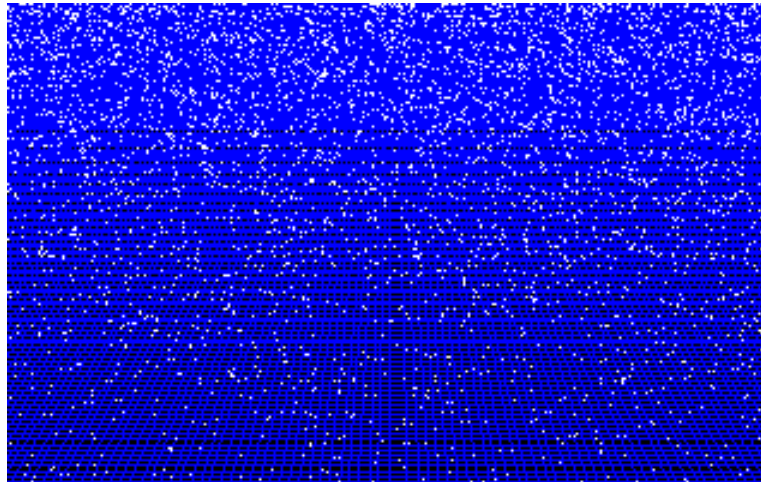


Kernenergie

FEW cursus



Jo van den Brand en Roel Aaij

www.nikhef.nl/~jo/energie

16 april 2012

Inhoud

- **Jo van den Brand**

- Email: jo@nikhef.nl URL: www.nikhef.nl/~jo/energie
- 0620 539 484 / 020 598 7900, Kamer T2.69

- **Roel Aaij**

- Email: raaij@nikhef.nl

- **Dictaat**

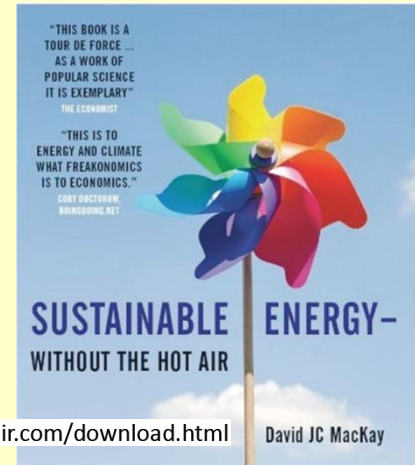
- **Werk in uitvoering**

- **Boeken**

- **Energy Science, John Andrews & Nick Jelley**
- **Sustainable Energy – without the hot air, David JC MacKay**
- **Elmer E. Lewis, Fundamentals of Nuclear Reactor Physics**

- **Inhoud van de cursus**

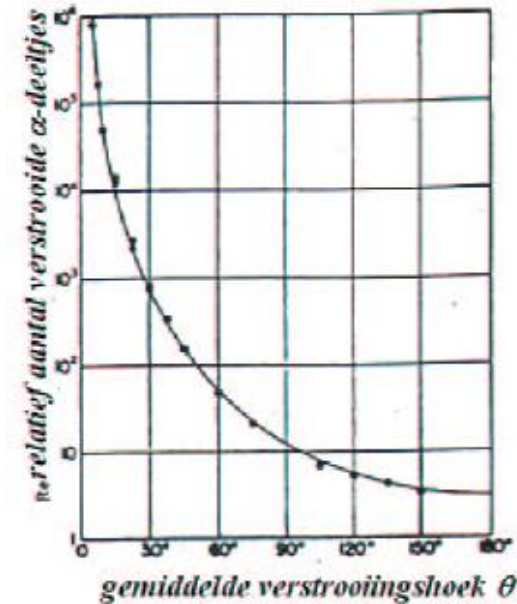
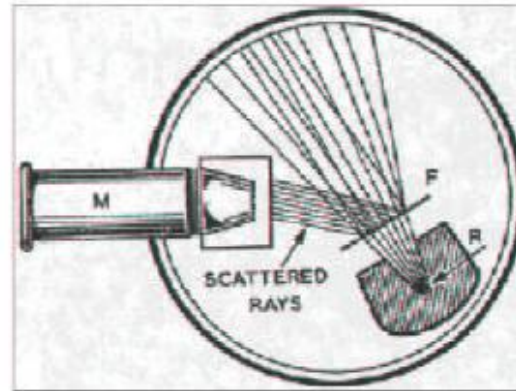
- Week 1 Motivatie, exponentiële groei, CO2 toename, broeikaseffect, klimaat
Energieverbruik: transport, verwarming, koeling, verlichting, landbouw, veeteelt, fabricage
- Week 2 Kernenergie: kernfysica, splijting
- Week 3 Kernenergie: reactorfysica
- Week 4 Kernenergie: maatschappelijke discussie (risico's, afval), kernfusie
- Week 5 Energie, thermodynamica
Entropie, enthalpie, Carnot, Otto, Rankine processen, informatie
Energiebronnen: fossiele brandstoffen (olie, gas, kolen), wind, zon (PV, thermisch, biomassa), waterkracht, geothermisch
- Week 6 Fluctuaties: opslag (batterijen, water, waterstof), transport van energie, efficiëntie
Energie: scenario's voor Nederland, wereld, fysieke mogelijkheden, politiek, ethische vragen, economische aspecten



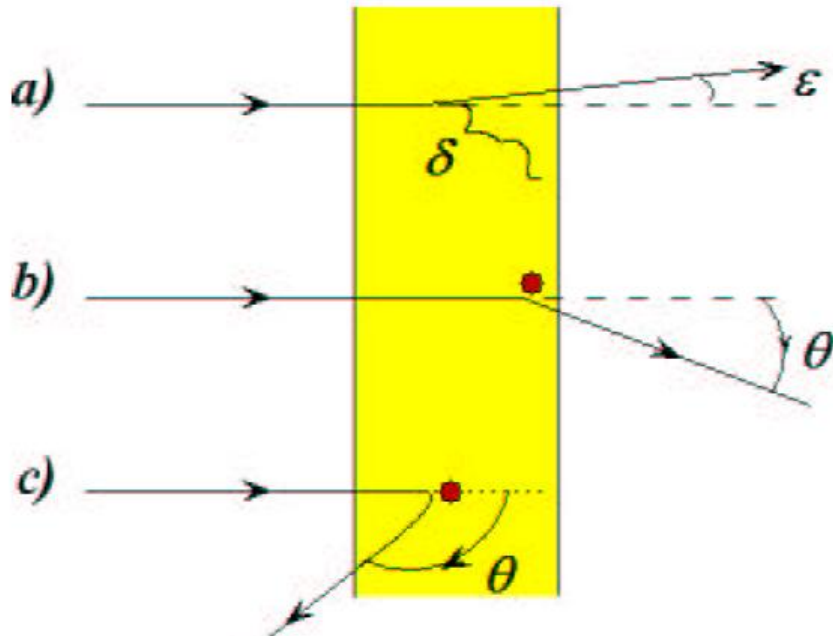
Gratis te downloaden

Rutherford verstrooiing

Marsden en Geiger
rond 1910



Alfa deeltjes: $T_b = 4 - 7$ MeV



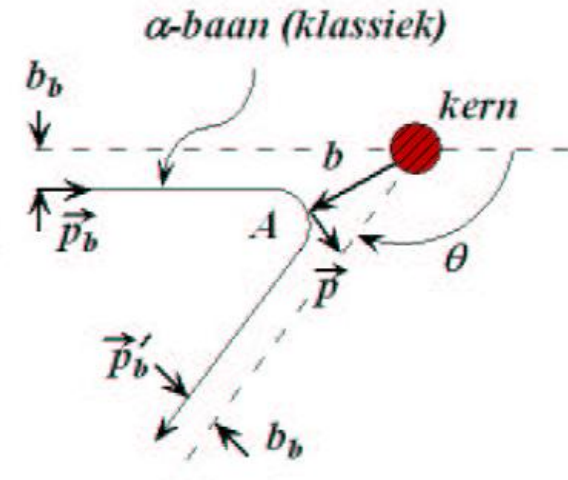
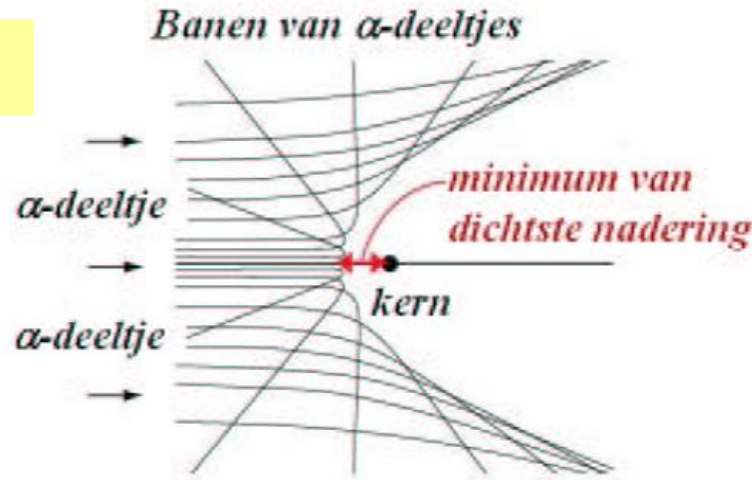
Coulomb potentiaal

$$V(r) = \frac{Z_b Z_t e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = Z_b Z_t \alpha \hbar c \frac{1}{r} = Z_b Z_t \cdot \frac{1.4}{r} \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$

$$\alpha = e^2 / 4\pi\epsilon_0 \hbar c = 1/137.035\,989\,5(61)$$

Rutherford verstrooiing

Coulomb potentiaal



Klassieke mechanica

$$T_b = T + Z_b Z_t \alpha \hbar c (b)^{-1}$$

behoud van energie,

$$p_b b_b = p b$$

behoud van impulsmoment,

$$\tan \frac{\theta}{2} = Z_b Z_t \alpha \hbar c (2 b_b T_b)^{-1}$$

bewegingsvergelijking.

Werkzame doorsnede

$$d\sigma = 2\pi b_b db_b = 2\pi (Z_b Z_t \alpha \hbar c)^2 \left(\frac{1}{2T_b} \right)^2 \cot \frac{\theta}{2} \sin^{-2} \frac{\theta}{2} \cdot \frac{d\theta}{2}$$

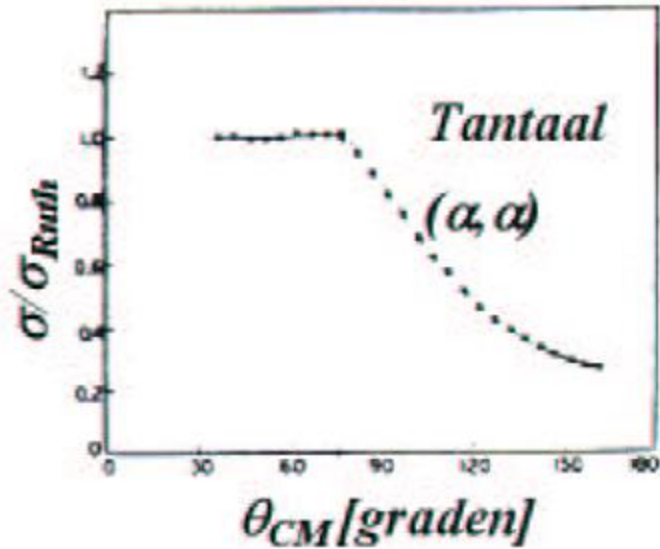
$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta = 4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta$$

Voor $b_b < b < b_b + db_b$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} = \left(\frac{Z_b Z_t \alpha \hbar c}{4T_b} \right)^2 \sin^{-4} \frac{\theta}{2}$$

Rutherford verstrooiing

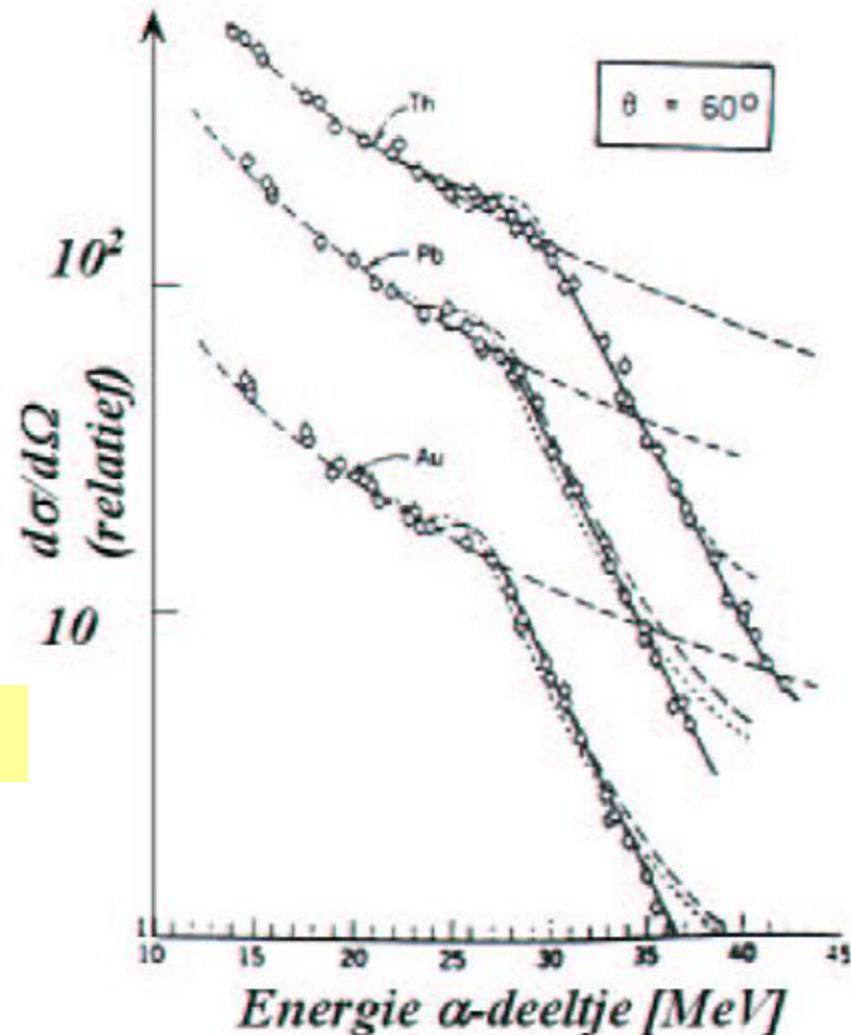
Geldig voor $b > b_{min} = R_a + R_t$ ofwel



Meet interactieafstand b_{min} versus A

Eigenlijk $b_{min} \approx R_a + R_t + R_s$

$$\sin \frac{\theta_{min}}{2} = \left| 1 - \frac{2T_b b_{min}}{Z_b Z_t \alpha \hbar c} \right|^{-1}$$



Rutherford verstrooiing

Plot b_{min} versus $A^{1/3}$

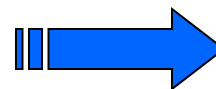
Er geldt $R \simeq 1.4 \text{ fm } \sqrt[3]{A}$

Goede beschrijving dus

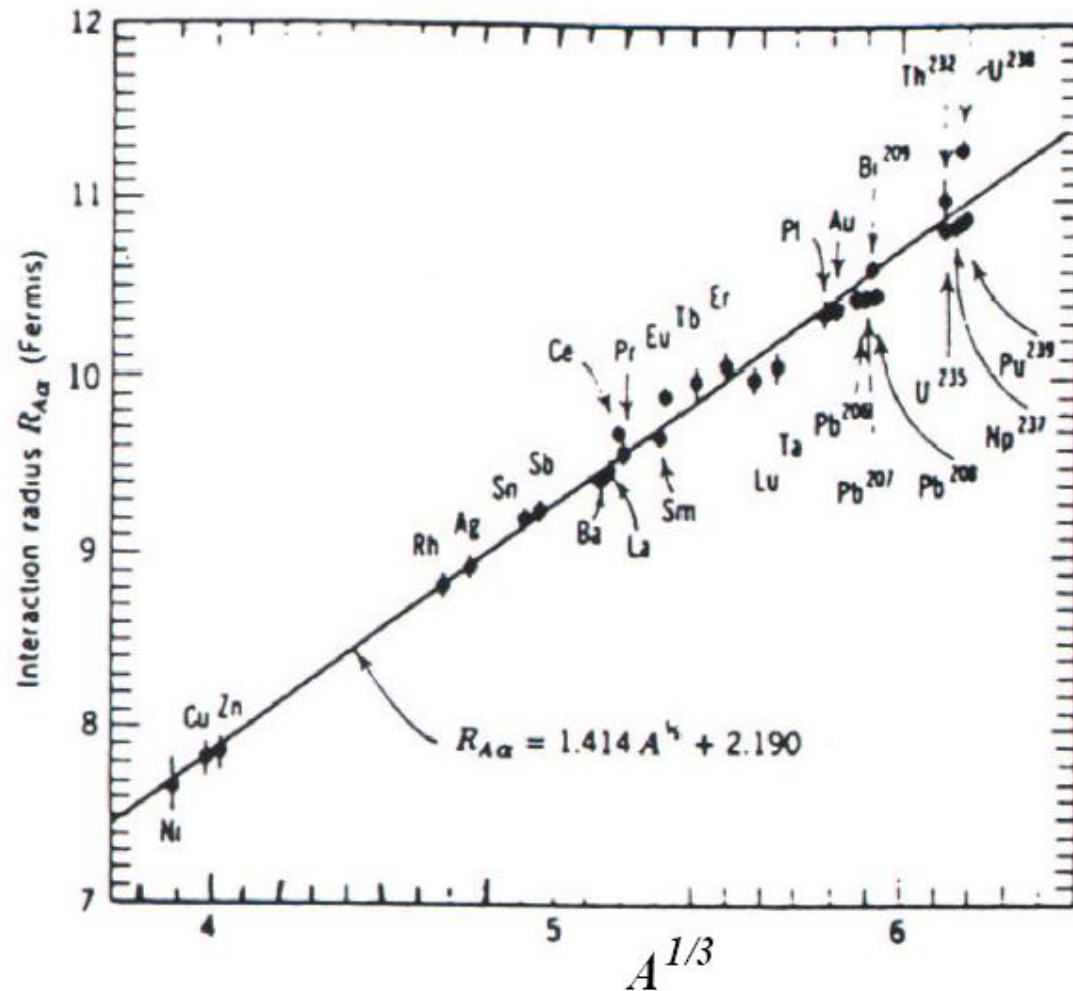
- Coulombwet geldig op korte afstand (femtometers)
- Sterke WW korte dracht
- Alle lading zit in kleine bol

Rutherford vond

$$V_{\text{kern}} = \frac{4\pi}{3} R^3 \propto A, \quad \text{met } A = N + Z$$



$$\rho_{\text{kern}} \simeq 4 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$$



Elektronenverstrooiing

Meten van ladingsverdeling

Voor resolutie geldt

$$\Delta x \geq \frac{\lambda}{2} \quad p_{\min} = \frac{h}{\lambda} \geq \frac{h}{2\Delta x} \quad \Rightarrow$$

$$E_{\min} = \sqrt{m^2 c^4 + p_{\min}^2 c^2} \approx p_{\min} c \geq \pi \frac{\hbar c}{\Delta x} \approx \frac{620 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{\Delta x}$$

Werkzame doorsnede

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2 |M_{fi}|^2}{(2\pi\hbar^2)^2}$$

Eerste Born benadering
(geen spin / terugstoot)

$$\psi_i = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad \psi_f = e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}} \quad \vec{q}/\hbar = \vec{k} - \vec{k}'$$

$$M_{fi} = \langle \psi_f | V | \psi_i \rangle = \iiint V(\vec{x}) e^{\frac{i\vec{q} \cdot \vec{x}}{\hbar}} d\vec{r}$$

Sferische symmetrie

$$V(\vec{x}) = V(x)$$



$$M_{fi} = \frac{4\pi\hbar}{|\vec{q}|} \int_0^\infty V(x) \sin\left(\frac{|\vec{q}|x}{\hbar}\right) x dx$$

Elastische elektronenverstrooiing

Afgeschermd
Coulombpotential

$$V(x) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-x/a}}{x}$$

$a \approx$ atoomstraal

Integraal levert

$$M_{fi} = 4\pi \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2 + (\hbar/a)^2}$$

$$|\vec{q}| \gg \frac{\hbar}{a} \simeq 2 \times 10^{-3} \frac{\text{MeV}}{c}$$

$$M_{fi} = 4\pi \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2} = 4\pi Z\alpha\hbar c \frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2}$$

Overgedragen impuls

$$|\vec{q}| = 2|\vec{p}| \sin \frac{\theta}{2}$$

met in COM

$$|\vec{p}| = |\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$$

Rutherford verstrooiing

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2 |M_{fi}|^2}{(2\pi\hbar^2)^2}$$

$$\frac{\vec{q}^2}{2m} = 4 \frac{\vec{p}^2}{2m} \sin^2(\theta/2) = 4T \sin^2(\theta/2)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z\alpha\hbar c}{4T \sin^2(\theta/2)} \right)^2$$

Elektronenverstrooiing

Uitgebreide sferisch symmetrische ladingsverdeling

potentiaal

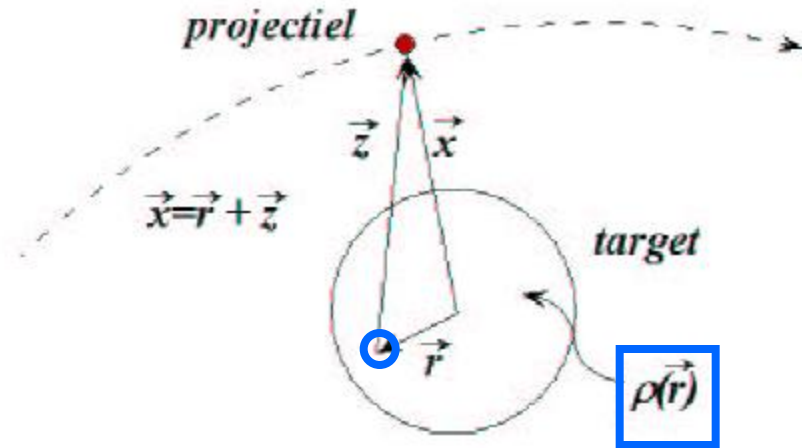
$$V(\vec{x}) = Z\alpha\hbar c \iiint \rho(\vec{r}) \frac{e^{-z/a}}{z} d\vec{r},$$

matricelement

$$M_{fi} = \langle \psi_f | V | \psi_i \rangle = \iiint V(\vec{x}) e^{\frac{i\vec{q} \cdot \vec{x}}{\hbar}} d\vec{r},$$

met $d\vec{r} \Rightarrow d\vec{x}$

$$\begin{aligned} M_{fi} &= Z\alpha\hbar c \iiint \iiint e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}/\hbar} \rho(\vec{r}) \frac{e^{-z/a}}{z} d\vec{r} d\vec{x} \\ &= Z\alpha\hbar c \iiint \frac{e^{-z/a}}{z} e^{i\vec{q} \cdot \vec{z}/\hbar} d\vec{z} \iiint \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar} d\vec{r} \\ &= M_{fi}(\text{punt}) F(\vec{q}), \end{aligned}$$



