cdot \left(\frac{10.9 \text{ MeV}}{10 \text{ MeV}} \right)^2 = 1.19 \times 10^{-45} \text{ m}^2. \quad (691)$$

Een actief oppervlakte van $N_p \times \sigma$ resulteerde in de detectie van 12 neutrino's. Het totale oppervlakte van de neutrinoschil bedraagt

$$A_{\text{total}} = 4\pi R^2 = 4\pi(170,000 \text{ lichtjaar})^2 = 4\pi(1.61 \times 10^{21} \text{ m})^2 = 3.25 \times 10^{43} \text{ m}^2. \quad (692)$$

In totaal zijn dus

$$N_\nu = (6 \text{ soorten neutrino's}) \times \frac{A_{\text{total}}}{N_p \sigma} = 1.17 \times 10^{57} \quad (693)$$

neutrino's vrijgekomen.

(b) Hoe groot is de totale in de vorm van neutrino's vrijgekomen energie in de explosie van SN1987A? Vergelijk dit met de theoretische voorspelling en vorm een oordeel over de overeenstemming.

Antwoord: De totale vrijgekomen energie in de vorm van neutrino's bedraagt

$$E_\nu = N_\nu \times \langle 12.8 \text{ MeV} \rangle = 1.5 \times 10^{64} \text{ eV} = 2.4 \times 10^{45} \text{ J}. \quad (694)$$

We hebben hier gebruikt dat $1 \text{ eV} \equiv 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$. De overeenstemming is redelijk.

(c) Het eerst gemeten $\bar{\nu}_e$ had een energie van 20,0 MeV. Het laatst gemeten neutrino kwam 12,4 seconde later en had een energie van 8,9 MeV. Welke limiet wordt hiermee op de massa van het neutrino geplaatst? Neem hierbij aan dat de supernova explosie minstens 10 s en hoogstens 20 s geduurd heeft. De benadering $y = (1 - (x/C)^2)^{-1/2} \approx 1 + x^2/2C^2 + \dots$ voor $x \ll C$ kan hier nuttig zijn.

Antwoord: We zoeken een relatie die verband legt tussen de massa en de energie van een neutrino. We gebruiken

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{p}_\nu}{E_\nu} \quad \text{en} \quad \gamma = \frac{E_\nu}{m_\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (695)$$

waarbij m_ν de massa van het neutrino is. We kunnen schrijven

$$\frac{1}{\beta} = \left[1 - \left(\frac{m_\nu}{E_\nu} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{m_\nu^2}{2E_\nu^2}. \quad (696)$$

Het verschil in aankomsttijden van de neutrino's wordt enerzijds gegeven door de periode van 10 s waarin de supernova explodeerde, en anderzijds door de verschillen in reistijd, $t = d/v$, in het geval dat de neutrino's een massa ongelijk aan nul zouden hebben. Er geldt

$$\begin{aligned} 10 \text{ s} + 12.4 \text{ s} &= \frac{d}{v_2} - \frac{d}{v_1} = \frac{d}{c} \left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1} \right) \\ &= \frac{d}{c} \left(1 + \frac{m_\nu^2}{2E_2^2} - 1 - \frac{m_\nu^2}{2E_1^2} \right) = \frac{dm_\nu^2}{2c} (E_2^{-2} - E_1^{-2}). \end{aligned} \quad (697)$$

We kiezen voor E_1 en E_2 de grootste en kleinste neutrino energieën, en vinden

$$m_\nu^2 = 22.4 \text{ s} \times \frac{2c}{d} \frac{E_1^2 E_2^2}{E_1^2 - E_2^2} = (22.4 \text{ s}) \left(\frac{(2)(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{1.61 \times 10^{21} \text{ m}} \right) (3.94 \times 10^{23}) = (29 \text{ eV})^2. \quad (698)$$

Opgave 3: Er geldt $n = 3$ en we hebben de compacte uitdrukking $y_i = a^r_i x_r$, waarbij we gebruik maken van de Einsteinsommatieconventie.

(a) Schrijf expliciet de vergelijkingen op die worden voorgesteld door de uitdrukking $y_i = a^r_i x_r$.

Antwoord: Stel dat $i = 3$ (per conventie gaan indices als i , j en k over 1, 2 en 3. Stel verder $r = 4$ (hiervoor is geen conventie), dan geldt

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3 + a_1^4 x_4, \\ y_i = a^r_i x_r \rightarrow y_2 &= a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + a_2^3 x_3 + a_2^4 x_4, \\ y_3 &= a_3^1 x_1 + a_3^2 x_2 + a_3^3 x_3 + a_3^4 x_4. \end{aligned} \quad (699)$$

(b) Verklaar waarom een uitdrukking als $a_{ii}x^i$ zonder enige betekenis is.

Antwoord: In het algemeen geldt $a_{ij} \neq ji$. In het geval van uitdrukking $a_{ii}x^i$ is het niet duidelijk of we over de rij- of de kolomindex dienen te sommeren. Ook zouden we nog kunnen bedoelen dat we over de diagonale elementen van de matrix a_{ij} sommeren.

(c) Gebruik de sommatieconventie om

$$a_{11}b^{11} + a_{21}b^{12} + a_{31}b^{13} + a_{41}b^{14} \quad (700)$$

compact weer te geven (ken ook een waarde toe aan n).

Antwoord: Er geldt (met $n = 4$)

$$a_{i1}b^{1i} = a_{11}b^{11} + a_{21}b^{12} + a_{31}b^{13} + a_{41}b^{14}. \quad (701)$$

(d) Idem voor

$$a_{11}b^{11} + a_{12}b^{12} + a_{13}b^{13} + a_{14}b^{14} + a_{15}b^{15}. \quad (702)$$

Antwoord: Er geldt (met $n = 5$)

$$a_{1i}b^{1i} = a_{11}b^{11} + a_{12}b^{12} + a_{13}b^{13} + a_{14}b^{14} + a_{15}b^{15}. \quad (703)$$

(e) Idem voor

$$c^1_{i1} + c^2_{i2} + c^3_{i3} + c^4_{i4} + c^5_{i5} + c^6_{i6} + c^7_{i7} + c^8_{i8}. \quad (704)$$

Antwoord: We hebben (met $n = 8$) de i vergelijkingen

$$c^j_{ij} = c^1_{i1} + c^2_{i2} + c^3_{i3} + c^4_{i4} + c^5_{i5} + c^6_{i6} + c^7_{i7} + c^8_{i8}. \quad (705)$$

Opgave 4: Als a_{ij} constanten zijn, bereken dan de partiële afgeleiden

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(a_{ij}x^i x^j). \quad (706)$$

Hint: het antwoord is $\frac{\partial}{\partial x^k}(a_{ij}x^i x^j) = a_{ki}x^i + a_{ik}x^i = (a_{ik} + a_{ki})x^i$.

Antwoord: Als we de $\sum$ -notatie gebruiken, vinden we

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} a_{ij}x^i x^j &= \sum_{\substack{i \neq k \\ j \neq k}} a_{ij}x^i x^j + \sum_{\substack{i=k \\ j \neq k}} a_{ij}x^i x^j + \sum_{\substack{i \neq k \\ j=k}} a_{ij}x^i x^j + \sum_{j=k} a_{ij}x^i x^j \\ &= C + \left(\sum_{j \neq k} a_{kj}x^j\right)x^k + \left(\sum_{i \neq k} a_{ik}x^i\right)x^k + a_{kk}(x^k)^2, \end{aligned} \quad (707)$$

met C onafhankelijk van x^k . Differentiëren naar x^k levert

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sum_{i,j} a_{ij}x^i x^j \right) = 0 + \sum_{j \neq k} a_{kj}x^j + \sum_{i \neq k} a_{ik}x^i + 2a_{kk}x^k = \sum_j a_{kj}x^j + \sum_i a_{ik}x^i. \quad (708)$$

Als we gebruikmaken van de sommatieconventie, vinden we

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(a_{ij}x^i x^j) = a_{ki}x^i + a_{ik}x^i = (a_{ik} + a_{ki})x^i. \quad (709)$$

Opgave 5: We bekijken nu wat lineaire algebra met tensoren.

(a) Toon aan dat geldt

$$(x^1, x^2, x^3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = a_{ij}x^i x^j. \quad (710)$$

Antwoord: Er geldt

$$(x^1, x^2, x^3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = (x^1, x^2, x^3) \begin{pmatrix} a_{1j}x^j \\ a_{2j}x^j \\ a_{3j}x^j \end{pmatrix} = [x^i(a_{ij}x^j)] = a_{ij}x^i x^j. \quad (711)$$

(b) Schrijf de kwadratische vorm $3x^2 + y^2 - 2z^2 - 5xy - 6yz = 10$ door gebruik te maken van een symmetrische matrix.

Antwoord: Bovenstaande kwadratische vorm wordt gegeven door de niet-symmetrische matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (712)$$

We vinden de symmetrische equivalente matrix door elk niet-diagonaal element te vervangen door de halve som van dat element en haar spiegelbeeld in de diagonaal van de matrix. De gevraagde representatie wordt dus

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 3 & -5/2 & 0 \\ -5/2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 10. \quad (713)$$

Uitwerken hiervan levert weer $3x^2 + y^2 - 2z^2 - 5xy - 6yz = 10$.

(c) In een orthonormaal coördinatenstelsel wordt de afstand $d(\vec{x}, \vec{y})$ tussen de punten met plaatsvectoren $\vec{x}$ en $\vec{y}$ gegeven door

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y})^T (\vec{x} - \vec{y})}. \quad (714)$$

We voeren de coördinatentransformatie $\vec{x}' = A\vec{x}$ of $\vec{x} = B\vec{x}'$ met $B = A^{-1}$ uit. Wat is de formule voor de afstand $d(\vec{x}', \vec{y}')$ in het getransformeerde systeem?

Hint, het antwoord is

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(\vec{x}' - \vec{y}')^T G (\vec{x}' - \vec{y}')} = d(\vec{x}', \vec{y}') \quad (715)$$

met $G \equiv B^T B = (A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = (AA^T)^{-1}$.

Antwoord: Het is een kwestie van invullen. Dit levert

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, \vec{y}) &= \sqrt{(\vec{x} - \vec{y})^T (\vec{x} - \vec{y})} \\ &= \sqrt{(B\vec{x}' - B\vec{y}')^T (B\vec{x}' - B\vec{y}')} \\ &= \sqrt{(B(\vec{x}' - \vec{y}'))^T B(\vec{x}' - \vec{y}')} \\ &= \sqrt{(\vec{x}' - \vec{y}')^T B^T B (\vec{x}' - \vec{y}')} \\ &= \sqrt{(\vec{x}' - \vec{y}')^T G (\vec{x}' - \vec{y}')} \\ &= d(\vec{x}', \vec{y}'), \end{aligned} \quad (716)$$

met $G \equiv B^T B = (A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = (AA^T)^{-1}$.

We kunnen tensornotatie gebruiken en de productregel voor matrices om te bewijzen dat geldt $(AB)^T = B^T A^T$. Het bewijs gaat als volgt Stel dat $A \equiv [a_{ij}]_{mn}$ (dus m rijen en n kolommen), $B \equiv [b_{ij}]_{nk}$, en $AB \equiv [c_{ij}]_{mk}$. Voor alle i en j hebben we

$$a'_{ij} = a_{ji}, \quad b'_{ij} = b_{ji}, \quad c'_{ij} = c_{ji}. \quad (717)$$

Er geldt dus $A^T = [a'_{ij}]_{nm}$, $B^T = [b'_{ij}]_{kn}$, en $(AB)^T = [c'_{ij}]_{km}$. We moeten laten zien dat $B^T A^T = [c'_{ij}]_{km}$. De definitie van het matrixproduct geeft $B^T A^T = [b'_{ir} a'_{rj}]_{km}$, en omdat

$$b'_{ir} a'_{rj} = b_{ri} a_{jr} = a_{jr} b_{ri} = c_{ji} = c'_{ij} \quad (718)$$

vinden we het gewenste resultaat.

OPGAVEN WEEK 4 - Oplossingen

Naam: _____

Opgave 1: Welke van de onderstaande uitdrukkingen zijn consistent met de sommatieconventie en welke niet. Geef altijd de reden voor uw keuze. Laat u niet afleiden door de keuze voor de symbolen.

