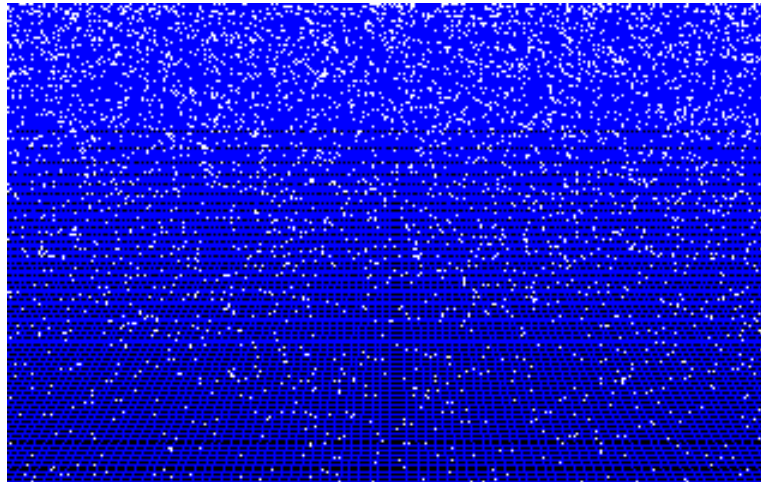


Kernenergie

HOVO cursus



Jo van den Brand en Gideon Koekoek

www.nikhef.nl/~jo/energie

8 november 2011

Inhoud

- **Jo van den Brand**

- Email: jo@nikhef.nl URL: www.nikhef.nl/~jo/energie
- 0620 539 484 / 020 598 7900, Kamer T2.69

- **Gideon Koekoek**

- Email: gkoekoek@nikhef.nl

- **Dictaat**

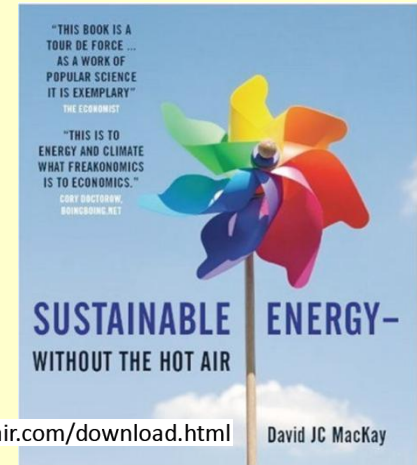
- Werk in uitvoering

- **Boeken**

- Energy Science, John Andrews & Nick Jelley
- Sustainable Energy – without the hot air, David JC MacKay
- Elmer E. Lewis, Fundamentals of Nuclear Reactor Physics

- **Inhoud van de cursus**

- Week 1 Motivatie, exponentiële groei, CO2 toename, broeikasteffect, klimaat
- Week 2 Energieverbruik: transport, verwarming, koeling, verlichting, landbouw, veeteelt, fabricage
- Week 3 Energie, thermodynamica
- Week 4 Entropie, enthalpie, Carnot, Otto, Rankine processen, informatie
- Week 5 Kernenergie: kernfysica, splijting
- Week 6 Kernenergie: reactorfysica I
- Week 7 Kernenergie: reactorfysica II
- Week 8 Kernenergie: maatschappelijke discussie (risico's, afval), kernfusie
- Week 9 Energiebronnen: fossiele brandstoffen (olie, gas, kolen), wind, zon (PV, thermisch, biomassa), waterkracht, geothermisch
- Week 10 Energie: scenario's voor Nederland, wereld, fysieke mogelijkheden, politiek, ethische vragen, economische aspecten



Gratis te downloaden

Vier-factoren formule

Vermenigvuldigingsfactor k_{∞} kan inzichtelijk gemaakt worden

Er geldt
$$k_{\infty} = \frac{\text{neutron productie door splijting in generatie } i}{\text{neutron absorptie in generatie } i-1}$$

Fast fission factor
$$\varepsilon = \frac{\# \text{ snelle neutronen geproduceerd door alle splijtingen}}{\# \text{ snelle neutronen geproduceerd door thermische splijtingen}}$$

Resonance escape probability
$$p = \frac{\# \text{ neutronen die thermische energie bereiken}}{\# \text{ snelle neutronen die met slow down beginnen}}$$

Thermal utilization factor
$$f = \frac{\# \text{ thermische neutronen geabsorbeerd in fuel}}{\# \text{ thermische neutronen geabsorbeerd in alles}}$$

Reproduction factor
$$\eta_T = \frac{\# \text{ snelle neutronen geproduceerd in thermische splijting}}{\# \text{ thermische neutronen geabsorbeerd in de fuel}}$$

Vier-factoren formule

$$k_{\infty} = \varepsilon p f \eta_T$$

F	$n \rightarrow (1) \rightarrow$	$\rightarrow \varepsilon n$
	$\uparrow \varepsilon p f \eta_T n$	$\downarrow$
I	$(4) \leftarrow \varepsilon (1-p)n$	$\leftarrow (2)$
	$\uparrow$	$\downarrow$
T	$\leftarrow \leftarrow (3) \leftarrow \varepsilon p f n$	$\leftarrow \varepsilon p n \rightarrow \varepsilon p (1-f)n$
	$\uparrow$	$\downarrow$
	Fuel	Moderator

Effectieve vermenigvuldigingsfactor

Effectieve vermenigvuldigingsfactor

$$k_{\text{eff}} = \frac{\text{neutron production from fission in one generation}}{\text{neutron absorption in the preceding generation} + \text{neutron leakage in the preceding generation}}$$

$$k_{\text{eff}} = k_{\infty} \mathcal{L}_f \mathcal{L}_t$$

Fast non-leakage probability

$$\mathcal{L}_f = \frac{\text{number of fast neutrons that do not leak from reactor}}{\text{number of fast neutrons produced by all fissions}}$$

Thermal non-leakage probability

$$\mathcal{L}_t = \frac{\text{number of thermal neutrons that do not leak from reactor}}{\text{number of neutrons that reach thermal energies}}$$

Totale “non-leakage” waarschijnlijkheid hangt af van temperatuur van koelmiddel via een negatieve temperatuure coefficient

Als temperatuur stijgt, dan zet het koelmiddel uit. Dichtheid van de moderator wordt kleiner; neutronen leggen grotere afstand af tijdens slow-down.

Zes-factoren formule

$$k_{\text{eff}} = \epsilon \mathcal{L}_f p \mathcal{L}_t f \eta$$

Neutron life cycle in thermische reactor

Representative Four Factor and k_{∞} Values for Thermal Reactors

	<i>PWR Pressurized-H₂O Reactor</i>	<i>BWR Boiling-H₂O Reactor</i>	<i>PHWR CANDU-D₂O Reactor</i>	<i>HTGR C-Moderated Reactor</i>
ε	1.27	1.28	1.08	1.20
p	0.63	0.63	0.84	0.62
f	0.94	0.94	0.97	0.98
η_T	1.89	1.89	1.31	2.02
k_{∞}^a	1.41	1.40	1.12	1.47

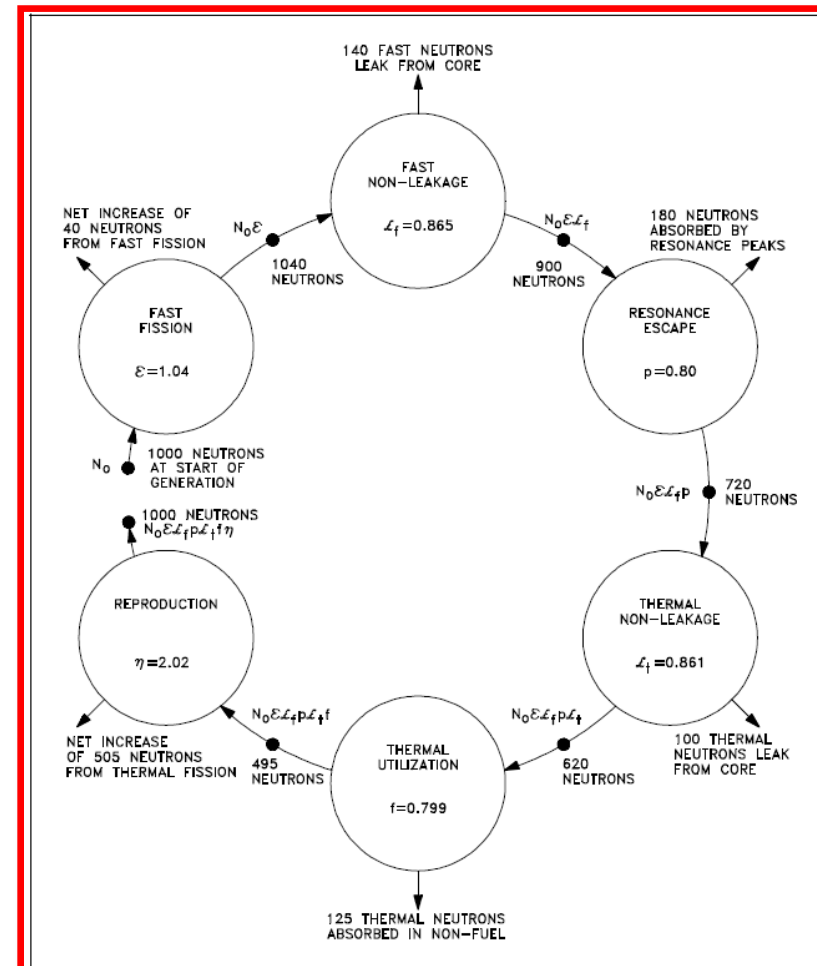
^aFresh fuel without neutron poisons.

Source: Data courtesy of W. S. Yang, Argonne National Laboratory.

Verrijking beïnvloedt
thermal utilization f
reproduction factor η
resonance escape probability p

Cyclus in een snelle kweekreactor is
geheel anders

Energieverlies wordt geminimaliseerd
en bijna alle splijtingen vinden plaats
door snelle neutronen



Fast fission factor

Fast fission factor $\varepsilon = \frac{\text{\# snelle neutronen geproduceerd door alle splijtingen}}{\text{\# snelle neutronen geproduceerd door thermische splijtingen}}$

Er geldt

$$\varepsilon = \frac{\int_T \nu \Sigma_f^f(E) \phi_f(E) dE + \int_F \nu \Sigma_f^f(E) \phi_f(E) dE}{\int_T \nu \Sigma_f^f(E) \phi_f(E) dE} = 1 + \underbrace{\frac{\int_F \nu \Sigma_f^f(E) \phi_f(E) dE}{\int_T \nu \Sigma_f^f(E) \phi_f(E) dE}}$$

Varieert tussen 0.02 en 0.30

Afhankelijk van

Moderator materiaal

Verrijkingsgraad

Resonance escape probability

We hadden
$$p = \frac{\# \text{ neutronen die thermische energie bereiken}}{\# \text{ snelle neutronen die met slow down beginnen}}$$

Alle snelle neutronen die downward scatteren worden geabsorbeerd
 In I-range door resonante capture door fuel
 In T-range door fuel en moderator

Er geldt
$$p = \frac{V_f \int_T \Sigma_a^f(E) \phi_f(E) dE + V_m \int_T \Sigma_a^m(E) \phi_m(E) dE}{V_f \left[\int_T \Sigma_a^f(E) \phi_f(E) dE + \int_I \Sigma_a^f(E) \phi_f(E) dE \right] + V_m \int_T \Sigma_a^m(E) \phi_m(E) dE}$$

Schrijf als
$$p = 1 - \frac{V_f \int_I \Sigma_a^f(E) \phi_f(E) dE}{V_f \left[\int_T \Sigma_a^f(E) \phi_f(E) dE + \int_I \Sigma_a^f(E) \phi_f(E) dE \right] + V_m \int_T \Sigma_a^m(E) \phi_m(E) dE}$$

= Totale absorptie = Vq met q de slowing down dichtheid

Twee volume model $q = \frac{V_f}{V} q_f + \frac{V_m}{V} q_m \rightarrow Vq \approx V_m q_m$ Verwaarloos slowdown in fuel

Dan geldt
$$p = 1 - \frac{V_f}{V_m q_m} \int_I \Sigma_a^{fe}(E) \phi_f(E) dE$$
 Capture fertile materiaal dominant
 $\Sigma_a^f(E) \rightarrow \Sigma_a^{fe}(E)$

