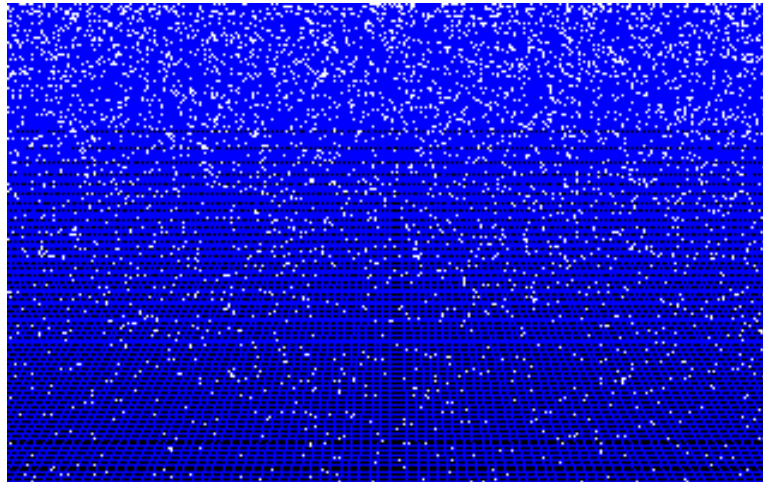


Gravitatie en kosmologie

FEW cursus



Jo van den Brand

ART: 10 november 2013

Inhoud

- Inleiding
 - Overzicht
- Klassieke mechanica
 - Galileo, Newton
 - Lagrange formalisme
- Quantumfenomenen
 - Neutronensterren
- Wiskunde I
 - Tensoren
- Speciale relativiteitstheorie
 - Minkowski
 - Ruimtetijd diagrammen

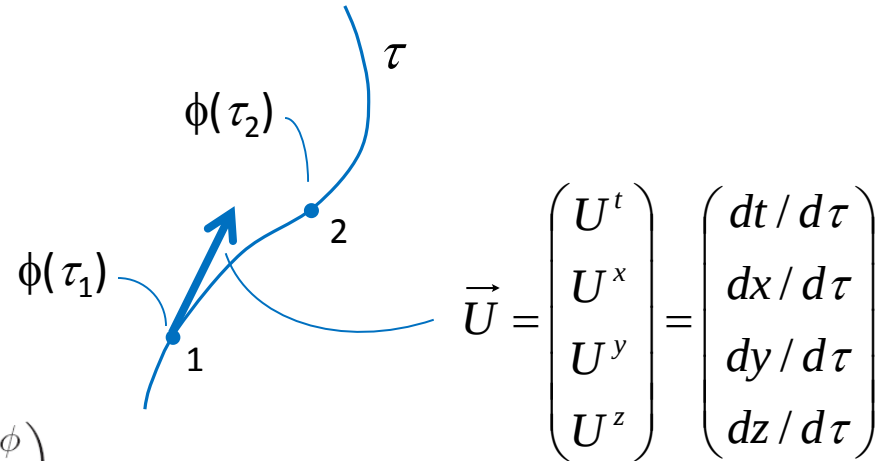
- Wiskunde II
 - Algemene coördinaten
 - Covariante afgeleide
- Algemene relativiteitstheorie
 - Einsteinvergelijkingen
 - Newton als limiet
- Kosmologie
 - Friedmann
 - Inflatie
- Gravitatiestraling
 - Theorie
 - Experiment

Kromlijnige coördinaten

Afgeleide scalair veld

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{\partial\phi}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{d\tau} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial t} U^t + \frac{\partial\phi}{\partial x} U^x + \frac{\partial\phi}{\partial y} U^y + \frac{\partial\phi}{\partial z} U^z \\ &= \tilde{d}\phi(\vec{U})\end{aligned}$$

$$\tilde{d}\phi \xrightarrow{o} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)$$



raakvector (tangent vector)

$$\frac{d\phi}{ds} = \langle \tilde{d}\phi, \vec{V} \rangle$$

De waarde van de afgeleide van ϕ in de richting $\vec{V}$

Afgeleide van scalair veld ϕ langs raakvector $\vec{V}$

$$\nabla_{\vec{V}} \phi = V^\alpha \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}$$

$$\nabla_{\vec{V}} = V^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

en

$$\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \nabla_{\vec{V}} = \partial_{\vec{V}} = \frac{d\mathcal{P}}{ds} = \frac{d}{ds} \\ \vec{e}_\alpha &= \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\end{aligned}$$