Form factor

$F(\vec{q})$

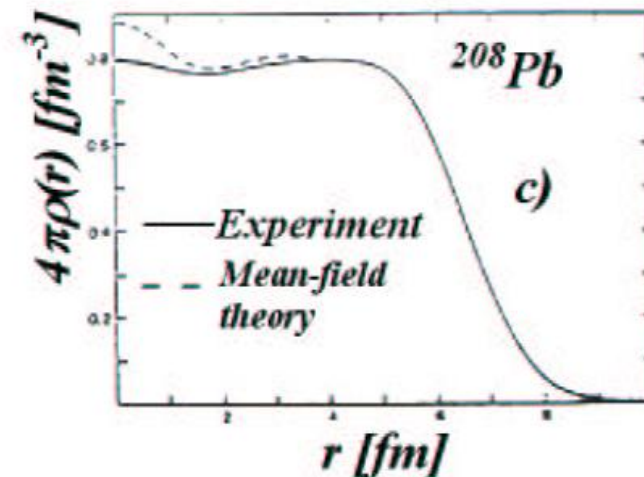
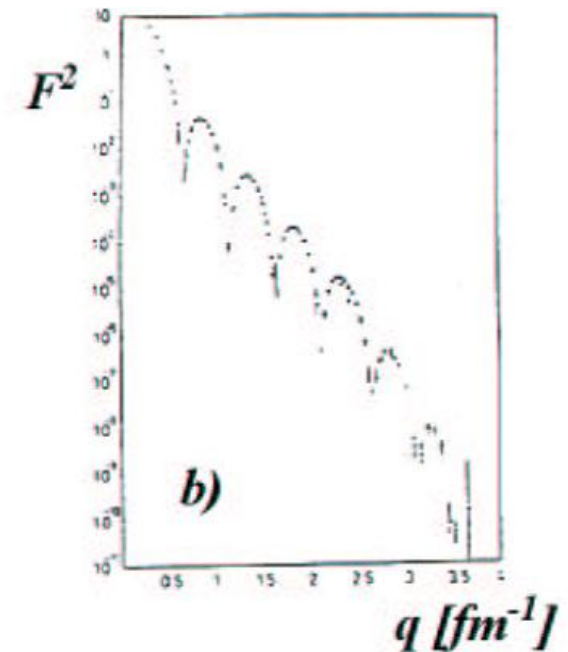
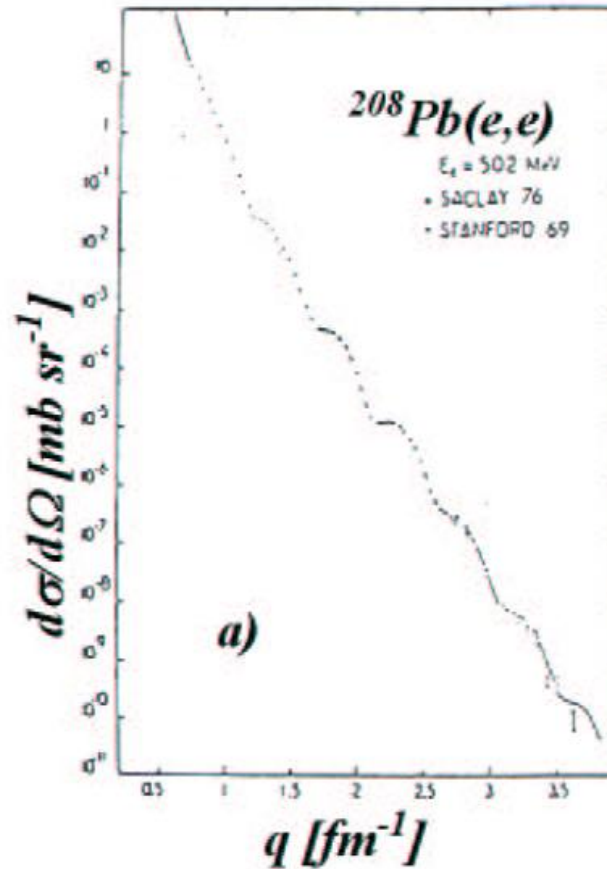
ladingsverdeling

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iiint F(\vec{q}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar} d\vec{q},$$

Elektronenverstrooiing - voorbeelden

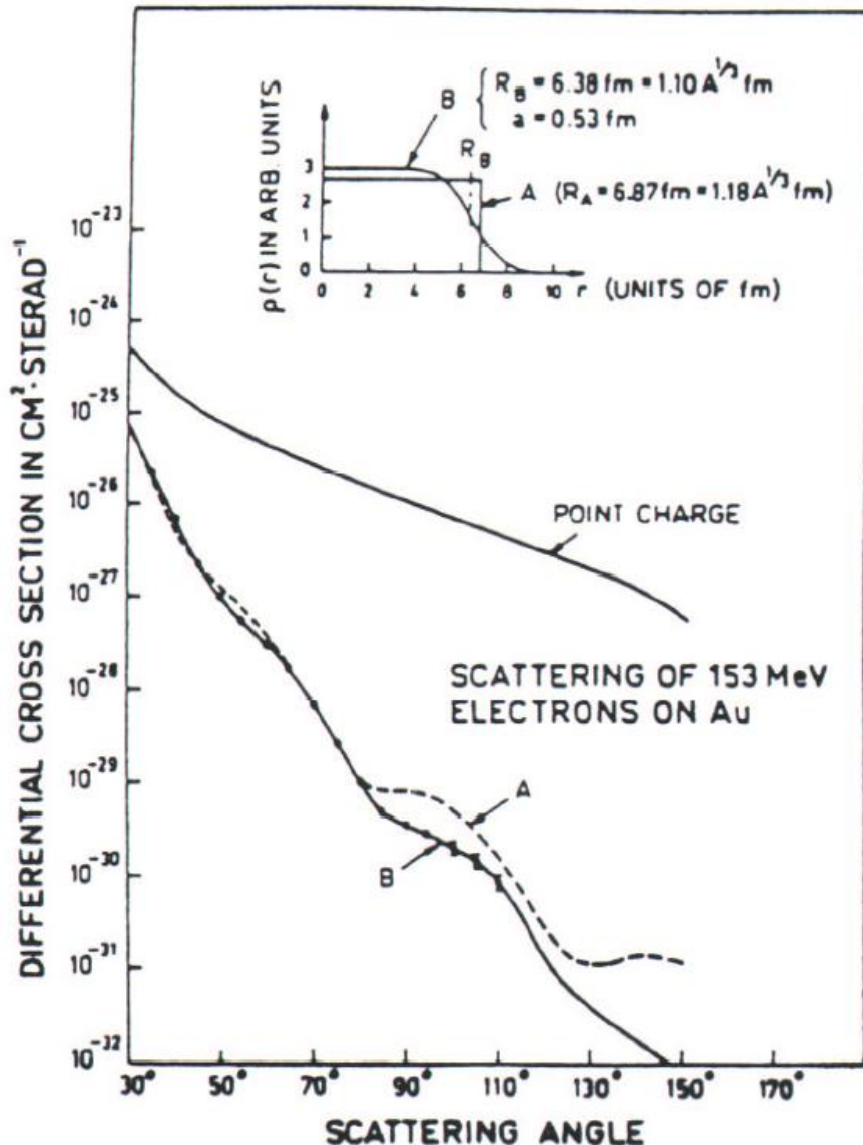
Elektronen
aan lood:

- 502 MeV
- ^{208}Pb spinloos
- 12 decaden
- elastisch



Model-onafhankelijke informatie over
ladingsverdeling van nucleon en kernen

Elektronenverstrooiing - voorbeelden

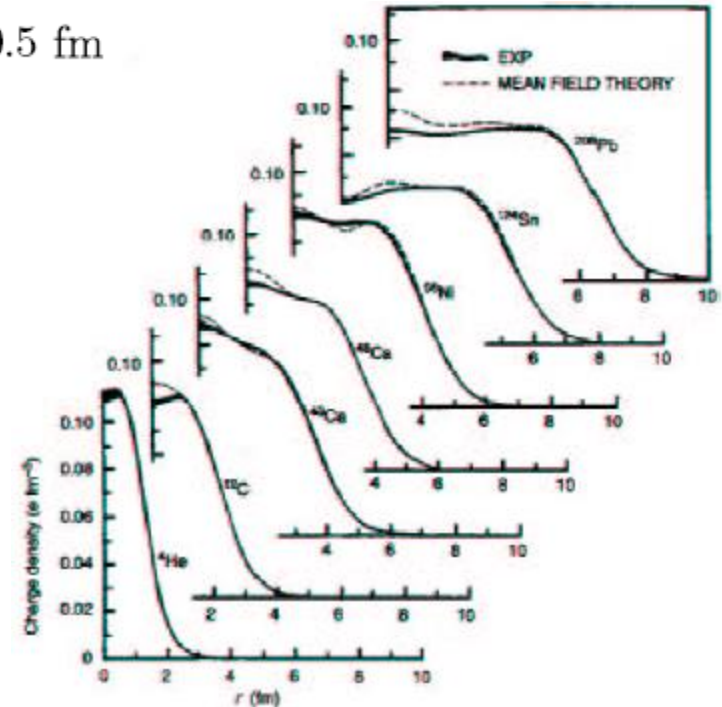


Elektron-goud verstrooiing
- energie: 153 MeV

ladingsverdeling:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

$R \simeq 1.2 \text{ fm } \sqrt[3]{A} - 0.48 \text{ fm}$, voor $A \gg 1$
 $a \simeq 0.5 \text{ fm}$



Ladingsdichtheid is constant!

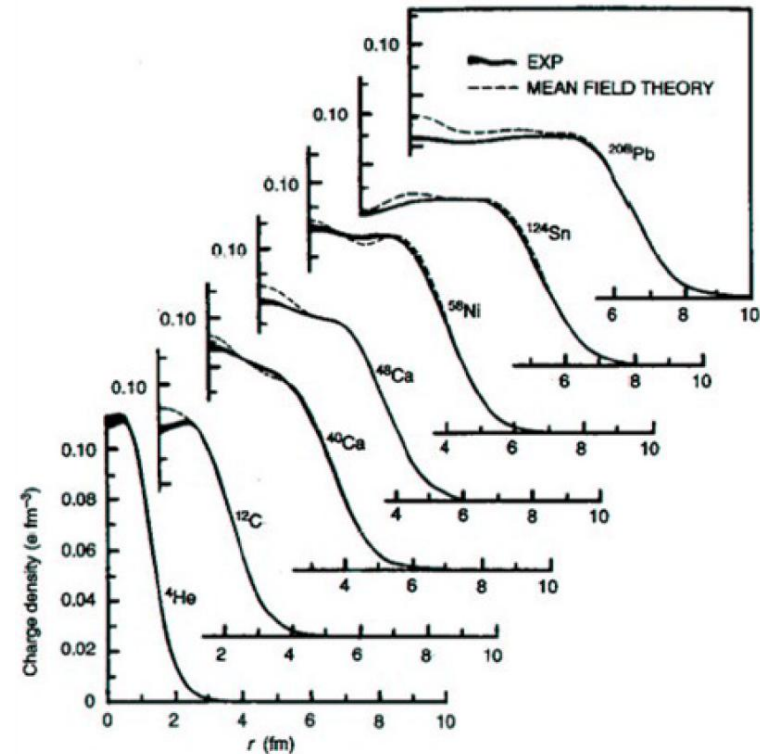
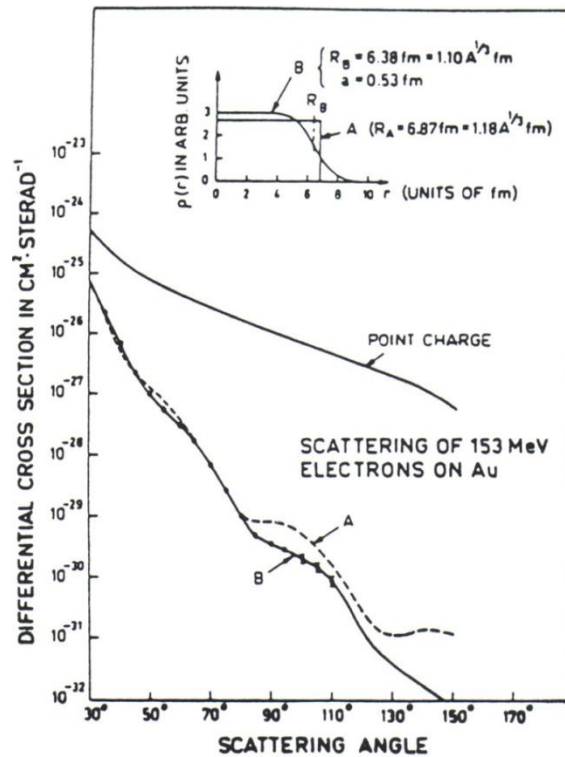
Structuur van kernen

Ladingsverdeling van kernen is gemeten met elektronenverstrooiing

Ruwe benadering

$$r \approx (1.2 \times 10^{-15} \text{ m})(A^{\frac{1}{3}})$$

$10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ femtometer} = 1 \text{ fermi}$



Definities

Kern: onderdeel van een atoom. Kernen worden ook nucleiden genoemd

Kern is een dicht quantumstelsel van nucleonen (verzamelnaam voor protonen en neutronen)

Proton: kern van waterstofatoom (positief geladen, spin $\frac{1}{2}$)

$$m_p = 1.67262 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Neutron: neutraal deeltje (spin $\frac{1}{2}$) $m_n = 1.67493 \times 10^{-27} \text{ kg}$
(waarom geen gebonden toestand van p en e ?)

Atoomgetal Z is het aantal protonen in de kern $Z = N_p$

Neutrongetal N is het aantal neutronen in de kern $N = N_n$

(Atomair) massagetal A is het aantal nucleonen in de kern $A = Z + N$

Notatie voor een nucleide (met X als chemisch symbool)



Z bepaalt aantal elektronen en dus het type element (isotopen) ${}^{11}_6\text{C}$, ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{13}_6\text{C}$, ${}^{14}_6\text{C}$, ${}^{15}_6\text{C}$

Natuurlijke abundantie op Aarde is 98.9% natuurlijk ${}^{12}_6\text{C}$ en ongeveer 1.1% is ${}^{13}_6\text{C}$

Massawaarde die je in Periodiek Systeem vindt, is het gemiddelde

Eigenschappen van kernen

Massa's van isotopen zijn bepaald met massaspectrometers

Unified atomic mass unit [u]: massa $^{12}_6\text{C}$ atoom is 12.000000 u

We vinden dan

TABLE 41–1 Masses in Kilograms, Unified Atomic Mass Units, and MeV/c²

Object	Mass		
	kg	u	MeV/c ²
Electron	9.1094×10^{-31}	0.00054858	0.51100
Proton	1.67262×10^{-27}	1.007276	938.27
^1_1H atom	1.67353×10^{-27}	1.007825	938.78
Neutron	1.67493×10^{-27}	1.008665	939.57

Totaal impulsmoment van kern met spin I wordt gegeven door $\sqrt{I(I+1)}\hbar$

Magnetische momenten van de kern worden
gegeven in nuclear magneton

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$$

Metingen geven $\mu_p = 2.7928 \mu_N$

$$\mu_n = -1.9135 \mu_N$$

Neutron lijkt dus uit geladen deeltjes (quarks) te bestaan

Toepassingen als NMR en MRI zijn hierop gebaseerd

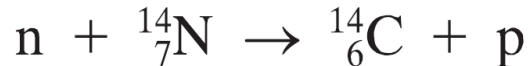
Kernreacties

Transmutatie: verandering van een kern naar een andere

Kernreactie: een kern botst met een andere kern (of een gamma, etc.)

Rutherford observeerde in 1919 de reactie ${}^4_2\text{He} + {}^{14}_7\text{N} \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + {}^1_1\text{H}$

Notatie



Behoudswetten gelden (ook baryon- en leptongetal)

Beschouw reactie $\text{a} + \text{X} \rightarrow \text{Y} + \text{b}$

Reactie energie of Q-waarde

$$Q = (M_{\text{a}} + M_{\text{X}} - M_{\text{b}} - M_{\text{Y}})c^2$$
$$Q = K_{\text{b}} + K_{\text{Y}} - K_{\text{a}} - K_{\text{X}}$$

Indien Q-waarde positief (negatief): reactie is *exotherm* (*endotherm*)

Indien $Q < 0$, dan verloopt de reactie enkel als projectiel voldoende energie heeft

Indien $Q < 0$, spreken we over *drempelenergie*

Neutronen en kernen in een reactor bewegen *niet-relativistisch*

Bindingsenergie en kernkracht

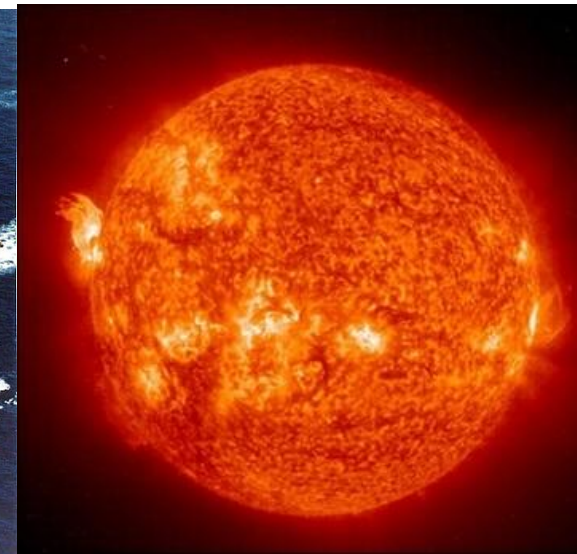
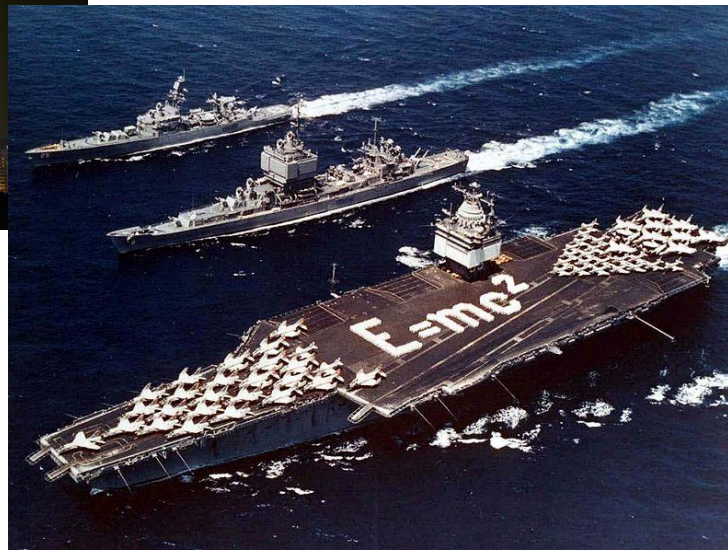
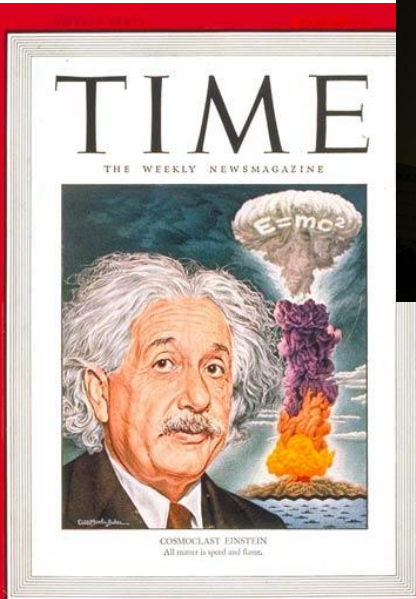
Massa kern is altijd kleiner dan de som van proton en neutron massa's

Dit massa-defect is de bindingsenergie van het systeem (voor ${}^4\text{He}$: 28.3 MeV)

Deze energie komt vrij bij de vorming van het systeem (daarom straalt de zon)

Deze energie moet je erin stoppen als je het systeem wilt opbreken in delen

Dit is eigenlijk altijd zo: massa van waterstofatoom is 13.6 eV kleiner dan de som van proton en elektron rustenergie (effect is 1 op 10^8)



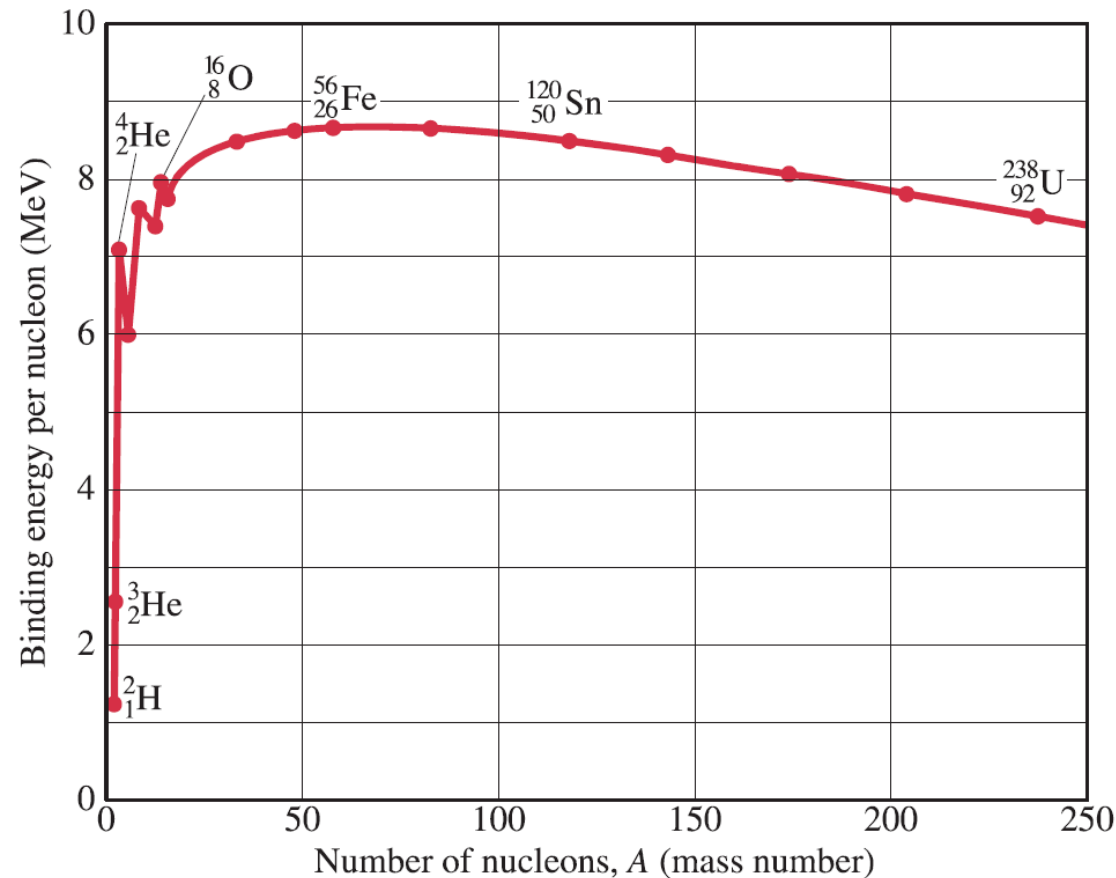
Bindingsenergie

Bindingsenergie per nucleon. Voor ${}^4_2\text{He}$ is dat $28.3 \text{ MeV} / 4 = 7.1 \text{ MeV}$