1. $g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\gamma$

De vrije indices zijn niet in evenwicht (er moeten links en rechts van het =-teken altijd dezelfde vrije indices staan).

2. $g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta = g_{\beta\gamma}a^\beta b^\gamma$

OK, alle indices zijn sommatie indices en we hebben links en rechts dezelfde dubbele sommatie.

3. $g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta = g_{\alpha\beta}a^\alpha c^\beta$

OK, er zou kunnen gelden dat $b^\alpha = c^\alpha$.

4. $T_{\alpha\gamma}^\alpha a^\gamma = g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta$

OK, alle sommaties staan aan beide kanten.

5. $T_{\beta\gamma}^\alpha a^\alpha c^\beta c^\gamma = b^\alpha$

Herhaalde indices komen niet voor in boven-beneden paren.

6. $\partial x^\alpha / \partial x^\beta = \delta_\beta^\alpha$

OK en waar; een bovenindex in een noemer telt als een benedenindex.

7. $\partial g_{\alpha\beta} / \partial x^\gamma = 0$

OK, dit zijn 40 vergelijkingen die uitdrukken dat alle eerste-orde afgeleiden van de metrische tensor gelijk zijn aan nul.

8. $g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\delta'}} = g_{\gamma\delta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\beta'}}$

α en β zijn vrije indices aan een kant, maar sommatie indices aan de andere kant.

9. $g_{\alpha'\beta'} a^{\alpha'} b^{\beta'} = g_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta$

OK.

10. $a^\alpha (g_{\beta\gamma} b^\beta b^\gamma) = b^\gamma$

De vrije indices zijn niet in evenwicht.

11. $T_{\alpha\beta}^\alpha = T_{\beta\beta}^\beta$

Herhaalde indices komen niet voor in boven-beneden paren.

12. $g_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}$

OK

Opgave 2: Deze opgave is bedoeld om uit te vinden of u op correcte wijze indices naar boven of beneden kunt halen. We beschouwen twee dimensies, waarbij de indices $A, B, \dots$ de waarden 1 of 2 kunnen aannemen. De metrische tensor wordt gegeven door

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} F & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (719)$$

met F een constante. Beschouw de vectoren

$$a_A = (1, 0), \quad b_A = (0, 1), \quad c^A = (1, 0), \quad d^A = (0, 1). \quad (720)$$

(a) Bepaal de inverse van de metrische tensor g^{AB} .

Antwoord: De inverse metrische tensor is

$$g^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -F \end{pmatrix}, \quad (721)$$

en $g_{AB}g^{AB} = 1$. (b) Bepaal a^A , b^A , c_A , d_A , $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$ en $\vec{a} \cdot \vec{d}$.

Antwoord: Er geldt $a^A = (0, 1)$ (gebruik $a^i = g^{ij}a_j$), $b^A = (1, -F)$, $c_A = (F, 1)$, $d_A = (1, 0)$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$ en $\vec{a} \cdot \vec{d} = 0$.

Opgave 3: In deze opgave gaan we coördinatentransformaties bestuderen (voor toelichting, zie sectie 4.4 op bladzijde 60).

(a) Bereken de transformatiematrix (zie vergelijking (88) voor de coördinatentransformatie $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ met $\xi = x$ en $\eta = 1$.

Antwoord: Er geldt

$$\Lambda^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (722)$$

(b) Bereken de jacobiaan (dat is de determinant van de transformatiematrix; zie vergelijking (89)) en laat zien dat voor bovenstaande transformatie soms geldt $J = 0$.

Antwoord: De jacobiaan is $\det \Lambda^\alpha_\beta$ en we vinden $J = 0$, onafhankelijk van x en y .

(c) Het is belangrijk dat een afbeelding één op één is en dat komt wiskundig tot uitdrukking in de eis dat de jacobiaan van de coördinatentransformatie $J \neq 0$.

Zijn de volgende coördinatentransformaties goede afbeeldingen? Bereken de jacobiaan en vermeld de punten waarvoor de afbeeldingen falen.

1. $\xi = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, $\eta = \arctan(\frac{y}{x})$;

OK, behalve in de oorsprong ($x = y = 0$). Het zijn de gebruikelijke uitdrukkingen voor poolcoördinaten.

2. $\xi = \ln x$, $\eta = y$;

Niet gedefinieerd voor $x < 0$. Niet OK voor $x = 0$. OK voor $x > 0$. De transformatie beeldt de rechterkant van het (x, y) vlak af op het hele vlak (ξ, η) .

3. $\xi = \arctan(\frac{y}{x})$, $\eta = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$.

OK, behalve voor de oorsprong en voor oneindig. De afbeelding stelt een inversie van het vlak voor door de eenheidscirkel.

Opgave 4: Teken de volgende curven. Welke hebben hetzelfde pad? Bepaal ook hun raakvectoren waar de parameter gelijk is aan nul (een curve die met parameter λ geparametriseerd is, heeft raakvector $\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha = \frac{d}{d\lambda}$ met componenten $V^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$ en basis $\vec{e}_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$).

(a) $x = \sin \lambda$, $y = \cos \lambda$.

Antwoord: De curve heeft het pad $x^2 + y^2 = 1$ en stelt de eenheidscirkel voor.

De raakvector heeft componenten $V^\alpha = (\cos \lambda, -\sin \lambda)$ en voor $\lambda = 0$ vinden we $V^\alpha = (1, 0)$.

(b) $x = \cos(2\pi t^2)$, $y = \sin(2\pi t^2 + \pi)$.

Antwoord: Er geldt $y = \sin(2\pi t^2 + \pi) = -\sin(2\pi t^2)$. Verder kwadrateren we x en y weer. Daarna optellen levert $x^2 + y^2 = 1$ en we vinden hetzelfde pad als voor vraag 4a.

De raakvector heeft componenten $V^\alpha = (-4\pi t \sin(2\pi t^2), 4\pi t \cos(2\pi t^2 + \pi))$ en voor $t = 0$ vinden we $V^\alpha = (0, 0)$.

(c) $x = s$, $y = s + 4$.

Antwoord: We vullen de uitdrukking voor x in die voor y in, en vinden $y = x + 4$ en dat is de vergelijking van een lijn met helling 1, die door het punt $(0, 4)$ gaat.

De raakvector heeft componenten $V^\alpha = (1, 1)$ en voor $s = 0$ vinden we $V^\alpha = (1, 1)$.

(d) $x = s^2$, $y = -(s - 2)(s + 2)$.

Antwoord: Er geldt $y = -(s - 2)(s + 2) = -s^2 + 4$ en invullen van $x = s^2$ levert $y = -x + 4$. Weer de vergelijking van een lijn die door het punt $(0, 4)$ gaat, maar nu met helling -1.

De raakvector heeft componenten $V^\alpha = (2s, -2s)$ en voor $s = 0$ vinden we $V^\alpha = (0, 0)$.

(e) $x = \mu$, $y = 1$.

Antwoord: Dit is de vergelijking van de lijn $y = 1$, waarbij x geparametriseerd wordt door μ .

De raakvector heeft componenten $V^\alpha = (1, 0)$ en voor $\mu = 0$ vinden we $V^\alpha = (1, 0)$.

Opgave 5: De relatie tussen cartesische (x, y) en poolcoördinaten (r, θ) wordt gegeven door $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ en de inverse relaties $x = r \cos \theta$ en $y = r \sin \theta$.

(a) Bereken alle elementen van de transformatiematrices $\Lambda_{\beta}^{\alpha'}$ en $\Lambda_{\nu'}^{\mu}$ voor de transformatie van cartesische (het stelsel zonder accent) naar polaire (met accenten op de indices) coördinaten.

Antwoord: Er geldt (gebruik $y = \arctan(x) \rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$)

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{1'}^{1'} &= \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \\ \Lambda_{2'}^{1'} &= \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \\ \Lambda_{1'}^{2'} &= \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot -\frac{y}{x^2} = -\frac{y}{r^2} \\ \Lambda_{2'}^{2'} &= \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad \Lambda_{\beta}^{\alpha'} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad \Lambda_{\nu'}^{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & -y \\ \frac{y}{r} & x \end{pmatrix}. \quad (723)$$

We hebben gebruik gemaakt van het feit dat voor elke 2×2 matrix geldt

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (724)$$

(b) Stel $f = x^2 + y^2 + 2xy$ en in cartesische coördinaten $\vec{V} \rightarrow (x^2 + 3y, y^2 + 3x)$, $\vec{W} \rightarrow (1, 1)$. Bereken f als functie van r en θ , en bepaal de componenten van $\vec{V}$ en $\vec{W}$ voor de polaire basis door ze uit te drukken als functies van r en θ .

Antwoord: Invullen van $x = r \cos \theta$ en $y = r \sin \theta$ geeft direct $f = r^2 + 2r^2 \cos \theta \sin \theta$.

Voor de vectorcomponenten geldt

$$V^{\alpha'} = \Lambda_{\beta}^{\alpha'} V^{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 + 3y \\ y^2 + 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^3}{r} + \frac{y^3}{r} + \frac{6xy}{r^2} \\ -\frac{x^2 y}{r^2} - \frac{3y^2}{r^2} + \frac{xy^2}{r^2} + \frac{3x^2}{r^2} \end{pmatrix}. \quad (725)$$

Weer gebruikmaken van $x = r \cos \theta$ en $y = r \sin \theta$ levert $V^r = r^2(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) + 6r \sin \theta \cos \theta$, en $V^\theta = 3 \cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta + r \cos \theta \sin \theta(\sin \theta - \cos \theta)$.

Op dezelfde wijze gaat de vector $\vec{W} \rightarrow (1, 1)$ over in

$$W^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta} W^{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} + \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} + \frac{x}{r^2} \end{pmatrix}. \quad (726)$$

Invullen van $x = r \cos \theta$ en $y = r \sin \theta$ levert $W^r = \cos \theta + \sin \theta$ en $W^\theta = (\cos \theta - \sin \theta)/r$.

(c) Bepaal de componenten van $\tilde{d}f$ in cartesische coördinaten en verkrijg ze in poolcoördinaten door (i) directe berekening in poolcoördinaten, en (ii) door transformeren van de cartesische componenten.

Antwoord: Er geldt $f = x^2 + y^2 + 2xy$ en dus

$$\tilde{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2x + 2y, 2y + 2x). \quad (727)$$

In poolcoördinaten hadden we $f = r^2 + 2r^2 \cos \theta \sin \theta$ en een directe berekening geeft

$$\begin{aligned} \tilde{d}f &= ((\tilde{d}f)_r, (\tilde{d}f)_\theta) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = (2r + 4r \cos \theta \sin \theta, 2r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)) \\ &= (2r(1 + \sin 2\theta), 2r^2 \cos 2\theta). \end{aligned} \quad (728)$$

We gebruiken de goniometrische relaties $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ en $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

We kunnen deze uitdrukking ook vinden door de cartesische componenten te transformeren. Dit gaat als volgt

$$\tilde{d}f_{\nu'} = \tilde{d}f_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu'} = (2x + 2y, 2x + 2y) \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & -y \\ \frac{y}{r} & x \end{pmatrix} = \left(\frac{2x^2}{r} + \frac{2xy}{r} + \frac{2xy}{r} + \frac{2y^2}{r}, -2xy - 2y^2 + 2x^2 + 2xy \right). \quad (729)$$

Gebruikmaken van $x = r \cos \theta$ en $y = r \sin \theta$ levert

$$\tilde{d}f_{\nu'} = (2r + 4r \cos \theta \sin \theta, 2r^2 \cos^2 \theta - 2r^2 \sin^2 \theta) = (2r(1 + \sin 2\theta), 2r^2 \cos 2\theta). \quad (730)$$

(d) Gebruik de metrische tensor in poolcoördinaten om de polaire componenten van de 1-vormen $\tilde{V}$ en $\tilde{W}$ geassocieerd met $\vec{V}$ en $\vec{W}$ te vinden.