Tensorcalculus

Afgeleide van een vector

$$\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha$$

α is 0 - 3

$$\rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} \quad \text{stel } \beta \text{ is } 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \vec{e}_\mu \quad \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \vec{e}_\mu$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \vec{e}_\alpha \quad \Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \right) \vec{e}_\alpha$$

Notatie

$$V^\alpha_{;\beta} \equiv \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \quad \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} = V^\alpha_{,\beta}$$

Covariante afgeleide

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = V^\alpha_{;\beta} \vec{e}_\alpha$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tensorveld $\nabla \vec{V}$

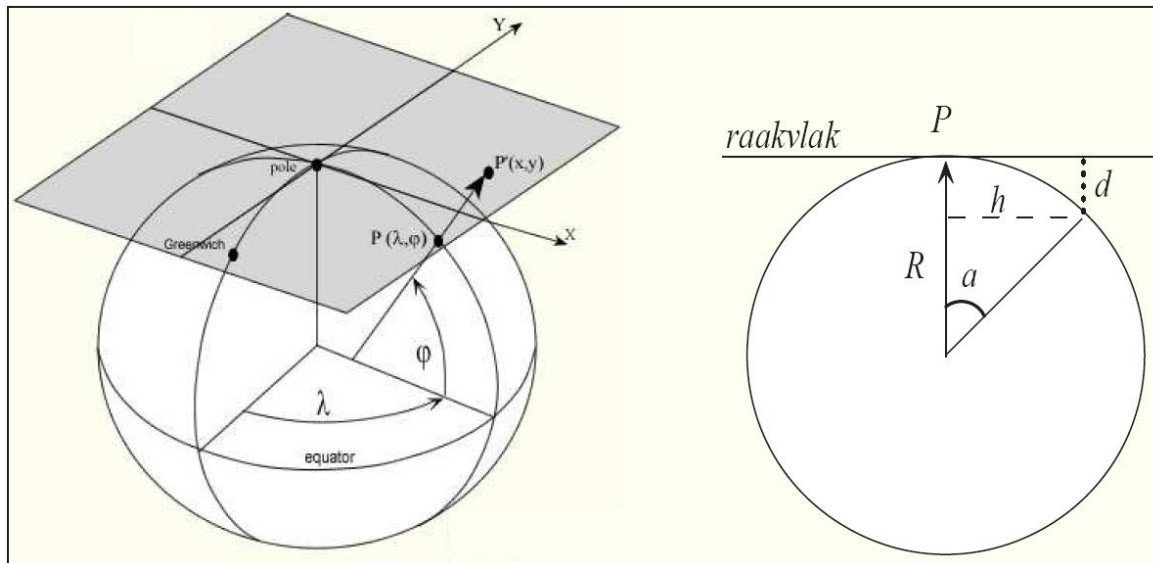
met componenten $(\nabla \vec{V})^\alpha_\beta = (\nabla_\beta \vec{V})^\alpha = V^\alpha_{;\beta}$

Lokaal lorentzframe – LLF

We bespreken in het volgende de gekromde ruimtetijd

Op elke gebeurtenis P in ruimtetijd kunnen we een LLF kiezen:

- we zijn vrij-vallend (geen effecten van gravitatie volgens *equivalentieprincipe*)
- in LLF geldt de minkowskimetrik



$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$g_{jk} = \delta_{jk} + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{x}|^2}{R^2}\right)$$

Lokaal euclidisch

LLF in gekromde ruimtetijd $g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) = \eta_{\alpha\beta}$ voor alle α, β ;