Curve (versus A) heeft een plateau bij 8.7 MeV per nucleon

Daling voor $A > 80$ toont dat zware kernen relatief minder gebonden zijn

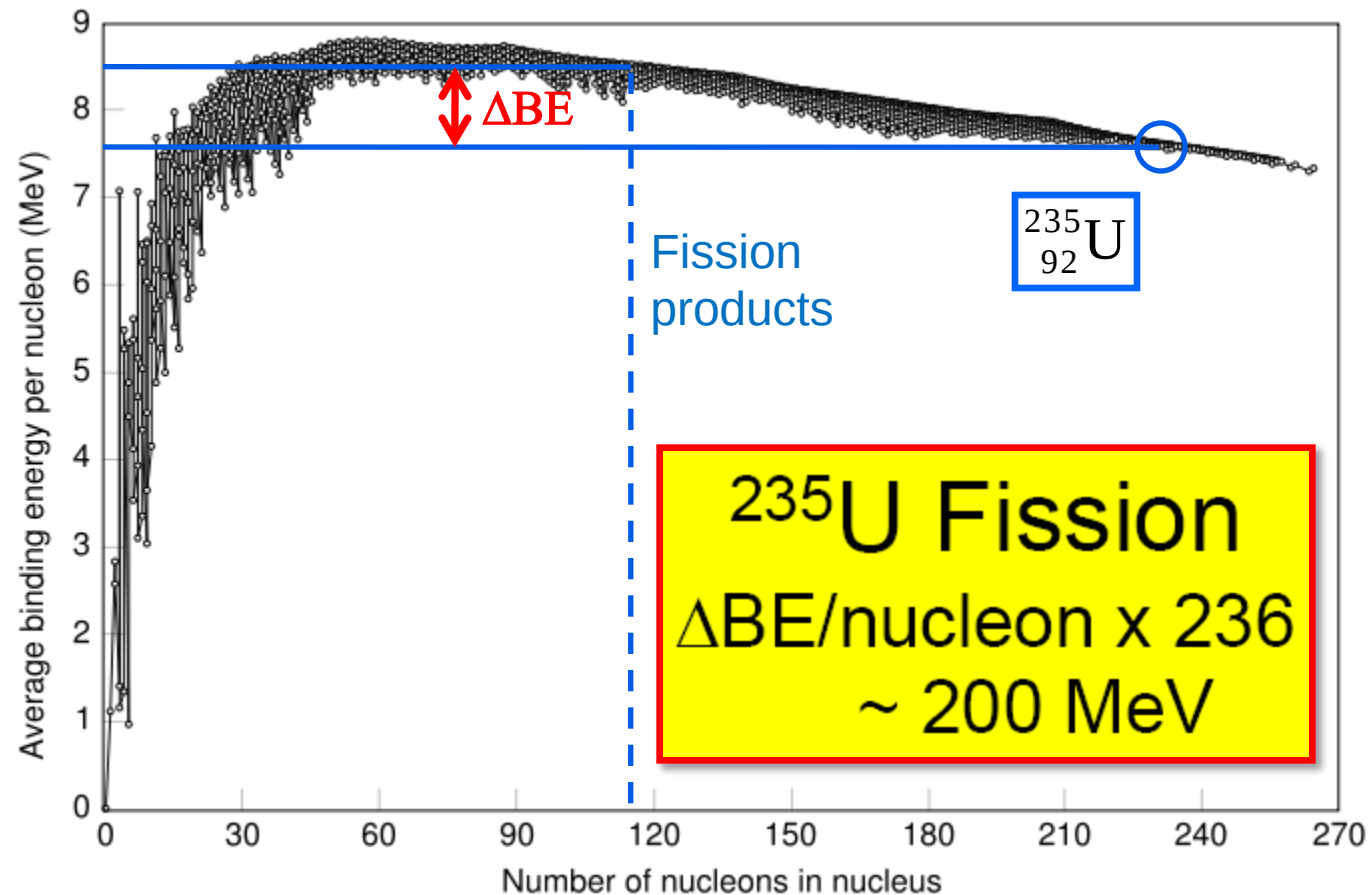
Dit verband is de basis voor kernsplijting en kernfusie



Bindingsenergie

Kernsplijting: neutron + uranium(235) $\rightarrow$ splijting + 200 MeV

Vergelijk met $\text{C} + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2$ (4.0 eV)



Kernkracht

Nucleonen gebonden door sterke wisselwerking (kernkrachten)

Dracht: enkele femtometers

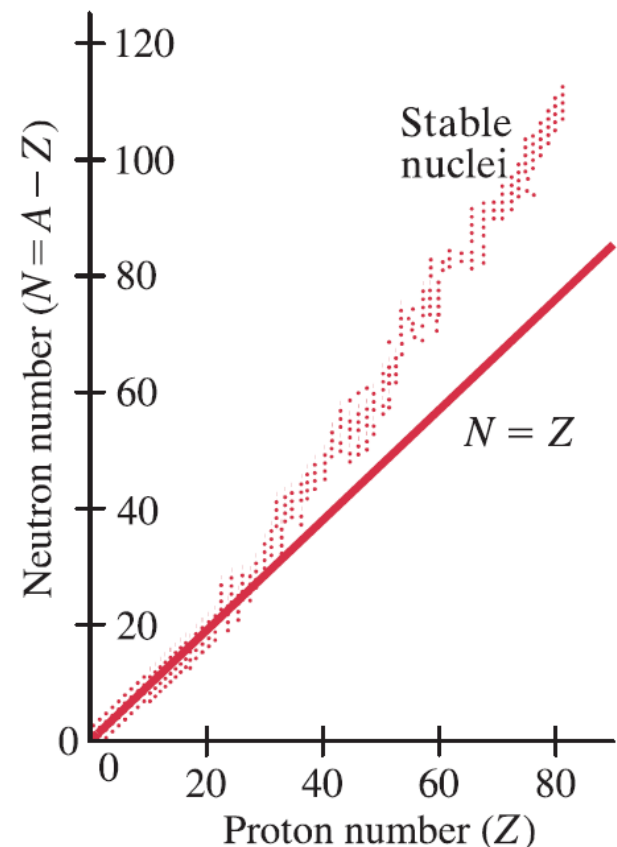
Ingewikkelde kracht: functie van $N - Z$, spin, spin-baan koppeling, *etc.*

Geen stabiele kernen voor $Z > 82$
vanwege elektrostatische afstoting

Stabiele kernen vervallen vanwege de zwakke wisselwerking

Er bestaan dus vier interacties

- gravitatie
- elektromagnetisme
- sterke wisselwerking
- zwakke wisselwerking



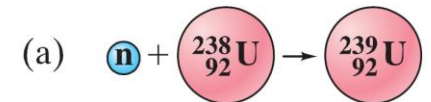
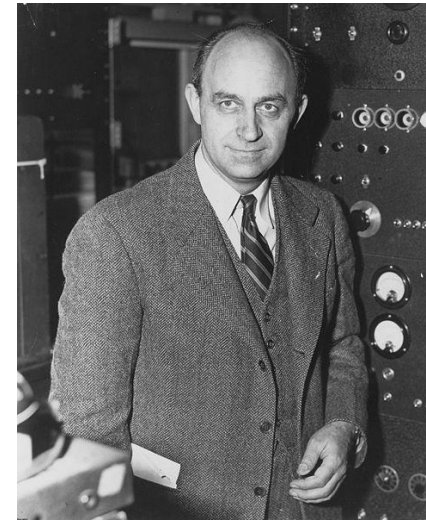
Fysica van neutronen

Enrico Fermi: neutronen zijn de geschiktste projectielen voor kernreacties om transmutaties te veroorzaken: ze zijn onderhevig aan de sterke wisselwerking, en hebben geen last van Coulombafstoting (zoals protonen en alfa-deeltjes)

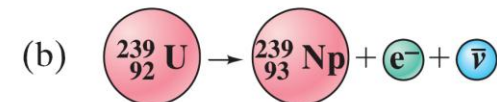
Enrico Fermi: met uranium ($Z = 92$) kunnen nieuwe elementen kunnen geproduceerd worden

Transuranen: neptunium ($Z = 93$) en plutonium ($Z = 94$) werden gemaakt

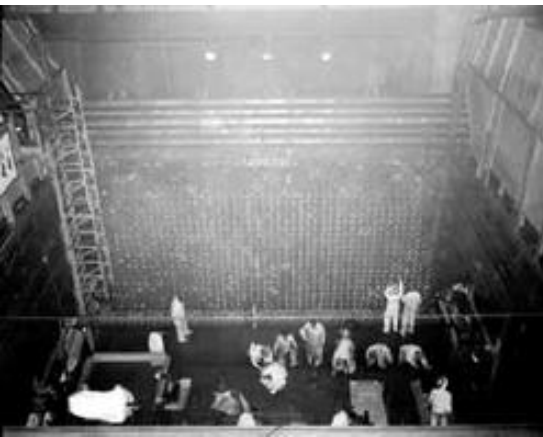
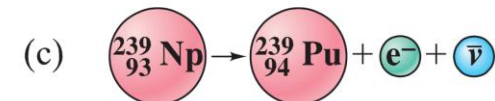
Behoudswetten gelden
(ook baryon- en leptongetal)



Neutron captured by ${}^{238}_{92}\text{U}$.



${}^{239}_{92}\text{U}$ decays by β decay to neptunium-239.



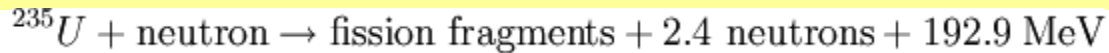
Splijting van ^{235}U

Verval van zware kernen kan geïnduceerd worden door absorptie van neutronen. Dat was voorspeld door Enrico Fermi en werd ontdekt door Otto Hahn, Lise Meitner en Fritz Strassmann (Dec.1938)

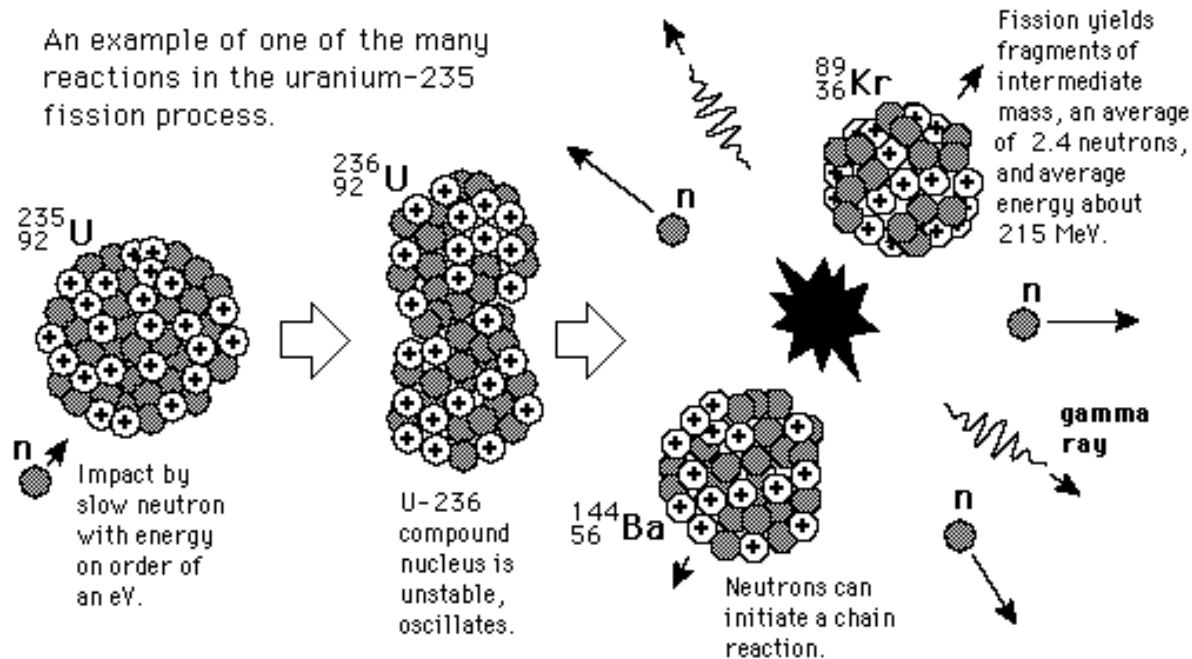
Verandering van elementen: verander lood in goud...

Sporen van Barium gevonden

Energie vrijgave in splijting van uranium



An example of one of the many reactions in the uranium-235 fission process.



Uranium Ore (0.7%)



Fuel Pellet (3.5%)

Kernsplijtingsreacties

Kernsplijting van uranium-235

Levert 200 MeV energie, 2 – 3 neutronen, 2 lichte kernen, gamma's, neutrino's

Ongeveer 80% van de energie is kinetische energie van splijtingsfragmenten

De rest gaat naar neutronen, beta-deeltjes, gamma's en neutrino's

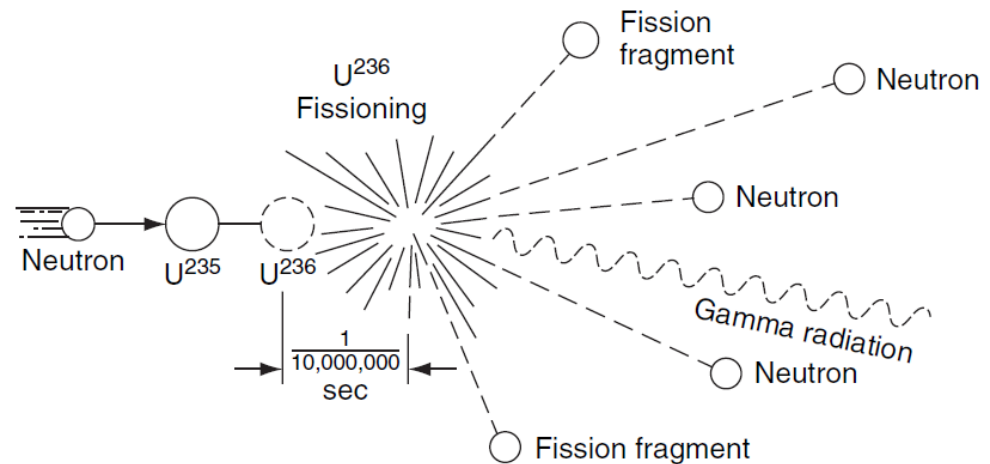
De neutrino's ontsnappen uit de reactor.

Merendeel van de energie (193 MeV per splijting) wordt geabsorbeerd

Mechanisme van energiedissipatie verschilt voor
splijtingsfragmenten

geladen deeltjes

fotonen, neutronen en neutrino's



Kettingreactie

Neutronen worden geboren in kernsplijting
Neutronen botsen met kernen

Als een neutron door *splijtbaar* materiaal wordt geabsorbeerd, kunnen er nieuwe neutronen gevormd worden

Dit proces kan zich herhalen en we spreken van een kettingreactie

De *vermenigvuldigingsfactor* k is de verhouding van splijtingsneutronen geboren in generatie i tot die in $i - 1$

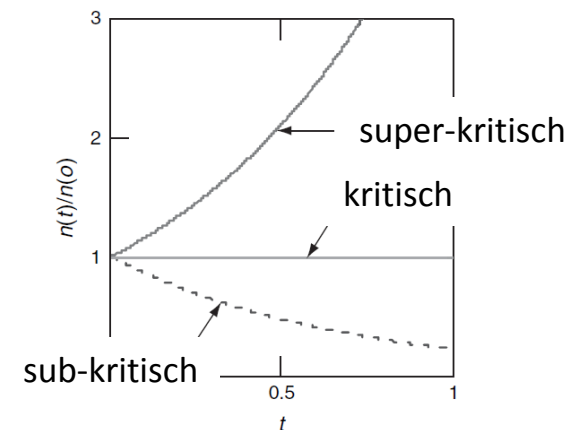
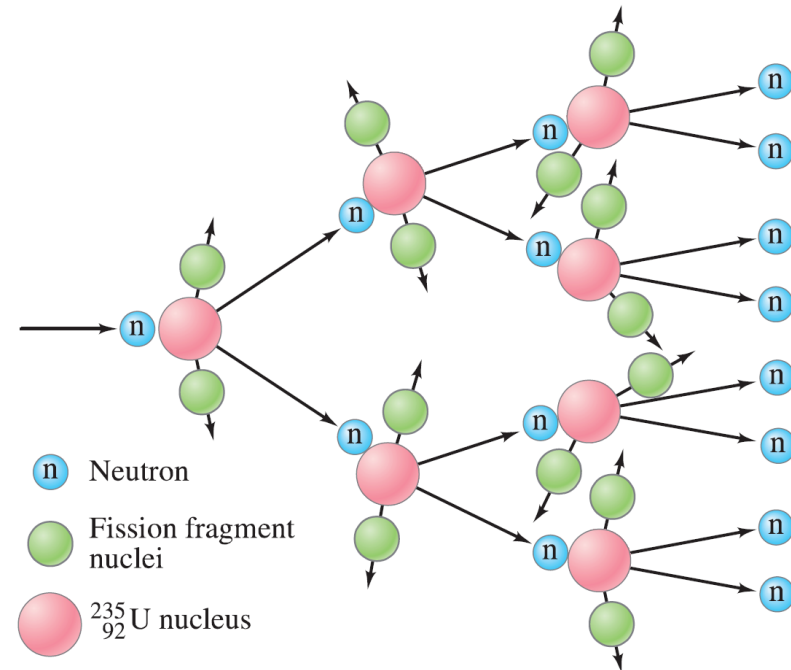
Stel n_0 is het aantal neutronen op tijdstip $t = 0$

De levensduur van neutronen noemen we l

Aantal neutronen op tijdstip t is dan $n(t) = n_0 k^{t/l}$

Als $k \approx 1$ geldt $n(t) = n_0 \exp[(k - 1)t/l]$

Regeling is mogelijk dankzij een kleine fractie *delayed* neutrons



Kernsplijting

Kernsplijting: ontdekt in 1938 door Otto Hahn en Fritz Strassmann

Verklaring door Lisa Meitner en Otto Frisch
door vloeistofdruppelmodel

Vloeistofdruppelmodel

Beschouw bijvoorbeeld

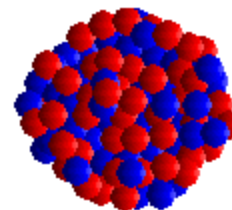
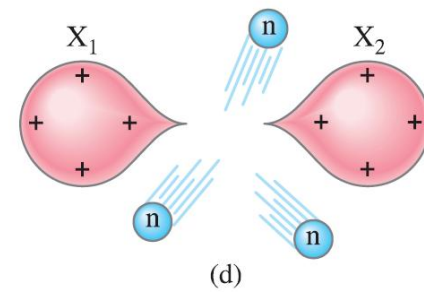
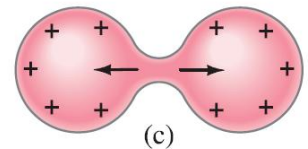
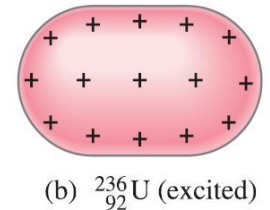
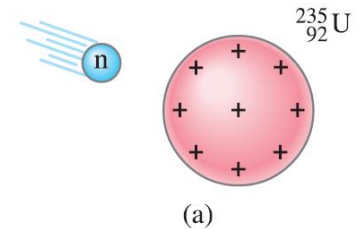


Absorptie van neutron resulteert in aangeslagen
compound kern ${}^{236}_{92}\text{U}$

Deze kern leeft 10^{-12} s en vervalt dan (Coulomb interactie) in grote
splijtingsfragmenten en enkele neutronen

Er komt $(8.5 - 7.6) = 0.9$ MeV / nucleon vrij (*236 = 200 MeV)

Dat is miljoenen keren hoger dan bij
conventionele reacties



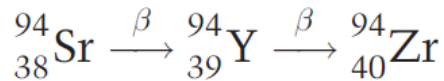
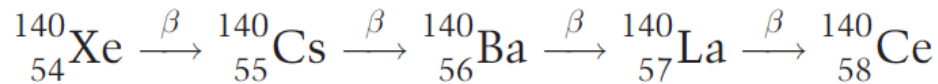
Splijtingsproducten

Splijtingsfragmenten zijn instabiel (neutronenoverschot)

Minder dan 1% van deze fragmenten vervallen door delayed emissie van neutronen

Dominant verval is beta-emissie in combinatie met gamma-emissie

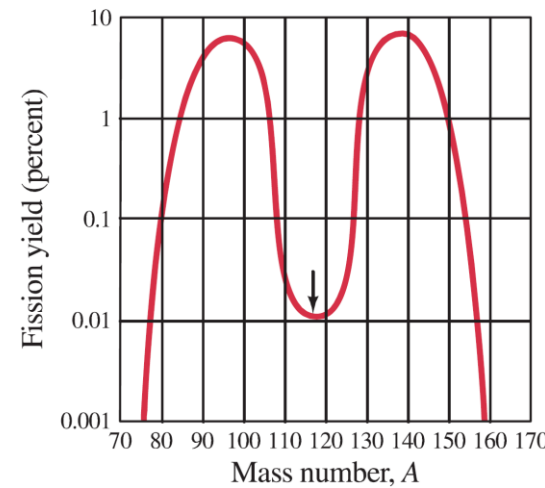
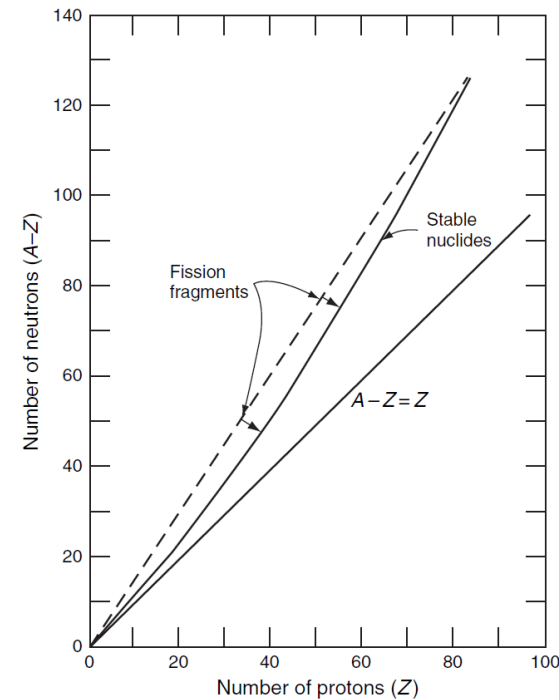
Vaak zijn vervalsreeksen belangrijk, bijvoorbeeld



De begin-stappen verlopen vaak het snelst

Er zijn meer dan 40 fragment-paren waargenomen, met een lichte en een zware groep

Meer dan 200 verschillende splijtingsproducten worden geproduceerd in een reactor



Splijtingsproducten

Ongeveer 8% van de 200 MeV splijtingsenergie wordt toegeschreven aan dit beta- en gammaverval (na shutdown moet een reactor gekoeld blijven!)