Antwoord: De plaatsvector wordt gegeven door $\vec{r} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j}$. De eenheidsvectoren worden gegeven door

$$\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad \vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (731)$$

De componenten van de metrische tensor worden gegeven door $g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)$. Uitwerken levert

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r & \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_r & \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & -r \sin \theta \cos \theta + r \sin \theta \cos \theta \\ -r \sin \theta \cos \theta + r \sin \theta \cos \theta & r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (732)$$

De componenten van de 1-vorm $\tilde{V}$ worden gegeven door

$$\begin{aligned} V_\alpha = g_{\alpha\beta} V^\beta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^2(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) + 6r \sin \theta \cos \theta \\ 3 \cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta + r \cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r^2(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) + 6r \sin \theta \cos \theta \\ 3r^2 \cos^2 \theta - 3r^2 \sin^2 \theta + r^3 \cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (733)$$

Evenzo vinden we de componenten van de 1-vorm $\tilde{W}$ door

$$W_\alpha = g_{\alpha\beta} W^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta + \sin \theta \\ (\cos \theta - \sin \theta)/r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta + \sin \theta \\ r(\cos \theta - \sin \theta) \end{pmatrix}. \quad (734)$$

De componenten van vectoren kunnen uit 1-vormen gevonden worden met de inverse metriek. Er geldt

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}. \quad (735)$$

(e) Bepaal de polaire componenten van $\tilde{V}$ en $\tilde{W}$ door transformatie van de cartesische componenten.

Antwoord: In cartesische coördinaten hebben we de vectoren

$$V^\alpha = \begin{pmatrix} x^2 + 3y \\ y^2 + 3x \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad W^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (736)$$

De metrische tensor in cartesische coördinaten is de eenheidsmatrix. We vinden derhalve voor de componenten van de geassocieerde 1-vormen

$$V_\alpha = (x^2 + 3y, y^2 + 3x) \quad \text{en} \quad W_\alpha = (1, 1). \quad (737)$$

De polaire componenten worden vervolgens gevonden door de transformatie

$$\begin{aligned} V_{\nu'} &= \Lambda^\mu_{\nu'} V_\mu = (x^2 + 3y, y^2 + 3x) \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & -y \\ \frac{y}{r} & x \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{x^3}{r} + \frac{3xy}{r} + \frac{y^3}{r} + \frac{3xy}{r}, -x^2y - 3y^2 + xy^2 + 3x^2 \right) \\ &= \left(\frac{r^3 \cos^3 \theta}{r} + \frac{3r^2 \cos \theta \sin \theta}{r} + \frac{r^3 \sin^3 \theta}{r} + \frac{3r^2 \cos \theta \sin \theta}{r}, \right. \\ &\quad \left. -r^3 \cos^2 \theta \sin \theta - 3r^2 \sin^2 \theta + r^3 \cos \theta \sin^2 \theta + 3r^2 \cos^2 \theta \right) \\ &= (r^2(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) + 6r \sin \theta \cos \theta, 3r^2 \cos^2 \theta - 3r^2 \sin^2 \theta + r^3 \cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta)). \end{aligned} \quad (738)$$

Evenzo vinden we

$$W_{\nu'} = \Lambda^\mu_{\nu'} W_\mu = (1, 1) \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & -y \\ \frac{y}{r} & x \end{pmatrix} = \left(\frac{x}{r} + \frac{y}{r}, -y + x \right) = (\cos \theta + \sin \theta, r(\cos \theta - \sin \theta)). \quad (739)$$

OPGAVEN WEEK 5 en 6

Naam: _____

Opgave 1: Een vrij deeltje beweegt met snelheid v langs de y -as, zoals gezien in een zeker lorentzstelsel. Op tijd $t = 0$, gezien vanuit dit lorentzstelsel, is het deeltje in de oorsprong.

(a) U kunt aannemen dat de snelheid v van dit deeltje constant is. Waarom?

Antwoord: Het deeltje is een vrij deeltje: er werken geen krachten op, en dus zal het met constante snelheid blijven voortbewegen.

(b) Bereken de positie van het deeltje als functie van de eigentijd τ met behulp van de tijddilatatieformule.

Antwoord: In het gegeven inertiaalstelsel geldt dat het deeltje beweegt met een snelheid v , en dus volgt in dit stelsel $y(t) = vt$ (plus eventueel een constante). Hierin is t de tijd zoals gemeten door de waarnemer in dit stelsel; deze tijd kunnen we omschrijven naar de tijd τ zoals gemeten door een waarnemer die meebeweegt met het deeltje via de tijddilatatieformule $t = \gamma\tau$ (overtuig uzelf dat de γ correct is geplaatst!). op deze manier volgt

$$y(\tau) = \gamma v \tau.$$

(c) Bereken nogmaals de positie van het deeltje als functie van de eigentijd, maar nu met behulp van de lorentztransformaties.

Antwoord: Dezelfde conclusie volgt ook via de boosts: $y = \gamma(y' + v\tau)$, waarin y' en τ de positie en tijd zijn zoals gemeten door een waarnemer die meebewegen met het deeltje. Voor deze waarnemer geldt $y' = 0$; ingevuld in de Lorentz-transformatie volgt zo wederom

$$y(\tau) = \gamma v \tau.$$

(d) Gebruik uw antwoord uit (b) of (c) om de viersnelheid u^μ van het deeltje te berekenen. Laat zien dat geldt $\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2$.

Antwoord: De viersnelheid u^μ is gedefinieerd als de afgeleide van x^μ naar de eigentijd τ ; via het antwoord uit b) of c) volgt zo

$$u^t = \gamma c, \quad u^x = 0, \quad u^y = \gamma v, \quad u^z = 0.$$

De contractie $\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$ levert dan op

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu &= -\gamma^2 c^2 + \gamma^2 v^2 \\ &= \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} (v^2 - c^2) \\ &= -c^2 \end{aligned}$$

Opgave 2: Via het formalisme van Lagrange kunnen we aantonen dat het kortste pad tussen twee punten in een euclidische ruimte, een rechte lijn is; dit is op het college voorgerekend. We vragen ons in deze opgave af of iets analoogs geldt in een minkowskiruimtetijd. Oftewel: is het kortste pad tussen twee *puntgebeurtenissen* ook een rechte lijn?

(a) Laat zien dat de afstand tussen twee puntgebeurtenissen wordt gegeven door de volgende integraal:

$$S = \int \left(- \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right) dx. \quad (740)$$

Antwoord: Het lijnelement ds^2 kunnen we opvatten als de afstand (in het kwadraat) tussen twee puntgebeurtenissen in de ruimtetijd, maar strikt genomen alleen wanneer deze puntgebeurtenissen heel dicht bij elkaar liggen. Om de afstand S te berekenen als de puntgebeurtenissen niet heel dicht bij elkaar liggen, moet ds geïntegreerd worden:

$$\begin{aligned} S &= \int ds \\ &= \int \left(\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \right)^{1/2} \\ &= \int \left(-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \right)^{1/2} \\ &= \int \left(-c^2 \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right)^{1/2} dx \end{aligned}$$

In de laatste stap is gekozen om dx^2 uit de integrand te halen; een van de andere dx^μ was uiteraard ook correct geweest.

(b) Kies een lorentzstelsel waarin de twee gebeurtenissen plaatsvinden op hetzelfde tijdstip. Gebruik daarna de Euler-Lagrange vergelijkingen om aan te tonen dat S minimaal is wanneer het pad tussen de twee gebeurtenissen een rechte lijn is.

Antwoord: Voor de waarnemer voor wie de puntgebeurtenissen op hetzelfde moment plaatsvinden geldt $dt = 0$, en is de eerste term van de integrand gelijk aan nul. Er blijft over:

$$S = \int \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right)^{1/2}$$

Het minimaliseren van deze uitdrukking krijgen we voor elkaar door de integrand $L = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right)^{1/2}$ in te vullen in de Euler-Lagrange vergelijkingen

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\alpha}{dx}} \right)$$

Dit zijn vier vergelijkingen: voor elk van de x^α levert dit een differentiaalvergelijking op. Die voor $x^\alpha = t$ is makkelijk: omdat onze L niet van t of $\frac{dt}{dx}$ afhangt, zullen beide kanten nul opleveren. Hetzelfde geldt voor $x^\alpha = x$. Er blijven dan ook twee vergelijkingen over: een voor $x^\alpha = y$, en een keer voor $x^\alpha = z$. Die voor y ziet er dan als volgt uit:

$$0 = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{L} \frac{dy}{dx} \right)$$

Dit leert ons dat de uitdrukking tussen haakjes een constante is met betrekking tot x :

$$\left(\frac{1}{L} \frac{dy}{dx} \right) = A = \text{constant}$$

Dezelfde analyse en conclusie volgt voor $x^\alpha = z$:

$$\left(\frac{1}{L} \frac{dz}{dx} \right) = B = \text{constant}$$

Deze twee vergelijkingen zijn aan elkaar gekoppeld: de functie L bevat zowel $\frac{dy}{dx}$ als $\frac{dz}{dx}$, en dit maakt dat de oplossing voor $y(x)$ van $z(x)$ afhangt en vice versa. Dit maakt het gelijktijdig oplossen van de twee vergelijkingen wat lastig, maar we kunnen dit probleem omzeilen door de twee vergelijkingen op elkaar delen. Op deze manier valt de functie L er uit, en wordt gevonden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A}{B} \frac{dz}{dx}$$

Hier staat dat de afgeleides van de functies $z(x)$ en $y(x)$ slechts een constante A/B schelen met elkaar. Dit verband kunnen we gebruiken om de twee eerdere vergelijkingen te ontkoppelen. Vul hiertoe dit verband in, en gevonden wordt voor (zeg) $\frac{dy}{dx}$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= A \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= A \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{B}{A} \right)^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Dit is een vergelijking voor de afgeleide $\frac{dy}{dx}$, en kan eenvoudig worden herschreven tot

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{A}{\sqrt{1 - A^2 - B^2}} = \text{constant}$$

Deze vergelijking is makkelijk op te lossen: hij zegt dat de functie y en x een lineair verband kennen: zo is gevolgd dat $y(x)$ een rechte lijn is. Op dezelfde manier kan de analyse gedaan worden voor z om te vinden dat ook z en x een lineair verband kennen, en dus dat $z(x)$ een rechte lijn is. De conclusie is dan ook dat het pad $\vec{x} = (x, y(x), z(x))$ tussen de twee gebeurtenissen een rechte lijn is, en dit is wat moest worden aangetoond.

(c) De conclusie uit opgave (b) is dat voor deze *specifieke* waarnemer inderdaad geldt dat de afstand tussen twee puntgebeurtenissen een rechte lijn is. Beargumenteer, zonder opnieuw de Euler-Lagrange vergelijkingen op te lossen, dat dezelfde conclusie ook moet gelden voor *alle waarnemers* in minkowksistelsels.

Antwoord: Gekeken naar het lijnelement, is er geen wezenlijk verschil tussen de term $c^2 dt^2$ en de termen dx^2 , dy^2 , dz^2 : zij schelen onderling een minteken en een paar factoren c^2 , maar dit verandert alleen de waarde van de constanten in de uitwerking van (b); de conclusie dat alle verbanden rechte lijnen zijn, blijft dan ook ongewijzigd.

Opgave 3: In Stanford, Californie, staat een lineaire deeltjesversneller genaamd SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) Two-mile Accelerator. Dit is een instrument van ongeveer 2 mijl lang waarin een constant elektrisch veld $\mathcal{E}$ is aangebracht, dat sterk genoeg is om elektronen vanuit rust te doen versnellen tot zij een energie E hebben van 40 GeV (zoals gemeten in het ruststelsel van het apparaat). We nemen aan dat het ruimtelijk deel van de relativistische impuls $\vec{p}$ voldoet aan de volgende bewegingsvergelijking:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{\mathcal{E}}, \quad (741)$$

waarin t de tijd is zoals gemeten in het ruststelsel van de pijp, en e de elektrische lading van het elektron (hierdoor is $e\vec{\mathcal{E}}$ niets anders dan de kracht $\vec{F}$ op het elektron).

(a) Neem aan dat het elektron start vanuit rust aan een kant van het apparaat, en dat het elektrisch veld langs de x -as is. Gebruik de bewegingsvergelijking om uit te rekenen wat de

positie x is van het elektron als functie van de tijd t . Hint: bereken eerst $v(t)$; wanneer deze gevonden is, integreer deze om $x(t)$ te vinden. U houdt een integratieconstante over; kies deze zodanig dat geldt dat het elektron een positie $x = 0$ heeft op tijdstip $t = 0$.