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) = 0 \quad \text{voor alle } \alpha, \beta, \gamma;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\mu} g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) \neq 0.$$

Op elk punt $\mathcal{P}$ is raakruimte vlak

Kromming en parallel transport

Parallele lijnen snijden in een gekromde ruimte
(Euclides vijfde postulaat geldt niet)

Parallel transporteren van een vector $\vec{V}$

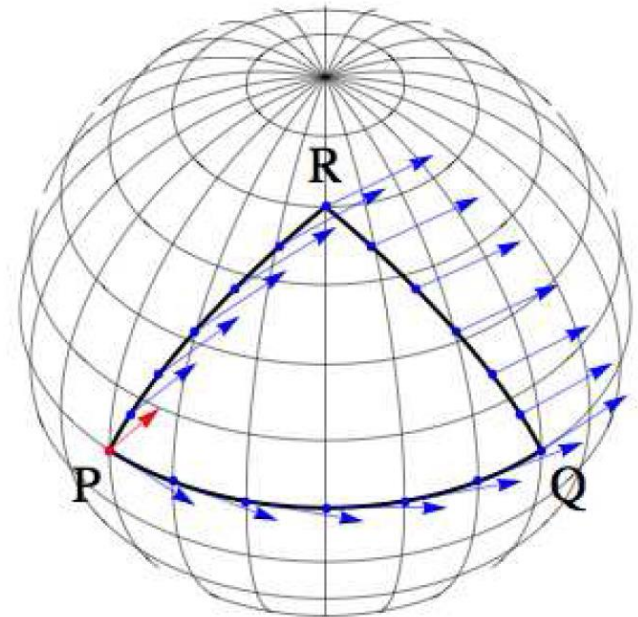
- projecteer raakvector na elke stap op het lokale raakvlak
- rotatie hangt af van kromming en grootte van de lus

Wiskundige beschrijving

- interval PQ is curve met parameter λ
- vectorveld $\vec{V}$ bestaat op deze curve
- raakvector aan de curve is $\vec{U} = d\vec{x}/d\lambda$
- we eisen dat in een LLF de componenten van $\vec{V}$ constant moeten zijn

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = U^\beta V^\alpha_{;\beta} = U^\beta V^\alpha_{;\beta} = 0 \quad \text{op punt } \mathcal{P}$$

Parallel transporteren $U^\beta V^\alpha_{;\beta} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{d\lambda} \vec{V} = \nabla_{\vec{U}} \vec{V} = 0$



Geodeten

Parallel transporteren $U^\beta V^\alpha_{;\beta} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{d\lambda} \vec{V} = \nabla_{\vec{U}} \vec{V} = 0$

Geodeet: lijn, die zo recht als mogelijk is $\nabla_{\vec{U}} \vec{U} = 0$

Componenten van de viersnelheid $U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$