Resonance escape probability

We hadden
$$p = 1 - \frac{V_f}{V_m q_m} \int_I \Sigma_a^{fe}(E) \phi_f(E) dE$$

In I-range zijn moderatoren zuivere verstrooiers

Er is dan een relatie tussen flux en slowing down density

Als $\Sigma_s^m(E) = \text{constant}$, dan is de flux $1/E$

Er geldt $q_m = \xi^m \Sigma_s^m E \phi_m(E)$

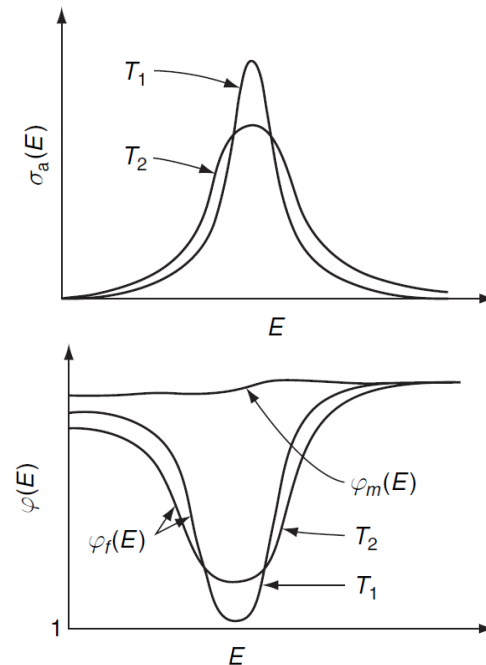
We vinden
$$p = 1 - \frac{V_f}{V_m \xi^m \Sigma_s^m E \phi_m(E)} \int_I \Sigma_a^{fe}(E') \phi_f(E') dE'$$

Herschrijf als
$$p = 1 - \frac{V_f}{V_m \xi^m \Sigma_s^m} I, \text{ met } I = \int_I \frac{\sigma_a^{fe}(E) \phi_f(E)}{E \phi(E)} dE$$

Voor 1 resonantie
$$p_i = \exp\left(-\frac{V_f N_{fe}}{V_m \xi^m \Sigma_s^m} I_i\right)$$

Voor T resonanties
$$p = p_1 p_2 p_3 \cdots p_i \cdots p_{T-1} p_T$$

Dan geldt
$$p = \exp\left(-\frac{V_f N_{fe}}{V_m \xi^m \Sigma_s^m} I\right), \text{ met } I = \sum_{i=1}^T I_i$$



Resonance Integrals for Fuel Rods

$$I = 2.95 + 25.8 \sqrt{4/\rho D} \text{ for U metal}$$

$$I = 4.45 + 26.6 \sqrt{4/\rho D} \text{ for UO}_2$$

Fuel rods $0.2 < D < 3.5$ cm
 Integraal I (absorptie) neemt af
 als D toeneemt!

Self shielding depresses $\phi_f(E) / \phi_m(E)$

Thermal utilization factor

Thermal utilization factor $f = \frac{\# \text{ thermische neutronen geabsorbeerd in fuel}}{\# \text{ thermische neutronen geabsorbeerd in alles}}$

Alle thermische neutronen
worden in fuel of moderator
geabsorbeerd

$$f = \frac{V_f \int_T \Sigma_a^f(E) \varphi_f(E) dE}{V_f \int_T \Sigma_a^f(E) \varphi_f(E) dE + V_m \int_T \Sigma_a^m(E) \varphi_m(E) dE}$$

Definieer $\bar{\varphi}_{fT} = \int_T \varphi_f(E) dE$, en $\bar{\varphi}_{mT} = \int_T \varphi_m(E) dE$ (ruimtelijk gemiddelde thermische fluxen)

Dan $\bar{\Sigma}_{xT}^f(E) = \bar{\varphi}_{fT}^{-1} \int_T \Sigma_x^f(E) \varphi_f(E) dE$, en $\bar{\Sigma}_{xT}^m(E) = \bar{\varphi}_{mT}^{-1} \int_T \Sigma_x^m(E) \varphi_m(E) dE$

We vinden

$$f = \frac{1}{1 + \zeta \left(V_m \bar{\Sigma}_{aT}^m / V_f \bar{\Sigma}_{aT}^f \right)}$$

Met thermal disadvantage factor $\zeta = \bar{\varphi}_{mT} / \bar{\varphi}_{fT}$

Hoe meer neutronen gecaptured worden in de moderator (vanwege de grotere flux daar), hoe minder er splijting kunnen veroorzaken in de fuel

Thermal utilization factor

Thermal utilization factor voor een *homogene* reactor

$$f = \frac{\text{rate of absorption of thermal neutrons by the fuel}}{\text{rate of absorption of thermal neutrons by all reactor materials}}$$

$$f = \frac{\sum_a^U \phi^U V^U}{\sum_a^U \phi^U V^U + \sum_a^m \phi^m V^m + \sum_a^p \phi^p V^p}$$

U, m en p voor uranium, moderator en poison

$$f = \frac{\sum_a^U}{\sum_a^U + \sum_a^m + \sum_a^p}$$

Homogene reactor (overal dezelfde flux en volume)

Example:

Calculate the thermal utilization factor for a homogeneous reactor. The macroscopic absorption cross section of the fuel is 0.3020 cm^{-1} , the macroscopic absorption cross section of the moderator is 0.0104 cm^{-1} , and the macroscopic absorption cross section of the poison is 0.0118 cm^{-1} .

Solution:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\sum_a^U}{\sum_a^U + \sum_a^m + \sum_a^p} \\ &= \frac{0.3020 \text{ cm}^{-1}}{0.3020 \text{ cm}^{-1} + 0.0104 \text{ cm}^{-1} + 0.0118 \text{ cm}^{-1}} \\ &= 0.932 \end{aligned}$$

An increase in moderator temperature will have the following effects.

- Increase the thermal utilization factor
- Decrease resonance escape probability
- Decrease fast non-leakage probability
- Decrease thermal non-leakage probability

Reproduction factor

Reproduction factor $\eta_T = \frac{\# \text{ snelle neutronen geproduceerd in thermische splijting}}{\# \text{ thermische neutronen geabsorbeerd in de fuel}}$

Er geldt
$$\eta_T = \frac{\int_T \nu \Sigma_f^f(E) \phi_f(E) dE}{\int_T \Sigma_a^f(E) \phi_f(E) dE} \rightarrow \eta_T = \frac{\nu \bar{\Sigma}_f^f}{\bar{\Sigma}_a^f}$$

$$\eta = \frac{\Sigma_f^U \phi^U \nu}{\Sigma^U \phi^U} \quad \text{fission reaction rate } (\Sigma_f^U \phi^U) \quad \text{average number of neutrons produced per fission } (\nu)$$

Example:

Calculate the reproduction factor for a reactor that uses 10% enriched uranium fuel. The microscopic absorption cross section for uranium-235 is 694 barns. The cross section for uranium-238 is 2.71 barns. The microscopic fission cross section for uranium-235 is 582 barns. The atom density of uranium-235 is 4.83×10^{21} atoms/cm³. The atom density of uranium-238 is 4.35×10^{22} atoms/cm³. ν is 2.42.

$$\eta = \frac{N^{U-235} \sigma_f^{U-235} \nu^{U-235}}{N^{U-235} \sigma_a^{U-235} + N^{U-238} \sigma_a^{U-238}}$$

When core contains ²³⁵U and ²³⁸U

Solution:

Use Equation (3-2) to calculate the reproduction factor.

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{N^{U-235} \sigma_f^{U-235} \nu^{U-235}}{N^{U-235} \sigma_a^{U-235} + N^{U-238} \sigma_a^{U-238}} \\ &= \frac{\left(4.83 \times 10^{21} \frac{\text{atoms}}{\text{cm}^3}\right) (582 \times 10^{-24} \text{ cm}^2) (2.42)}{\left(4.83 \times 10^{21} \frac{\text{atoms}}{\text{cm}^3}\right) (694 \times 10^{-24} \text{ cm}^2) + \left(4.35 \times 10^{22} \frac{\text{atoms}}{\text{cm}^3}\right) (2.71 \times 10^{-24} \text{ cm}^2)} \\ &= 1.96 \end{aligned}$$

TABLE 1
Average Number of Neutrons Liberated in Fission

Fissile Nucleus	Thermal Neutrons		Fast Neutrons	
	ν	η	ν	η
Uranium-233	2.49	2.29	2.58	2.40
Uranium-235	2.42	2.07	2.51	2.35
Plutonium-239	2.93	2.15	3.04	2.90

Voorbeeld: UO_2 PWR

Druk four factors uit in termen van verrijking en verhouding moderator / fuel

Er geldt $\bar{\sigma}_{aT}^f = \tilde{e} \bar{\sigma}_{aT}^{fi} + (1 - \tilde{e}) \bar{\sigma}_{aT}^{fe}$ $\longrightarrow$ $\eta_T = \eta_T^{fi} / \left[1 + (1 - \tilde{e}) \bar{\sigma}_{aT}^{fe} / \tilde{e} \bar{\sigma}_{aT}^{fi} \right]$

Resonance escape probability is functie van $\tilde{e}$ en $V_m N_m / V_f N_f$

Omdat $N_{fe} = (1 - \tilde{e}) N_f$ $\longrightarrow$ $p = \exp \left(- \frac{(1 - \tilde{e})}{(V_m N_m / V_f N_f)} \frac{I}{\xi \sigma_s^m} \right)$, met $\Sigma_s^m = N_s \sigma_s^m$

Thermal utilization factor $f = \frac{1}{1 + \zeta (V_m N_m / V_f N_f) (\bar{\sigma}_{aT}^m / \bar{\sigma}_{aT}^f)}$

Fast fission factor $\epsilon = 1 + \frac{(1 - \tilde{e}) \nu^{fe} \bar{\sigma}_{fF}^{fe}}{\tilde{e} \nu^{fi} \bar{\sigma}_{fT}^{fi}}$

Invloed van toename in $V_m N_m / V_f N_f$

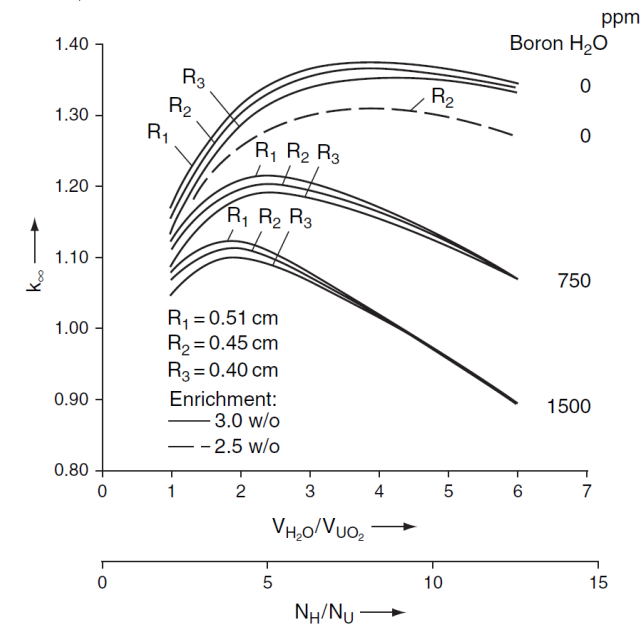
Toename resonance escape probability

Afname thermal utilization (absorptie in moderator)

Er is dus een optimale verhouding!