Antwoord: De snelheid $v(t)$ ten opzichte van de pijp kunnen we uitrekenen met behulp van de gegeven bewegingsvergelijking. De relativistische impuls $\vec{p}$ is gelijk aan γmv (waarbij γ geen constante is, omdat de snelheid van het deeltje toeneemt in de tijd), en de bewegingsvergelijking wordt dan

$$\gamma(v)mv = e\mathcal{E}t$$

De linkerkant van de vergelijking bevat v , en we kunnen deze uit de vergelijking oplossen. Wat simpele algebra levert op

$$v = \pm \frac{e\mathcal{E}ct}{\sqrt{m^2c^2 + e^2\mathcal{E}^2t^2}}$$

(plusmin-teken komt voort uit het nemen van een wortel; het definieert hier niets anders dan de richting waarin het deeltje beweegt. We kiezen vanaf nu de plus-richting). Nu de functie $v(t)$ is gevonden, kan deze worden geïntegreerd om de positie $x(t)$ te vinden. Dit is niet zo moeilijk als het lijkt: de afgeleide van een wortel is 1 gedeeld door die wortel, en zo kunnen we al vermoeden dat de integraal van deze uitdrukking ongeveer de wortel van de noemer zal opleveren. Er geldt dan ook in het algemeen

$$\int \frac{\theta}{\sqrt{A + \theta^2}} d\theta = \sqrt{A + \theta^2} + B$$

waarin A en B twee willekeurige constanten zijn. Als we dit gebruiken om de functie $v(t)$ te integreren, vinden we voor de positie $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{e\mathcal{E}} \sqrt{m^2c^4 + e^2\mathcal{E}^2c^2t^2} + B$$

De constante B kiezen we zo, dat op tijdstip $t = 0$ het elektron op positie $x = 0$ is. Vul hiertoe de waarde $t = 0$ in, eis dat $x = 0$, en gevonden wordt dat dit alleen waar kan zijn als de constante de volgende waarde heeft:

$$B = -\frac{mc^2}{e\mathcal{E}}$$

(b) Laat zien dat de elektronen, ten opzichte van het apparaat, niet sneller kunnen gaan dan het licht. (Opmerking: via opgave 4b, volgt hieruit dat de elektronen niet sneller kunnen gaan dan het licht ten opzichte van *elke* waarnemer.)

Antwoord: Het elektrisch veld geeft het elektron een (constante) versnelling, en dus zou het elektron zijn maximale snelheid bereiken na oneindig veel tijd. Als we de limiet nemen $t \rightarrow \infty$ in de uitdrukking voor de snelheid $v(t)$, vinden we een maximale snelheid van c :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e\mathcal{E}ct}{\sqrt{m^2c^2 + e^2\mathcal{E}^2t^2}} = c.$$

Sneller dan het licht is blijkbaar niet mogelijk, en de lichtsnelheid zelf wordt pas bereikt na oneindig lang versnellen.

(c) De elektronen versnellen door de aanwezigheid van het elektrisch veld $\mathcal{E}$, en winnen daardoor aan energie, zoals gezien vanuit het apparaat. Schrijf de uitdrukking op voor deze energie als functie van de tijd t . Schrijf ook de energie op gezien vanuit het elektron.

Antwoord: De relativistische energie van een deeltje wordt gegeven door $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$, waar $\vec{p}$ het ruimtelijke deel is van de relativistische impuls. Een uitdrukking voor de laatste, zoals gemeten in het stelsel van de pijp, kunnen we direct vinden uit de gegeven bewegingsvergelijking: $\frac{d\vec{p}}{dt} = e\mathcal{E}$ geeft $\vec{p}(t) = e\mathcal{E}t$ (merk op dat dit geldt omdat het elektrisch veld constant is). De relativistische energie is dan

$$E = \sqrt{e^2 \mathcal{E}^2 c^2 t^2 + m^2 c^4}$$

Deze energie neemt toe in de tijd; dit is, uiteraard, omdat het elektrisch veld het elektron een steeds hogere snelheid geeft; hierdoor neemt de kinetische energie van het elektron toe. De energie gezien vanuit het elektron is simpelweg $E = mc^2$, omdat het elektron zich altijd in zijn eigen ruststelsel bevindt. Merk op dat het niet toegestaan is om de Lorentz-transformaties tussen energie en impuls te gebruiken om deze energie te vinden omdat het elektron zich niet in een inertiaalstelsel bevindt (het versnelt!): de Lorentz-transformaties gelden voor coördinaattransformaties tussen inertiaalstelsels!

(d) De lengte van de versneller is twee mijl. Gebruik uw antwoorden uit (a) en (c) om te bepalen hoe groot het elektrisch veld moet zijn opdat de elektronen een energie (ten opzichte van het apparaat) van $E = 40$ GeV hebben wanneer zij aan de andere kant van de versneller uitkomen (opmerking: de wetten van de elektrodynamica dicteren dat de elektronen een beetje energie verliezen ten gevolge van hun versnelling; dit effect mag u verwaarlozen).

Antwoord: Wanneer we de gevonden uitdrukkingen bekijken voor de positie $x(t)$ en de energie $E(t)$ van het elektron gezien vanuit de pijp, is te zien dat zij beide dezelfde wortel bevatten. Dit is handig, want dat betekent dat we x en E in elkaar kunnen uitdrukken:

$$x = \frac{1}{e\mathcal{E}}E - \frac{mc^2}{e\mathcal{E}}$$

Het elektrisch veld $\mathcal{E}$ benodigd om te zorgen dat het elektron een energie E heeft op positie x , wordt dan gegeven door

$$\mathcal{E} = \frac{1}{ex}(E - mc^2) \approx \frac{E}{ex}$$

(waar in de laatste stap de rustenergie mc^2 van het elektron is verwaarloosd: deze is namelijk ongeveer 0.5 MeV, wat veel kleiner is dan de energie E). We vullen de volgende getallen in: $E = 40$ GeV = $6.4 \cdot 10^{-9}$ J, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $x = 2$ mijl = 3 km, en zo wordt een elektrisch veld gevonden van $\mathcal{E} = 1.3 \cdot 10^7$ N/C.

(e) Welke snelheid, ten opzichte van het apparaat, hebben de elektronen, wanneer zij de versneller uitkomen?

Antwoord: Het verband tussen snelheid en energie wordt gegeven door de uitdrukking $E = \gamma mc^2$. Deze kan worden omgeschreven tot

$$v = c \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}}. \quad (742)$$

Invullen van de getallen $E = 40$ GeV (energie van het elektron op het eind van de pijp) en $mc^2 = 0.5$ MeV geeft een snelheid van nagenoeg de lichtsnelheid: $v = 0.999999999922c$.

Opgave 4: In het college is de regel voor het optellen van snelheden afgeleid: wanneer twee waarnemers in lorentzstelsels bewegen ten opzichte van elkaar met snelheid v in de x -richting en

beiden kijken naar de snelheid van een voorbijvliegend deeltje, dan gelden de volgende relaties tussen de snelheden $\vec{u}$ en $\vec{u}'$ van het deeltje, zoals gemeten door de twee waarnemers:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x + v}{1 + \frac{u_x v}{c^2}}, \\ u'_y &= \frac{1}{\gamma} \frac{u_y}{1 + \frac{v u_x}{c^2}}, \\ u'_z &= \frac{1}{\gamma} \frac{u_z}{1 + \frac{v u_x}{c^2}}, \end{aligned}$$

waarin

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

(a) Bewijs deze formules met behulp van de lorentztransformaties.

Antwoord: De lorentztransformaties tussen twee waarnemers die een onderlingen snelheid hebben van v in x -richting, worden gegeven voor $dt' = \gamma(dt + \frac{v}{c^2}dx)$, $dx' = \gamma(dx + vdt)$, $dy' = dy$, $dz' = dz$. Wanneer de waarnemer (zonder accentje) kijkt naar een deeltje dat beweegt in zijn stelsel met snelheid $u_x = \frac{dx}{dt}$ in x -richting, volgt voor de snelheid $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$ van het deeltje zoals gemeten door de andere waarnemer (met accentje):

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} \\ &= \frac{\gamma(dx + vdt)}{\gamma(dt + \frac{v}{c^2}dx)} \end{aligned}$$

waar de lorentztransformaties zijn ingevuld om dx' en dt' te vervangen door dx en dt . Door nu teller en noemer te delen door γdt volgt

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{dx}{dt} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{u_x + v}{1 + \frac{u_x v}{c^2}} \end{aligned}$$

Dit bewijst de eerste van de gegeven vergelijkingen. De twee anderen zijn op dezelfde manier te vinden: schrijf de snelheden $u'_y = \frac{dy'}{dt'}$, $u'_z = \frac{dz'}{dt'}$ op van het deeltje zoals gemeten door de waarnemer met accentje, vervang dy', dz' door dy, dz en dt' door dt met behulp van de lorentztransformaties, en werk uit. Het resultaat zijn de twee overgebleven vergelijkingen, die dan bewezen zijn.

(b) Laat zien dat als een van de twee waarnemers (zeg: de waarnemer die we aanduiden zonder accentje) het deeltje ziet bewegen met een snelheid $\vec{u}$ lager dan de lichtsnelheid c , elke andere waarnemer (met accentje) ook een snelheid $\vec{u}'$ zal meten kleiner dan c . Neem hierbij niet zondermeer aan dat het deeltje in x -richting beweegt.

Antwoord: We beschouwen nu een deeltje dat in willekeurige richting beweegt ten opzichte van de waarnemers, en dit doet ten opzichte van de waarnemer zonder accentje, met een snelheid $\vec{u}$ lager dan die van het licht. We nemen dus aan

$$\vec{u}^2 < c^2$$

We dienen nu aan te tonen dat dan voor de snelheid $\vec{u}'$, zoals gemeten door de waarnemer met accentje, eveneens geldt dat $\vec{u}'^2 < c^2$. Hiertoe schrijven we deze snelheid op en werken hem uit met behulp van de transformatieregels gevonden in (a).

$$\begin{aligned}\vec{u}'^2 &= u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2 \\ &= \left(\frac{u_x + v}{1 + \frac{u_x v}{c^2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\gamma} \frac{u_y}{1 + \frac{v u_x}{c^2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\gamma} \frac{u_z}{1 + \frac{v u_x}{c^2}} \right)^2\end{aligned}$$

Het is nu een kwestie van algebra geworden. Een aantal stappen staat hieronder

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\left(1 + \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} \left(u_x^2 + v^2 + 2u_x v + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (u_y^2 + u_z^2) \right) \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} \left(\vec{u}^2 + v^2 + 2u_x v - \frac{v^2}{c^2} u_y^2 - \frac{v^2}{c^2} u_z^2 \right)\end{aligned}$$

(waar is gebruikt dat $\vec{u}^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$.) We dienen nu aan te tonen dat dit kleiner is dan c^2 , oftewel: aangetoond moet worden

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} \left(\vec{u}^2 + v^2 + 2u_x v - \frac{v^2}{c^2} u_y^2 - \frac{v^2}{c^2} u_z^2 \right) < c^2$$

Dat dit waar is kunnen we aantonen door beide kanten te vermenigvuldigen met $\left(1 + \frac{u_x v}{c^2}\right)^2$ en wederom wat algebra te doen. Het resultaat is dat we moeten laten zien dat

$$\vec{u}^2 + v^2 - \frac{v^2}{c^2} \vec{u}^2 - c^2 < 0$$

Linkerkant kunnen we schrijven als $(\vec{u}^2 - c^2)(1 - \frac{v^2}{c^2})$. De tweede factor hierin is positief (omdat v altijd kleiner is dan c); de eerste factor hierin is negatief, omdat we hadden aangenomen dat de eerste waarnemer het deeltje een snelheid u ziet hebben kleiner dan c . De linkerkant van ons laatste resultaat is dus inderdaad kleiner dan nul, en hiermee is het gestelde aangetoond: als $\vec{u}^2 < c^2$, dan geldt eveneens $\vec{u}'^2 < c^2$.

(c) Dezelfde opgave als (b), maar deze keer voor snelheden $\vec{u}$ groter dan c , oftewel: laat zien dat als voor een waarnemer geldt $\vec{u} > c$, dan voor elke andere waarnemer eveneens geldt $\vec{u}' > 0$.