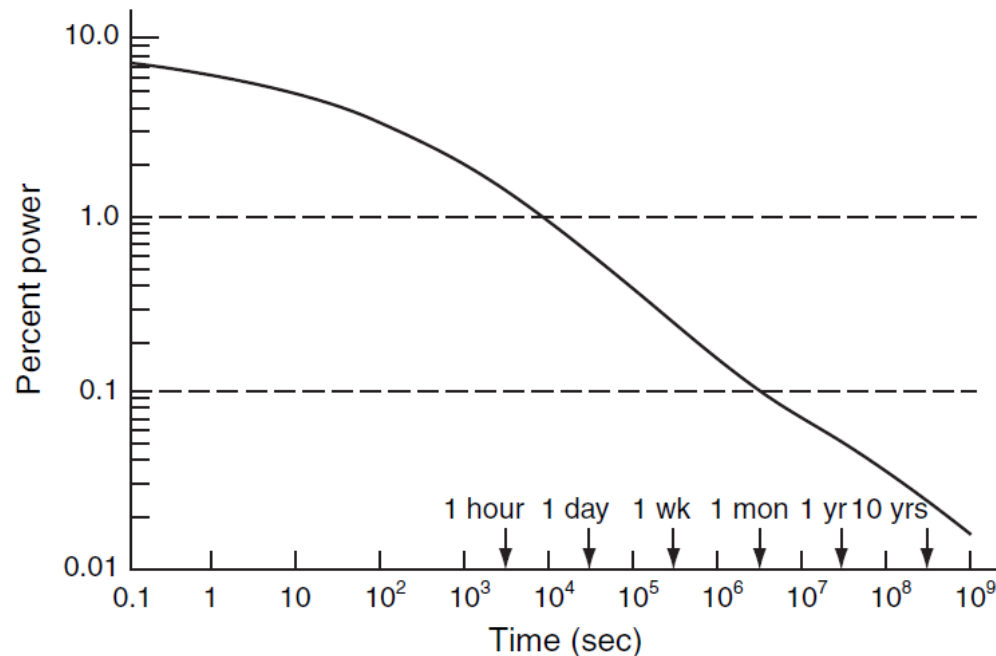
Verval-warmte wordt gegeven door de Wigner-Way relatie

$$P_d(t) = 0.0622 P_o \left[t^{-0.2} - (t_o + t)^{-0.2} \right]$$

$P_d(t)$ = power generation due to beta and gamma rays,
 P_o = power before shutdown,
 t_o = time, in seconds, of power operation before shutdown,
 t = time, in seconds, elapsed since shutdown.

Figuur: de verval-warmte voor een reactor die lange tijd heeft aan gestaan

Nog megawatt vermogen door verval op 1 maand na shutdown

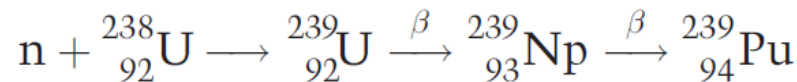


Fissile en fertile materiaal

Fissile (splitsbaar) materiaal kan kernsplijting ondergaan als het met neutronen wordt gebombardeerd

In de natuur is enkel ^{235}U (0.7% abundantie) splitsbaar; de rest ^{238}U

Fertile materiaal kan neutronen absorberen, om dan fissile te worden



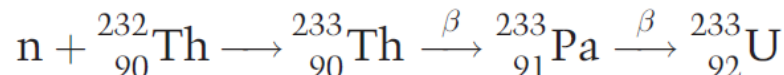
Plutonium-239 is fissile (en radioactief $t_{1/2}=24.4$ duizend jaar)

Ook geldt $\text{n} + {}^{239}_{94}\text{Pu} \rightarrow {}^{240}_{94}\text{Pu}$

Plutonium-240 is weer fertile, want plutonium-241 is fissile

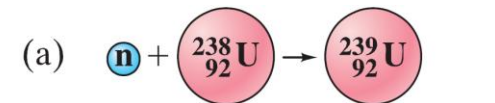
In de natuur is behalve ^{238}U ook thorium-232 fertile

Thorium komt relatief veel voor in de aardkorst

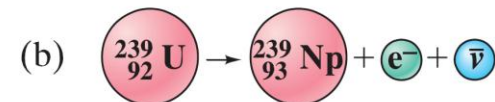


Uranium-233 is fissile

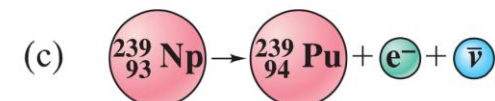
Een reactor die meer fissile materiaal maakt dan hij gebruikt, noemen we een *kweekreactor* (breeder)



Neutron captured by $^{238}_{92}\text{U}$.



$^{239}_{92}\text{U}$ decays by β decay to neptunium-239.



Start-up neutronen

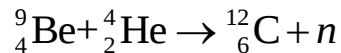
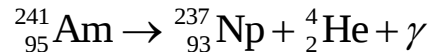
Waar komen de *initiële* neutronen vandaan die nodig zijn om de kettingreactie te starten?

Kosmische straling is een continue bron, maar de flux is laag en moeilijk meetbaar (en 'blind' start risico)

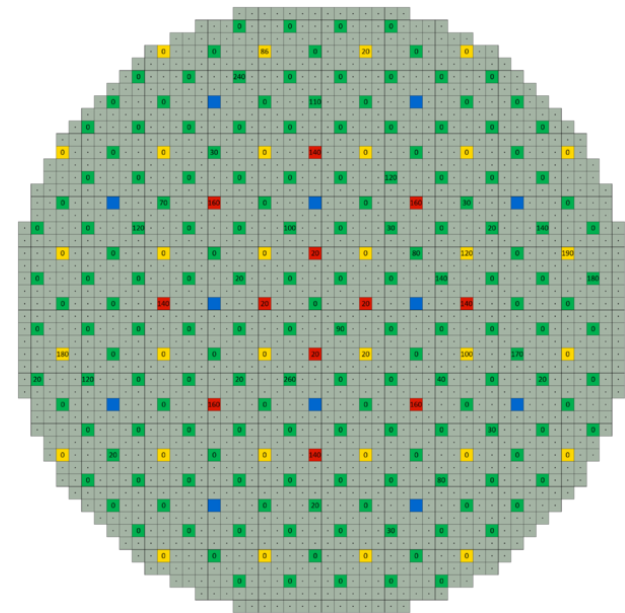
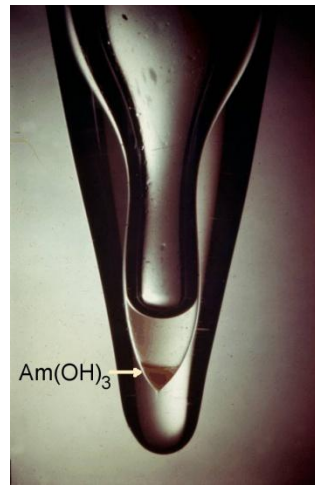
De figuur toont schematisch de reactor core van Chernobyl (laatste opname uit de control room. In blauw zien we de 12 startup neutronenbronnen



Americium-beryllium bron (ook Ra-Be)



Americium is een transuraan en ontdekt in 1994. Wordt in reactor gesynthetiseerd



Radioactief verval: radioactiviteit

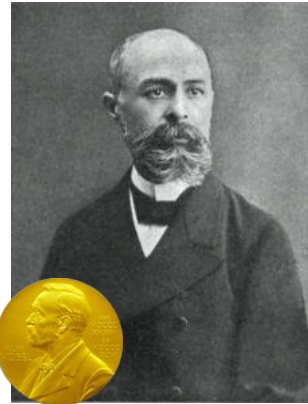
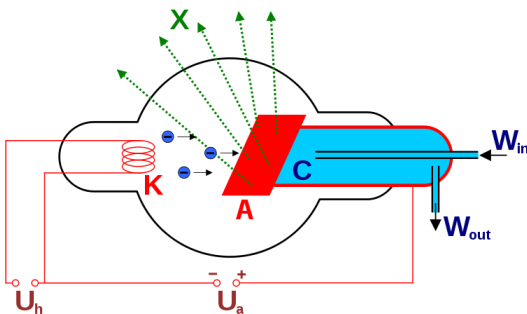
Kernfysica begon in 1896 met de ontdekking van fosforescentie (foute naam overigens) door Henri Becquerel: mineraal (dat uranium bevat) kan een fotografische plaat zwarten.

Er komt dus een of andere straling uit:
radioactiviteit (natuurlijke emissie)

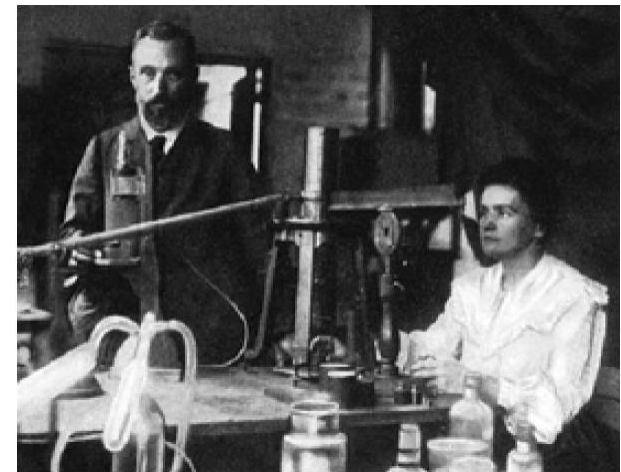
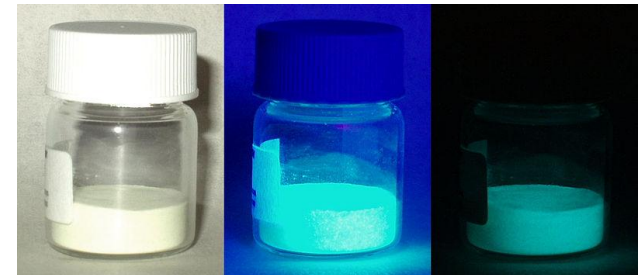
Marie en Pierre Curie ontdekten radium
(voorbeeld van radioisotoop of radionuclei)

Eigenschap radioactiviteit niet makkelijk te beïnvloeden
(door verhitten, magneetveld, *etc.*)

Rontgen had in 1896 al X-straling ontdekt, maar
dat wék je kunstmatig op



1903



Radioactief verval

Rutherford gaf klassificatie van radioactiviteit in 1898

Type α gaat zelfs niet door papier

Type β gaat door 3 mm aluminium

Type γ gaat door een aantal cm lood

Elk type heeft bepaalde eigenschappen: bijvoorbeeld lading

Uiteindelijk bleek

α straling zijn kernen van helium atomen

β straling zijn elektronen

γ straling zijn hoogenergetische fotonen

Eenheden:

1 Becquerel (Bq) is 1 disintegratie per seconde

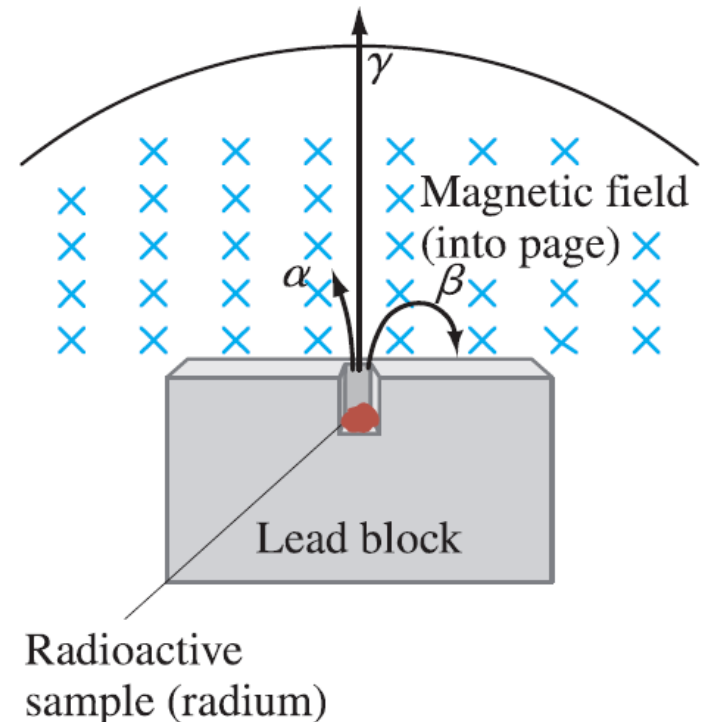
1 Curie (Ci) is 3.7×10^{10} disintegraties per seconde

1 Curie correspondeert met het verval van 1 gram radium-226

Getal van Avogadro: $N_A = 6.023 \times 10^{23}$

Aantal atomen: mN_A/A met m in gram

Concentratie [$\#/cm^3$]: $\rho N_A/A$ met ρ in gram/ cm^3



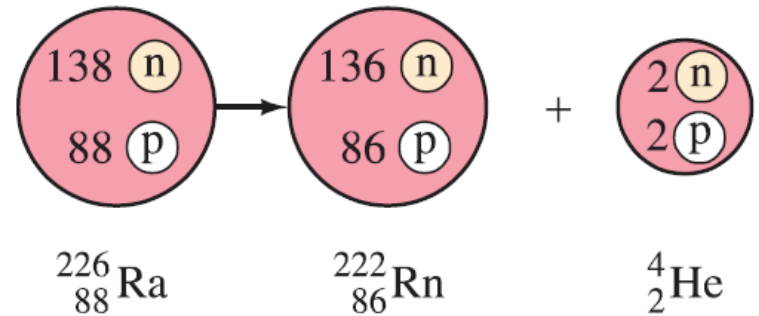
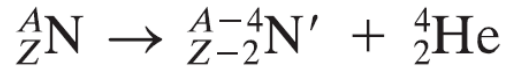
Alfa verval

Na het verval is de originele kern 2 protonen en 2 neutronen kwijt

Bijvoorbeeld ${}^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^4_2\text{He}$

De dochterkern verschilt van de parent (dit proces heet *transmutatie*)

Algemeen



Alfa verval treedt op omdat de sterke wisselwerking niet in staat is om een grote kern bij elkaar te houden. De sterke wisselwerking heeft korte dracht, terwijl de elektrostatische afstoting over de hele kern werkt

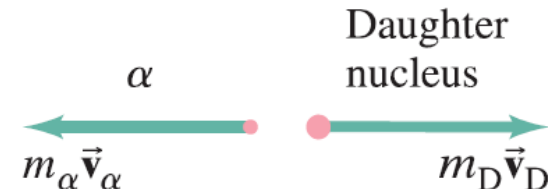
Q-waarde: totale energie die vrijkomt in het verval

$$M_P c^2 = M_D c^2 + m_\alpha c^2 + Q \quad \longrightarrow \quad Q = M_P c^2 - (M_D + m_\alpha) c^2$$

Als $Q < 0$ dan is het verval verboden vanwege energiebehoud

We hebben te maken met verval naar twee deeltjes

Dat geeft een *discreet* energiespectrum



Alfa verval: tunnелеffect

Als $Q > 0$, waarom zijn de parent kernen dan niet al vervallen?

Om dit te begrijpen, beschouw potentiele energie van alfa deeltje

De Q -waarde is de energie van het alfa deeltje op grote afstand

Tunnelerfect betekent sprong van punt A naar B

Mogelijk vanwege onzekerheidsrelatie

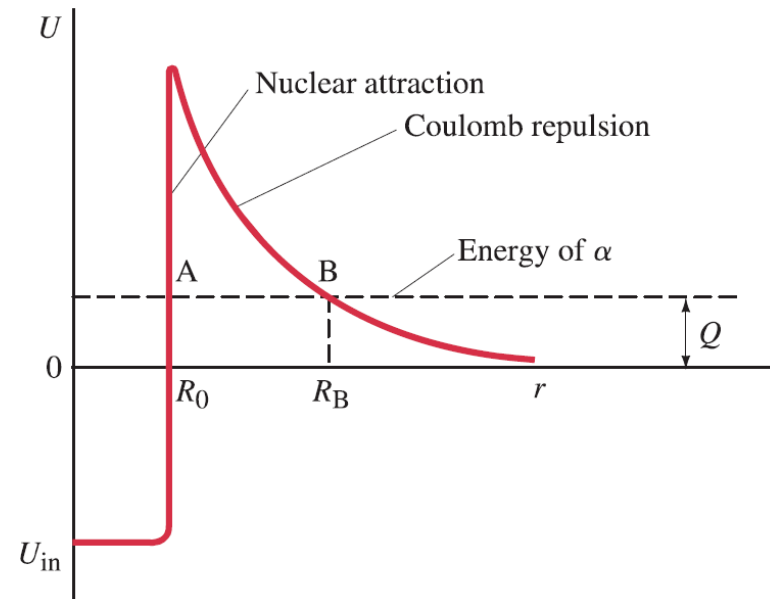
$$(\Delta E)(\Delta t) \approx \frac{h}{2\pi}$$

Schending van energiebehoud is mogelijk voor een tijd Δt die lang genoeg is om door de barriere heen te tunnelen

De Q -waarde, hoogte en breedte van de barriere bepaalt de levensduur van de isotoop (tot miljarden jaren)

Waarom α deeltjes? Vanwege de grote bindingsenergie! Bijvoorbeeld de

Reactie $^{232}_{92}\text{U} \rightarrow ^{228}_{90}\text{Th} + 2\text{n} + 2\text{p}$ treedt niet op, maar naar α deeltje wel



Alfa verval: rookdetector

Bevat kleine hoeveelheid ($< \mu\text{g}$) Americium $^{241}_{95}\text{Am}$ in de vorm van oxide

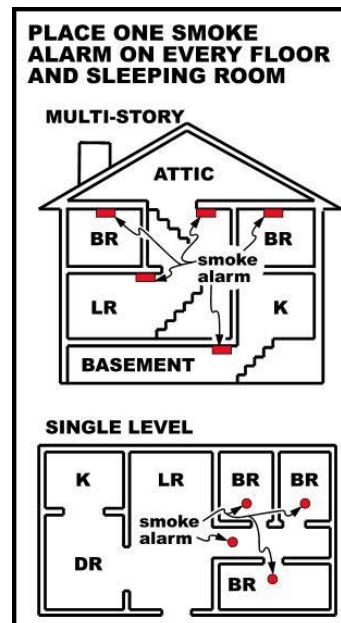
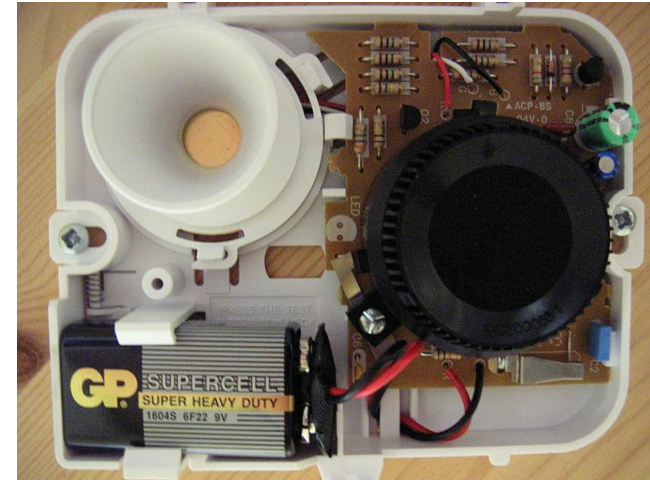
Ionisatiekamer: ioniseer lucht tussen twee tegengesteld geladen platen

Hierdoor ontstaat er een kleine continue stroom tussen deze elektroden

Rookdeeltjes absorberen de α deeltjes, waardoor de stroom afneemt

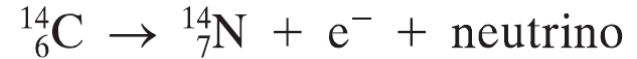
Dit wordt gedetecteerd door een elektronisch circuit

Stralingsdosis is kleiner dan die van de natuurlijke achtergrondstraling



Beta verval

Transmutatie van elementen door beta verval



Neutrino was oorspronkelijk een hypothese

Atoomgetal blijft hetzelfde, maar Z (en dus ook N) verandert

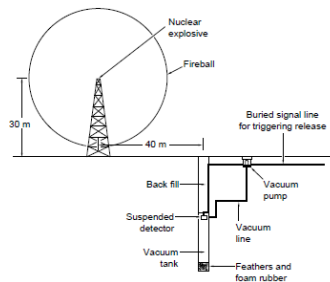
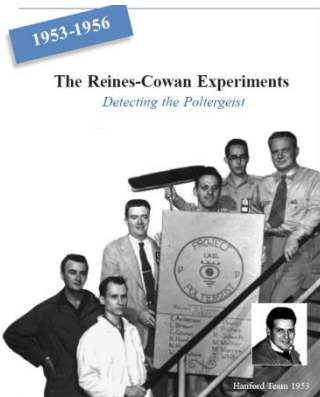
Het uitgezonden elektron is geen baanelektron!

Reactie in de kern $n \rightarrow p + e^{-} + \text{neutrino}$

Verval naar drie deeltjes: continue energiespectrum (daarom neutrino postulaat)

Neutron is geen gebonden toestand van proton en elektron!