Geodetenvergelijking

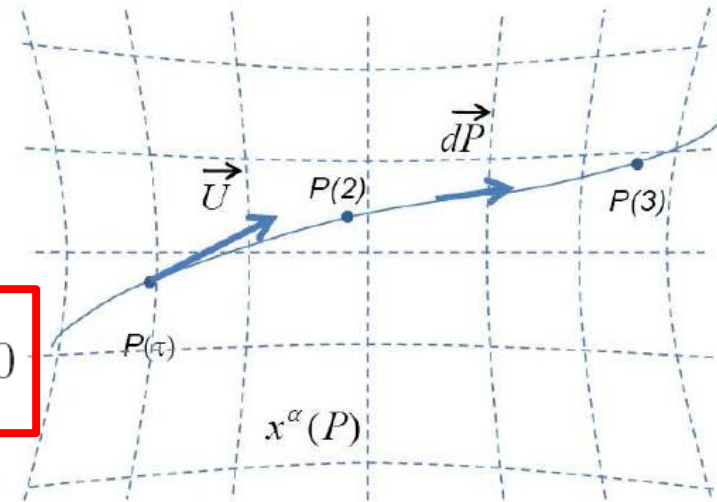
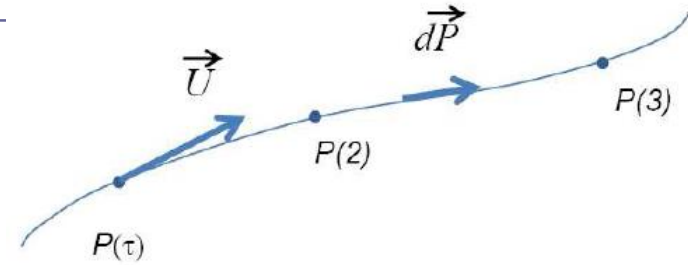
$$U^\alpha_{;\mu} U^\mu = 0 \rightarrow (U^\alpha_{,\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} U^\nu) U^\mu = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\mu} U^\mu}_{\frac{dU^\alpha}{d\tau}} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \underbrace{U^\nu}_{\frac{dx^\nu}{d\tau}} \underbrace{U^\mu}_{\frac{dx^\mu}{d\tau}} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0}$$

Vier gewone tweede-orde differentiaalvergelijkingen voor de coördinaten $x^0(\tau)$, $x^1(\tau)$, $x^2(\tau)$ en $x^3(\tau)$
Gekoppeld via de connectiecoëfficiënten

Twee randvoorwaarden $x^\alpha(\tau = 0)$

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau}(\tau = 0) = U^\alpha(0)$$



Ruimtetime bepaalt de beweging van materie

Riemanntensor

Beschouw vectorvelden $\vec{A}$ en $\vec{B}$

Transporteer $\vec{B}$ langs $\vec{A}$

Vector $\vec{B}$ verandert met $A^\alpha \partial B^\beta / \partial x^\alpha$

Transporteer $\vec{A}$ langs $\vec{B} \Rightarrow B^\alpha \partial A^\beta / \partial x^\alpha$

Beschouw de commutator

$$[\vec{A}, \vec{B}] = \left[\underbrace{A^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}}_{\vec{A}}, \underbrace{B^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}}_{\vec{B}} \right] = \left(\underbrace{A^\alpha \frac{\partial B^\beta}{\partial x^\alpha} - B^\alpha \frac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha}}_{[\vec{A}, \vec{B}]^\beta} \right) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\beta}}_{\vec{e}_\beta}$$

Commutator is een maat voor het niet sluiten

Krommingstensor van Riemann meet het niet sluiten van dubbele gradiënten

Beschouw vectorveld $\vec{A}$

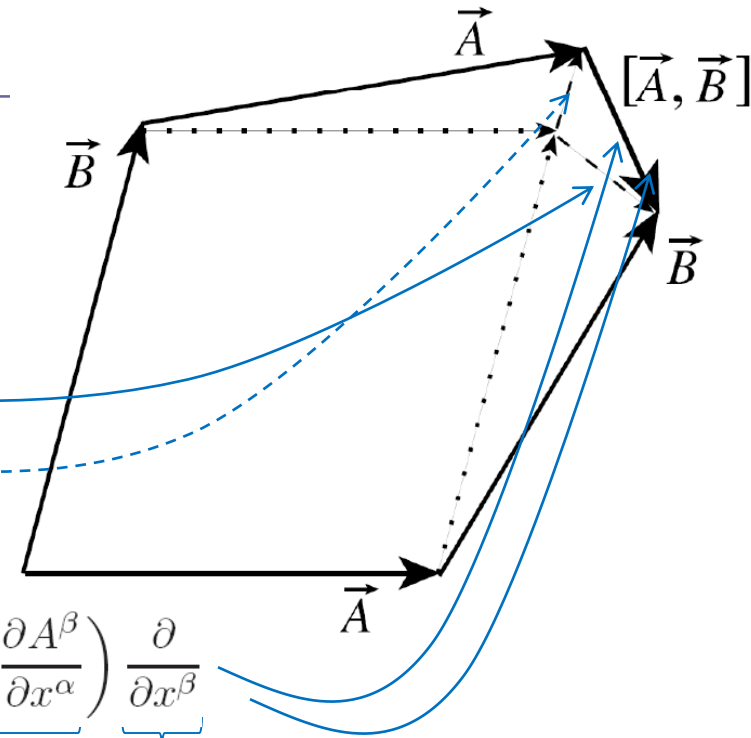
$$A_{\alpha;\mu\nu} - A_{\alpha;\nu\mu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] A_\alpha \equiv R^\beta_{\alpha\mu\nu} A_\beta$$