Antwoord: Deze opgave gaat helemaal hetzelfde als de vorige, alleen is de aanname nu dat $\vec{u}^2 > c^2$ en moet worden aangetoond (na precies dezelfde algebra als bij (b)) dat er geldt:

$$\vec{u}^2 + v^2 - \frac{v^2}{c^2} \vec{u}^2 - c^2 > 0$$

Dat dit waar is, volgt door op te merken dat de linkerkant geschreven kan worden als $(\vec{u}^2 - c^2)(1 - \frac{v^2}{c^2})$, en in te zien dat de tweede factor positief is omdat $v > c$, en de eerste factor eveneens positief is vanwege de aanname $\vec{u}^2 > c^2$. Hiermee is het gestelde aangetoond: als $\vec{u}^2 > c^2$, dan geldt eveneens $\vec{u}'^2 > c^2$.

Opgave 5: Deze opgave gaat over een van de beroemde *paradoxen* uit de speciale relativiteitstheorie. Doel is aan te tonen dat, wanneer netjes en consequent gewerkt wordt, er geen tegenstrijdigheden blijken te bestaan.

We beschouwen in deze opgave een boer die een ladder die hij graag wil opbergen, maar op het probleem stuit dat zijn ladder langer is dan zijn schuur. De boer besluit heel hard te gaan rennen

met zijn ladder, omdat hij uit de relativiteitstheorie heeft begrepen dat dan, voor zijn vrouw gezien die stilstaat naast de schuur, de ladder verkort zal lijken. Als hij maar hard genoeg rent, beredeneert hij, ondervindt de ladder een lorentzcontractie en zal de ladder wel degelijk netjes in de schuur passen. Echter, onder het rennen bemerkt hij dat voor *hem*, juist de *schuur* korter is geworden: de ladder past er nu al helemaal niet meer in! De paradox is dan ook de volgende: de boerin claimt dat de ladder wel degelijk in de schuur past, en tegelijkertijd claimt de boer dat de ladder niet past. Kunnen ze beiden gelijk hebben, of is er sprake van een tegenstrijdigheid?

We stellen ons voor dat de ladder lampjes heeft op de voor en achterkant, en beschouwen de volgende puntgebeurtenissen: de lampjes geven beide een flits af op hetzelfde moment zoals gezien door de boerin. Het lorentzframe van de boerin zullen we aanduiden met coördinaten zonder accentje, en het lorentzframe van de boer zullen we aanduiden met coördinaten met accentje.

(a) Schrijf de viervectoren dx^μ respectievelijk dx'^μ op die het verschil in tijd en afstand aangeven tussen de twee puntgebeurtenissen, zoals gezien door boerin respectievelijk boer. Noem hierbij de lengte van de ladder L respectievelijk L' . Neem hierbij aan dat beiden hun assenstelsels zo hebben gekozen, dat de boer in de x -richting aan het rennen is. Let op: met de gegeven informatie kan nog niet elke component van de viervectoren een waarde toegekend worden. Laat deze componenten onbepaald.

Antwoord: In het stelsel van de boerin geldt dat de twee lampjes op hetzelfde moment flitsen: $cdt = 0$; de afstand tussen deze twee gebeurtenissen is voor haar precies de lengte L van de ladder: $dx = L$; in y en z -richtingen vinden de gebeurtenissen plaats op dezelfde plek $dy = 0$, $dz = 0$. Voor de boer geldt dat de tijdsduur tussen het flitsen van de lampjes niet gelijk is aan nul (wat de waarde wel is, kunnen we op basis van de gegeven informatie niet vaststellen); de afstand tussen de posities van de twee gebeurtenissen is voor hem precies de lengte L' van de ladder (de lampjes bevinden zich immers op de twee uiteinden van de ladder): $dx' = L'$; in y' en z' -richtingen vinden de gebeurtenissen plaats op dezelfde plek $dy' = 0$, $dz' = 0$.

(b) Schrijf de lorentztransformaties op tussen de twee viervectoren. Neem hierbij aan dat de boer rent met constante snelheid v in x -richting. Hoe zijn de lengtes L en L' aan elkaar gerelateerd?

Antwoord: Omdat de twee waarnemers beide in lorentzstelsels bevinden, zijn hun gemeten afstanden en tijdsduren aan elkaar gerelateerd via de lorentztransformaties.

$$\begin{aligned} dt' &= \gamma\left(dt + \frac{v}{c^2}dx\right) \\ dx' &= \gamma(dx + vdt) \end{aligned}$$

Met de antwoorden uit (a) ingevuld, nemen deze de volgende vorm aan

$$\begin{aligned} dt' &= \gamma\frac{v}{c^2}L \\ L' &= \gamma L \end{aligned} \tag{743}$$

De tweede hiervan geeft de relatie aan tussen de lengte van de ladder zoals gezien door boer (L') en boerin (L); omdat $\gamma > 1$, volgt hieruit dat de ladder korter lijkt voor de boerin dan voor de boer. Dit is, natuurlijk, precies lorentzcontractie.

(c) Bepaal uit de lorentztransformaties eveneens het tijdsverschil tussen de twee gebeurtenissen. Laat zien dat deze niet gelijk is aan nul voor de boer, ook al is deze het wel voor de boerin.

Het feit dat de boer een tijdsverschil ongelijk nul ziet tussen de twee puntgebeurtenissen, is de kern van de oplossing van de paradox. Het betekent fysisch het volgende: vanuit zijn stelsel

gezien, heeft de boerin de voor en achterkant van de ladder *niet op hetzelfde moment geregistreerd*, en is, aldus de boer, haar ruimtelijke afstand tussen de twee puntgebeurtenissen niet de juiste lengte van de ladder. Immers, zo beredeneert hij, in de tijd (door u uitgerekend in (c)) die zij te lang heeft gewacht tussen registratie van voor en achterkant van de ladder, was hij al een stukje verder gerend met snelheid v : uiteraard komt daar dan een lengte van de ladder uit die te kort is! Hij oppert daarom dat zij moet corrigeren voor het feit dat ze te lang gewacht heeft om de voor en achterkant te registreren.

Antwoord: De eerste van de twee vergelijkingen gevonden bij (c) geeft aan dat de twee gebeurtenissen niet op hetzelfde moment plaatsvinden, zoals gezien door de boer: $dt' \neq 0$.

(d) Wat is de afstand die de boer oppert dat zijn vrouw zou moeten optellen bij haar gevonden lengte?

Antwoord: De boer denkt dat zijn vrouw een tijd $\gamma \frac{v}{c^2} L$ te lang gewacht heeft tussen meten van voor en achterkant van de ladder, en zij om die reden een te korte ladder gemeten heeft: in de tussentijd is de ladder immers een stukje verder gevlogen met snelheid v . De boer oppert daarom dat daarvoor gecompenseerd moet worden met een afstand gelijk aan deze snelheid maal de tijd die zij, voor hem gezien, te lang heeft gewacht. Dit geeft dan $\gamma \frac{v^2}{c^2} L$.

(e) Wat is de lengte van de ladder, zoals de boer denkt dat hij zijn vrouw heeft zien meten? (denk goed over deze vraag na, en overtuig uzelf dat u deze niet al heeft beantwoord in opgave (b)!).

Antwoord: De boerin heeft een lengte L gemeten, wat korter is dan de boer zelf meet als lengte L van zijn ladder. De vraag is hier wat de lengte is die de boer ziet dat zijn vrouw gemeten heeft. Dit is *niet* hetzelfde als de vraag wat de boerin gemeten heeft! Stelt u zich voor dat de boerin haar gemeten lengte van de ladder, L (een lorentzcontractie kleiner dan wat de boer gemeten heeft als lengte van zijn ladder), weergeeft door twee streepjes te zetten op de vloer van de schuur. De boer, die nog altijd voorbij rent met snelheid v , bekijkt nu op zijn beurt de afstand tussen de twee streepjes en ziet deze afstand *lorentzgecontraheerd*. De boer denkt dus dat zijn vrouw een lengte $\frac{1}{\gamma} L$ gemeten heeft.

(f) Het is bij de lengte uit opgave (e) dat de boer denkt dat zijn vrouw de correctie van opgave (d) zou moeten optellen. Doe deze correctie, en beargumenteer dat de paradox nu is opgelost.

Antwoord: Het is bij de lengte van (e) dat de boer denkt dat zijn vrouw de correctie van (d) moet optellen: pas dan, zo beredeneert de boer in zijn stelsel, heeft zij gecompenseerd voor het feit dat ze de voor en achterkant van de ladder niet tegelijkertijd gemeten heeft. Als we deze correctie doen vinden we

$$\frac{1}{\gamma} L + \gamma \frac{v^2}{c^2} L \quad (744)$$

Of, alles uitgedrukt in de lengte L' van de ladder zoals de boer hem zelf meet in zijn stelsel (via $L = \gamma^{-1} L'$) is dit

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\gamma^2} L' + \frac{v^2}{c^2} L' \\ &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \right) \\ &= L' \end{aligned} \quad (745)$$

Dit is precies de lengte van de ladder zoals gemeten door de boer! Hieruit volgt, dat de verwarring over de 'werkelijke' lengte van de ladder, puur veroorzaakt is door het feit dat boer en boerin van

mening verschillen over of de voor en achterkant van de ladder wel netjes op hetzelfde moment gemeten zijn. Beide waarnemers hebben gelijk in hun eigen stelsel: in dat van de boerin heeft zij wel degelijk voor en achterkant van ladder op hetzelfde moment gemeten en is haar gevonden lengte dus correct; ook in het stelsel van de boer is de lengte correct gemeten. Het verschil in antwoord komt er uit voort dat gelijktijdigheid voor de boerin niet hetzelfde is als voor de boer, maar dat euvel wordt netjes opgelost door het verschil in gelijktijdigheid te compenseren zoals we nu hebben gedaan in de stappen d) t/m f). Geen paradox!

OPGAVEN WEEK 7 - Oplossingen

Naam: _____

Opgave 1: Stel voor dat we leven op het oppervlak van een bol. We introduceren de gebruikelijke sferische coördinaten (r, θ, ϕ) en laten $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi)$ de gebruikelijke set orthonormale sferische basisvectoren zijn. Het lijnelement in sferische coördinaten wordt dan gegeven door

$$d\vec{s} = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \hat{e}_\phi. \quad (746)$$

We beperken ons nu tot het oppervlak van de bol en leggen de conditie $r = \text{constant}$ op. We kiezen de coördinaten $(x^1, x^2) = (\theta, \phi)$ op het boloppervlak. Het lijnelement op het oppervlak van de bol kan in termen van de *natuurlijke basisvectoren* geschreven worden als

$$d\vec{s} = d\theta \vec{e}_\theta + d\phi \vec{e}_\phi, \quad \text{met} \quad \vec{e}_\theta = r \hat{e}_\theta, \quad \vec{e}_\phi = r \sin \theta \hat{e}_\phi. \quad (747)$$

Met deze definitie wordt het kwadratische lijnelement gegeven door

$$ds^2 = (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\phi)^2. \quad (748)$$

(a) In termen van sferische coördinaten (r, θ, ϕ) kunnen we de positievector schrijven als

$$\vec{r} = r \sin \theta \cos \phi \vec{i} + r \sin \theta \sin \phi \vec{j} + r \cos \theta \vec{k}. \quad (749)$$

De drie natuurlijke basisvectoren worden gegeven door $\vec{e}_r = \partial \vec{r} / \partial r$, $\vec{e}_\theta = \partial \vec{r} / \partial \theta$ en $\vec{e}_\phi = \partial \vec{r} / \partial \phi$. Bepaal deze vectoren en geef de lengte van elke vector. Merk op dat in het volgende alleen de basisvectoren op het oppervlak, $\vec{e}_\theta$ en $\vec{e}_\phi$, relevant zijn.

Antwoord: We vinden de drie natuurlijke basisvectoren door afgeleiden te nemen van vergelijking (749). Dit geeft

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \partial \vec{r} / \partial r = \sin \theta \cos \phi \vec{i} + \sin \theta \sin \phi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}, \\ \vec{e}_\theta &= \partial \vec{r} / \partial \theta = r \cos \theta \cos \phi \vec{i} + r \cos \theta \sin \phi \vec{j} - r \sin \theta \vec{k}, \\ \vec{e}_\phi &= \partial \vec{r} / \partial \phi = -r \sin \theta \sin \phi \vec{i} + r \sin \theta \cos \phi \vec{j}. \end{aligned} \quad (750)$$

De lengte van deze vectoren zijn $|\vec{e}_r| = 1$, $|\vec{e}_\theta| = r$ en $|\vec{e}_\phi| = r \sin \theta$. De vectoren voldoen aan $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\phi = \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_r = 0$, en de coördinaten zijn orthogonaal.