Grotere rod diameter geeft hogere multiplication

Negatieve feedback met temperatuur (stabiliteit)



Reactor kinetics

Reactor kinetics

Aannamen:

Neutron distributies en werkzame doorsneden gemiddeld over energie
Verwaarloos neutron leakage uit eindige core

Definities:

Totaal aantal neutronen op tijd t is $n(t)$

Gemiddelde neutron snelheid is $\bar{v}$

Energie-gemiddelde werkzame doorsnede voor reactie van type x is Σ_x

Infinite medium non-multiplying system

Balansvergelijking

$$\frac{dn(t)}{dt} = S(t) - \Sigma_a \bar{v} n(t)$$

Gemiddelde levensduur van neutronen

Neem aan $n(0)$ neutronen op $t = 0$

Neem aan dat er geen verdere neutronen geproduceerd worden, dus $S(t) = 0$

neutronen geabsorbeerd / s

neutronen geproduceerd / s

$$\frac{dn(t)}{dt} = -\Sigma_a \bar{v} n(t) \rightarrow n(t) = n(0)e^{-t/l_\infty}, \text{ met } l_\infty = 1/\bar{v}\Sigma_a$$

En dus

$$\bar{t} \equiv \frac{\int_0^\infty t n(t) dt}{\int_0^\infty n(t) dt} = 1/\bar{v}\Sigma_a = l_\infty \quad \longrightarrow \quad n(t) = l_\infty S_0 \left[1 - e^{-t/l_\infty} \right], \text{ met } n(0) = 0$$

Infinite medium multiplying systems

Aannamen:

Er is ook splijtbaar materiaal aanwezig

Verwaarloos neutron leakage uit eindige core

Infinite medium multiplying system

Balansvergelijking

Infinite medium multiplication $k_{\infty} = \nu \Sigma_f / \Sigma_a$

Herschrijf tot
$$\frac{dn(t)}{dt} = S(t) + \frac{(k_{\infty} - 1)}{l_{\infty}} n(t)$$

Aanname: enkel neutronen van splijting ($S = 0$)

Criticality voor $k_{\infty} = 1$ (dan stabiele populatie)

We onderscheiden

Subcritical $k_{\infty} < 1$

Critical $k_{\infty} = 1$

Supercritical $k_{\infty} > 1$

$$\frac{dn(t)}{dt} = S(t) + \nu \Sigma_f \bar{v} n(t) - \Sigma_a \bar{v} n(t)$$

neutronen geabsorbeerd / s



neutronen van splijting / s

neutronen geproduceerd / s

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{(k_{\infty} - 1)}{l_{\infty}} n(t)$$

Finite multiplying systems

Aannamen:

- Er is ook splijtbaar materiaal aanwezig
- Er is neutron leakage uit eindige core

Finite multiplying system

Balansvergelijking

Notatie: leakage evenredig met aantal absorberd

Neutronen

- Geboren in source S of in splijting
- Eindigen door absorptie of leakage

Waarschijnlijkheid op (non)leakage

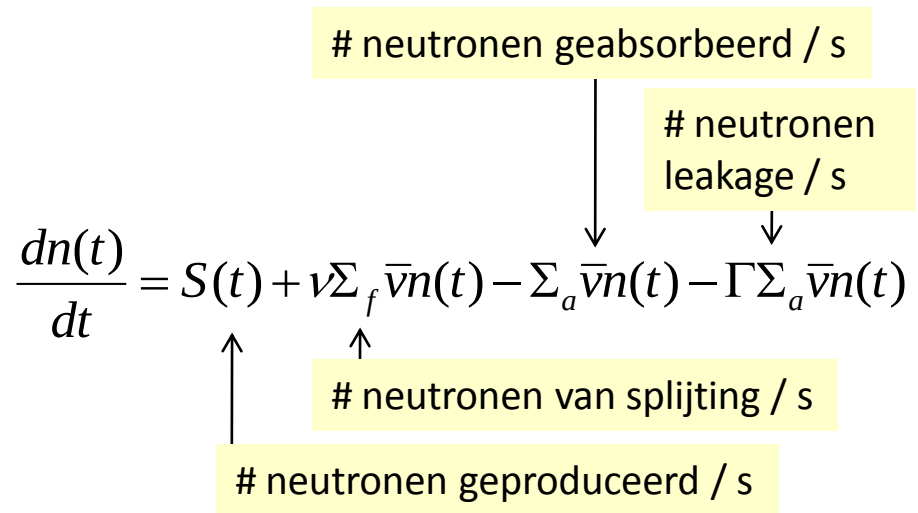
$$P_L = \frac{\Gamma \Sigma_a \bar{v}n}{\Sigma_a \bar{v}n + \Gamma \Sigma_a \bar{v}n} = \frac{\Gamma}{1 + \Gamma} \rightarrow P_{NL} = 1 - P_L = \frac{1}{1 + \Gamma}$$

We verwachten dat Γ toeneemt met grootte van reactor

We schrijven
$$P_{NL} \frac{dn(t)}{dt} = P_{NL} S(t) + P_{NL} (\nu \Sigma_f) \bar{v}n(t) - \Sigma_a \bar{v}n(t)$$

$$\Rightarrow P_{NL} \frac{dn(t)}{dt} = P_{NL} S(t) + \frac{(P_{NL} k_{\infty} - 1)}{l_{\infty}} n(t) \Rightarrow \frac{dn(t)}{dt} = S(t) + \frac{(k - 1)}{l} n(t)$$

Analoog aan infinite medium, met notatie $k = P_{NL} k_{\infty}$, en $l = P_{NL} l_{\infty}$



Gedrag multiplying systems

Criticality analyse:

Zet bronterm $S(t) = 0$

Verwaarloos delayed neutrons

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{(k-1)}{l} n(t)$$

Indien $n(0) > 0$

$$n(t) = n(0)e^{\frac{(k-1)}{l}t}$$

Een systeem is critical als

Er een tijdonafhankelijke kettingreactie gaande is
in afwezigheid van een bron $S(t)$



$$k = 1$$

We onderscheiden weer

Subcritical $k_{\infty} < 1$

Critical $k_{\infty} = 1$

Supercritical $k_{\infty} > 1$

Met bron $n(0) = 0$, en $S(t) = S_0$


$$n(t) = \frac{lS_0}{(k-1)} \left\{ e^{\frac{(k-1)}{l}t} - 1 \right\}$$

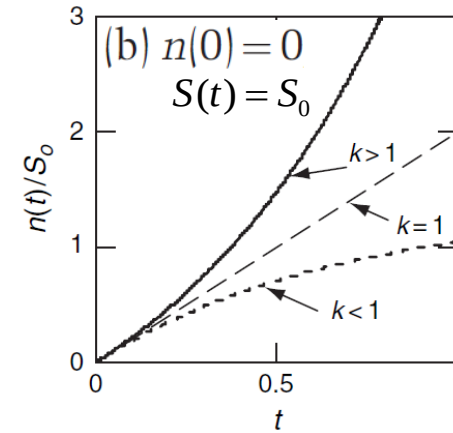
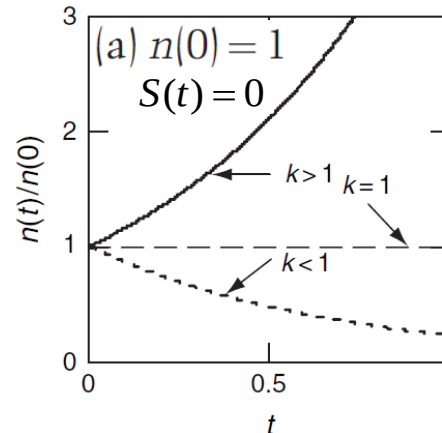
$$k < 1 \Rightarrow n(\infty) = \frac{lS_0}{(1-k)}$$

$$k \rightarrow 1 \Rightarrow n(t) = S_0 t$$

Neutronen populaties

(a) zonder bron

(b) met bron



Zeer snelle tijdvariaties: 10^{-8} tot 10^{-4} s

Vertraagde neutronen

Meer dan 99% van alle splijtingsneutronen worden *instantaan* geproduceerd

Een kleine fractie β komt van het verval van splijtingsproducten

We onderscheiden

Er geldt
$$\beta = \sum_{i=1}^6 \beta_i$$

Gemiddelde halfwaardetijd $t_{1/2} = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^6 \beta_i t_{i1/2}$ }
$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^6 \beta_i \frac{1}{\lambda_i}$$

Verder $t_{i1/2} = 0.693 / \lambda_i$

Prompt neutron levensduur l

Delayed neutron levensduur $l_d = l + t_{1/2} / 0.693 = l + 1 / \lambda$

Gemiddelde neutron levensduur

$$\bar{l} = (1 - \beta)l + \beta l_d = l + \beta / \lambda$$

Bijdrage van delayed neutronen domineert de gemiddelde neutron levensduur, want $\beta / \lambda \gg l$

We kunnen niet eenvoudig l door $\bar{l}$ vervangen in uitdrukkingen

Approximate Half-life (sec)	Delayed Neutron Fraction		
	U^{233}	U^{235}	Pu^{239}
56	0.00023	0.00021	0.00007
23	0.00078	0.00142	0.00063
6.2	0.00064	0.00128	0.00044
2.3	0.00074	0.00257	0.00069
0.61	0.00014	0.00075	0.00018
0.23	0.00008	0.00027	0.00009
Total delayed fraction	0.00261	0.00650	0.00210
Total neutrons/fission	2.50	2.43	2.90

Vertraagde neutronen: dynamica

Kinetics equations

$$\frac{dn(t)}{dt} = S(t) + (1-\beta)\nu\Sigma_f \bar{v}n(t) + \sum_i \lambda_i C_i(t) - \Sigma_a \bar{v}n(t) - \Gamma\Sigma_a \bar{v}n(t)$$

Diagram annotations for the kinetics equation:

- $S(t)$: # neutronen geproduceerd / s
- $(1-\beta)\nu\Sigma_f \bar{v}n(t)$: # neutronen van splijting / s
- $\sum_i \lambda_i C_i(t)$: # delayed neutronen / s
- $\Sigma_a \bar{v}n(t)$: # neutronen geabsorbeerd / s
- $\Gamma\Sigma_a \bar{v}n(t)$: # neutronen leakage / s

Precursor concentraties

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \beta_i \nu \Sigma_f \bar{v} n(t) - \lambda_i C_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

Diagram annotations for the precursor equation:

- $\beta_i \nu \Sigma_f \bar{v} n(t)$: # precursors geproduceerd / s
- $\lambda_i C_i(t)$: # precursors verval / s

Neutron kinetics equations herschrijven als

$$\frac{dn(t)}{dt} = S(t) + \frac{1}{l} [(1-\beta)k - 1] n(t) + \sum_i \lambda_i C_i(t)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \beta_i \frac{k}{l} n(t) - \lambda_i C_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

Steady-state oplossing:

$$0 = S_0 + \frac{(k-1)}{l} n$$

Dus $k = 1$ als $S_0 = 0$

Reactiviteit

Definitie van reactiviteit $\rho \equiv \frac{k-1}{k}$

We onderscheiden weer

Subcritical $\rho < 0$

Critical $\rho = 0$

Supercritical $\rho > 0$

Definitie: prompt generation time $\Lambda \equiv l / k$

Neutron kinetics equations herschrijven als

Meestal $\lambda_i \Lambda / \beta_i \ll 1$

Dan geldt $C_i \gg n$

Aantal splijtingsproducten dat neutronen uitzendt is veel groter dan het aantal neutronen

Stapverandering in reactiviteit $\pm 0.10\beta$

Neem aan $\Lambda = 50 \times 10^{-6}$ s

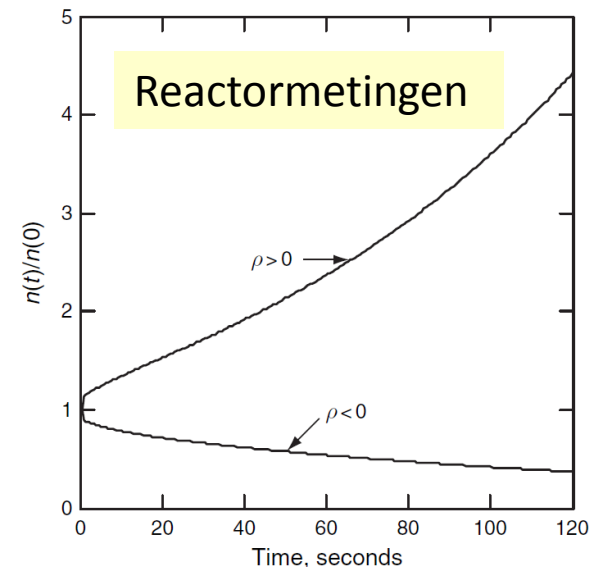
Levensduur van de splijtingsproducten die neutronen uitzenden bepalen de tijd response

Asymptotisch geldt $n(t) \approx A_1 e^{t/T} \approx A_1 e^{(\rho\lambda)t/\beta}$

Reactor period T

$$\frac{dn(t)}{dt} = S(t) + \frac{(\rho - \beta)}{\Lambda} n(t) + \sum_i \lambda_i C_i(t)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, 6$$



Reactor periode

Prompt critical conditie $\rho = \beta$

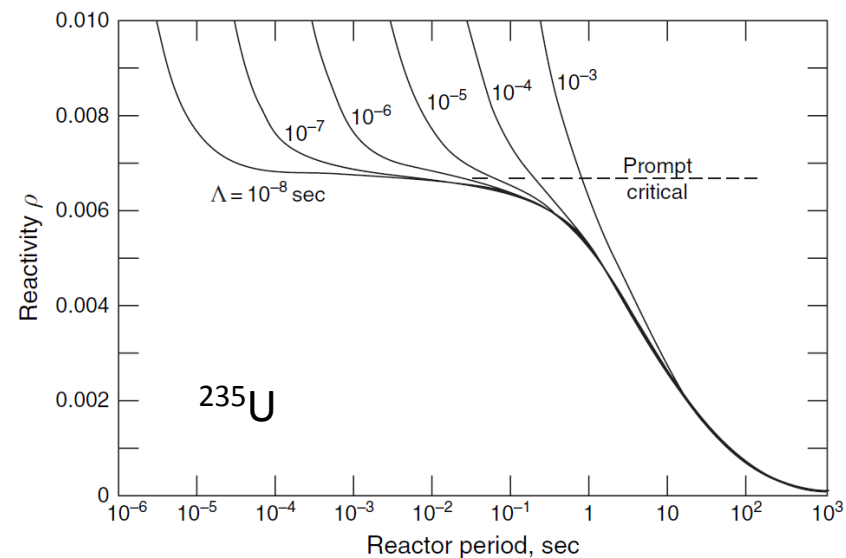
Voor $\rho > \beta$ is kettingreactie mogelijk
zonder delayed neutronen!