$$A_{\alpha;\mu} = A_{\alpha,\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta A_\beta$$

$$A_{\alpha;\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} (A_{\alpha;\mu}) - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta (A_{\beta;\mu}) - \Gamma_{\mu\nu}^\beta (A_{\alpha;\beta})$$

$$\Gamma_{\beta\mu}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha})$$

$$\text{in LLF geldt } R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu})$$



Riemanntensor: eigenschappen

Metrische tensor bevat de informatie over intrinsieke kromming

Eigenschappen Riemanntensor

Antisymmetrie $\mathbf{R}(_, _, \vec{A}, \vec{B}) = -\mathbf{R}(_, _, \vec{B}, \vec{A})$ of $R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha}$

$$\mathbf{R}(\vec{A}, \vec{B}, _, _) = -\mathbf{R}(\vec{B}, \vec{A}, _, _) \quad \text{of} \quad R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}$$

Symmetrie $\mathbf{R}(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}) = \mathbf{R}(\vec{C}, \vec{D}, \vec{A}, \vec{B})$ of $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\nu\mu}$

Bianchi identiteiten $R_{\alpha\beta\gamma\delta;\epsilon} + R_{\alpha\beta\delta\epsilon;\gamma} + R_{\alpha\beta\epsilon\gamma;\delta} = 0$

Onafhankelijke componenten: 20

Krommingstensor van Ricci $R_{\alpha\beta} \equiv R^{\mu}_{\alpha\mu\beta}$

Riccikromming (scalar) $R = R^{\alpha}_{\alpha}$

Huiswerkopgave om dit alles te demonstreren
Beschrijving van het oppervlak van een bol

Getijdenkrachten

Laat een testdeeltje vallen. Waarnemer in LLF: geen teken van gravitatie

Laat twee testdeeltjes vallen. Waarnemer in LLF: differentiële gravitatieversnelling: getijdenkracht

Volgens Newton

$$\vec{F}_{\text{grav}} = -m \nabla \Phi(\vec{x}) \quad \text{en ook} \quad \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\nabla \Phi(\vec{x})$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

$$\left(\frac{d^2 x_j}{dt^2} \right)_{(P)} = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \right)_{(P)} \quad \text{en} \quad \left(\frac{d^2 x_j}{dt^2} \right)_{(Q)} = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \right)_{(Q)}$$

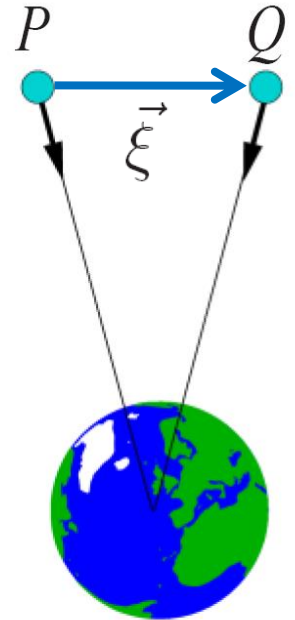
Definieer $\vec{\xi} = (x_j)_{(P)} - (x_j)_{(Q)}$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \xi_j}{dt^2} = - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k} \right) \xi_k = -\mathcal{E}_{jk} \xi_k \rightarrow \mathcal{E}_{jk} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k} \right)$$