(b) Bepaal de metrische tensor en haar inverse.

Antwoord: In een specifieke basis $\{\vec{e}_\alpha\}$ heeft de metrische tensor componenten die gegeven zijn door

$$g_{\alpha\beta} = g(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta. \quad (751)$$

Hiermee vinden we

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta & \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_\theta & \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (752)$$

Voor de inverse metriek geldt

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1/r^2 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (753)$$

(c) Bereken alle Christoffelsymbolen Γ_{ij}^k waarbij de indices lopen over de verzameling (θ, ϕ) .

Antwoord: Vergelijking (303) uit het dictaat geeft de uitdrukking voor de christoffelsymbolen in termen van de partiële afgeleiden van de componenten van g . Er geldt dus

$$\Gamma_{\beta\mu}^{\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}), \quad (754)$$

waarbij de indices lopen over de verzameling $\{\theta, \phi\}$; de komma stelt een partiële afgeleide voor. Merk op dat de metrische tensor en haar inverse diagonaal zijn, en dat de enige functionele afhankelijkheid in de metriek gegeven wordt door $g_{\phi\phi}(\theta)$. Dit betekent dat de christoffelsymbolen twee ϕ 's en één θ dienen te hebben om een resultaat te krijgen dat van nul verschilt. Er geldt bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} &= \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} = 0 \\ \Gamma_{\phi\theta}^{\theta} &= \Gamma_{\theta\phi}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{\theta\phi}}{\partial\theta} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial\phi} - \frac{\partial g_{\phi\theta}}{\partial\theta} \right) = 0 \\ \Gamma_{\theta\theta}^{\phi} &= \frac{1}{2}g^{\phi\phi} \left(\frac{\partial g_{\phi\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial g_{\phi\theta}}{\partial\theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial\phi} \right) = 0 \end{aligned} \quad (755)$$

De van nul verschillende elementen worden berekend als

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{\theta\phi}}{\partial\phi} + \frac{\partial g_{\theta\phi}}{\partial\phi} - \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial\theta} \right) = -\frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} (r^2 \sin^2 \theta) \\ \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} &= \frac{1}{2}g^{\phi\phi} \left(\frac{\partial g_{\phi\theta}}{\partial\phi} + \frac{\partial g_{\phi\theta}}{\partial\phi} - \frac{\partial g_{\theta\phi}}{\partial\phi} \right) = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (r^2 \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (756)$$

De enige christoffelsymbolen op het oppervlak van de bol die niet gelijk zijn aan nul, worden gegeven door

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (757)$$

(d) Hoeveel onafhankelijke componenten heeft de Riemannntensor? Gebruik hierbij de symmetrie-eigenschappen van dit object.

Antwoord: Omdat de Riemantensor antisymmetrisch is in zowel het eerste als het tweede paar indices, moeten deze indices verschillen om een resultaat te krijgen dat ongelijk aan nul is (bijvoorbeeld $R_{11kl} = -R_{11kl} = 0$). Het enige element van de Riemannntensor dat van nul verschilt is hiermee $R_{\theta\phi\theta\phi}$ (en ook de elementen die met de symmetrie eigenschappen hieraan verbonden zijn).

(e) Bereken de componenten van de Riemannntensor.

Antwoord: Voor de Riemannntensor geldt de definitie (340) uit het dictaat,

$$R_{\alpha\mu\nu}^{\beta} = \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\gamma} \Gamma_{\gamma\mu}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\gamma} \Gamma_{\gamma\nu}^{\beta} \right). \quad (758)$$

We halen de eerste index naar beneden met behulp van de metriek en er geldt

$$\begin{aligned} R_{\theta\phi\theta\phi} &= g_{\theta\theta} R_{\phi\theta\phi}^{\theta} = r^2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} + \Gamma_{\alpha\theta}^{\theta} \Gamma_{\phi\phi}^{\alpha} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial\phi} \Gamma_{\phi\theta}^{\theta} + \Gamma_{\alpha\phi}^{\theta} \Gamma_{\phi\theta}^{\alpha} \right) \right] \\ &= r^2 \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin^2 \theta - (-\sin \theta \cos \theta) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right] = r^2 [-\cos 2\theta + \cos^2 \theta] \\ &= r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (759)$$

We vinden dus

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = r^2 \sin^2 \theta = R_{\phi\theta\phi\theta} \quad (760)$$

op het oppervlak van de bol. We kunnen indices weer naar boven halen met de metriek en er geldt

$$\begin{aligned} R_{\phi\theta\phi}^{\theta} &= g^{\theta\theta} R_{\theta\phi\theta\phi} = \frac{1}{r^2} r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \theta \\ R_{\theta\phi\theta}^{\phi} &= g^{\phi\phi} R_{\phi\theta\phi\theta} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} r^2 \sin^2 \theta = 1 \end{aligned} \quad (761)$$

(f) Bereken de componenten van de Riccitenor.

Antwoord: De van nul verschillende elementen van de Riccitenor volgen uit bovenstaande vergelijkingen as

$$\begin{aligned} R_{ij} &= R_{ikj}^k \\ R_{\phi\phi} &= R_{\phi\theta\phi}^{\theta} = \sin^2 \theta \\ R_{\theta\theta} &= R_{\theta\phi\theta}^{\phi} = 1 \end{aligned} \quad (762)$$

op het oppervlak van een bol.

We kunnen indices weer naar boven halen met behulp van de metriek en vinden

$$R_{\phi}^{\phi} = g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} = \frac{1}{r^2} \quad \text{en} \quad R_{\theta}^{\theta} = g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}. \quad (763)$$

(g) Bereken de scalaire kromming (Riccikromming).

Antwoord: De Riccikromming wordt gegeven door de som van deze twee termen. We vinden

$$R = R^i_i = \frac{2}{r^2} \quad (764)$$

voor het oppervlak van een bol. Het oppervlak van een bol is een ruimte met constante kromming, en de kromming gaat naar nul als de straal van de bol naar oneindig gaat.

(h) Bereken de componenten van de Einsteintensor op het oppervlak van de bol.

Antwoord: De Einsteintensor is gelijk aan nul op het oppervlak van een bol. Er geldt

$$\begin{aligned} G_{\theta}^{\theta} &= R_{\theta}^{\theta} - \frac{1}{2} R = 0 \\ G_{\phi}^{\phi} &= R_{\phi}^{\phi} - \frac{1}{2} R = 0 \end{aligned} \quad (765)$$

op het oppervlak van een bol.

Opgave 2: In deze opgave testen we onze kennis van het berekenen van covariante afgeleiden. We gebruiken de geometrie van het oppervlak van een twee-dimensionale bol,

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (766)$$

en een vector $\vec{V}$ met componenten $V^A = (0, 1)$. Bereken de vier componenten van $\nabla_A v^B$ en bereken dan de twee grootheden $\nabla_{\theta} \nabla_{\phi} v^{\theta}$ en $\nabla_{\phi} \nabla_{\theta} v^{\theta}$ en onderzoek of deze covariante afgeleiden commuteren.

Antwoord: We hebben allereerst de christoffelsymbolen nodig. De enige die niet gelijk zijn aan nul, zijn $\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta$ en $\Gamma_{\theta\phi}^{\theta} = \Gamma_{\phi\theta}^{\theta} = \cot \theta$. De van nul verschillende afgeleiden van $\vec{V}$ zijn $\nabla_{\phi} V^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta$ en $\nabla_{\theta} V^{\phi} = \cos \theta$. De gevraagde tweede afgeleiden zijn $\nabla_{\phi} \nabla_{\theta} V^{\theta} = 0$ en $\nabla_{\theta} \nabla_{\phi} V^{\theta} = \sin^2 \theta$. We zien dat covariante afgeleiden niet commuteren.

Opgave 3: Bereken de componenten van de divergentie voor sferische coördinaten in de drie-dimensionale euclidische ruimte. Hint: voor de covariante divergentie van vector $\vec{V}$ geldt $\nabla \cdot \vec{V}$ en voor de componenten ervan $V^i_{;i}$. Zie bladzijde 111 van het dictaat voor een voorbeeld.

Antwoord: De divergentie wordt gegeven door $V^i_{;i}$. Er geldt

$$V^i_{;i} = \frac{\partial V^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ji} V^j = \frac{\partial V^r}{\partial r} + \frac{\partial V^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V^\phi}{\partial \phi} + \Gamma^i_{ji} V^j. \quad (767)$$

De laatste term kunnen we uitschrijven en vinden

$$\Gamma^i_{ji} V^j = \Gamma^i_{ri} V^r + \Gamma^i_{\theta i} V^\theta + \Gamma^i_{\phi i} V^\phi. \quad (768)$$

Er geldt

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{ri} V^r &= (\Gamma^r_{rr} + \Gamma^{\theta}_{r\theta} + \Gamma^{\phi}_{r\phi}) V^r \\ \Gamma^i_{\theta i} V^\theta &= (\Gamma^r_{\theta r} + \Gamma^{\theta}_{\theta\theta} + \Gamma^{\phi}_{\theta\phi}) V^\theta \\ \Gamma^i_{\phi i} V^\phi &= (\Gamma^r_{\phi r} + \Gamma^{\theta}_{\phi\theta} + \Gamma^{\phi}_{\phi\phi}) V^\phi \end{aligned} \quad (769)$$

De christoffelsymbolen die gelijk zijn aan nul worden aangeduid met een streep eronder. We dienen de volgende christoffelsymbolen te berekenen: $\Gamma^{\theta}_{r\theta}$, $\Gamma^{\phi}_{r\phi}$ en $\Gamma^{\phi}_{\theta\phi}$. De laatste hebben we reeds berekend (zie vergelijking (757)) en er geldt $\Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$. Verder volgt uit vergelijking (750) dat geldt

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \phi \vec{i} + \cos \theta \sin \phi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} = \frac{\vec{e}_\theta}{r} \rightarrow \Gamma^{\theta}_{r\theta} = \frac{1}{r}. \quad (770)$$

Evenzo vinden we

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi} = -\sin \theta \sin \phi \vec{i} + \sin \theta \cos \phi \vec{j} = \frac{\vec{e}_\phi}{r} \rightarrow \Gamma^{\phi}_{r\phi} = \frac{1}{r}. \quad (771)$$

Invullen in vergelijking (767) levert

$$V^i_{;i} = \frac{\partial V^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ji} V^j = \frac{\partial V^r}{\partial r} + \frac{\partial V^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V^\phi}{\partial \phi} + \frac{2}{r} V^r + \cot \theta V^\theta. \quad (772)$$

Het zal de oplettende lezer opvallen dat dit niet lijkt op de ‘gebruikelijke’ uitdrukking voor de divergentie in sferische coördinaten. De reden is dat we de componenten V^i van het vectorveld $\vec{V}$ uitgedrukt hebben in een *natuurlijke* basis, terwijl men de ‘gebruikelijke’ uitdrukking geeft in een *orthonormale* basis. Het verband wordt gegeven door vergelijking (747). Merk op dat $\vec{e}_r = \hat{e}_r$. Onze contravariante vector heeft componenten

$$V^r = \frac{V^{\hat{r}}}{1}, \quad V^\theta = \frac{V^{\hat{\theta}}}{r}, \quad \text{en} \quad V^\phi = \frac{V^{\hat{\phi}}}{r \sin \theta}. \quad (773)$$

Invullen in vergelijking (772) levert

$$\begin{aligned} V^i_{;i} = \text{div} V &= \frac{\partial V^{\hat{r}}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V^{\hat{\theta}}}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{V^{\hat{\phi}}}{r \sin \theta} \right) + \frac{2}{r} V^{\hat{r}} + \cot \theta \frac{V^{\hat{\theta}}}{r} \\ &= \frac{\partial V^{\hat{r}}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V^{\hat{\theta}}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V^{\hat{\phi}}}{\partial \phi} + \frac{2}{r} V^{\hat{r}} + \frac{\cot \theta}{r} V^{\hat{\theta}} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V^{\hat{r}}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V^{\hat{\theta}}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V^{\hat{\phi}}}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (774)$$

Overigens kunnen we hiermee nu ook de uitdrukking voor de Laplace operator $\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \text{div} (\nabla \phi)$ vinden door in vergelijking (772) voor de contravariante vector V^i de gradiënt van een scalaire functie $\nabla \phi$ te gebruiken. Let er dan wel op dat de gradiënt een 1-vorm is, terwijl we de vector-uitdrukking nodig hebben. Voor de overgang gebruiken we dan weer de metrische tensor. Verder moeten we de uitdrukking daarna in de orthonormale basis schrijven.