Prompt critical niet benaderen!

Reactor kan niet sneller uit dan in 56 s

Voor kleine reactivities $T \approx \beta / (\rho \lambda)$

Vertraagde neutronen maken de dienst uit



Diffusie van neutronen

Diffusie van neutronen

Tot nu toe hebben we globale neutronendiffusie met P_{NL} gekarakteriseerd

Diffusievergelijking nodig

Verband tussen reactorafmetingen, vorm en criticality

Ruimtelijke flux distributies in power reactoren

Aannamen

Een energie-groep model

Neutron flux en werkzame doorsneden zijn al gemiddeld over energie

Diffusievergelijking en randvoorwaarden opstellen

Eenvoudige 1D gevallen

Eindige cilindersymmetrische reactor core

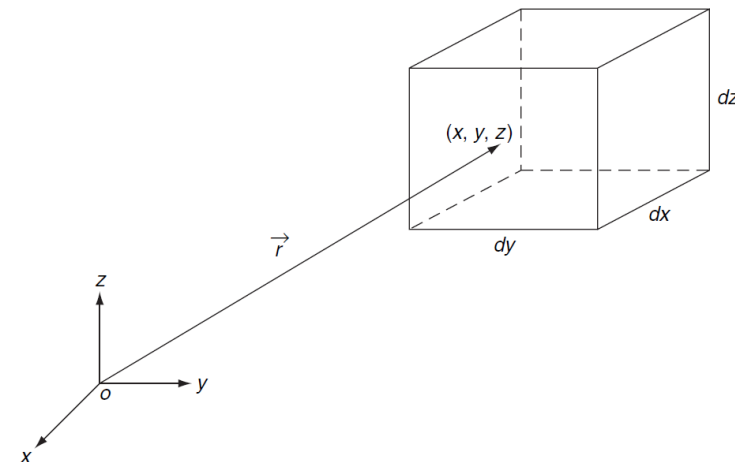
Ruimtelijke neutronenbalans (steady state conditie)

Volume element $dV = dxdydz$ op punt $\vec{r} = (x, y, z)$

Er geldt

$$\left(\begin{array}{c} \text{neutrons leaking} \\ \text{out of } dxdydz/s \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{neutrons absorbed} \\ \text{in } dxdydz/s \end{array} \right)$$
$$= \left(\begin{array}{c} \text{source neutrons} \\ \text{emitted in } dxdydz/s \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{fission neutrons} \\ \text{produced in } dxdydz/s \end{array} \right)$$

Neutronenstroom $J_x(x, y, z)$ is het netto aantal neutronen/cm²/s door het y-z vlak in de positieve x richting op punt (x,y,z)



Diffusievergelijking

Aantal neutronen dat door het voorvlak naar binnen stroomt $J_x(x + \frac{1}{2}dx, y, z)dydz$
 En door het achtervlak naar buiten $-J_x(x - \frac{1}{2}dx, y, z)dydz$
 Evenzo voor de andere vlakken
 Netto neutronenlek per seconde uit de kubus

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \text{neutrons leaking} \\ \text{out of } dxdydz/s \end{array} \right) &= [J_x(x + \frac{1}{2}dx, y, z) - J_x(x - \frac{1}{2}dx, y, z)]dydz \\ &\quad + [J_y(x, y + \frac{1}{2}dy, z) - J_y(x, y - \frac{1}{2}dy, z)]dxdz \\ &\quad + [J_z(x, y, z + \frac{1}{2}dz) - J_z(x, y, z - \frac{1}{2}dz)]dxdy. \end{aligned}$$

Gebruik definitie van partiële afgeleide

$$\lim_{dx \rightarrow 0} [J_x(x + \frac{1}{2}dx, y, z) - J_x(x - \frac{1}{2}dx, y, z)]/dx \equiv \frac{\partial}{\partial x} J_x(x, y, z)$$

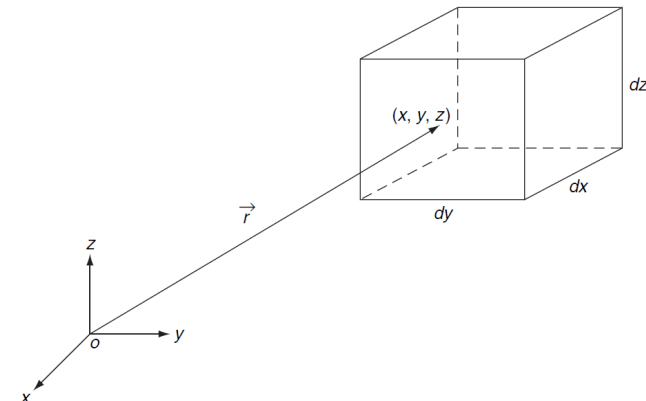
We vinden dan $\left(\begin{array}{c} \text{neutrons leaking} \\ \text{out of } dxdydz/s \end{array} \right) = \left[\frac{\partial}{\partial x} J_x(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} J_y(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} J_z(x, y, z) \right] dxdydz.$

Verder geldt $\left(\begin{array}{c} \text{neutrons absorbed} \\ \text{in } dxdydz/s \end{array} \right) = \Sigma_a(x, y, z)\phi(x, y, z)dxdydz,$

$$\left(\begin{array}{c} \text{source neutrons} \\ \text{emitted in } dxdydz/s \end{array} \right) = s'''(x, y, z)dxdydz,$$

and

$$\left(\begin{array}{c} \text{fission neutrons} \\ \text{produced in } dxdydz/s \end{array} \right) = \nu \Sigma_f(x, y, z)\phi(x, y, z)dxdydz.$$



Diffusievergelijking

Invullen in van gevonden uitdrukkingen in

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{l} \text{neutrons leaking} \\ \text{out of } dxdydz/s \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{neutrons absorbed} \\ \text{in } dxdydz/s \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{l} \text{source neutrons} \\ \text{emitted in } dxdydz/s \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{fission neutrons} \\ \text{produced in } dxdydz/s \end{array} \right) \end{aligned}$$

Levert
$$\frac{\partial}{\partial x} J_x(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial y} J_y(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial z} J_z(\vec{r}) + \Sigma_a(\vec{r})\phi(\vec{r}) = s'''(\vec{r}) + \nu\Sigma_f(\vec{r})\phi(\vec{r})$$

Schrijf neutronenstroom in vectorvorm
$$\vec{J}(\vec{r}) = \hat{i}J_x(\vec{r}) + \hat{j}J_y(\vec{r}) + \hat{k}J_z(\vec{r})$$

Definitie van gradiënt
$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

We vinden dan de *balansvergelijking*
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}) + \Sigma_a(\vec{r})\phi(\vec{r}) = s'''(\vec{r}) + \nu\Sigma_f(\vec{r})\phi(\vec{r})$$

Diffusiebenadering: relatie tussen stroom en flux
$$\vec{J}(\vec{r}) = -D(\vec{r})\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$$
 Wet van Fick

Neutron diffusievergelijking



Diffusiecoëfficiënt

$$-\vec{\nabla} \cdot D(\vec{r})\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) + \Sigma_a(\vec{r})\phi(\vec{r}) = s'''(\vec{r}) + \nu\Sigma_f(\vec{r})\phi(\vec{r})$$

Er geldt $D = 1/3\Sigma_{tr}$ met transport cross section

$$\Sigma_{tr} = \Sigma_t - \bar{\mu}\Sigma_s$$



Gemiddelde verstrooiingshoek
(isotroop: 0)

Neutronenverdeling

Diffusievergelijking in cilindrische coördinaten

Tijdsonafhankelijk (zonder bron) $\vec{\nabla} \cdot D\vec{\nabla}\phi + \nu\Sigma_f\phi - \Sigma_a\phi = 0$

Enkel oplossing voor kritische reactor (anders tijdafhankelijke oplossingen)

Neem aan dat je het aantal neutronen per splijting kunt variëren, dan

$$\vec{\nabla} \cdot D\vec{\nabla}\phi + (\nu_o/\nu)\nu\Sigma_f\phi - \Sigma_a\phi = 0$$

Neem aan dat met ν_o de reactor kritisch is ($k = 1$), met echt aantal ν

Dan geldt $\nu_o/\nu = 1/k$ en dus

$$\vec{\nabla} \cdot D\vec{\nabla}\phi + \frac{1}{k}\nu\Sigma_f\phi - \Sigma_a\phi = 0$$

Dit is een eigenwaardenvergelijking: eigenwaarde k , eigenfunctie ϕ

Er geldt $D = \text{constant}$, en $k_\infty = \nu\Sigma_f/\Sigma_a$

$$L^2 = D/\Sigma_a$$

Dan geldt $\nabla^2\phi + \frac{k_\infty/k - 1}{L^2}\phi = 0$  $-\frac{\nabla^2\phi}{\phi} = \frac{k_\infty/k - 1}{L^2}$

Er moet nu gelden $\nabla^2\phi/\phi = -B^2$  $k = \frac{k_\infty}{1 + L^2B^2}$  $P_{NL} = \frac{1}{1 + L^2B^2}$

Buckling B volgt uit Helmholtz vergelijking

$$\nabla^2\phi + B^2\phi = 0$$

Eindige cilindrische core

Cilindrische reactor (extrapolated straal en hoogte)

Dan geldt $\nabla^2 \phi + B^2 \phi = 0 \longrightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{d}{dr} \phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi + B^2 \phi = 0$

met $0 < \phi(r, z) < \infty, \quad 0 \leq r \leq \tilde{R}, \quad -\tilde{H}/2 \leq z \leq \tilde{H}/2$

Separabele oplossing $\phi(r, z) = \psi(r)\chi(z)$

Invullen $\underbrace{\frac{1}{\psi r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \psi}_{-B_r^2} + \underbrace{\frac{1}{\chi} \frac{d^2}{dz^2} \chi}_{-B_z^2} + B^2 = 0 \longrightarrow B_r^2 + B_z^2 = B^2$

We vinden $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \psi + B_r^2 \psi = 0, \quad 0 \leq r \leq \tilde{R},$

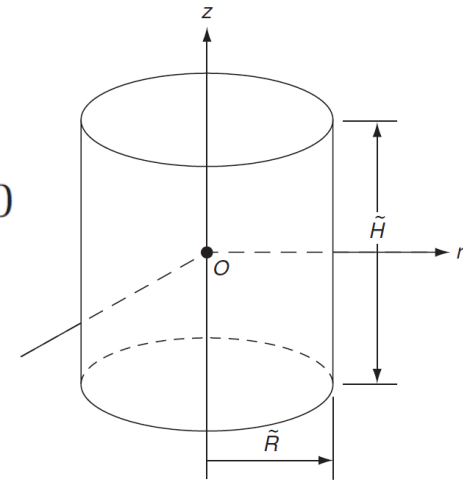
$$\frac{d^2}{dz^2} \chi + B_z^2 \chi = 0, \quad -\tilde{H}/2 \leq z \leq \tilde{H}/2$$