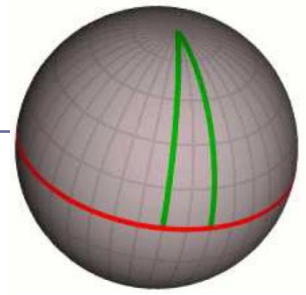
$$\frac{d^2 \vec{\xi}}{dt^2} = -\mathbf{E}(_, \vec{\xi})$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

Gravitationele getijdentensor



Einsteinvergelijkingen



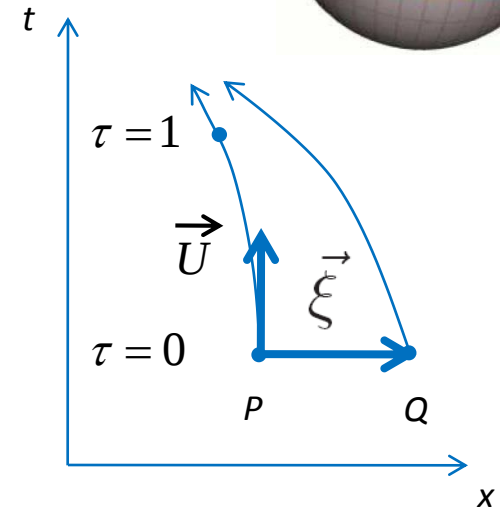
Twee testdeeltjes zijn initieel parallel

Door kromming van ruimtetijd bewegen ze naar elkaar toe

Op $\tau = 0$ geldt

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\vec{U}} \vec{\xi} &= 0 \\ \vec{U} \cdot \vec{\xi} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Initieel in rust} \\ \text{op punt } \mathcal{P} \text{ voor } \tau = 0 \end{array}$$

Tweede-orde afgeleide $\nabla_{\vec{U}} \nabla_{\vec{U}} \vec{\xi}$ ongelijk aan nul vanwege kromming



Er geldt $\underbrace{\nabla_{\vec{U}} \nabla_{\vec{U}} \vec{\xi}}_{\text{Beschrijft relatieve versnelling}} = -\mathbf{R}(_, \vec{U}, \vec{\xi}, \vec{U})$ Volgt uit $[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] A_{\alpha} \equiv R^{\beta}_{\alpha\mu\nu} A_{\beta}$

In het LLF van deeltje P op tijdstip $\tau = 0$ geldt $U^0 = 1$ en $U^i = 0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi^j}{\partial t^2} &= -R^j_{0k0} \xi^k \\ \frac{\partial^2 \xi^j}{\partial t^2} &= -\mathcal{E}_{jk} \xi^k \end{aligned} \right\} R_{j0k0} = \mathcal{E}_{jk} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k}$$

Newton $\frac{\partial^2 \xi^j}{\partial t^2} = -\mathcal{E}_{jk} \xi^k$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad \rightarrow \quad \Phi_{,jk} \delta^{jk} = \mathcal{E}_{jk} \delta^{jk} = \mathcal{E}^j_j \quad \Rightarrow \quad R^j_{0j0} = 4\pi G \rho \quad ?$$

Einsteinvergelijkingen

Wellicht verwachten we dat geldt
Echter geen tensorvergelijking (geldig in LLF)

$$\cancel{R^j_{0j0} = 4\pi G \rho} \quad ?$$

$$R_{0000} = 0 \quad R^0_{000} = 0$$

Wellicht dient te gelden $R_{\alpha\beta} = \cancel{4\pi G T_{\alpha\beta}} \quad ?$
Einstein 1912 – fout

$$\rightarrow R^\mu_{0\mu 0} = 4\pi G \rho$$

↑
tensor

↑
scalar

$$R^\delta_{\alpha\beta\gamma} \approx g_{\alpha\beta,\gamma\delta} + \text{niet lineaire termen}$$

$$\Rightarrow R_{\alpha\beta} \approx g_{\gamma\alpha,\gamma\beta} + \text{niet lineaire termen}$$