Opgave 4: Geef een afleiding van onderstaande uitdrukking voor de christoffelsymbolen in termen van de partiële afgeleiden van de componenten van metrische tensor g ,

$$\Gamma^\gamma_{\beta\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}). \quad (775)$$

Geef alle ontbrekende stappen tussen vergelijkingen (299) en (303) van het dictaat.

Antwoord: Er geldt

$$g_{\alpha\beta;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma^\nu_{\alpha\mu}g_{\nu\beta} - \Gamma^\nu_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}, \quad (776)$$

waarbij de indices algemene coördinaten voorstellen. We hebben ook laten zien dat $g_{\alpha\beta;\mu} = 0$ in elk coördinatenstelsel en ook in gekromde ruimtetijd. We vinden dus

$$g_{\alpha\beta,\mu} = \Gamma^\nu_{\alpha\mu}g_{\nu\beta} + \Gamma^\nu_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}. \quad (777)$$

Verder geldt in elk coördinatenstelsel

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \equiv \Gamma^\mu_{\beta\alpha}, \quad (778)$$

en we gebruiken dit om vergelijking (776) te inverteren. We schrijven vergelijking (777) in drie permutaties van de indices,

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\mu} &= \Gamma^\nu_{\alpha\mu}g_{\nu\beta} + \Gamma^\nu_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}, \\ g_{\alpha\mu,\beta} &= \Gamma^\nu_{\alpha\beta}g_{\nu\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}, \\ -g_{\beta\mu,\alpha} &= -\Gamma^\nu_{\beta\alpha}g_{\nu\mu} - \Gamma^\nu_{\mu\alpha}g_{\beta\nu}. \end{aligned} \quad (779)$$

We tellen deze op, groeperen termen, gebruiken de symmetrie $g_{\beta\nu} = g_{\nu\beta}$ en vinden

$$g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} = (\Gamma^\nu_{\alpha\mu} - \Gamma^\nu_{\mu\alpha})g_{\nu\beta} + (\Gamma^\nu_{\alpha\beta} - \Gamma^\nu_{\beta\alpha})g_{\nu\mu} + (\Gamma^\nu_{\beta\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\beta})g_{\alpha\nu}. \quad (780)$$

In deze vergelijking vallen de eerste twee termen rechts weg vanwege de symmetrie van Γ en vinden we

$$g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} = 2g_{\alpha\nu}\Gamma^\nu_{\beta\mu}. \quad (781)$$

Delen door 2, vermenigvuldigen met $g^{\alpha\gamma}$ (en sommeren over α), en gebruik maken van $g^{\alpha\gamma}g_{\alpha\nu} \equiv \delta^\gamma_\nu$ levert

$$\Gamma^\gamma_{\beta\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}). \quad (782)$$

Opgave 5: Bewijs vergelijking (359) in het dictaat,

$$\nabla_{\vec{U}}\nabla_{\vec{U}}\vec{\xi} = -\mathbf{R}(_, \vec{U}, \vec{\xi}, \vec{U}), \quad (783)$$

met $\mathbf{R}$ de krommingstensor van Riemann en $\vec{U}$ de viersnelheid, door uit te gaan van de definitie van de Riemann-tensor gegeven in vergelijking (338),

$$A_{\alpha;\mu\nu} - A_{\alpha;\nu\mu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]A_\alpha \equiv R^\beta_{\alpha\mu\nu}A_\beta, \quad (784)$$

met A_α de componenten van een willekeurige 1-vorm. (Dit is een uitdagende opgave.)

Antwoord: Vergelijking (783) beschrijft de geodetische afwijking en relateert de versnelling van de separatievectoren $\vec{\xi}$ tussen twee naburige geodeten met de Riemann kromming. De separatie

viervector $\vec{\xi}(\tau)$ verbindt een punt $x^\alpha(\tau)$ op een geodeet A met een punt $x^\alpha(\tau) + \xi^\alpha(\tau)$ op een naburige geodeet B op dezelfde eigentijd τ . Omdat er geen unieke manier is om de eigentijd op een geodeet te relateren aan de eigentijd op een andere geodeet, zijn er veel verschillende separatievectoren. De precieze keuze is niet belangrijk, zolang het verschil tussen de nabijgelegen geodeten klein is en dus $\vec{\xi}$ klein is.

De separatie versnelling vormt de linkerkant van de vergelijking voor de geodetische afwijking en wordt gegeven door

$$\vec{w} \equiv \nabla_{\vec{U}} \nabla_{\vec{U}} \vec{\xi} = \nabla_{\vec{U}} \vec{v}, \quad (785)$$

met $\vec{U}$ de viersnelheid van geodeet A en $\vec{v}$ de snelheid van separatie $\vec{v} \equiv \nabla_{\vec{U}} \vec{\xi}$. De componenten van $\vec{w}$ en $\vec{v}$ in de coördinatenbasis kunnen we berekenen en we vinden

$$v^\alpha \equiv \left(\nabla_{\vec{U}} \vec{\xi} \right)^\alpha = U^\beta \nabla_\beta \xi^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha U^\beta \xi^\gamma, \quad (786)$$

$$w^\alpha \equiv (\nabla_{\vec{U}} \vec{v})^\alpha = U^\beta \nabla_\beta v^\alpha = \frac{dv^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\delta\epsilon}^\alpha U^\delta v^\epsilon. \quad (787)$$

Merk op dat we uitdrukkingen als $U^\beta (\partial \xi^\alpha / \partial x^\beta)$ geschreven hebben als $d\xi^\alpha / d\tau$, omdat voor elke functie f geldt

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{df(x^\alpha(\tau))}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = U^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}. \quad (788)$$

De afleiding bestaat uit het berekenen van w^α door vergelijking (786) in vergelijking (787) te substitueren en vervolgens gebruik te maken van de geodetische vergelijking voor geodeten A en B . Invullen levert

$$\begin{aligned} w^\alpha &= \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d}{d\tau} \left(\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha U^\beta \xi^\gamma \right) + \Gamma_{\delta\epsilon}^\alpha U^\delta \left(\frac{d\xi^\epsilon}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\epsilon U^\beta \xi^\gamma \right) \\ &= \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} + 2\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha U^\beta \frac{d\xi^\gamma}{d\tau} + \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^\delta} U^\delta U^\beta \xi^\gamma + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dU^\beta}{d\tau} \xi^\gamma + \Gamma_{\delta\epsilon}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\epsilon U^\beta U^\delta \xi^\gamma. \end{aligned} \quad (789)$$

We hebben hierbij ook vergelijking (788) gebruikt, alsmede de vrijheid om dummy indices te herlabelen om gelijke termen te groeperen, bijvoorbeeld

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha U^\beta \frac{d\xi^\gamma}{d\tau} = \Gamma_{\delta\epsilon}^\alpha U^\delta \frac{d\xi^\epsilon}{d\tau}. \quad (790)$$

Om vergelijking (789) uit te rekenen, merken we op dat $x^\alpha(\tau) + \xi^\alpha(\tau)$ aan de geodetische vergelijking, $\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau}$, voldoet. Er geldt dus

$$\frac{d^2(x^\alpha + \xi^\alpha)}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha (x^\delta + \xi^\delta) \frac{d(x^\beta + \xi^\beta)}{d\tau} \frac{d(x^\gamma + \xi^\gamma)}{d\tau} = 0. \quad (791)$$

Als ξ naar nul gaat, dan gaat bovenstaande vergelijking over in de geodetenvergelijking voor geodeet A . Omdat ξ klein is, hoeven we enkel de eerste-orde term van vergelijking (791) te bewaren in een expansie in ξ^α . We gebruiken $U^\alpha = dx^\alpha / d\tau$, vergelijking (788) en de symmetrie-eigenschap $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$ en vinden

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} + 2\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha U^\beta \frac{d\xi^\gamma}{d\tau} + \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^\delta} U^\beta U^\gamma \xi^\delta = 0. \quad (792)$$

We hebben weer de vrijheid genomen om dummy indices te herlabelen en gelijke termen bij elkaar geplaatst.

We kunnen vergelijking (792) gebruiken om de tweede afgeleide van ξ^α uit vergelijking (789) voor w^α te elimineren. We gebruiken de geodetenvergelijking om de afgeleide van U^β te elimineren. Het resultaat is

$$w^\alpha = -\frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^\delta} U^\beta U^\gamma \xi^\delta + \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^\delta} U^\beta U^\delta \xi^\gamma - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_{\delta\epsilon}^\beta U^\delta U^\epsilon \xi^\gamma + \Gamma_{\delta\epsilon}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\epsilon U^\beta U^\delta \xi^\gamma. \quad (793)$$

Alle termen met $d\xi^\alpha/d\tau$ vallen tegen elkaar weg. We gebruiken weer de vrijheid om dummy indices te herlabelen en we vinden een gemeenschappelijke factor $U^\beta \xi^\gamma U^\delta$ voor elke term. Het resultaat is

$$w^\alpha = -\left(\frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^\alpha}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^\delta} + \Gamma_{\gamma\epsilon}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\epsilon - \Gamma_{\delta\epsilon}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\epsilon\right) U^\beta \xi^\gamma U^\delta \equiv -R_{\beta\gamma\delta}^\alpha U^\beta \xi^\gamma U^\delta. \quad (794)$$

F Appendix - Tensoren - beknopte samenvatting

Lineaire (vector) ruimte: Een verzameling L heet een lineaire ruimte als

1. *Optelling* van elementen van L gedefinieerd is: als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ elementen van L zijn, dan is $\vec{a} + \vec{b}$ ook element van L .
2. *Vermenigvuldiging* van elementen van L met (reële) getallen gedefinieerd is: als $\vec{a}$ element van L is, dan is voor elke reëel getal λ , de vector $\lambda\vec{a}$ ook element van L .
3. L bevat 0, en dat is zo gedefinieerd dat $\vec{a} + 0 = \vec{a}$ voor elke $\vec{a}$ in L .
4. Alle gebruikelijke regels uit de algebra gelden: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$, etc.

De lineaire ruimte L is n -dimensionaal als het een verzameling n van nul verschillende vectoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ bevat, zodat elke vector in L uitgedrukt kan worden als lineaire combinatie van $\vec{e}_i$'s als

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^n A^i \vec{e}_i. \quad (795)$$

Hierbij zijn de A^i reële getallen, en we noemen deze de componenten van de vector $\vec{A}$. Met 'lineair onafhankelijk' wordt bedoeld dat geen enkele van de $\vec{e}_i$'s kan worden uitgedrukt als lineaire combinatie van de anderen. We noemen de vectoren $\{\vec{e}_i\}$ een *basis*. Het is conventie dat we de componenten van een vector A^i met een *bovenindex* aangeven, en basisvectoren $\vec{e}_i$ met een *benedenindex*.

De sommatieconventie van Einstein: Dit is een handige en beknopte schrijfwijze die we veelvuldig zullen gebruiken tijdens de cursus. Deze conventie stelt dat wanneer twee indices aangegeven met dezelfde letter in een wiskundige uitdrukking voorkomen, één als bovenindex en één beneden, we er van uit gaan dat over deze indices gesommeerd wordt, zonder dat we uitdrukkelijk het $\sum$ teken hoeven op te schrijven. Bijvoorbeeld, met deze conventie kunnen we de vector $\vec{A}$ in vergelijking (795) schrijven als

$$\vec{A} = A^i \vec{e}_i. \quad (796)$$

We noemen dergelijke herhaalde indices 'dummy indices'. Vanaf nu zullen we altijd de sommatieconventie gebruiken.

Veranderen van basis: Een lineaire ruimte heeft oneindig veel bases. Als $\vec{e}_i$ een basis vormen in L , dan vormen de vectoren $\vec{e}_{j'}$ ook een basis in L . Er geldt

$$\vec{e}_{j'} = \Lambda^i_{j'} \vec{e}_i, \quad (797)$$

met Λ een matrix waarvan de determinant ongelijk aan nul is. Merk op dat we de sommatieconventie gebruiken voor index i . We noemen $\Lambda^i_{j'}$ het element van Λ voor rij i en kolom j' . De notatie is subtiel, maar u kunt Λ^a_b zó lezen dat de *basisvectoren* getransformeerd worden van systeem a naar b .