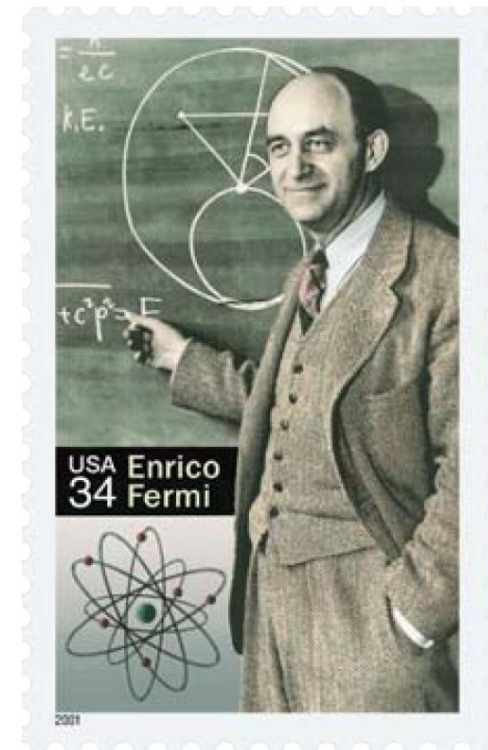
Neutrino ontdekt in 1956 (experiment Poltergeist)



Neutrino's (en antineutrino's) hebben massa en spin $\frac{1}{2}$

Correcte notatie ${}^{14}_6\text{C} \rightarrow {}^{14}_7\text{N} + e^{-} + \bar{\nu}$

Beta verval is voorbeeld van zwakke wisselwerking



Beta+ verval en elektron-vangst

Kernen met teveel neutronen tonen beta verval (elektron wordt uitgezonden)

Kernen met te weinig neutronen tonen beta+ verval (positron wordt uitgezonden)

Positron is het antideeltje van een elektron

Voorbeeld ${}^{19}_{10}\text{Ne} \rightarrow {}^{19}_9\text{F} + e^+ + \nu$

Merk op dat er nu een neutrino uitkomt

Er geldt dus

$${}^A_Z\text{N} \rightarrow {}^A_{Z+1}\text{N}' + e^- + \bar{\nu}$$

$${}^A_Z\text{N} \rightarrow {}^A_{Z-1}\text{N}' + e^+ + \nu$$

Er is nog een derde mogelijkheid: elektron capture

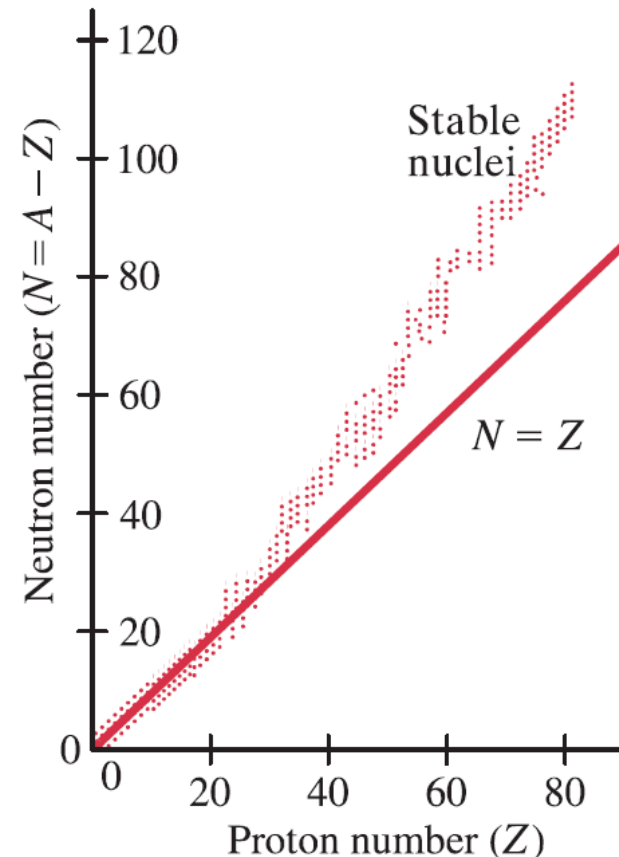
Een kern absorbeert een baanelektron

Voorbeeld ${}^7_4\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7_3\text{Li} + \nu$

Er geldt dus

$${}^A_Z\text{N} + e^- \rightarrow {}^A_{Z-1}\text{N}' + \nu$$

Meestal wordt het elektron uit de binnenste K-schil gevangen. Andere elektronen springen in dit gat en er wordt karakteristieke X-straling uitgezonden

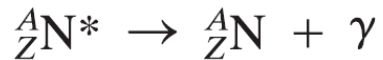


Gamma verval

Hoogenergetische fotonen worden uitgezonden door aangeslagen kerntoestanden (niveaus hebben MeVs energieverval)

Kern komt in aangeslagen toestand door
botsingen met andere deeltjes
radioactief verval

Er geldt



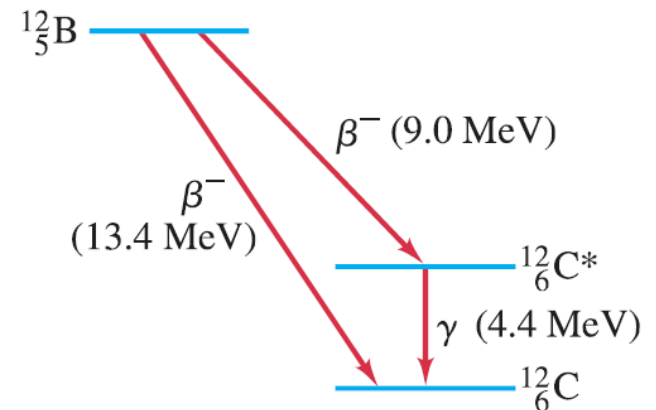
De asterisk * duidt een aangeslagen toestand aan

Nomenclatuur:

X straling is van elektron-atoom interactie
gamma straling is van een kernreactie

Kern in metastabiele toestand: *isomeer*

Interne conversie: het foton stoot een
baanelektron uit de kern



Behoudswetten

Alle klassieke behoudswetten zijn van toepassing

wet van behoud van energie

behoud van impuls

behoud van impulsmoment

behoud van lading

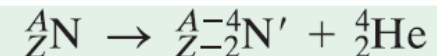
We zien ook nieuwe behoudswetten

behoud van nucleongetal (baryongetal)

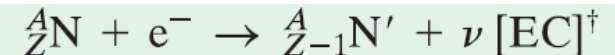
behoud van leptongetal

TABLE 41-2 The Three Types of Radioactive Decay

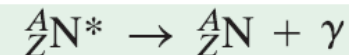
α decay:



β decay:



γ decay:



[†] Electron capture.

*Indicates the excited state of a nucleus.

Halfwaardetijd en vervalsnelheid

Radioactief verval is een random proces

Aantal vervallen kernen ΔN binnen korte tijd Δt

$$\Delta N = -\lambda N \Delta t$$

Dus geldt $\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N$ met λ de vervalconstante

Radioactief verval is een 'one-shot' proces

We nemen de limiet en integreren

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = - \int_0^t \lambda dt \quad \longrightarrow \quad \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t \quad \longrightarrow \quad \boxed{N = N_0 e^{-\lambda t}}$$

Dit heet de radioactieve vervalswet

Het aantal vervallen kernen per seconde $\left| \frac{dN}{dt} \right|$ noemt men de *activiteit*

Er geldt

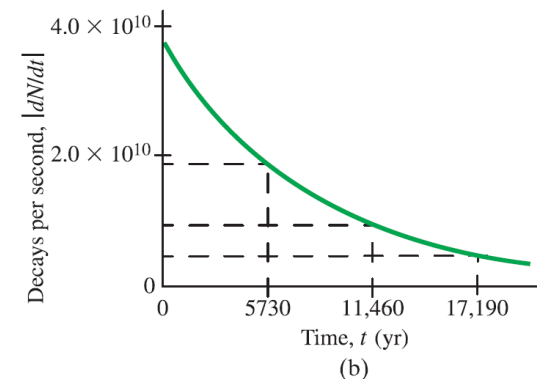
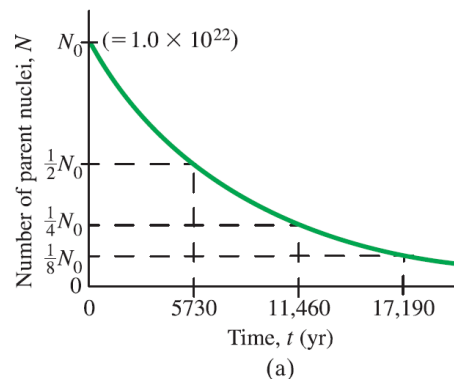
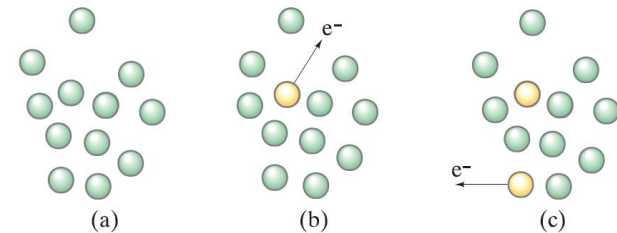
$$\left| \frac{dN}{dt} \right| = \left| \frac{dN}{dt} \right|_0 e^{-\lambda t}$$

Halfwaardetijd

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$$

Levensduur

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{\frac{1}{2}}}{0.693}$$



Verzadigingsactiviteit

In een reactor kan een nucleide continue geproduceerd worden

We voegen dan een bronterm toe $\frac{d}{dt}N(t) = A_o - \lambda N(t)$

Vermenigvuldig beide kanten met $\exp(\lambda t)$ en gebruik

$$\frac{d}{dt}[N(t) \exp(\lambda t)] = \left[\frac{d}{dt}N(t) + \lambda N(t) \right] \exp(\lambda t)$$

We vinden dan $\frac{d}{dt}[N(t) \exp(\lambda t)] = A_o \exp(\lambda t)$

We beginnen met $N(0)=0$ en integreren tussen 0 en t .

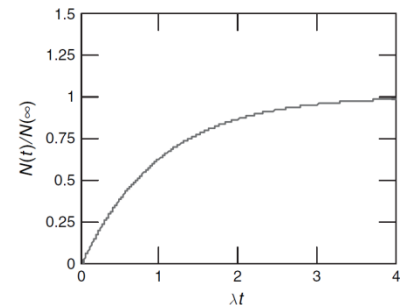
De activiteit (gemeten in # disintegraties per tijdseenheid) is dan

$$\lambda N(t) = A_o[1 - \exp(-\lambda t)]$$

In het begin neemt de activiteit *lineair* met de tijd toe

$\lambda t \ll 1$, $\exp(-\lambda t) \approx 1 - \lambda t$

Na lange tijd (in termen van halfwaardetijd) wordt de verzadigingsactiviteit bereikt: $\lambda N(\infty) = A_o$



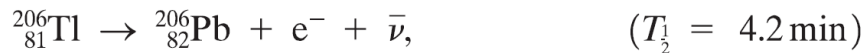
Voorbeeld: jodium-131 ($t_{1/2} = 8,05$ dagen) en strontium-90 (10.628 dagen) worden in een reactor geproduceerd. Jodium-131 bereikt verzadiging na ongeveer 1 maand, terwijl de hoeveelheid strontium in de core blijft toenemen

Vervalsreeksen

Een radioactieve parent kern kan vervallen naar een dochter, die ook weer vervalt, *etc.* Op deze wijze ontstaat een reeks van vervallen.

De figuur toont het verval van $^{238}_{92}\text{U}$
Het verval eindigt bij de stabiele isotoop $^{206}_{82}\text{Pb}$

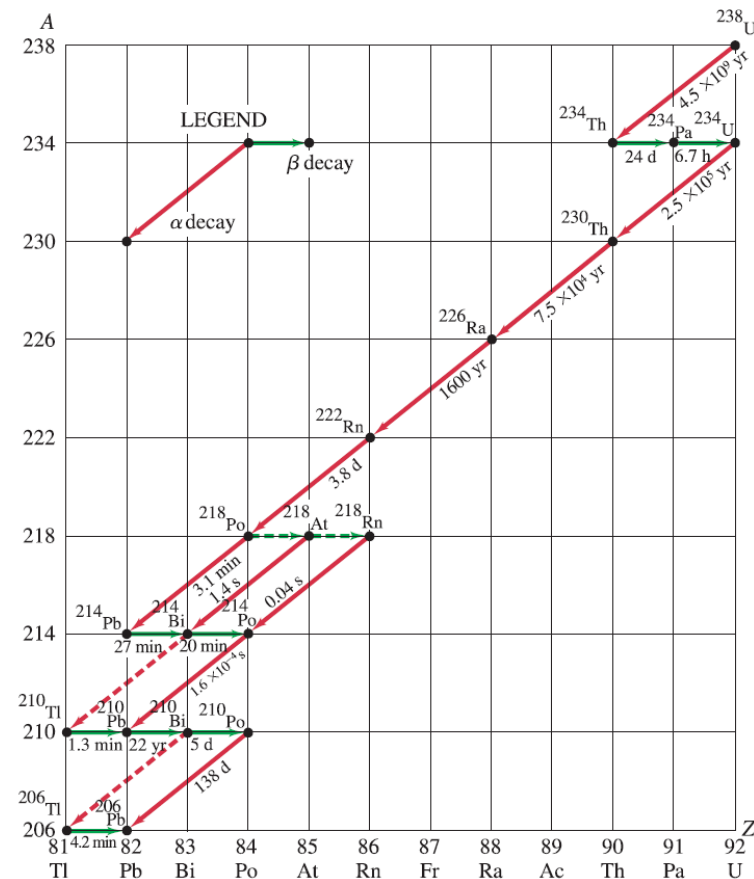
Bijvoorbeeld



Het $^{238}_{92}\text{U}$ is gevormd in de supernova die de vorming van ons zonnestelsel heeft getriggerd. Ongeveer 50% bestaat nog

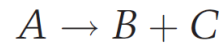
Origineel radium $^{226}_{88}\text{Ra}$ met halfwaardetijd van 1600 jaar is verdwenen. Al wat voorkomt is van het verval van uranium.

Uit de abundantie (0,7%) en halfwaardetijd (700 miljoen jaar) van ^{235}U kan men afleiden dat deze supernova meer dan 6 Gj geleden is ontploft.

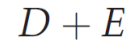


Vervalsreeksen

Beschouw het 2-staps verval



Voor isotoop A kennen we het antwoord



$$\frac{d}{dt}N(t) = -\lambda N(t) \quad \longrightarrow \quad N_A(t) = N_A(0) \exp(-\lambda_A t)$$

Voor isotoop B geldt

$$\frac{d}{dt}N_B(t) = \lambda_A N_A(t) - \lambda_B N_B(t) \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dt}[N_B(t) \exp(\lambda_B t)] = \lambda_A N_A(0) \exp[(\lambda_B - \lambda_A)t]$$

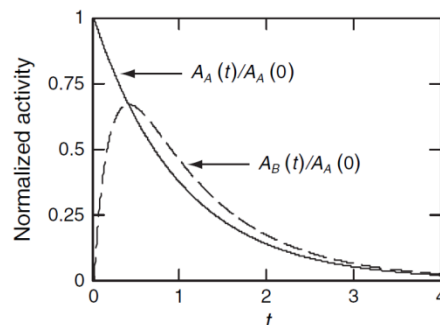
Integreren levert $N_B(t) \exp(\lambda_B t) - N_B(0) = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_A(0) \{ \exp[(\lambda_B - \lambda_A)t] - 1 \}$

Neem aan dat er in het begin geen isotoop B aanwezig is $N_B(0) = 0$ We vinden dan

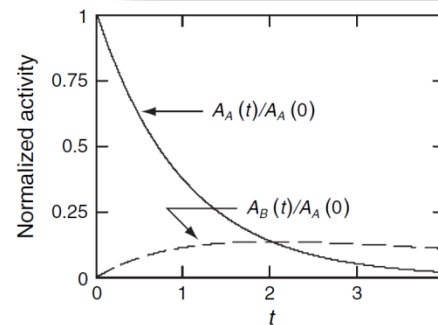
$$N_B(t) = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_A(0) (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t})$$

Beschouw

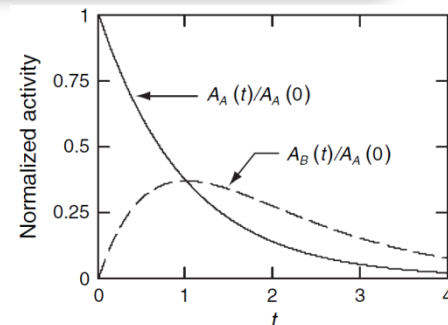
- (a) $\lambda_A \ll \lambda_B$
- (b) $\lambda_A \gg \lambda_B$
- (c) $\lambda_A \cong \lambda_B$



(a) $\lambda_B = 5 \times \lambda_A$; $t_{1/2A} = 5 \times t_{1/2B}$



(b) $\lambda_B = \lambda_A/5$; $t_{1/2A} = t_{1/2B}/5$



(c) $\lambda_B = \lambda_A$; $t_{1/2A} = t_{1/2B}$

N-staps verval gaat analoog

Neutron interacties

Neutron interacties

Werkzame doorsnede bepaalt de waarschijnlijkheid dat een reactie verloopt

Effectief oppervlak van een kern σ zoals gezien door neutron

Een bundel neutronen beweegt met snelheid v in de x -richting

De bundel bevat n neutronen per cm^3

De intensiteit van de bundel is $I = nv$ in $[\# / \text{cm}^2 / \text{s}]$

De bundelintensiteit op diepte x in het materiaal is $I(x)$

Neutronen worden verstrooid of geabsorbeerd

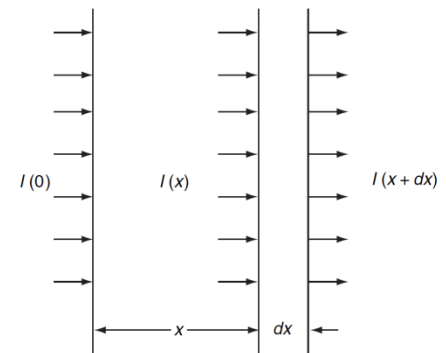
Het materiaal bevat N kernen per cm^3

In dikte dx bevinden zich dan Ndx kernen per cm^2

Voor neutronen is dan de fractie $N\sigma dx$ van het oppervlak geblokkeerd

Dan geldt

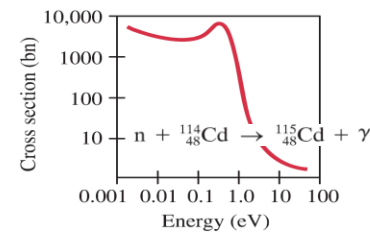
$$I(x + dx) = (1 - N\sigma dx)I(x) \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dx} I(x) = -N\sigma I(x) \quad \longrightarrow \quad I(x) = I(0)e^{-N\sigma x}$$



Microscopische werkzame doorsnede σ in $[\text{cm}^2]$

Macroscopische werkzame doorsnede $\Sigma = N\sigma$ in $[\text{cm}^{-1}]$

Eenheid $1 \text{ barn (bn)} = 10^{-28} \text{ m}^2$



Waarschijnlijkheidsinterpretatie

Er geldt $\frac{d}{dx} I(x) = -N\sigma I(x)$  $\frac{dI(x)}{I(x)} = -N\sigma dx = -\Sigma dx$

Aantal neutronen dat botst in dx is $-dI(x)$

Dat is een fractie van het aantal neutronen $I(x)$ dat in x is aangekomen zonder te botsen

De waarschijnlijk dat een neutron dat nog *niet* gebotst heeft tot x , *wel* zal botsen in dx , wordt dus gegeven door Σdx

Evenzo is $I(x) / I(0) = \exp(-\Sigma x)$ de fractie neutronen die afstand x hebben afgelegd zonder te botsen

Dit kan geïnterpreteerd worden als de waarschijnlijkheid dat een neutron een afstand x aflegt zonder te botsen

De kans $p(x)dx$ dat een neutron zijn eerste botsing maakt in dx is het product

$$p(x)dx = \Sigma e^{-\Sigma x} dx$$

De *gemiddelde vrije weglengte* is de gemiddelde afstand die een neutron tussen botsingen aflegt

$$\lambda = \int_0^{\infty} x p(x) dx = \int_0^{\infty} x \Sigma e^{-\Sigma x} dx = 1 / \Sigma$$

De *uncollided flux* is $\phi_u(x) = I(x) = v n_u(x)$

Mengsels (en moleculen) van nucleïden

Macroscopische werkzame doorsnede $\Sigma = N\sigma$ in $[\text{cm}^{-1}]$

Getal van Avogadro: $N_A = 6.023 \times 10^{23}$

Aantal atomen: mN_A/A met m in gram

Dan geldt $N = \rho N_A/A$ met ρ in gram/cm^3



$$\Sigma = N\sigma = \frac{\rho N_A}{A} \sigma$$

Definieer N^i/N als *atomaire fractie* van isotoop met atomair gewicht A_i

Atomair gewicht van een mengsel is dan

$$A = \sum_i \left(N^i / N \right) A_i \quad \text{met} \quad N = \sum_i N^i$$

De macroscopische werkzame doorsnede van het mengsel is dan

$$\Sigma = \frac{\rho N_A}{A} \sum_i \frac{N^i}{N} \sigma^i = N^1 \sigma^1 + N^2 \sigma^2 + \dots$$

Als de materialen in *volume fracties*

gecombineerd zijn, geldt $\Sigma = \sum_i (V_i / V) N_i \sigma^i$, met $N_i = \rho_i N_A / A_i$ en $V = \sum_i V_i$

Voor combinaties in *massa fracties* geldt

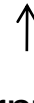
$$\Sigma = \sum_i \left(M_i / M \right) \frac{\rho N_A}{A_i} \sigma^i, \quad \text{met} \quad M = \sum_i M_i$$

Voorbeeld

Legering

An alloy is composed of 95% aluminum and 5% silicon (by weight). The density of the alloy is 2.66 g/cm³. Properties of aluminum and silicon are shown below.