Probeer $\chi(z) = \cancel{C_1 \sin(B_z z)} + C_2 \cos(B_z z), \quad -\tilde{H}/2 \leq z \leq \tilde{H}/2,$

Randvoorwaarden $\chi(\pm\tilde{H}/2) = 0 \longrightarrow C_1 = 0 \longrightarrow \cos(\pm B_z \tilde{H}/2) = 0$

$\longrightarrow B_z \tilde{H}/2 = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots \longrightarrow B_z = \pi/\tilde{H}$

Positieve flux



Radiële oplossing

We hadden $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \psi + B_r^2 \psi = 0, \quad 0 \leq r \leq \tilde{R},$

Bessel functies

$$\psi(r) = C'_1 J_0(B_r r) + \cancel{C'_2 Y_0(B_r r)}, \quad 0 \leq r \leq \tilde{R}$$

Merk op $Y_0(0) \rightarrow -\infty \rightarrow C'_2 = 0$

Verder $B_r \tilde{R} = 2.405 \rightarrow B_r = 2.405/\tilde{R}$

Buckling

$$\left. \begin{aligned} B_z &= \pi/\tilde{H} \\ B_r^2 + B_z^2 &= B^2 \\ B_r &= 2.405/\tilde{R} \end{aligned} \right\} B^2 = (2.405/\tilde{R})^2 + (\pi/\tilde{H})^2$$

Fluxverdeling

$$\chi(z) = \cancel{C_1 \sin(B_z z)} + C_2 \cos(B_z z), \quad -\tilde{H}/2 \leq z \leq \tilde{H}/2,$$

$$\psi(r) = C'_1 J_0(B_r r) + \cancel{C'_2 Y_0(B_r r)}, \quad 0 \leq r \leq \tilde{R}$$

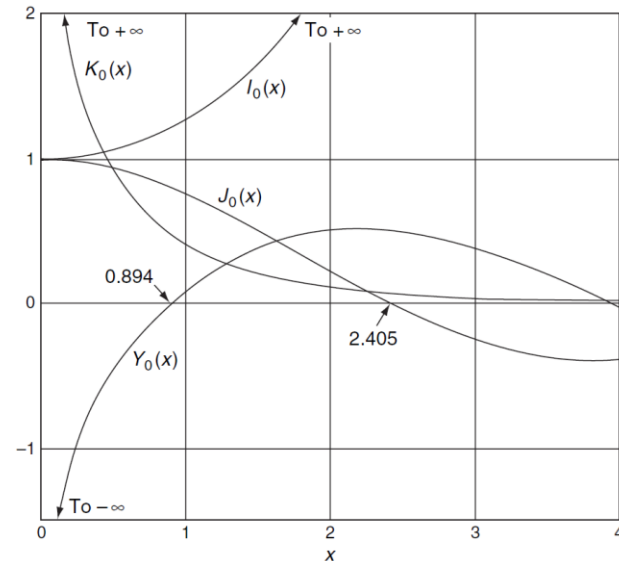
$$\phi(r, z) = \psi(r) \chi(z)$$



$$\phi(r, z) = C J_0(2.405r/\tilde{R}) \cos(\pi z/\tilde{H})$$



$$C = C'_1 C_2$$



$$\begin{aligned} x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2) y &= 0 \\ J_\alpha(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{1}{2}x\right)^{2m+\alpha} \\ \Gamma(z) &= \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \\ Y_\alpha(x) &= \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}. \end{aligned}$$

Reactor vermogen

Energie per kernsplijting $\gamma = 3.1 \times 10^{-11}$ J/fission #splijtingen / cm³ / s $\Sigma_f \phi$

Reactor vermogen $P = \gamma \int \Sigma_f \phi dV \longrightarrow P = \gamma 2\pi \int_0^{\tilde{R}} \int_{-\tilde{H}/2}^{\tilde{H}/2} \Sigma_f \phi dz r dr$

Flux invullen $\phi(r, z) = C J_0(2.405r/\tilde{R}) \cos(\pi z/\tilde{H})$

$\longrightarrow P = \gamma \Sigma_f 2\pi C \int_0^{\tilde{R}} J_0(2.405r/\tilde{R}) r dr \int_{-\tilde{H}/2}^{\tilde{H}/2} \cos(\pi z/\tilde{H}) dz$

Herschrijven met $V = \pi \tilde{R}^2 \tilde{H}$

$$P = \gamma \Sigma_f V C \left[\frac{2}{\tilde{R}^2} \int_0^{\tilde{R}} J_0(2.405r/\tilde{R}) r dr \right] \left[\frac{1}{\tilde{H}} \int_{-\tilde{H}/2}^{\tilde{H}/2} \cos(\pi z/\tilde{H}) dz \right]$$

Verander variabele $\xi = 2.405r/\tilde{R}$ en gebruik Bessel functie relatie

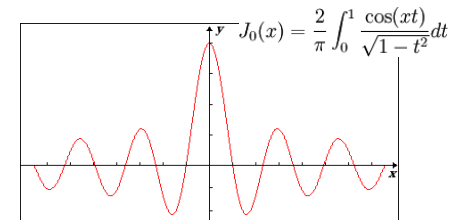
$\longrightarrow \frac{2}{\tilde{R}^2} \int_0^{\tilde{R}} J_0(2.405r/\tilde{R}) r dr = \frac{2}{2.405^2} \int_0^{2.405} J_0(\xi) \xi d\xi = \frac{2}{2.405} J_1(2.405)$

Evenzo, met $\varsigma = \pi z/\tilde{H} \longrightarrow \frac{1}{\tilde{H}} \int_{-\tilde{H}/2}^{\tilde{H}/2} \cos(\pi z/\tilde{H}) dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\varsigma) d\varsigma = \frac{2}{\pi}$

$$P = \gamma \Sigma_f V C \frac{2J_1(2.405)}{2.405} \frac{2}{\pi} = 0.275 \gamma \Sigma_f V C$$

$\longrightarrow C = 3.63 \frac{P}{\gamma \Sigma_f V}$

$$\phi(r, z) = 3.63 \frac{P}{\gamma \Sigma_f V} J_0(2.405r/R) \cos(\pi z/H)$$



Neutron leakage

Two group approximation: neutronenmigratie in slowdown en thermisch gebied

Definieer snelle en thermische flux ϕ_1 and ϕ_2

F	$n \rightarrow (1) \rightarrow$ $\varepsilon p f \eta_T n$	$\rightarrow \varepsilon n \rightarrow$ $\downarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$ Fast Diffusion
I	$\uparrow$ (4) $\uparrow$	$\varepsilon(1-p)n \leftarrow$ $\leftarrow$	$\downarrow$ (2) $\downarrow$		
T	$\uparrow$ $\varepsilon p f n$	$\leftarrow \leftarrow (3) \leftarrow$ $\leftarrow$	$\downarrow \rightarrow$ $\varepsilon p n \rightarrow$	$\rightarrow$ $\varepsilon p(1-f)n$	$\rightarrow$ Thermal Diffusion
	Fuel	Moderator			Leakage

Diffusievergelijking voor snelle neutronen

$$-\vec{\nabla} \cdot D_1 \vec{\nabla} \phi_1 + \Sigma_r \phi_1 = \frac{1}{k} \varepsilon \eta_T f \Sigma_a \phi_2$$

$$D_1 = 1/3 \Sigma_{tr1}$$

Fast leakage

Verlies door slowing down

snelle neutronen geproduceerd / cm³ / s

Fast fission

Thermal utilization: absorbed in fuel

Diffusievergelijking voor thermische neutronen

$$-\vec{\nabla} \cdot D_2 \vec{\nabla} \phi_2 + \Sigma_a \phi_2 = p \Sigma_r \phi_1$$

$$D_2 = 1/3 \Sigma_{tr2}$$

Thermische leakage

Bronterm thermische neutronen

Bereken diffusiecoëfficiënten en removal werkzame doorsnede Σ_r

Two group approximation

Deel door Σ_r en Σ_a en definieer $L_1 = \sqrt{D_1/\Sigma_r}$ $L_2 = \sqrt{D_2/\Sigma_a}$

$$\left. \begin{aligned} -\vec{\nabla} \cdot D_1 \vec{\nabla} \phi_1 + \Sigma_r \phi_1 &= \frac{1}{k} \varepsilon \eta_T f \Sigma_a \phi_2 \\ -\vec{\nabla} \cdot D_2 \vec{\nabla} \phi_2 + \Sigma_a \phi_2 &= p \Sigma_r \phi_1 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} -L_1^2 \nabla^2 \phi_1 + \phi_1 &= \frac{1}{k} \varepsilon \eta_T f \frac{\Sigma_a}{\Sigma_r} \phi_2 \\ -L_2^2 \nabla^2 \phi_2 + \phi_2 &= p \frac{\Sigma_r}{\Sigma_a} \phi_1 \end{aligned}$$

Beschouw uniforme reactor met zero flux randvoorwaarden. Dan
weer

$$\nabla^2 \phi_1 + B^2 \phi_1 = 0 \quad \text{en} \quad \nabla^2 \phi_2 + B^2 \phi_2 = 0$$

Gebruik dit om de Laplace operatoren te elimineren

 $\phi_1 = \frac{1}{1 + L_1^2 B^2} \frac{1}{k} \varepsilon \eta_T f \frac{\Sigma_a}{\Sigma_r} \phi_2 \quad \text{en} \quad \phi_2 = \frac{1}{1 + L_2^2 B^2} p \frac{\Sigma_r}{\Sigma_a} \phi_1$

Combineren levert $k = \frac{1}{1 + L_1^2 B^2} \frac{1}{1 + L_2^2 B^2} k_\infty \quad \text{met} \quad k_\infty = p \varepsilon f \eta_T$

We vinden $P_{NL} = \frac{1}{1 + L_1^2 B^2} \frac{1}{1 + L_2^2 B^2}$

Bepaal diffusielengten uit transport, resonantie en absorptie werkzame doorsneden

Migratielengte

Er geldt $P_{NL} = \frac{1}{1 + L_1^2 B^2} \frac{1}{1 + L_2^2 B^2} \rightarrow P_{NL} = \frac{1}{1 + (L_1^2 + L_2^2) B^2 + \cancel{L_1^2 L_2^2 B^4}}$

Voor grote reactor is B^2 klein en kan B^4 verwaarloosd worden

We vinden dan $P_{NL} = \frac{1}{1 + M^2 B^2}$

↑
migratielengte

$$M = \sqrt{L_1^2 + L_2^2}$$

Grootste correctie voor thermische
diffusielengte in geval van H₂O gemodereerde
power reactoren

Dit komt door de grote absorptie werkzame
doorsnede van waterstof

Snelle reactoren (diffusie en migratielengte
zijn hetzelfde):

SFR: $M = 19.2$ cm

GCFR: $M = 25.5$ cm

Representative Diffusion Properties for Moderators and Thermal Reactors

Type	Description	$L_1 = \sqrt{\tau}$ (cm) Fast Diffusion Length	L_2 (cm) Thermal Diffusion Length	M (cm) Migration Length
H ₂ O	Light Water	5.10	2.85	5.84
PWR	Pressurized-H ₂ O Reactor	7.36	1.96	7.62
BWR	Boiling-H ₂ O reactor	7.16	1.97	7.43
D ₂ O	Heavy water	11.5	173	174
PHWR	CANDU-D ₂ O reactor	11.6	15.6	19.4
C	Graphite	19.5	59.0	62.0
HTGR	Graphite- moderated He- cooled reactor	17.1	10.6	20.2

Leakage en ontwerp

Er geldt $k = \frac{1}{1 + M^2 B^2} k_{\infty}$

Stel we hebben een cilindrische reactor met $\tilde{H} = 2\tilde{R}$

De buckling volgt uit $B^2 = (2.405/\tilde{R})^2 + (\pi/\tilde{H})^2 \longrightarrow B^2 = 33.0/\tilde{H}^2$

Aldus $k = \frac{1}{1 + 33.0(M/\tilde{H})^2} k_{\infty}$

Leakage van neutronen wordt primair bepaald door $\tilde{H}/M$

Karakteristieke dimensie in eenheden van migratielengten

Ontwerp van reactor core:

- Kies vermogen P

- Bepaal structuur van de core lattice

- Kies brandstof, moderator, koelmiddel en andere materialen

- Bepaal volume ratio's en geometrische configuraties (straal fuel rods, etc.)