We kunnen vergelijking (797) inverteren,

$$\vec{e}_i = \Lambda^{j'}_i \vec{e}_{j'}, \quad (798)$$

waarbij de matrix $\Lambda^{j'}_i$ de inverse is van $\Lambda^i_{j'}$. Omdat $\Lambda^{j'}_i = \left(\Lambda^i_{j'}\right)^{-1}$ en dus $\Lambda^{-1}\Lambda = \Lambda\Lambda^{-1} = 1$, schrijven we in indexnotatie

$$\Lambda^{j'}_i \Lambda^k_{j'} = \delta^k_i, \quad (799)$$

waarbij de Kronecker δ_j^i gelijk is aan 1 als $i = j$ en anders 0.

De vector $\vec{A}$ is een geometrisch object en verandert niet als we een andere basis kiezen. De componenten A^i veranderen wel. In de nieuwe basis worden ze gegeven door

$$A^{i'} = \Lambda^{i'}_j A^j. \quad (800)$$

De notatie is weer subtiel, maar als u het bovenstaande met uitdrukking (797) vergelijkt, ziet u dat het transformatiegedrag van basisvectoren en vectorcomponenten *tegengesteld (contra)* is. In de algemene relativiteitstheorie (ART) worden vectoren ook wel ‘contravariante vectoren’ genoemd om dit gedrag uit te drukken.

1-vormen en duale ruimten: De ART werkt met geometrische (dat zijn basisonafhankelijke) objecten. Een vector is hiervan een voorbeeld. Een ander voorbeeld is een reëelwaardige functie $\tilde{p}(\vec{a})$ op een lineaire ruimte, dat is een afbeelding van de lineaire ruimte naar de reële getallen. Dat is ingewikkelde taal, maar u kunt zich een 1-vorm voorstellen als een apparaat met één sleuf, waarin u een vector kunt stoppen. Nadat de vector in de sleuf geplaatst is, rolt er een reëel getal uit het apparaat.

Beschouw nu alle mogelijke 1-vormen op een lineaire ruimte L . Het blijkt dan dat de verzameling van deze 1-vormen ook weer gezien kan worden als een lineaire ruimte. Met L^* duiden we de lineaire ruimte van alle 1-vormen op L aan. Deze staat bekend als de *duale* of *geconjugeerde* ruimte aan L . L^* heeft niet minder status dan L . Dit kan al afgeleid worden uit het opmerkelijke feit dat als L n -dimensionaal is, dan is L^* ook n -dimensionaal. Als $\tilde{p}$ een willekeurige 1-vorm is en $\vec{V}$ een vector dan geldt

$$\tilde{p}(\vec{V}) = \tilde{p}(V^i \vec{e}_i) = \tilde{p}(\vec{e}_i) V^i. \quad (801)$$

We zien dat $\tilde{p}$ volledig bepaald wordt door n getallen, $\{\tilde{p}(\vec{e}_i)\}$, en dat zijn de componenten p_i van de 1-vorm. Dus L^* is n -dimensionaal.

Basis in een duale ruimte: Gegeven een basis $\{\vec{e}_i\}$ in L , is het handig om een verzameling $\{\tilde{\omega}^i\}$ 1-vormen te definiëren met de relatie

$$\tilde{\omega}^i(\vec{e}_j) = \delta^i_j. \quad (802)$$

Deze 1-vormen leveren een basis in L^* die we de duale basis noemen, omdat er n van deze $\tilde{\omega}^i$ lineair onafhankelijk zijn. Dus kunnen we elke 1-vorm $\tilde{p}$ schrijven als

$$\tilde{p} = p_i \tilde{\omega}^i, \quad (803)$$

met p_i reële getallen. Verder geldt

$$\tilde{p}(\vec{V}) = p_i V^i. \quad (804)$$

Wiskundig is $\tilde{p}(\vec{V})$ analoog aan het inproduct van twee vectoren, $\tilde{p}$ en $\vec{V}$, behalve dat $\tilde{p}$ en $\vec{V}$ in verschillende ruimten leven, namelijk $\tilde{p}$ in L^* , en $\vec{V}$ in L . We komen hier later op terug als we over inproducten spreken.

Als de basis in L verandert volgens vergelijking (797), verandert de duale basis ook

$$\tilde{\omega}^{i'} = \Lambda^{i'}_j \tilde{\omega}^j. \quad (805)$$

Merk op dat dit identiek is aan hoe componenten van een vector in L veranderen (zie vergelijking (800)). De componenten van 1-vormen veranderen net als (covariant aan) de basisvectoren in L

$$p_{i'} = \Lambda^j_{i'} p_j. \quad (806)$$

Daarom staan 1-vormen ook bekend als covariante vectoren of als rang-1 covariante tensoren.

Als we de notatie nog eens samenvatten, dan zien we dat basisvectoren $\vec{e}_i$ en componenten van 1-vormen p_i aangegeven worden met een *benedenindex*, terwijl we vectorcomponenten a^i en basis 1-vormen $\tilde{\omega}^i$ aangegeven met een *bovenindex*. J.A. Schouten heeft deze indexnotatie bedacht: objecten met een benedenindex transformeren met $\Lambda^j_{i'}$, terwijl objecten met een bovenindex transformeren met de inverse $\Lambda^{i'}_j$.

De duale van de duale: We hebben 1-vormen gedefinieerd als lineaire reëelwaardige functies op een lineaire ruimte L . Maar we kunnen ook vectoren voorstellen als lineaire reëelwaardige functies in L^* . Stel dat $\vec{a}$ een vector is in L . Deze genereert een afbeelding van L^* naar de reële getallen. Deze afbeelding is lineair en als je in L^* leeft, zie je vectoren in L als 1-vormen. Voor eindig-dimensionale ruimten is het eenvoudig te bewijzen dat L de duale ruimte van L^* is, dus dat geldt $L^{**} = L$.

Tensoren: Tot nu toe hebben we twee geometrische objecten gedefinieerd: de 1-vorm, die een lineaire functie op L is, en de vectoren die gezien kunnen worden als lineaire functies op L^* . Waarom beschouwen we geen lineaire functies van verschillende variabelen? Dergelijke functies worden tensoren genoemd. Om alles algemeen te houden, staan we toe dat sommige variabelen bij L horen, terwijl andere bij L^* horen. We kunnen ons een tensor voorstellen als een apparaat met n sleuven waar we vectoren (objecten uit L) in kunnen stoppen en m sleuven waar we 1-vormen (objecten uit L^*) in kunnen plaatsen. Als we alle $n+m$ sleuven van vectoren en 1-vormen voorzien hebben, rolt er een reëel getal uit het apparaat.

We demonstreren het bovenstaande aan de hand van een $(1,1)$ tensor. Laat T een $(1,1)$ tensor zijn. U kunt zich dit weer voorstellen als

$$T = T(_, _) = T(\text{"plaats voor een vector"}, \text{"plaats voor een 1-vorm"}). \quad (807)$$

Door de vector $\vec{x}$ en 1-vorm $\tilde{y}$ als argumenten te geven, krijgen we het reële getal

$$T = T(\vec{x}, \tilde{y}). \quad (808)$$

De vector $\vec{x}$ leeft in ruimte L en we expanderen haar in de basis $\vec{e}_j$ die in L gedefinieerd is. Hetzelfde doen we voor $\tilde{y}$ die leeft in L^* . We vinden

$$\vec{x} = x^j \vec{e}_j \quad \text{en} \quad \tilde{y} = p_i \tilde{\omega}^i. \quad (809)$$

Invullen in vergelijking (808) levert

$$T = T(\vec{x}, \tilde{y}) = T(x^j \vec{e}_j, p_i \tilde{\omega}^i) = T^i_j x^j y_i \quad \text{met} \quad T^i_j = T(\vec{e}_j, \tilde{\omega}^i). \quad (810)$$

Merk op dat de tensor volledig bepaald wordt door de verzameling getallen T^i_j . Deze getallen worden de *componenten* van de tensor T genoemd. De componenten van een tensor zijn reële getallen en we vinden component T^i_j door de sleuven van de tensor te vullen met basisvector $\vec{e}_j$ en basis 1-vorm $\tilde{\omega}^i$. Door alle permutaties van basisvectoren en basis 1-vormen in de sleuven te plaatsen vinden we alle mogelijke componenten van de tensor T voor deze bases. Als we van basis veranderen, blijft de tensor hetzelfde omdat deze op een basis-onafhankelijke manier gedefinieerd is, maar haar componenten veranderen. In de nieuwe basis worden deze gegeven door

$$T^{i'}_{j'} = (\Lambda^{i'}_{i'})^{-1} \Lambda^j_{j'} T^i_j = \Lambda^{i'}_i \Lambda^j_{j'} T^i_j. \quad (811)$$

De behandeling van tensoren van het algemene type (n,m) gaat analoog: dat zijn een reëelwaardige multilineaire functies van $n+m$ variabelen, waarvan n variabelen in L leven en m in

L^* . Er zijn verschillende interessante en nuttige wiskundige bewerkingen die uitgevoerd kunnen worden om met tensoren nieuwe tensoren te maken, zoals *contractie* en *tensorproduct*. We bespreken dat waar we het nodig hebben.

Inproduct en metrische tensor: We kennen allemaal het inproduct: neem twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en produceer het reële getal $\vec{a} \cdot \vec{b}$. De *metrische tensor* g bepaalt het inproduct. Er geldt

$$g(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (812)$$

Het zal duidelijk zijn dat het inproduct een rang-2 covariante tensor is, want we stoppen 2 vectoren in de twee sleuven van g , en er rolt een reëel getal uit: het inproduct van deze vectoren. De metrische tensor is symmetrisch, $g(\vec{a}, \vec{b}) = g(\vec{b}, \vec{a})$. De componenten van de metrische tensor worden aangegeven met g_{ij} , en we vinden deze door de basisvectoren in g te stoppen,

$$g_{ij} = g(\vec{e}_i, \vec{e}_j). \quad (813)$$

Omdat g_{ij} een symmetrische matrix is, kunnen we een basis vinden waarin hij diagonaal is (dus enkel g_{ii} termen heeft die ongelijk zijn aan nul). Dit is de vertrouwde orthogonale basis.

De metrische tensor introduceert een natuurlijke correspondentie tussen vectoren in L en 1-vormen in L^* . Stel dat $\vec{a}$ een vector in L is. Het is gebruikelijk om de componenten van de 1-vorm die op deze wijze verbonden is met de vector $\vec{a}$ aan te duiden met a_i . Er geldt

$$a_i = g_{ij} a^j. \quad (814)$$

We noemen dit ‘het naar beneden halen van een index’. Het is een erg handige notatie. Bijvoorbeeld

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{ij} a^i b^j = a_j b^j = a^i b_i. \quad (815)$$

Als de matrix g_{ij} niet singulier is (en dus een inverse heeft), dan zien we met bovenstaande vergelijking dat de door de metriek geïnduceerde correspondentie tussen vectoren en 1-vormen één-op-één is. Voor de metriek in de duale ruimte geldt

$$g^{ij} = g(\tilde{\omega}^i, \tilde{\omega}^j), \quad (816)$$

en we kunnen laten zien dat de matrix g^{ij} de inverse is van de matrix g_{ij} . In indexnotatie schrijven we dat als

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k. \quad (817)$$

Dus geldt

$$a^i = g^{ij} a_j. \quad (818)$$

De reden dat we in de 3D euclidische ruimte nooit een verschil hebben gemaakt tussen vectoren en 1-vormen, komt doordat de metrische tensor voor cartesische coördinaten gegeven wordt door de eenheidsmatrix, I . De relatie tussen de componenten van een vector en zijn bijbehorende 1-vorm wordt dan $a_j = g_{ij} a^i \rightarrow a_j = \delta_{ij} a^i = a^j$. We zien dat er in de 3D euclidische ruimte geen verschil is tussen vectorcomponenten en 1-vormcomponenten in cartesische coördinaten.

Naar boven en beneden halen van indices: We hebben gezien hoe de door de metriek geïnduceerde correspondentie tussen L en L^* ons in staat stelt om over te gaan tussen vectoren en 1-vormen. In het algemeen stelt deze correspondentie ons in staat om een type (n, m) tensor te veranderen in een $(n - 1, m + 1)$ tensor of in een $(n + 1, m - 1)$ tensor.