Element	Gram Atomic Weight	σ_a (barns)	σ_s (barns)
Aluminum	26.9815	0.23	1.49
Silicon	28.0855	0.16	2.20



absorptie
verstrooiing

Atomaire dichtheden

$$N_{Al} = \frac{\rho_{Al} N_A}{M_{Al}}$$

$$= \frac{0.95 \left(2.66 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right) \left(6.022 \times 10^{23} \frac{\text{atoms}}{\text{mole}} \right)}{26.9815 \frac{\text{g}}{\text{mole}}}$$

$$= 5.64 \times 10^{22} \frac{\text{atoms}}{\text{cm}^3}$$

$$N_{Si} = \frac{\rho_{Si} N_A}{M_{Si}}$$

$$= \frac{0.05 \left(2.66 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right) \left(6.022 \times 10^{23} \frac{\text{atoms}}{\text{mole}} \right)}{28.0855 \frac{\text{g}}{\text{mole}}}$$

$$= 2.85 \times 10^{21} \frac{\text{atoms}}{\text{cm}^3}$$

Macr. werkz. doorsn.



$$\Sigma_a = N_{Al} \sigma_{a,Al} + N_{Si} \sigma_{a,Si}$$

$$= \left(5.64 \times 10^{22} \frac{\text{atoms}}{\text{cm}^3} \right) (0.23 \times 10^{-24} \text{ cm}^2) + \left(2.85 \times 10^{21} \frac{\text{atoms}}{\text{cm}^3} \right) (0.16 \times 10^{-24} \text{ cm}^2)$$

$$= 0.0134 \text{ cm}^{-1}$$

$$\Sigma_s = N_{Al} \sigma_{s,Al} + N_{Si} \sigma_{s,Si}$$

$$= \left(5.64 \times 10^{22} \frac{\text{atoms}}{\text{cm}^3} \right) (1.49 \times 10^{-24} \text{ cm}^2) + \left(2.85 \times 10^{21} \frac{\text{atoms}}{\text{cm}^3} \right) (2.20 \times 10^{-24} \text{ cm}^2)$$

$$= 0.0903 \text{ cm}^{-1}$$

VWL

$$\lambda_a = \frac{1}{\Sigma_a}$$

$$= \frac{1}{0.01345 \text{ cm}^{-1}}$$

$$= 74.3 \text{ cm}$$

$$\lambda_s = \frac{1}{\Sigma_s}$$

$$= \frac{1}{0.0903 \text{ cm}^{-1}}$$

$$= 11.1 \text{ cm}$$



Reactiesoorten

Werkzame doorsnede voor verschillende reacties

$$\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a$$

Totaal: verstrooiing + absorptie



$$\sigma_a = \sigma_\gamma + \sigma_f$$

Absorptie: invangst en gamma emissie + splijting

$$\sigma_s = \sigma_n + \sigma_{n'}$$

Verstrooiing : elastisch + inelastisch

Gegeven een botsing is σ_s/σ_t de waarschijnlijkheid dat het neutron verstrooid wordt, terwijl σ_a/σ_t de kans is dat hij wordt geabsorbeerd.

Gegeven dat een neutron geabsorbeerd wordt, is σ_γ/σ_a de waarschijnlijkheid dat het neutron ingevangen, terwijl σ_f/σ_a de kans dat er splijting optreedt.

Macroscopische werkzame doorsneden $\Sigma_x = N\sigma_x$ met $x = s, a, \gamma, f$

Ook geldt bijvoorbeeld $\Sigma_t = \Sigma_s + \Sigma_a$

Energie van neutronen

Kernsplijting produceert neutronen met een energiespectrum

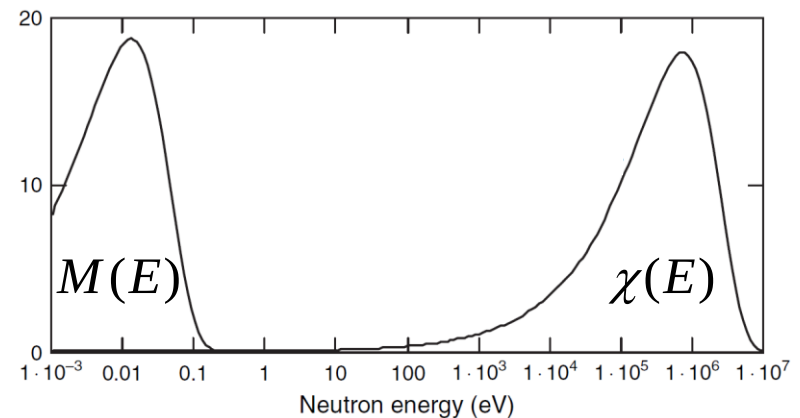
$$\chi(E) = 0.453e^{-1.036E} \sinh(\sqrt{2.29E}), \text{ met } E \text{ in MeV}$$

Er geldt
$$\int_0^{\infty} \chi(E) dE = 1$$

Gemiddelde energie is ongeveer 2 MeV

Meest waarschijnlijke energie 0.75 MeV

Energie > 10 MeV komt praktisch niet voor in een reactor



Gemiddelde kinetische energie kT van kernen bij kamertemperatuur (293.61 K) is 0.0253 eV (eigenlijk $3/2 kT$ gebruiken)

Na veel botsingen en zonder absorptie zouden neutronen thermisch worden

Dan is de Maxwell-Boltzmann verdeling van toepassing

$$M(E) = \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}} \sqrt{E} e^{-E/kT} \quad \int_0^{\infty} M(E) dE = 1$$

$E < 1$ meV komt bijna niet voor

We onderscheiden *thermische* (1 meV – 1 eV), *snelle* (0.1 – 10 MeV), en *epithermische* neutronen

Verstrooiing aan waterstof

Werkzame doorsnede voor verstrooiing van neutronen aan een enkel proton

Er is geen resolutie voor interne structuur: dus geen inelastische verstrooiing

Werkzame doorsnede voor elastische verstrooiing

Biljartballen botsingen met kinetisch energiebehoud

Ook wel *potentiaal verstrooiing* genoemd (omdat het neutron van het oppervlak verstrooit)

Treedt op bij alle kernen en heeft een waarde consistent

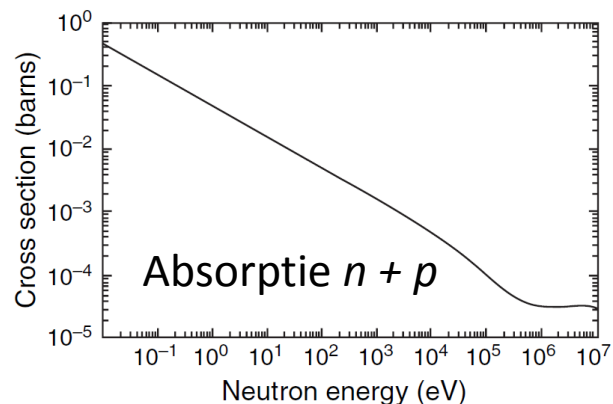
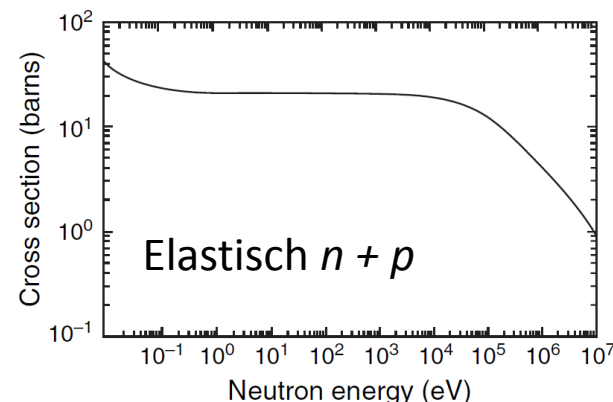
met de grootte van de kern $R = 1.25 \times 10^{-13} A^{1/3} \text{ cm}$

Splijting treedt niet op, maar neutronen kunnen wel ingevangen worden

Werkzame doorsnede voor absorptie is evenredig met $1/\sqrt{E} \sim 1/v$

Er geldt $\sigma_t(E) \approx \sigma_s + \sqrt{E_0/E} \sigma_a(E_0)$

Deuterium en helium hebben analoog gedrag, maar verstrooiing is iets groter, en absorptie kleiner



Compound kernen

Reactie $n + A \rightarrow (A+1)^*$ (een tussenkern in aangeslagen toestand)

De excitatie-energie E^* komt deels van de kinetische energie van het neutron

Impulsbehoud $mv = (m + Am)V$

Hierbij gaat kinetische energie verloren

$$\Delta E_{ke} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(m + Am)V^2 = \frac{A}{1+A} \frac{1}{2}mv^2 = E_{COM}$$

Bindingsenergie E_B van het neutron levert tweede bijdrage tot E^*

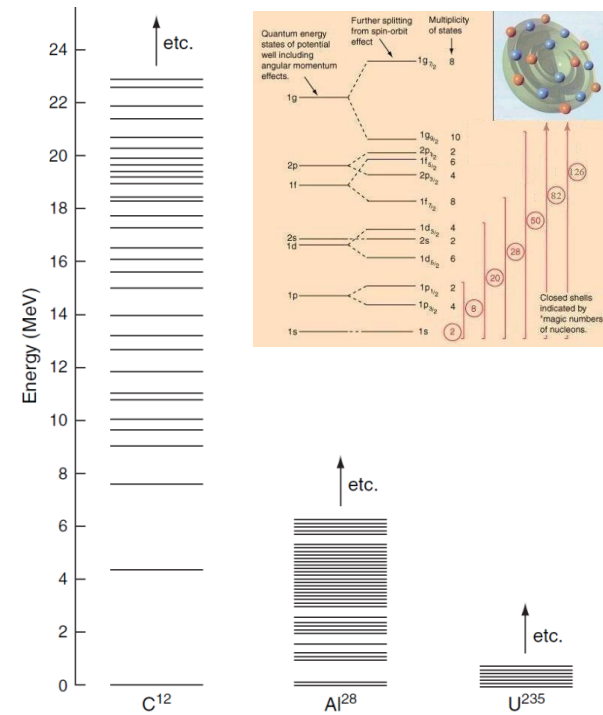
De aangeslagen compound kern kan de-exciteren door

1. $(A+1)^* \rightarrow n + A$, in feite elastische verstrooiing
2. $(A+1)^* \rightarrow (A+1) + \text{gamma's}$, capture vormt een isotoop
3. $(A+1)^* \rightarrow n + A + \text{gamma's}$, inelastische verstrooiing
4. $(A+1)^* \rightarrow \text{splijting}$

Nucleonen in een kern vormen quantumtoestanden

De kans op vorming van compound kern neemt toe als de excitatie-energie geleverd door het neutron correspondeert met een quantumtoestand in die kern

Zware kernen hebben meer energietoestanden



Resonanties

Elke kern heeft zijn unieke resonatiestructuur

Laagste resonantie bij

2 MeV in koolstof-12

400 keV in zuurstof-16

3 keV in natrium-23

6.6 eV in uranium-238

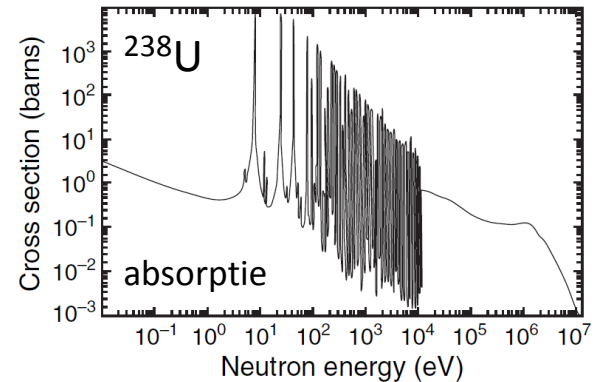
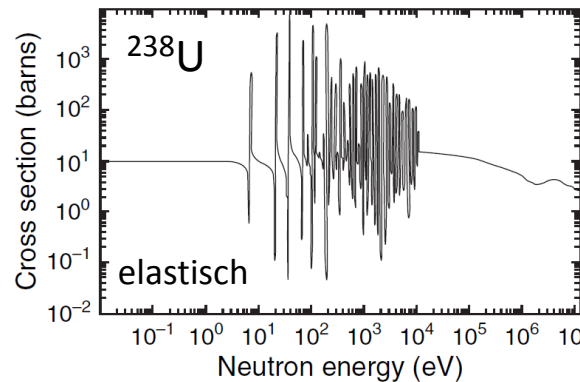
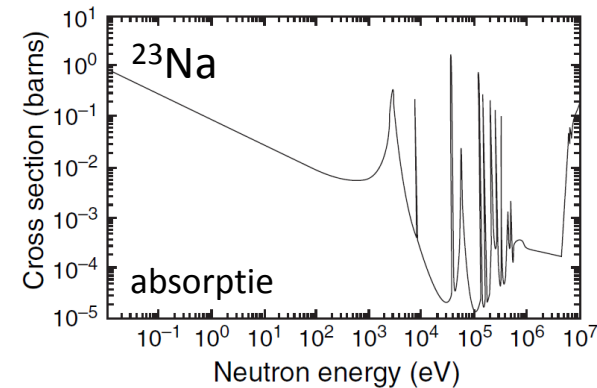
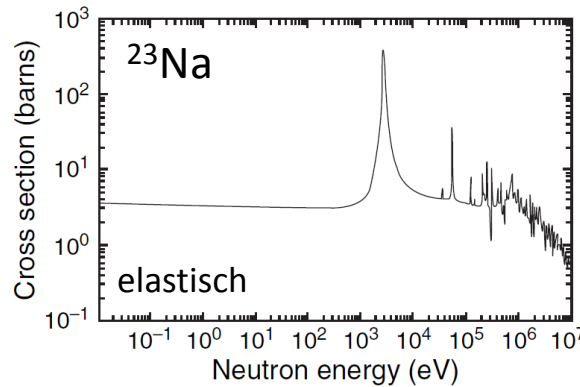
Spacing groter bij lichte kernen en ratio capture tot verstrooiing is kleiner

Resonanties in uranium kunnen niet meer onderscheiden worden voor $E > 10$ keV

Breit-Wigner formule voor capture

Elastische verstrooiing

Verder $\Gamma = \Gamma_\gamma + \Gamma_n$



$$\sigma_\gamma(E) = \sigma_o \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \left(\frac{E_r}{E} \right)^{1/2} \frac{1}{1 + 4(E - E_r)^2 / \Gamma^2}$$

$$\sigma_n(E) = \sigma_o \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \frac{1}{1 + 4(E - E_r)^2 / \Gamma^2} + \sigma_o \frac{2R}{\lambda_o} \frac{2(E - E_r) / \Gamma}{1 + 4(E - E_r)^2 / \Gamma^2} + 4\pi R^2$$

Dopplerverbreeding

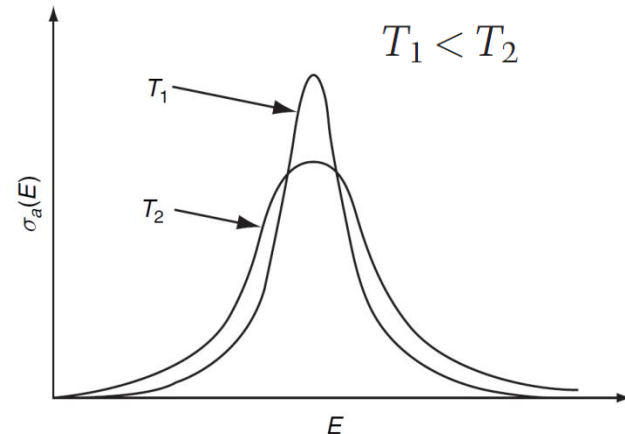
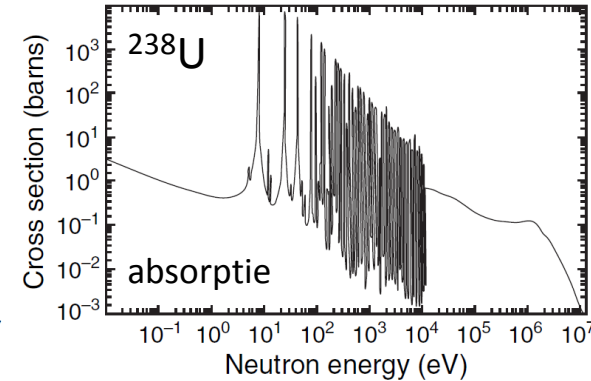
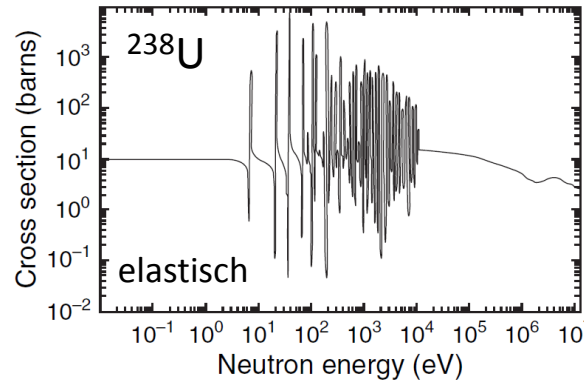
De werkzame doorsneden verwaarlozen de beweging van de kernen (thermisch)

We moeten middelen over de Maxwell-Boltzmann verdeling van snelheden van de kernen

Hierdoor worden de pieken uitgesmeerd: pieken worden lager en breder

De uitsmeren wordt belangrijker bij toenemende temperatuur

Dopplerverbreeding levert negatieve temperatuur feedback en draagt bij tot de stabiliteit van reactoren



Drempelwaarden

Inelastische verstrooiing heeft een drempelwaarde: energie is nodig om een quantumtoestand aan te slaan en om het neutron weer te emitteren

Zware kernen hebben meer quantumconfiguraties

Drempelwaarde voor inelastische verstrooiing neemt af met toenemende A

Drempelenergie

4.8 MeV voor koolstof-12

6.4 MeV voor zuurstof-16

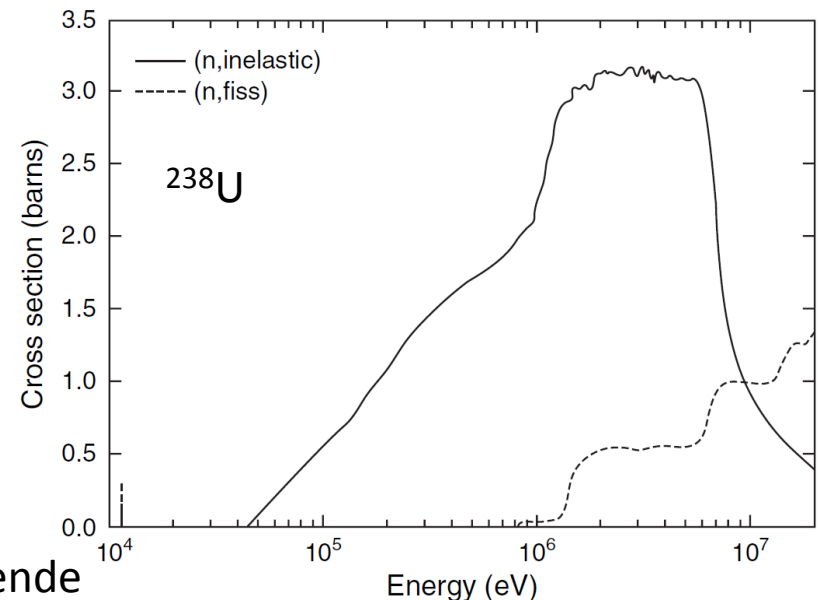
0.04 MeV voor uranium-238

Inelastische verstrooiing is onbelangrijk voor lichte kernen in een reactor

Fertile materiaal heeft ook een drempelwaarde voor splijting

Splijting treedt op in uranium-238 voor neutronen met energie groter dan 1 MeV

Drempels voor andere excitaties liggen voldoende hoog en kunnen verwaarloosd worden



Splijtbaar materiaal

Neutronen van *elke* energie veroorzaken splijting in *fissile* materiaal

Uranium-235 is het enige in de natuur voorkomend fissile materiaal

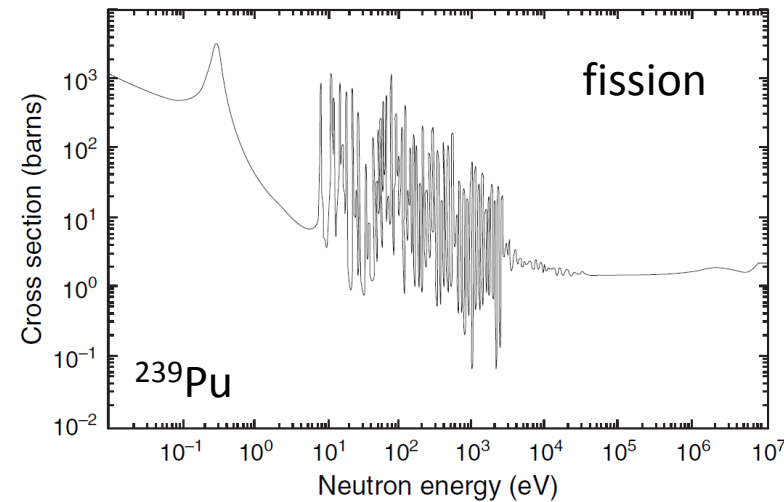
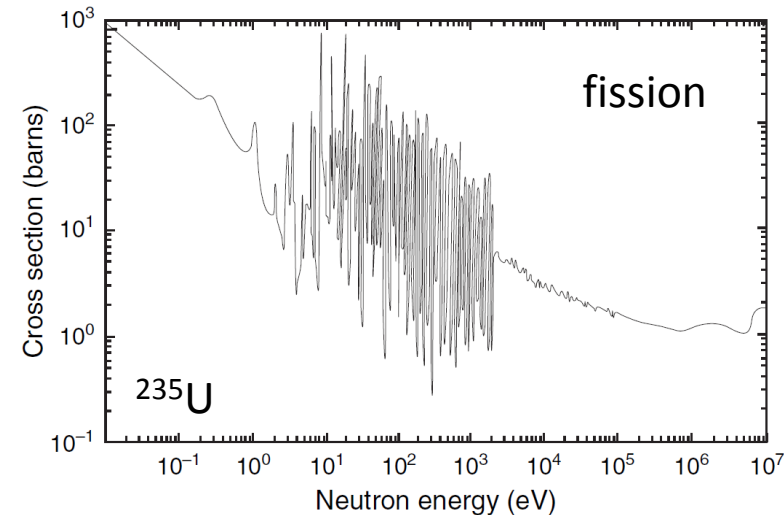
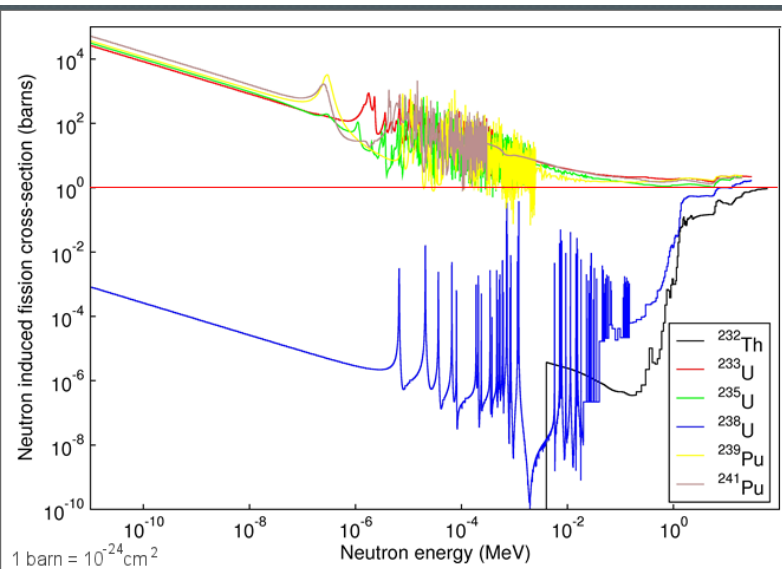
Plutonium-239 en -241, en uranium-233 zijn kunstmatig fissile materiaal