- Kies lattice parameters, zodat voor gegeven enrichment k_{∞} bijna optimaal is en de powerdichtheid van fuel naar koelmiddel maximaal

Nu ligt de migratielengte M vast

Lattice design en maximum/gemiddelde flux bepaalt power density

Vermogen en power density bepalen core volume

Fuel enrichment wordt aangepast om de juiste k_{∞} te krijgen

Energietransport

Energietransport

In het voorgaande hebben we tijd- en ruimteverdelingen van neutronen in een reactor besproken

In een kritische reactor is flux evenredig met vermogen

$$\phi(r, z) = 3.63 \frac{P}{\gamma \Sigma_f V} J_0(2.405r/R) \cos(\pi z/H)$$

Bij hoog vermogen

Thermische limiet bepaalt maximum vermogen (oververhitting fuel)

Dichtheden veranderen (reactivity feedback effecten)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Core averaged power density} \quad \bar{P}''' = P/V \\ \text{Power peaking factor} \quad F_q = P'''_{\max} / \bar{P}''' \end{array} \right\} P = \frac{P'''_{\max}}{F_q} V$$

Constructie kosten nemen sterk toe met volume $V \longrightarrow$ optimaliseer $P'''_{\max} / F_q$

Maximale $P'''_{\max}$ wordt bepaald door materiaaleigenschappen

Minimale peaking factor wordt bepaald door reactorfysica

Niet-uniforme verdelingen van fuel enrichment

Plaatsing van control rods and andere neutron poisons

Gekozen core volume bepaalt

Core-averaged fuel enrichment

Non-leakage probabilities

Core eigenschappen

3000 MW(t) Power Reactor Approximate Core Properties

	<i>PWR</i> <i>Pressurized-</i> <i>H₂O</i> <i>Reactor</i>	<i>BWR</i> <i>Boiling-</i> <i>H₂O</i> <i>Reactor</i>	<i>PHWR</i> <i>CANDU-</i> <i>D₂O Reactor</i>	<i>HTGR</i> <i>C-Moderated</i> <i>Reactor</i>	<i>SFR Na-Cooled</i> <i>Fast Reactor</i>	<i>GCFR He-cooled</i> <i>Fast Reactor</i>
$\bar{P}'''$ (MW/m ³) average power density	102	56	7.7	6.6	217	115
$\bar{q}'$ (kW/m) average linear heat rate	17.5	20.7	24.7	3.7	22.9	17
V (m ³) core volume	29.4	53.7	390	455	13.8	26.1
H/M height and diameter in migration lengths	43.9	55.0	40.8	68.8	13.5	12.6
N number of fuel pins	51,244	35,474	15,344	97,303	50,365	54,903
P_{NL} nonleakage probability	0.956	0.972	0.950	0.982	0.676	0.644

Source: Data courtesy of W. S. Yang, Argonne National Laboratory.

Eindige cilindrische core

Vermogensdichtheid [W / cm³] $P'''(\vec{r}) = \gamma \underbrace{\Sigma_f(\vec{r})\phi(\vec{r})}_{\text{\# fission / cm}^3 \text{ / s}}$

In een kritische reactor is flux evenredig met vermogen

Ws / fission

Voor cilindrische reactor $P'''(r, z) = \bar{P}''' f_r(r) f_z(z)$

Core averaged power density $\bar{P}''' = \frac{1}{V} \int P'''(\vec{r}) dV$

Cilindrische geometrie $\frac{dV}{V} = \frac{2\pi r dr dz}{\pi R^2 H}$ $\bar{P}''' = \bar{P}''' \frac{2}{R^2} \int_0^R f_r(r) r dr \frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} f_z(z) dz$

Normering $\frac{2}{R^2} \int_0^R f_r(r) r dr = 1$ $\frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} f_z(z) dz = 1$

Power peaking factor $F_q = F_r F_z$ met radiale en axiale peaking

$$F_r = f_r(r)_{\max}$$

$$F_z = f_z(z)_{\max}$$

Local peaking factor F_l

Fuel element manufacturing tolerances

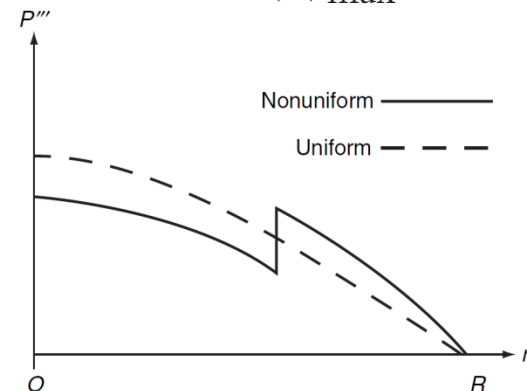
Local control and instrumentation perturbations

$$F_q = F_r F_z F_l$$

Flatten power distribution (reduceer peaking)

Meerdere radiële zone's met verschillende fuel enrichment

Partially inserted control-rod banks



Voorbeeld: uniforme cilindrische core

Flux in uniforme core $J_0(2.405r/R) \cos(\pi z/H)$

Power density distributions $f_r(r) = C_r J_0(2.405r/R)$ $f_z(z) = C_z \cos(\pi z/H)$

Normalisatie coëfficiënten volgen uit

$$\frac{2}{R^2} \int_0^R f_r(r) r dr = 1$$

$$\longrightarrow C_r \frac{2}{R^2} \int_0^R J_0(2.405r/R) r dr = 1$$

$$\frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} f_z(z) dz = 1$$

$$C_z \frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} \cos(\pi z/H) dz = 1$$

Deze integralen hebben we al eens uitgerekend. Er geldt

$$f_r(r) = 2.32 J_0(2.405r/R)$$

$$f_z(z) = 1.57 \cos(\pi z/H)$$

Zowel Bessel functie als cosinus hebben maximum waarde 1

$$\text{Peaking factoren: } \left. \begin{array}{l} F_r = 2.32 \\ F_z = 1.57 \end{array} \right\} F_q = 3.63 F_1$$

Warmtetransport

Fuel – coolant model: goed voor thermische en fast reactors

Thermal power per unit length van fuel element $q'(r, z)$ (linear heat rate in W/cm)

Surface heat flux $q''(r, z)$ in W/cm²

Voor cilindrisch element met straal a geldt $q''(r, z) = \frac{1}{2\pi a} q'(r, z)$

Oppervlak van lattice cell met 1 fuel rod A_{cell}

Thermische power geproduceerd per unit core volume is $P'''(r, z) = q'(r, z) / A_{cell}$

Voor cilindrische reactor $P'''(r, z) = \bar{P}''' f_r(r) f_z(z)$

Combineren geeft $q'(r, z) = A_{cell} \bar{P}''' f_r(r) f_z(z) \longrightarrow q'(r, z) = \frac{A_{cell}}{V} P f_r(r) f_z(z)$

Aanname: reactor met N identieke cellen $V = \pi R^2 H = N A_{cell} H$

Dan geldt $q'(r, z) = \frac{1}{NH} P f_r(r) f_z(z)$

Totale lengte fuel rods

Thermische weerstand
(1/warmte geleiding)

Temperatuurverschil tussen fuel en coolant

$$\underbrace{T_{fe}(r, z)}_{\text{Gemiddeld over } \pi a^2 \text{ van fuel rod}} - \underbrace{T_c(r, z)}_{\text{Gemiddeld over koelkanaal}} = R'_{fe} q'(r, z)$$

Gemiddeld over πa^2 van fuel rod

Gemiddeld over koelkanaal

Er geldt $T_{fe}(r, z) - T_c(r, z) = R_f P f_r(r) f_z(z)$

Thermische weerstand
reactor core

$$R_f = \frac{1}{NH} R'_{fe}$$

$$\longrightarrow \bar{T}_f - \bar{T}_c = R_f P$$

Gemiddeld over volume

$$\frac{2}{R^2} \int_0^R f_r(r) r dr = 1$$

$$\frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} f_z(z) dz = 1$$

Warmtetransport

Warmtebalans voor een roostercel

Massa flow rate W_{ch} in [kg/s]

We hadden $q'(r, z) = \frac{1}{NH} P f_r(r) f_z(z)$

Dit levert voor uitgaand koelwater

$$\underbrace{W_{ch} c_p [T_o(r) - T_i]}_{\text{Opwarming koelmiddel}} = \int_{-H/2}^{H/2} q'(r, z') dz'$$

Opwarming
koelmiddel



Warmte geproduceerd
in fuel element

$$T_o(r) = \frac{1}{W c_p} \frac{P}{NH} f_r(r) \int_{-H/2}^{H/2} f_z(z) dz + T_i$$

Reactorkern massa flow $W = N W_{ch}$ door de N identieke koelkanalen

Combineren met $\frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} f_z(z) dz = 1 \quad \longrightarrow \quad T_o(r) = \frac{1}{W c_p} P f_r(r) + T_i$

De gemiddelde temperatuur van het uitgaande koelwater vinden we door integratie over de doorsnede van de kern

$$2\pi r dr / R^2$$

Met $\frac{2}{R^2} \int_0^R f_r(r) r dr = 1$ vinden we $\bar{T}_o = \frac{1}{W c_p} P + T_i$

Gemiddelde koelwatertemperatuur $\bar{T}_c = \frac{1}{2} (\bar{T}_o + T_i)$

$$\bar{T}_c = \frac{1}{2 W c_p} P + T_i$$

We hadden $\bar{T}_f - \bar{T}_c = R_f P$

$\longrightarrow$
$$\bar{T}_f = \left(R_f + \frac{1}{2 W c_p} \right) P + T_i$$

Gemiddelde temperatuur van fuel en koelmiddel is later nodig om reactivity feedback te modelleren.

Warmtetransport

Maximum koelwatertemperatuur $T_0|_{\max} = \frac{1}{Wc_p} PF_r + T_i$

↑
Radiale peaking factor

Maximaal temperatuurverschil uit $T_{fe}(r, z) - T_c(r, z) = R_f P f_r(r) f_z(z)$
 $\longrightarrow [T_{fe}(r, z) - T_c(r, z)]|_{\max} = R_f P F_r F_z$

↑
Hiervoor moeten we T_c weten!

Combineren met $\bar{T}_f = \left(R_f + \frac{1}{2Wc_p} \right) P + T_i$

$\longrightarrow T_f|_{\max} = \left(R_f F_r F_z + \frac{1}{2Wc_p} F_r \right) P + T_i$

Voor vloeistof gekoelde reactoren geldt

Maximum fuel temperatuur

Gemiddelde koelwater temperatuur

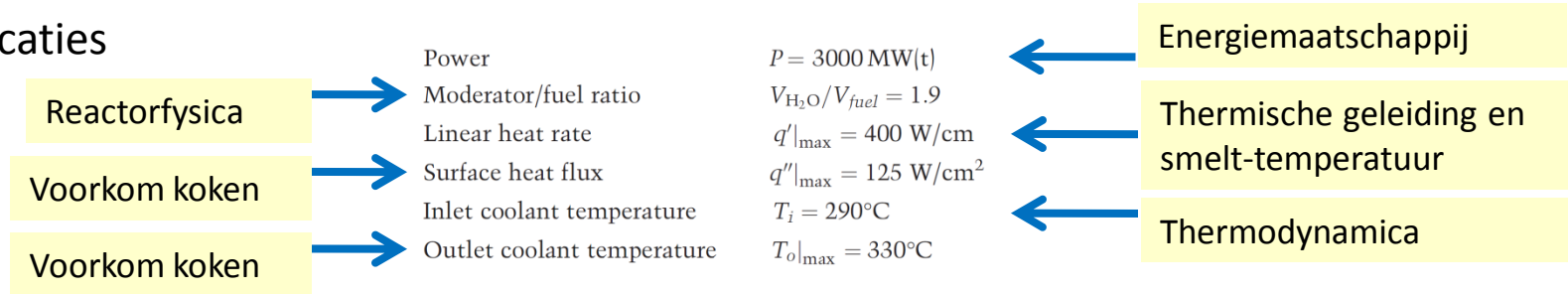
$$\frac{\bar{T}_f - \bar{T}_c}{\bar{T}_c - T_i} = 2Wc_p R_f \gg 1$$

Thermische weerstand $R_f \gg 1/Wc_p$ gebruikt T_{fe} gemiddeld over fuel rod

Hoogste temperatuur in fuel rod (center line) geeft limiet op linear heat rate

Voorbeeld: PWR

Specificaties



Dit bepaalt

- Fuel radius
- Lattice pitch
- Core volume and dimensions
- Core-averaged power density
- Number of fuel elements
- Coolant mass flow rate
- Mean coolant velocity.