Stelsel van 10 p.d.v. voor 10 componenten van $g_{\alpha\beta}$

Probleem: We hebben de vrijheid om $x^0(\mathcal{P})$, $x^1(\mathcal{P})$, $x^2(\mathcal{P})$ en $x^3(\mathcal{P})$ te kiezen

$\Rightarrow$ Vrije keuze: 4 van de 10 componenten van $g_{\alpha\beta}$

Einsteintensor $G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$ Bianchi identiteiten $G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$

Energie – impuls tensor

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$$



$$G^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}$$

Einsteinvergelijkingen

Materie vertelt ruimtetijd
hoe te krommen

Zwakke gravitatievelden

ART gaat over in SRT voor LLF

Zonder gravitatie geldt de minkowskimetrik η

Voor zwakke gravitatievelden geldt $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ met $|h_{\mu\nu}| \ll 1$

Neem aan dat metrik stationair is $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$

Neem aan het deeltje langzaam beweegt $dx^i/dt \ll c$ ($i = 1, 2, 3$) $x^0 = ct$

Wereldlijn van vrij-vallend deeltje

$$\Rightarrow \frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00} c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0$$

Christoffelsymbool

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2} g^{\kappa\mu} (\partial_0 g_{0\kappa} + \partial_0 g_{0\kappa} - \partial_\kappa g_{00}) = -\frac{1}{2} g^{\kappa\mu} \partial_\kappa g_{00} = -\frac{1}{2} \eta^{\kappa\mu} \partial_\kappa h_{00}$$

Metrik stationair

$$\Gamma^0_{00} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j h_{00} \quad \text{met } i = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d^2 t}{d\tau^2}}_{dt/d\tau = \text{constant}} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \nabla h_{00} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2} c^2 \nabla h_{00}$$

Newton $\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\nabla \Phi(\vec{x})$

Newtoniaanse limiet van ART

$$\Rightarrow h_{00} = 2\Phi/c^2 \quad \Rightarrow \quad g_{00} = 1 + h_{00} = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) \quad \frac{\Phi}{c^2} = -\frac{GM}{c^2 r} \quad \begin{array}{l} \text{Aarde } 10^{-9} \\ \text{Zon } 10^{-6} \\ \text{Witte dwerg } 10^{-4} \end{array}$$

Kromming van de tijd

Ruimtetiijkromming zorgt voor kromming van de tijd

$$g_{00} = 1 + h_{00} = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)$$

Klok in rust $dx^i/dt = 0$

Tijdinterval tussen twee tikken $c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00} c^2 dt^2$

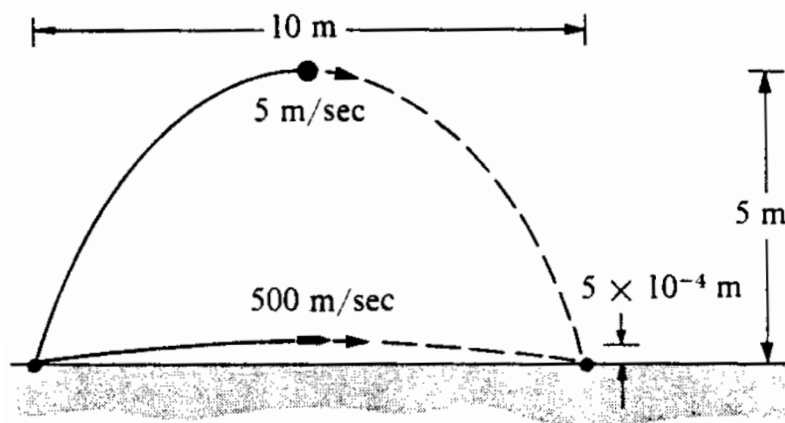
$$\Rightarrow d\tau = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

Ruimtetiijdinterval

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) (cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Beschrijft banen van deeltjes in ruimtetijd

Baan van een bal en een kogel



Ruimtelijke kromming is zeer verschillend

Kromming in ruimtetijd