Fertile materiaal

Natuurlijk: uranium-238 en thorium-232

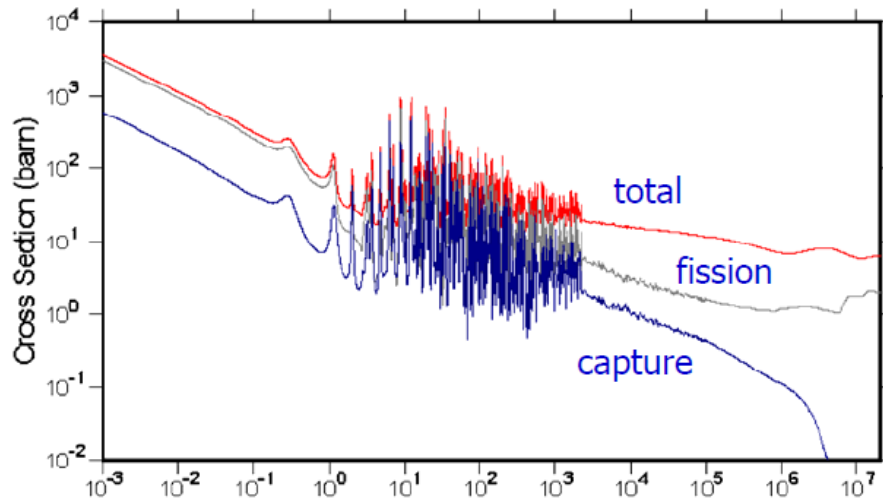
Kunstmatig: plutonium-240

Fission cross sections lijken op elkaar



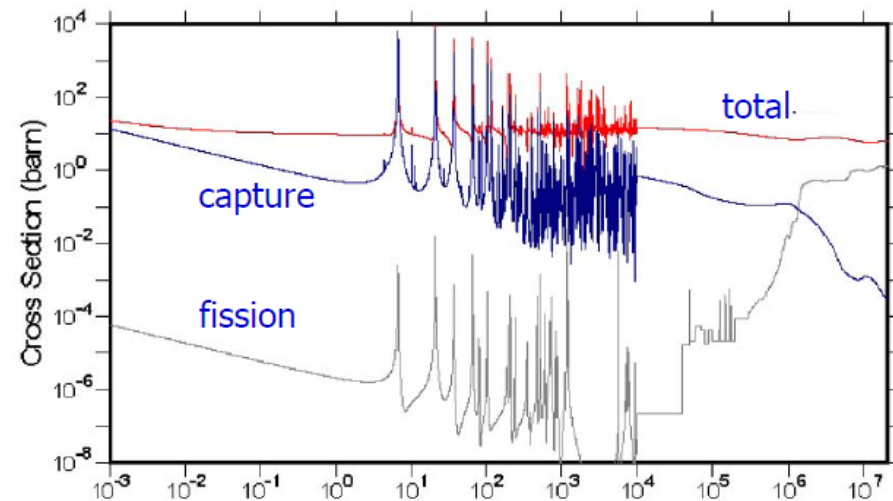
Isotopen natuurlijk uranium

^{235}U



Neutron energy / eV

^{238}U



Neutron energy / eV

Werkzame doorsnede voor kernsplijting is groter voor ^{235}U

Werkzame doorsnede is groot voor thermische neutronen.
Een *moderator* is nodig om neutronen thermisch te maken

Fuel tablets



Composition of:
5% ^{235}U
95% ^{238}U
(0.7% ^{235}U in natural ore)

Verstrooiing van neutronen

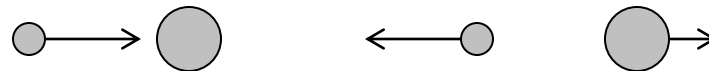
In reactor wordt energiespectrum van neutronen bepaald door competitie tussen verstrooiing en absorptie reacties

Energie degradatie treedt op door botsingen (neutron slow down)

In een medium waar de ratio van verstrooiing en absorptie werkzame doorsnede groot is, zullen neutronen een soft thermisch spectrum hebben

Kleine ratio levert hard spectrum

Elastische verstrooiing:



Voorbeeld: frontale botsing

$$\left. \begin{aligned} mv &= mv' + (Am)V \\ \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}(Am)V^2 \end{aligned} \right\} \alpha = \frac{E'}{E} = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2$$

Algemeen is de waarschijnlijkheidsverdeling

$$p(E \rightarrow E')dE' = \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)E} dE', & \alpha E \leq E' \leq E, \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \quad \text{en} \quad \alpha = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2$$

Maximum energieverlies:

2% in een botsing met ^{238}U

100% voor met een proton

Voorbeelden:

^1H ($A = 1$), $\alpha = 0$, $0 < E' < E$

^{12}C ($A = 12$), $\alpha = 0.72$, $0.72E < E' < E$

^{238}U ($A = 238$), $\alpha = 0.98$, $0.98E < E' < E$

Modereren van neutronen

Een *moderator* is reactor materiaal dat als doel heeft om neutronen thermisch te maken (in zo min mogelijk botsingen, zonder deze te absorberen).

Materialen met lage A worden gebruikt

Een moderator heeft drie wenselijke eigenschappen:

- Grote werkzame doorsnede voor verstrooiing
- Kleine werkzame doorsnede voor absorptie
- Groot energieverlies per botsing

Slowing down decrement: $\xi \equiv \overline{\ln(E/E')} = \int \ln(E/E') p(E \rightarrow E') dE'$
gemiddeld relatief verlies

We vinden

$$\xi = \int_{\alpha E}^E \ln(E/E') \frac{1}{(1-\alpha)E} dE' = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} A=1 &\rightarrow \xi=1 \\ A>1 &\quad \xi \approx \frac{2}{A + \frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Aantal elastische botsingen nodig om een neutron te modereren

$$\frac{E_0}{E_n} = \left(\frac{E_0}{E'} \right)^n \rightarrow n = \frac{1}{\xi} \ln(E_0/E_n)$$

Voorbeelden:

$$^1\text{H} (A=1), \alpha=0, \xi=1, E/E' = e^1 = 2.72, \bar{E}' = 0.37E, n = \ln(2e6/0.025)/1=18$$

$$^{12}\text{C} (A=12), \alpha=0.72, \xi=0.16, E/E' = e^{0.16} = 1.17, \bar{E}' = 0.85E, n = \ln(2e6/0.025)/0.16=114$$

$$^{238}\text{U} (A=238), \alpha=0.98, \xi=0.0084, E/E' = e^{0.0084} = 1.01, \bar{E}' = 0.99E, n = \ln(2e6/0.025)/0.0084=2275$$

Verlies onafhankelijk van energie

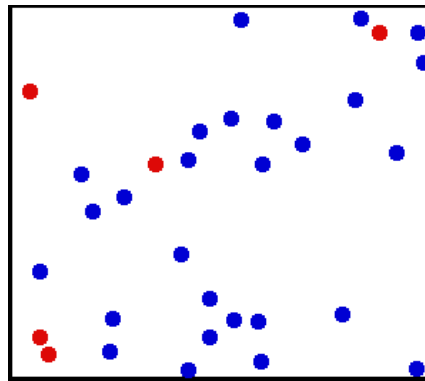
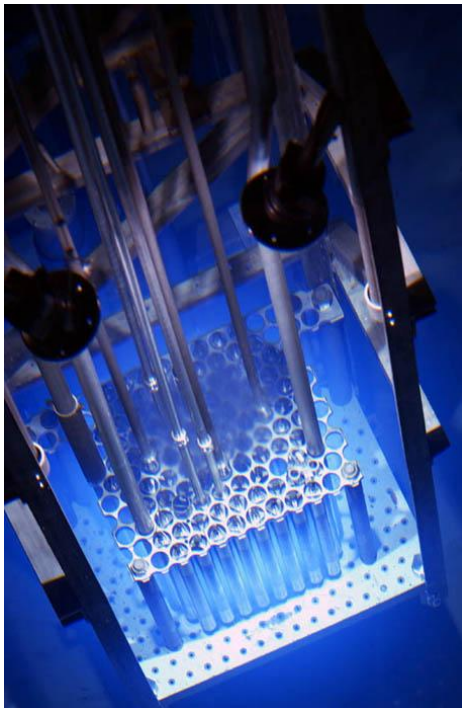
Reactortheorie: moderatoren

Macroscopic slowing down power (MSDP) is het product of het gemiddelde logaritmisch energieverlies en macroscopische werkzame doorsnede voor verstrooiing

$$MSDP = \xi \Sigma_s$$

De *moderating ratio* (MR) is de ratio van de macroscopic slowing down power en de macroscopische werkzame doorsnede voor absorptie

$$MR = \frac{\xi \Sigma_s}{\Sigma_a}$$



Moderating Properties of Materials				
Material	ξ	Number of Collisions to Thermalize	Macroscopic Slowing Down Power	Moderating Ratio
H ₂ O	0.927	19	1.425	62
D ₂ O	0.510	35	0.177	4830
Helium	0.427	42	9×10^{-6}	51
Beryllium	0.207	86	0.154	126
Boron	0.171	105	0.092	0.00086
Carbon	0.158	114	0.083	216

Neutron energieverdelingen

Neutron energieverdelingen

De *vermenigvuldigingsfactor* k is de verhouding van splijtingsneutronen geboren in generatie $i+1$ tot die in i

Neutronen worden geboren in fission, ondergaan botsingen, en verwijden door absorptie

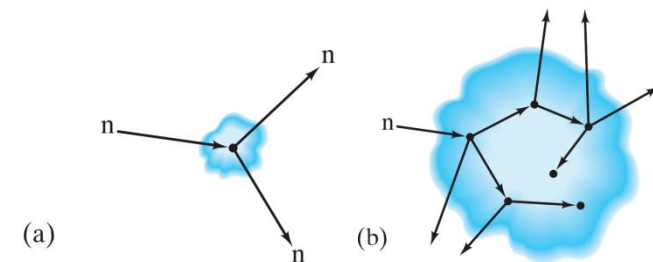
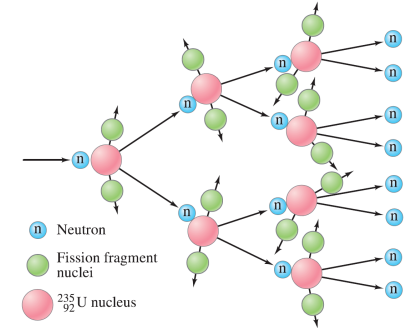
We gaan vermenigvuldiging k beschrijven door werkzame doorsneden te middelen over neutronen energie

Vereenvoudigingen:

Neutronen ontstaan allemaal instantaan in splijting (geen delayed neutrons)

Verwaarlozen de eindige afmetingen van reactor en stellen $k = k_{\infty} P_{NL}$ met k_{∞} de vermenigvuldigingsfactor voor een oneindig grote reactor en P_{NL} de non-leakage waarschijnlijkheid

Later bespreken we invloeden van delayed neutron emissie en van de eindigheid van de reactorkern



Eigenschappen van nucleaire brandstof

Neutronen hebben energieën tussen 1 meV en 10 MeV

Fissile materiaal kan gespleten worden voor al deze energieën

Fertile materiaal kan gespleten worden boven een drempel 1 MeV voor ^{238}U

Aantal splijtingsneutronen ν per gespleten kern (typisch 2 – 3)

$$\eta(E) = \frac{\nu \Sigma_f(E)}{\Sigma_a(E)} = \frac{\text{fission neutrons produced}}{\text{neutrons absorbed}}$$

ν neutronen / splijting

Absorptie werkzame doorsnede $\Sigma_a(E) = \Sigma_\gamma(E) + \Sigma_f(E)$

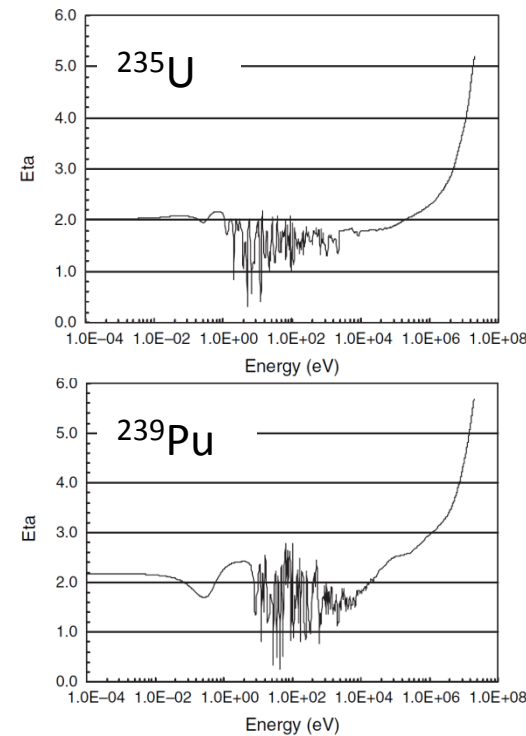
In een reactor $\eta > 1$ om kernreactie gaande te houden

Voor één enkele isotoop geldt $\eta(E) = \frac{\nu \sigma_f(E)}{\sigma_a(E)}$

Vermijdt energieën tussen 1 eV en 0.1 MeV

Behalve voor marine propulsion systemen, wordt brandstof uit enkel fissile materiaal niet gebruikt. Verrijking en fabricage is te duur!

Ook proliferatie issues



Reactor brandstof

Voornamelijk uranium-238 met een kleine fractie splijtbaar materiaal

Verrijking van 0.7% tot ongeveer 20% splijtbaar materiaal

Definitie: verrijking

$$\tilde{e} = \frac{N_{fi}}{N_{fe} + N_{fi}}$$



$$\eta(E) = \frac{\tilde{e}\nu\sigma_f^{fi}(E) + (1 - \tilde{e})\nu\sigma_f^{fe}(E)}{\tilde{e}\sigma_a^{fi}(E) + (1 - \tilde{e})\sigma_a^{fe}(E)}$$

Boven 1 MeV helpt ^{238}U om $\eta(E)$ te verhogen

Power reactorontwerp

Thermische reactor

Snelle reactor

Intermediate reactoren worden niet gemaakt!

Concentreer neutronen zoveel mogelijk in thermische of snelle energie range

Ontwerp van snelle reactor:

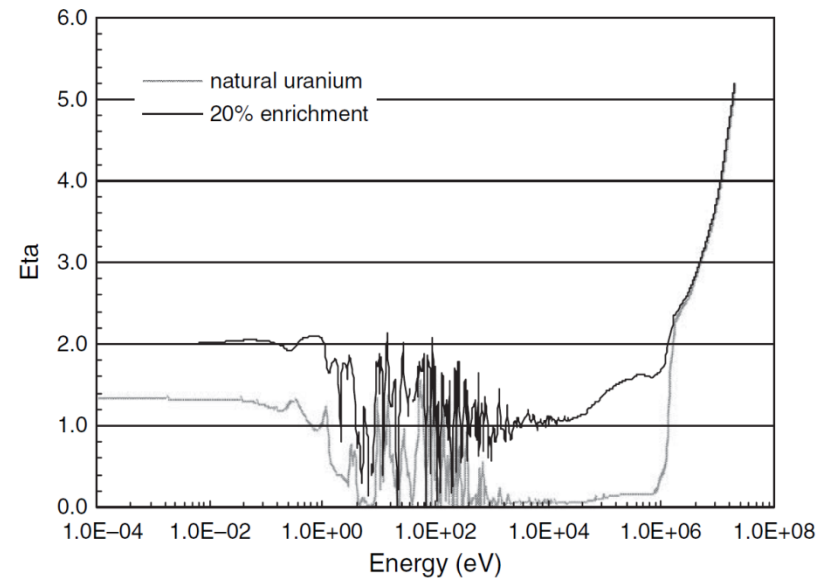
Veel uranium (vermijdt lichte materialen)

Natuurlijk uranium is niet mogelijk ($\varepsilon \approx 10\%$)

Ontwerp van thermische reactor:

Gebruik lichte materialen (moderator)

Natuurlijk uranium mogelijk (grafiet of D_2O)



Neutron moderators

Maak neutronen thermisch in zo min mogelijk botsingen

Vermijdt resonante absorptie in uranium-238

Goede moderator:

Lage A nodig, want enkel dan is slowing down decrement ξ groot genoeg

Grote macroscopische werkzame doorsnede voor verstrooiing $\Sigma_s = N\sigma_s$

Lage thermische absorptie werkzame doorsnede Σ_a

Macroscopic slowing down power $MSDP = \xi \Sigma_s$

Macroscopic slowing
down ratio

$$MR = \frac{\xi \Sigma_s}{\Sigma_a}$$

	Slowing Down Decrement	Slowing Down Power	Slowing Down Ratio
<i>Moderator</i>	ξ	$\xi \Sigma_s$	$\xi \Sigma_s / \Sigma_a (thermal)$
H ₂ O	0.93	1.28	58
D ₂ O	0.51	0.18	21,000
C	0.158	0.056	200

Gassen hebben te lage # dichtheid N

Power reactor met natuurlijk uranium kan gerealiseerd worden met zwaar water moderator (met grafiet is dat moeilijk en met licht water lukt het niet)

Boron-10 heeft thermische absorptie werkzame doorsnede van 4000 b

Het is een 'poisson' en kan gebruikt worden om splijting te stoppen

Energiespectra van neutronen

Energieverdeling van neutronen wordt bepaald door competitie tussen verstrooiings en absorptie reacties

Dichtheidsverdeling $\tilde{n}(E)dE$ is # neutronen/cm³ met energie tussen E en $E+dE$

Er geldt $n = \int_0^\infty \tilde{n}(E)dE = \# \text{ neutronen/cm}^3$

Neutron flux verdeling $\phi(E) = v(E)\tilde{n}(E)$

↑ Neutron snelheid v die hoort bij energie E

Interpretatie $\phi(E)dE$: totale afgelegde weg in 1 s door alle neutronen met energieën tussen E en $E+dE$ en die zich bevinden in 1 cm³

Interpretatie $\Sigma_x(E)$: waarschijnlijkheid/cm pad van een neutron met energie E om een reactie van type x te ondergaan

Vermenigvuldigen van flux met werkzame doorsnede levert $\Sigma_x(E)\phi(E)$

Interpretatie: het gemiddeld aantal botsingen van type x per seconde en per cm³ voor neutronen met energieën tussen E en $E+dE$

Reaction rates

$$\int_0^\infty \Sigma_x(E)\phi(E)dE$$

Verstrooiings, absorptie en fission rates

Reacties en neutron energie

Werkzame doorsnede voor verschillende reacties

$$\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a$$

Totaal: verstrooiing + absorptie



$$\sigma_a = \sigma_\gamma + \sigma_f$$

Absorptie: invangst en gamma emissie + splijting

$$\sigma_s = \sigma_n + \sigma_{n'}$$

Verstrooiing : elastisch + inelastisch

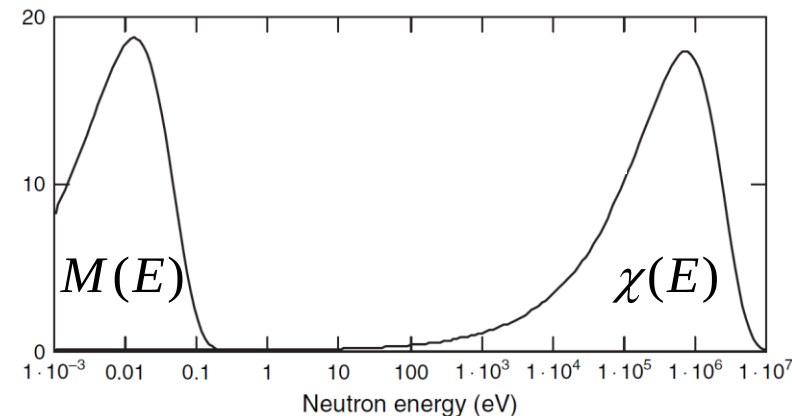
Energieverdeling van neutronen in een reactor

$$\chi(E) = 0.453e^{-1.036E} \sinh(\sqrt{2.29E}), \text{ met } E \text{ in MeV}$$

Er geldt $\int_0^\infty \chi(E) dE = 1$

Na veel botsingen en zonder absorptie zouden neutronen thermisch worden (Maxwell Boltzmann)

$$M(E) = \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}} \sqrt{E} e^{-E/kT} \quad \int_0^\infty M(E) dE = 1$$