Fuel radius: $q''(r, z) = \frac{1}{2\pi a} q'(r, z) \longrightarrow a = \frac{q'_{\text{max}}}{2\pi q''_{\text{max}}} = \frac{400}{2\pi \cdot 125} = 0.509 \text{ cm}$

Lattice (vierkant) pitch: $V_{\text{H}_2\text{O}}/V_{\text{fuel}} = (p^2 - \pi a^2)/\pi a^2 \longrightarrow p = \sqrt{\pi(V_{\text{H}_2\text{O}}/V_{\text{fuel}} + 1)} a = \sqrt{2.9\pi} 0.509 = 1.536 \text{ cm}$

Core volume: $q'(r, z) = \frac{A_{\text{cell}}}{V} P \underbrace{f_r(r) f_z(z)}_{\substack{F_r = 2.32 \\ F_z = 1.57}} \longrightarrow V = p^2 P F_r F_z / q'_{\text{max}} = 1.536^2 \cdot 3000 \cdot 10^6 \cdot 2.32 \cdot 1.57 / 400 = 6.445 \cdot 10^7 \text{ cm}^3 = 64.45 \text{ m}^3$

$A_{\text{cell}} = p^2$

Voorbeeld: PWR

Specificaties

Power	$P = 3000 \text{ MW(t)}$	a. Fuel radius
Moderator/fuel ratio	$V_{\text{H}_2\text{O}}/V_{\text{fuel}} = 1.9$	b. Lattice pitch
Linear heat rate	$q'_{\text{max}} = 400 \text{ W/cm}$	c. Core volume and dimensions
Surface heat flux	$q''_{\text{max}} = 125 \text{ W/cm}^2$	d. Core-averaged power density
Inlet coolant temperature	$T_i = 290^\circ\text{C}$	e. Number of fuel elements
Outlet coolant temperature	$T_o _{\text{max}} = 330^\circ\text{C}$	f. Coolant mass flow rate
		g. Mean coolant velocity.

$$H/D = 1: V = \pi(H/2)^2 H \longrightarrow H = (4V/\pi)^{1/3} = (4 \cdot 6.445 \cdot 10^7 / \pi)^{1/3} = 434 \text{ cm} = 4.34 \text{ m}$$

$$\text{Vermogensdichtheid: } \bar{P}''' = P/V = 3000 \cdot 10^6 / 6.445 \cdot 10^7 = 46.5 \text{ W/cm}^3 = 46.5 \text{ MW/m}^3$$

$$\# \text{ brandstofelementen: } N = \frac{\pi R^2}{A_{\text{cell}}} = \frac{\pi(H/2)^2}{p^2} = \frac{\pi(434/2)^2}{1.536^2} = 62,702$$

$$\text{Vloeistofdebiet: } T_o|_{\text{max}} = \frac{1}{W c_p} P F_r + T_i \longrightarrow W = \frac{1}{c_p} \frac{P F_r}{(T_o|_{\text{max}} - T_i)} = \frac{1}{6.4 \cdot 10^3} \frac{3000 \cdot 10^6 \cdot 2.32}{(330 - 290)} \\ = 27.2 \cdot 10^3 \text{ kg/s} = 27.2 \cdot 10^6 \text{ g/s.}$$

$$\text{Snelheid koelvloeistof: } W = \rho A_{\text{flow}} \bar{v}$$

Dichtheid (300 °C: 0.676 g/ml)

$$A_{\text{flow}} = N \cdot (p^2 - \pi a^2)$$

$$\bar{v} = \frac{W}{\rho N(p^2 - \pi a^2)} = \frac{27.2 \cdot 10^6}{0.676 \cdot 62,702 \cdot (1.536^2 - \pi 0.509^2)} \\ = 415 \text{ cm/s} = 4.15 \text{ m/s.}$$

Overige parameters: verrijkingsfactor, control poisson, control rods (die nemen volume in). Een iteratief engineering proces.

Thermische transients

Steady state condities $P = (\bar{T}_f - \bar{T}_c)/R_f$

Uitval koelinstallatie $M_f c_f \frac{d}{dt} \bar{T}_f(t) = P(t)$

Combineer beide situaties in *lumped-parameter model*

$$M_f c_f \frac{d}{dt} \bar{T}_f(t) = P(t) - \frac{1}{R_f} [\bar{T}_f(t) - \bar{T}_c(t)]$$

= 0 in steady state

= 0 indien geen koeling

Schrijf als $\frac{d}{dt} \bar{T}_f(t) = \frac{1}{M_f c_f} P(t) - \frac{1}{\tau} [\bar{T}_f(t) - \bar{T}_c(t)]$

Adiabatic heatup rate

Core thermal time constant

$$\tau = M_f c_f R_f$$

Tijd nodig voor warmteoverdracht van
fuel naar koelmiddel (paar secs)

Voorbeeld: reactor shutdown

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{T}_f(t) &= -\frac{1}{\tau} [\bar{T}_f(t) - \bar{T}_c], \quad t > 0 \\ \text{Randvoorwaarde} \quad \bar{T}_f(0) &= R_f P_o + \bar{T}_c \end{aligned} \right\} \bar{T}_f(t) = \bar{T}_c + R_f P_o \exp(-t/\tau)$$

Lange termijn core gedrag

Lange termijn core gedrag

Lange termijn effecten:

Opbouw en verval van radioactieve splijtingsproducten

Depletie van brandstof

Opbouw van actiniden (veroorzaken neutron capture)

Vermenigvuldigingsfactor neemt af in de tijd $k = \eta_T f \epsilon p P_{NL}$

Fuel burnup en fission product buildup hebben effect op thermische werkzame doorsnede, en dus η_T f

Merk op $f = \frac{1}{1 + \varsigma \left(V_m \bar{\Sigma}_{aT}^m / V_f \bar{\Sigma}_{aT}^f \right)}$ $\left. \begin{array}{l} \varsigma = \bar{\varphi}_{mT} / \bar{\varphi}_{fT} \\ \eta_T = \frac{\nu \bar{\Sigma}_{fT}^f}{\bar{\Sigma}_{aT}^f} \end{array} \right\} k = \frac{\nu \Sigma_f^f}{\Sigma_a^f + \varsigma (V_m / V_f) \Sigma_\gamma^m} \epsilon p P_{NL}$

Fuel depletion $\Sigma_f^f \rightarrow \Sigma_f^f(t)$

Splijtingsproducten (fp) die ontstaan $\Sigma_a^f \rightarrow \Sigma_a^f(t) + \Sigma_a^{fp}(t)$

Reactor moet altijd kritisch blijven ($k = 1$), dus voegen we poisons toe

Dus $1 = \frac{\nu \Sigma_f^f(t)}{\Sigma_a^f(t) + \Sigma_a^{fp}(t) + \varsigma (V_m / V_f) \Sigma_\gamma^m + \Sigma_\gamma^{con}(t)} \epsilon p P_{NL}$

Splijtingsproducten: opbouw en verval

Vermenigvuldigingsfactor *zonder* poisons $k(t) = \frac{\nu \Sigma_f^f(t)}{\Sigma_a^f(t) + \Sigma_\gamma^{fp}(t) + \varsigma(V_m/V_f) \Sigma_\gamma^m} \epsilon p P_{NL}$

Excess reactivity $\rho_{ex}(t) = \frac{k(t) - 1}{k(t)} \approx k(t) - 1$

Fuel depletion en fission product buildup laten reactivity afnemen

Splijtingsproducten $\frac{d}{dt} N(t) = \gamma_{fp} \bar{\Sigma}_f \phi - \lambda N(t) - \sigma_a N(t) \phi$



Fission rate: opbouw fp



fp verval



fp neutron absorptie

Splijtingsproducten als Xenon en Samarium hebben grote capture werkzame doorsnede

Herschrijf $\frac{d}{dt} N(t) = \gamma_{fp} \bar{\Sigma}_f \phi - \lambda' N(t)$ $\lambda' = \lambda + \sigma_a \phi$

Oplossing $N(t) = \frac{\gamma_{fp} \bar{\Sigma}_f \phi}{\lambda'} [1 - \exp(-\lambda' t)]$

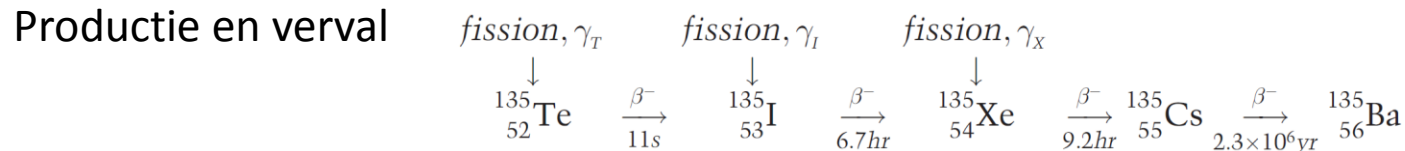
Voor korte tijden $\lambda' t \ll 1$ geldt $N(t) \approx \gamma_{fp} \bar{\Sigma}_f \phi t$

Voor lange tijden $\lambda' t \gg 1$ geldt $\gamma_{fp} \bar{\Sigma}_f \phi / \lambda'$

Halfwaardetijden: jodium-131 (8.0 dagen), cesium-137 (30.2 jaren)

Xenon vergiftiging

Absorptie werkzame doorsnede $2.65 \times 10^6 \text{ b}$



Thermal Fission Product Yields in Atoms per Fission

Isotope	Uranium-235	Plutonium-239	Uranium-233
${}^{135}\text{I}$	0.0639	0.0604	0.0475
${}^{135}\text{Xe}$	0.00237	0.0105	0.0107
${}^{149}\text{Pm}$	0.01071	0.0121	0.00795

Source: M. E. Meek and B. F. Rider, "Compilation of Fission Product Yields," General Electric Company Report NEDO-12154, 1972.

Dan geldt

$$\frac{d}{dt}I(t) = \gamma_I \bar{\Sigma}_f \phi - \lambda_I I(t)$$

Neem tellurium-235 en jodium-135 samen

$$\frac{d}{dt}X(t) = \gamma_X \bar{\Sigma}_f \phi + \lambda_I I(t) - \lambda_X X(t) - \sigma_{aX} X(t) \phi$$

Verwaarloos verval van cesium, en geen absorptie door ${}^{135}\text{I}$

Na reactor start-up bouwen de I en X concentraties op naar evenwicht

Evenwichtconcentraties $I(\infty) = \gamma_I \bar{\Sigma}_f \phi / \lambda_I$ $X(\infty) = \frac{(\gamma_I + \gamma_X) \bar{\Sigma}_f \phi}{\lambda_X + \sigma_{aX} \phi}$

Voor hoge fluxen geldt $\sigma_{aX} \phi \gg \lambda_X$

Xenon en reactor shutdown

Tijdens shutdown hebben we concentraties I_o en X_o

Stel $\phi = 0$ in $\frac{d}{dt}I(t) = \gamma_I \bar{\Sigma}_f \phi - \lambda_I I(t)$

Dan geldt $I(t) = I_o \exp(-\lambda_I t)$

Invullen in $\frac{d}{dt}X(t) = \gamma_X \bar{\Sigma}_f \phi + \lambda_I I(t) - \lambda_X X(t) - \sigma_{aX} X(t) \phi$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}X(t) = \lambda_I I_o \exp(-\lambda_I t) - \lambda_X X(t)$$