Cross secties en neutron flux

Neutronen van *elke* energie veroorzaken splijting in *fissile* materiaal

Uranium-235 is het enige in de natuur voorkomend fissile materiaal

Plutonium-239 en -241, en uranium-233 zijn kunstmatig fissile materiaal

Fertile materiaal

Natuurlijk: uranium-238 en thorium-232

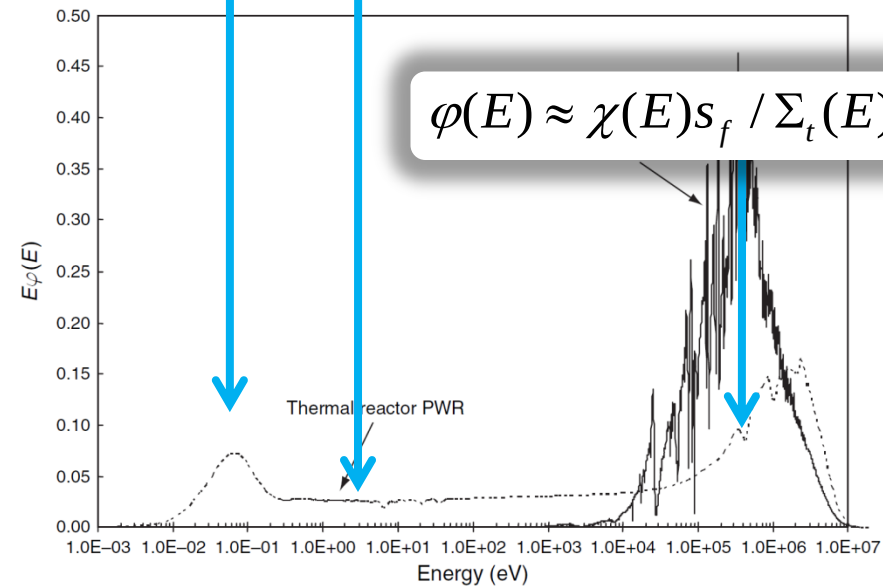
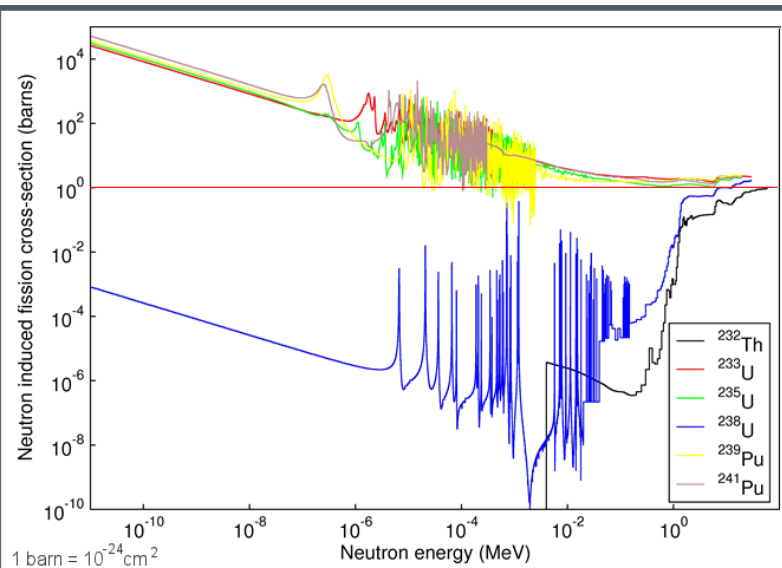
Kunstmatig: plutonium-240

Fission cross sections lijken op elkaar

$$\varphi_M(E) = \frac{1}{(kT)^2} E e^{-E/kT}$$

$$\varphi(E) = \frac{q}{\xi \Sigma_s(E) E}$$

$$\varphi(E) \approx \chi(E) s_f / \Sigma_t(E)$$



Energy Averaged Microscopic Cross Sections (barns)

Nuclide	Thermal Spectrum Cross Sections			Resonance Integrals		Fast (Fission Spectrum) Cross Sections		
	σ_f	σ_a	σ_s	I_f	I_a	σ_f	σ_a	σ_s
¹ ₁ H	0	0.295	47.7	0	0.149	0	3.92×10^{-5}	3.93
² ₁ H	0	5.06×10^{-4}	5.37	0	2.28×10^{-4}	0	5.34×10^{-6}	2.55
¹⁰ ₅ B	0	3409	2.25	0	1722	0	0.491	2.12
¹² ₆ C	0	3.00×10^{-3}	4.81	0	1.53×10^{-3}	0	1.23×10^{-3}	2.36
¹⁶ ₈ O	0	1.69×10^{-4}	4.01	0	8.53×10^{-5}	0	1.20×10^{-2}	2.76
²³ ₁₁ Na	0	0.472	3.09	0	0.310	0	2.34×10^{-4}	3.13
⁵⁶ ₂₆ Fe	0	2.29	11.3	0	1.32	0	9.22×10^{-3}	3.20
⁹¹ ₄₀ Zr	0	0.16	6.45	0	0.746	0	3.35×10^{-3}	5.89
¹³⁵ ₅₄ Xe	0	2.64×10^6	—	0	7.65×10^3	0	7.43×10^{-4}	—
¹⁴⁹ ₆₂ Sm	0	6.15×10^4	—	0	3.49×10^3	0	0.234	—
Nuclide	Thermal Spectrum Cross Sections			Resonance Integrals		Fast (Fission Spectrum) Cross Sections		
	σ_f	σ_a	σ_s	I_f	I_a	σ_f	σ_a	σ_s
¹⁵⁷ ₆₄ Gd	0	1.92×10^5	1422	0	762	0	0.201	6.51
²³² ₉₀ Th	0	6.54	11.8	0	84.9	7.13×10^{-2}	0.155	7.08
²³³ ₉₂ U	464	506	14.2	752	886	1.84	1.89	5.37
²³⁵ ₉₂ U	505	591	15.0	272	404	1.22	1.29	6.33
²³⁸ ₉₂ U	1.05×10^{-5}	2.42	9.37	2×10^{-3}	278	0.304	0.361	7.42
²³⁹ ₉₄ Pu	698	973	8.62	289	474	1.81	1.86	7.42
²⁴⁰ ₉₄ Pu	6.13×10^{-2}	263	1.39	3.74	8452	1.36	1.42	6.38
²⁴¹ ₉₄ Pu	946	1273	11.0	571	740	1.62	1.83	6.24
²⁴² ₉₄ Pu	1.30×10^{-2}	16.6	8.30	0.94	1117	1.14	1.22	6.62

Source: R. J. Perry and C. J. Dean, The WIMS9 Nuclear Data Library, Winfrith Technology Center Report ANSWERS/WIMS/TR.24, Sept. 2004.

Gemiddelde werkzame doorsneden

Resonante werkzame doorsnede gemiddelden

Gemiddeld over 1.0 eV tot 0.1 MeV

Neem voor flux $\varphi(E) \approx 1/E$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Resonante werkzame doorsnede gemiddelden} \\ \text{Gemiddeld over 1.0 eV tot 0.1 MeV} \\ \text{Neem voor flux } \varphi(E) \approx 1/E \end{array} \right\} \bar{\sigma}_{xI} = \int_I \sigma_x(E) \frac{dE}{E} \bigg/ \int_I \frac{dE}{E}$$

We schrijven voor capture en fission

$$\bar{\sigma}_{xI} = I_x \bigg/ \int_I \frac{dE}{E}$$

Resonantie integraal $I_x = \int \sigma_x(E) \frac{dE}{E}$

We vinden

$$\bar{\sigma}_{xI} = 0.0869 I_x$$

(self shielding zit hier nog niet in)

Thermische werkzame doorsnede gemiddelden

Gebruik Maxwell Boltzmann verdeling voor de flux $\varphi(E) \approx \varphi_M(E)$

De maximum waarde van $\varphi_M(E)$ is $E = kT = 8.62 \times 10^{-5} T$ eV

Neutronsnelheid is dan $v = \sqrt{2E/m} = \sqrt{2kT/m} = 128\sqrt{T}$ m/s

Metingen gemaakt bij $T_0 = 293.61$ K $\rightarrow E_0 = 0.0253$ eV, $v_0 = 2200$ m/s

De waarden in de tabel zijn gemiddeld over energieverdeling bij 20° C en bevatten ook bindingseffecten (in moleculen, kristalroosters)

Vermenigvuldiging in oneindig medium

Vermenigvuldigingsfactor k_∞

neutronen door splijting geproduceerd / # neutronen geabsorbeerd

Er geldt $k_\infty = \int_0^\infty \nu \Sigma_f(E) \phi(E) dE / \int_0^\infty \Sigma_a(E) \phi(E) dE$

We schrijven dit als

$$k_\infty = \nu \bar{\Sigma}_f / \bar{\Sigma}_a$$



Brandstof, koelmiddel, moderator, etc.

Enkel splijtbaar
materiaal

We nemen impliciet aan dat alle materialen blootgesteld zijn aan *dezelfde* flux $\phi(E)$
Dat zou enkel zo zijn als alles fijn gemengd is, en als de core oneindig groot

We moeten de verschillen in flux in rekening brengen

Back-up slides

Neutronenbalans

Totaal aantal botsingen van type x per seconde en cm^3 voor neutronen met energieën tussen E en $E+dE$ is $\Sigma_t(E)\varphi(E)$

Elke botsing verwijdert een neutron bij energie E (door absorptie of door verstrooiing naar een andere energie)

Dat is dus een verliesterm

Er komen ook neutronen aan bij energie E door fission of verstrooiing

Bijdrage van fission $\chi(E) = 0.453e^{-1.036E} \sinh(\sqrt{2.29E})$, met E in MeV

Bijdrage van verstrooiing $\int p(E' \rightarrow E)\Sigma_s(E')\varphi(E')dE'$

Balansvergelijking $\Sigma_t(E)\varphi(E) = \underbrace{\int p(E' \rightarrow E)\Sigma_s(E')\varphi(E')dE'}_{\text{aantal dat verstrooit}} + \chi(E)s_f$

We schrijven

$$\Sigma_t(E)\varphi(E) = \int \Sigma_s(E' \rightarrow E)\varphi(E')dE' + \chi(E)s_f$$

We kunnen dit gebruiken om inzicht te krijgen in de energiespectra van neutronen

$$\int_0^{\infty} \chi(E)dE = 1 \quad \uparrow \text{ fission rate}$$

Geval 1: snelle neutronen

We hadden
$$\Sigma_t(E)\phi(E) = \int \Sigma_s(E' \rightarrow E)\phi(E')dE' + \chi(E)s_f$$

Bij de hoogste energie domineert fission $\chi(E)$

We vinden dan
$$\phi(E) \approx \chi(E)s_f / \Sigma_t(E)$$

Dit is het spectrum van snelle neutronen die nog niet gebotst hebben

Dit spectrum degradeert door botsingen met uranium, moderator, etc.

Slowing down density $q(E)$: # neutronen slowing down past E in /s / cm³

Alle neutronen uit splijting die niet geabsorbeerd worden, slown down

Aannamen:

E zo groot dat up-scatter niet voorkomt ($E > 1$ eV)
$$q(E) = -\int_E^\infty \Sigma_a(E')\phi(E')dE' + \int_E^\infty \chi(E)s_f dE'$$

Intermediate range: fission bijdrage verwaarloosbaar ($E < 0.1$ MeV)

$$q(E) = -\int_E^\infty \Sigma_a(E')\phi(E')dE' + s_f$$

$$\int_0^\infty \chi(E)dE = 1$$

Neem afgeleide

$$\frac{d}{dE} q(E) = \Sigma_a(E)\phi(E)$$

Als er geen absorptie is, dan is de slowing down density

$q(E)$ constant

Geval 2: intermediate neutrons

We hadden $\Sigma_t(E)\varphi(E) = \int \Sigma_s(E' \rightarrow E)\varphi(E')dE' + \chi(E)s_f$

We schrijven nu $\Sigma_s(E)\varphi(E) = \int p(E' \rightarrow E)\Sigma_s(E')\varphi(E')dE'$

Neem aan dat één moderator aanwezig is

$$\Sigma_s(E)\varphi(E) = \int_E^{E/\alpha} \frac{1}{(1-\alpha)E'} \Sigma_s(E')\varphi(E')dE' = \frac{C}{E} = \frac{q}{\xi E}$$

De neutronenflux is dan

$$\varphi(E) = \frac{q}{\xi \Sigma_s(E)E}$$

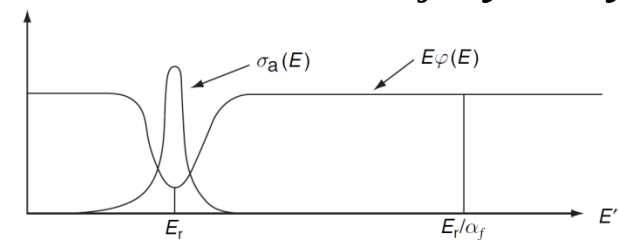
Tussen de resonanties is de werkzame doorsnede zo goed als energie onafhankelijk. We spreken dan van een *one-over-E* flux

Indien we zowel moderator als brandstof hebben $\bar{\xi} = \frac{\xi^f \Sigma_s^f(E) + \xi^m \Sigma_s^m(E)}{\Sigma_s^f(E) + \Sigma_s^m(E)}$

Energy self-shielding: nabij een resonante absorber is de flux niet meer $1/E$

altijd $\xi^f \ll \xi^m$

‘Lumping’ van brandstof (in staven) leidt tot een verdere reductie van absorptieverliezen van neutronen (door self shielding)



Geval 3: thermische neutronen

Thermische range ($E < E_0 = 1$ eV) $\Sigma_t(E)\varphi(E) = \int_0^{E_0} \Sigma_s(E' \rightarrow E)\varphi(E')dE' + s(E)q_0$

Met bronterm $s(E)q_0 = \int_{E_0}^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E)\varphi(E')dE'$

Gebruik $1/E$ flux, corrigeer voor kristalrooster, etc.

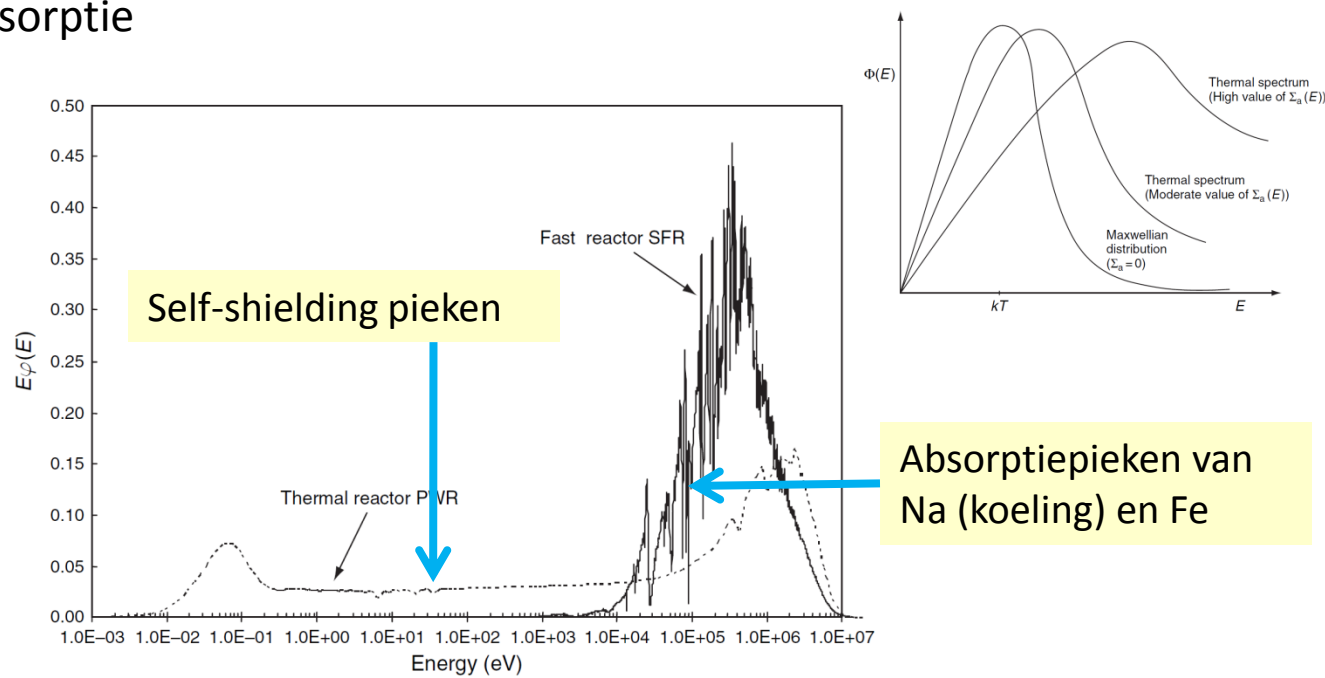
In zuiver verstrooiend materiaal (geen absorptie) is de rate constant, neutronen botsen eeuwig, en het spectrum wordt Maxwell Boltzmann

$$\varphi_M(E) = \frac{1}{(kT)^2} E e^{-E/kT}$$

In werkelijkheid is er absorptie

Spectra $E\varphi(E)$ van snelle en thermische reactoren

Als we $\varphi(E)$ geplot hadden, dan was de thermische piek miljoenen keren hoger dan die van splijting



Energy averaged reaction rates

Bedrijven van een kettingreactie hangt af van de neutron energieverdeling

Die wordt bepaald door de materialen die in de reactor aanwezig zijn

We moeten data (werkzame doorsneden) middelen over neutron energieën

Reaction rate $\int_0^{\infty} \Sigma_x(E) \phi(E) dE = \bar{\Sigma}_x \phi$

Werkzame doorsnede $\bar{\Sigma}_x = \int_0^{\infty} \Sigma_x(E) \phi(E) dE / \int_0^{\infty} \phi(E) dE$

Flux (geïntegreerd over energie) $\phi = \int_0^{\infty} \phi(E) dE$

Vanwege $\Sigma_x = N \sigma_x$ kan e.e.a. ook met microscopische werkzame doorsneden

$$\int_0^{\infty} \sigma_x(E) \phi(E) dE = \bar{\sigma}_x \phi \quad \bar{\sigma}_x = \int_0^{\infty} \sigma_x(E) \phi(E) dE / \int_0^{\infty} \phi(E) dE$$

En de flux kan geschreven worden als $\phi = \bar{v} n = \int_0^{\infty} v(E) \tilde{n}(E) dE$

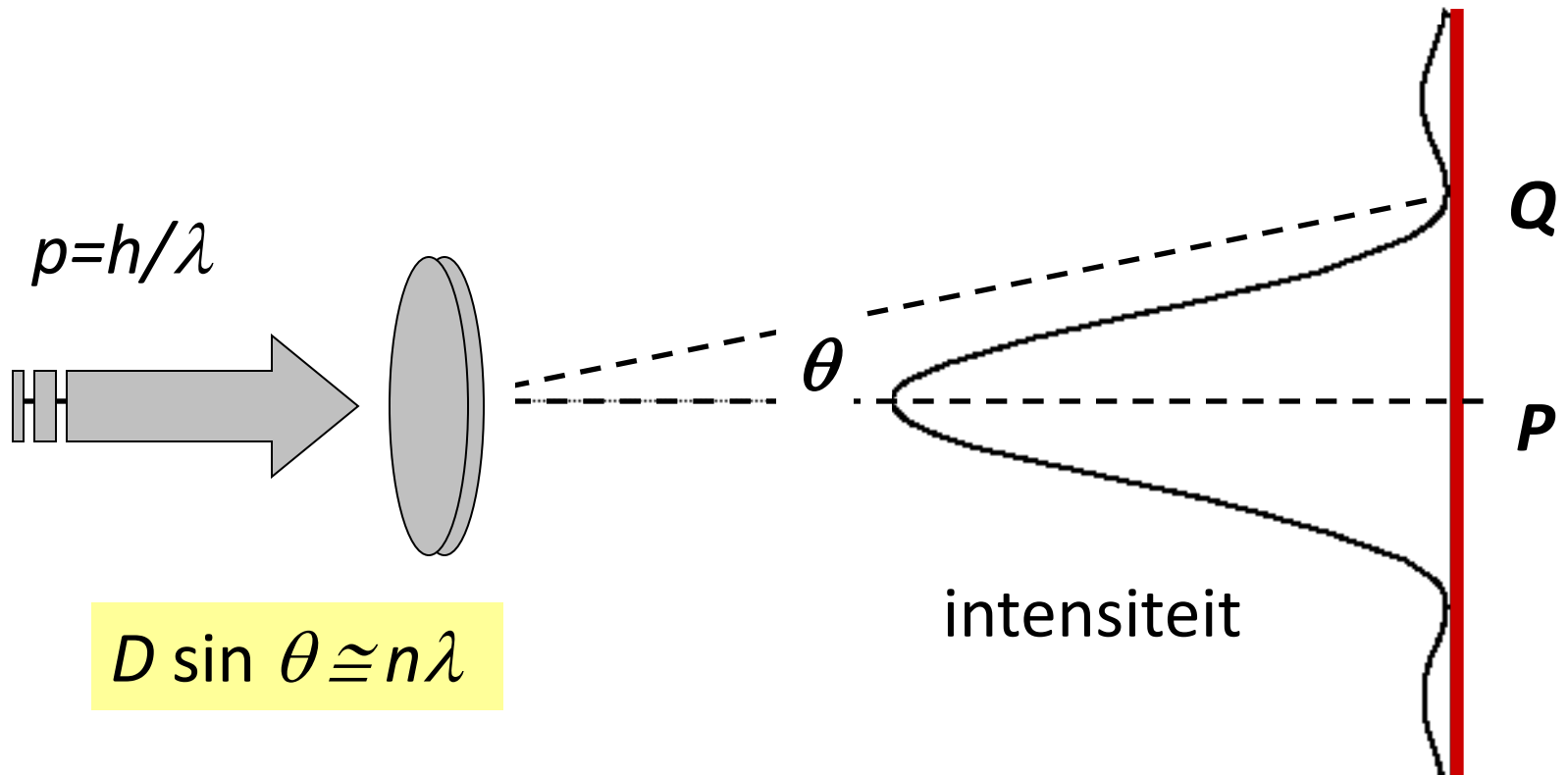
Gemiddelde snelheid $\bar{v} = \int_0^{\infty} v(E) \tilde{n}(E) dE / \int_0^{\infty} \tilde{n}(E) dE$

Partities zijn ook mogelijk $\int \sigma_x \phi(E) dE = \int_T \sigma_x \phi(E) dE + \int_I \sigma_x \phi(E) dE + \int_F \sigma_x \phi(E) dE$

 $\bar{\sigma}_x \phi = \bar{\sigma}_{xT} \phi_T + \bar{\sigma}_{xI} \phi_I + \bar{\sigma}_{xF} \phi_F$

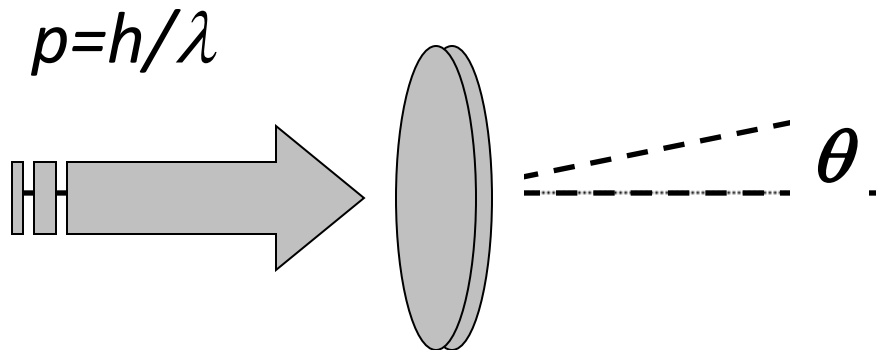
Diffractieve verstrooiing

Vergelijk met diffractie van
licht aan een zwarte schijf



Diffractieve verstrooiing

Vergelijk met diffractie van licht aan een zwarte schijf



$$D \sin \theta \cong n\lambda$$

Opgave: Diameter kern?