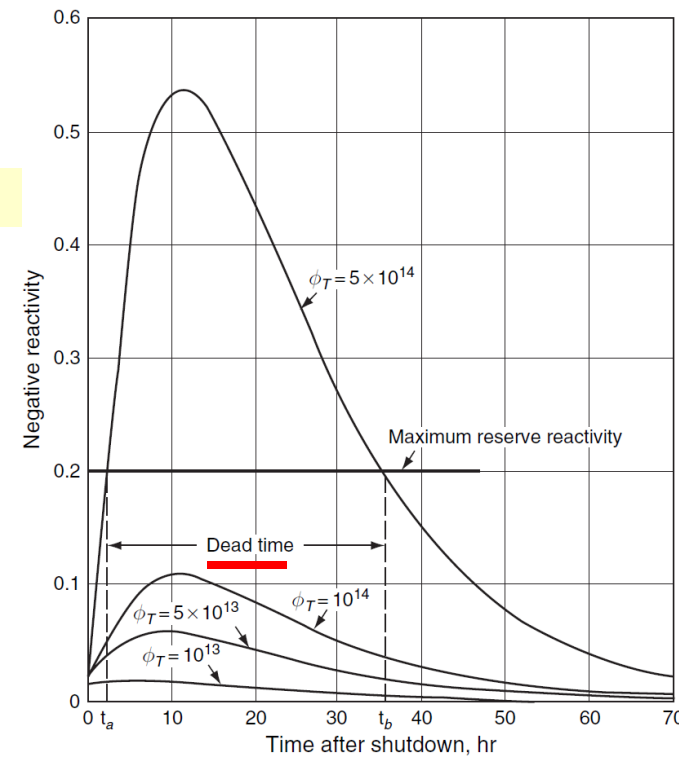
$$\rightarrow X(t) = \underbrace{X_o e^{-\lambda_X t}}_{\text{Xenon verval}} + \underbrace{\frac{\lambda_I}{\lambda_I - \lambda_X} I_o (e^{-\lambda_X t} - e^{-\lambda_I t})}_{\text{Xenon uit jodium verval}}$$

Na enkele dagen

$$X(t) = \bar{\Sigma}_f \phi \left[\frac{(\gamma_I + \gamma_X)}{\lambda_X + \sigma_{aX} \phi} e^{-\lambda_X t} + \frac{\gamma_I}{\lambda_I - \lambda_X} (e^{-\lambda_X t} - e^{-\lambda_I t}) \right]$$

Negatieve reactiviteit bijdrage $\sigma_{aX} X(t)$

$$k(t) = \frac{\nu \Sigma_f^f(t)}{\underbrace{\Sigma_a^f(t)}_{\Sigma_a^f \rightarrow \Sigma_a^f(t) + \Sigma_a^{fp}(t)} + \Sigma_\gamma^{fp}(t) + \varsigma(V_m/V_f) \Sigma_\gamma^m} \epsilon p P_{NL}$$



Samarium vergiftiging

Werkzame doorsnede voor absorptie 41,000 b

Vervalreeks $fission, \gamma_N$

$$^{149}_{60}\text{Nd} \xrightarrow[1.7\text{hr}]{\beta^-} ^{149}_{61}\text{Pm} \xrightarrow[53\text{hr}]{\beta^-} ^{149}_{62}\text{Sm}$$

Er geldt $\frac{d}{dt}P(t) = \gamma_P \bar{\Sigma}_f \phi - \lambda_P P(t)$



Promethium

$$\frac{d}{dt}S(t) = \lambda_P P(t) - \sigma_{aS}(t)\phi$$



Samarium

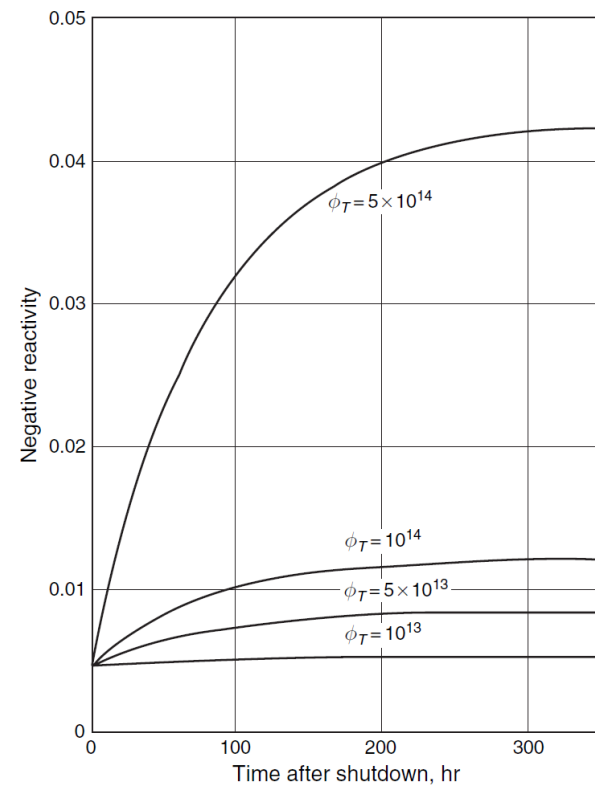
Shutdown yield $P(t) = P_o \exp(-\lambda_P t)$

$$S(t) = S_o + P_o(1 - e^{-\lambda_P t})$$

Combineren $S(t) = \frac{\gamma_P \bar{\Sigma}_f}{\sigma_{aS}} + \frac{\gamma_P \bar{\Sigma}_f \phi}{\lambda_P} (1 - e^{-\lambda_P t})$

Na shutdown neemt de samarium concentratie toe met $\gamma_P \bar{\Sigma}_f \phi / \lambda_P$

Forse extra reactivity nodig om te kunnen herstarten



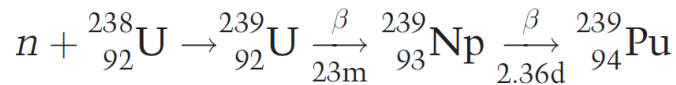
Brandstofdepletie

Vermogensdichtheid $P''' = \gamma \Sigma_f \phi$ opsplitsen $P''' = \gamma \left[\sigma_f^{25} N^{25}(t) + \sigma_f^{49} N^{49}(t) \right] \phi(t)$

Vergelijkingen $\frac{d}{dt} N^{25}(t) = -N^{25}(t) \sigma_a^{25} \phi(t)$ Uranium-235

$\frac{d}{dt} N^{28}(t) = -N^{28}(t) \sigma_a^{28} \phi(t)$ Uranium-238

Plutonium $\frac{d}{dt} N^{49}(t) = \sigma_\gamma^{28} \phi(t) N^{28}(t) - \sigma_a^{49} \phi(t) N^{49}(t)$



Integreer 25 $N^{25}(t) = N^{25}(0) e^{-\sigma_a^{25} \Phi(t)}$

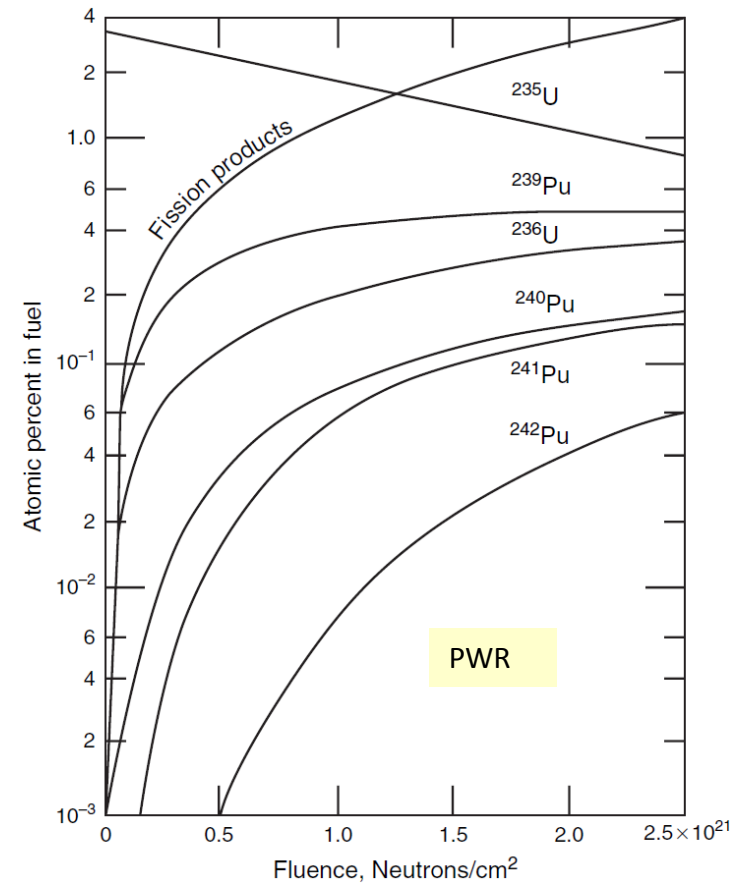
Fluence $\Phi(t) = \int_0^t \phi(t') dt'$ Kleine absorptie

Evenzo 28 $N^{28}(t) = N^{28}(0) e^{-\sigma_a^{28} \Phi(t)} \approx N^{28}(0)$

We vinden $N^{49}(t) = \frac{\sigma_\gamma^{28}}{\sigma_a^{49}} N^{28}(0) \left(1 - e^{-\sigma_a^{49} \Phi(t)} \right)$

Breeding ratio $CR(t) = \frac{\sigma_\gamma^{28} N^{28}(0)}{\sigma_a^{25} N^{25}(t) + \sigma_a^{49} N^{49}(t)}$

Verder $k(t) = \frac{\nu \sigma_f^{25} N^{25}(t) + \nu \sigma_f^{49} N^{49}(t)}{\sigma_a^{25} N^{25}(t) + \sigma_a^{49} N^{49}(t) + \Sigma_\gamma^{28} + \Sigma_\gamma^{49}(t) + \varsigma(V_m/V_f) \Sigma_a^m} \epsilon p P_{NL}$



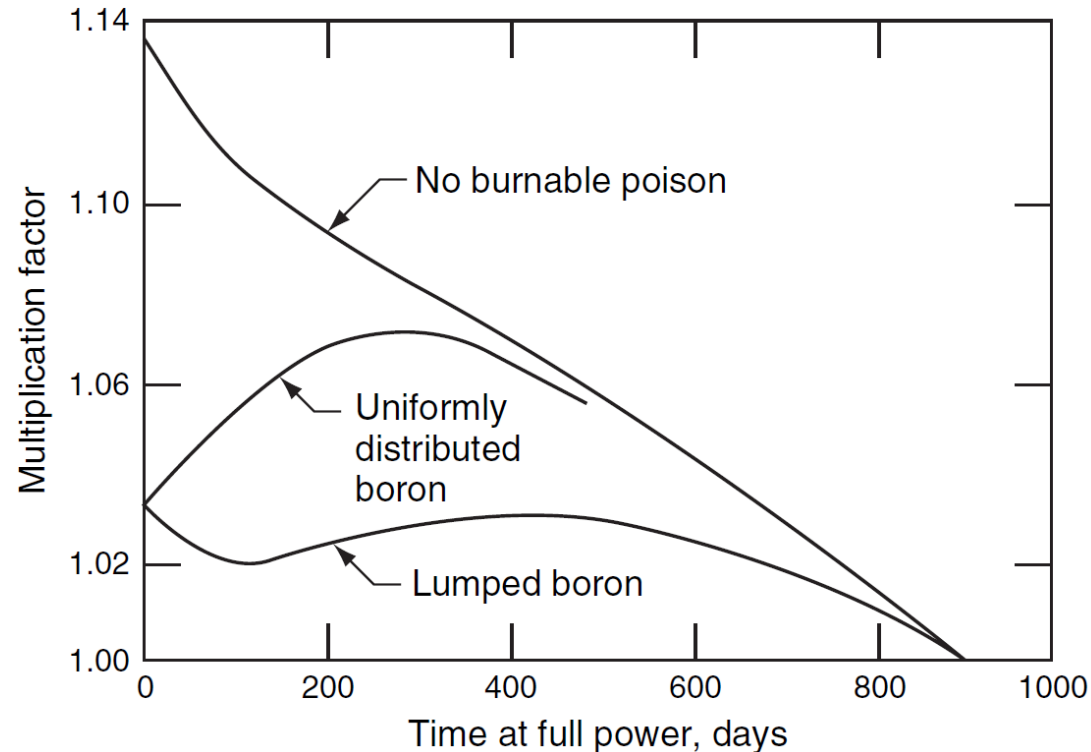
Burnable poisons

Los neutronabsorbers op in koelvloeistof

Beperk hiermee de excess reactivity

Deze materialen hebben een grote absorptie werkzame doorsnede, worden opgebrand, en zijn effectief in het begin van het reactor leven

Lumping leidt tot ruimtelijke self-shielding



Splijtingsproducten en actiniden

Productie van splijtingsproducten is potentieel gezondheidsrisico
Belangrijk zijn jodium, strontium en cesium

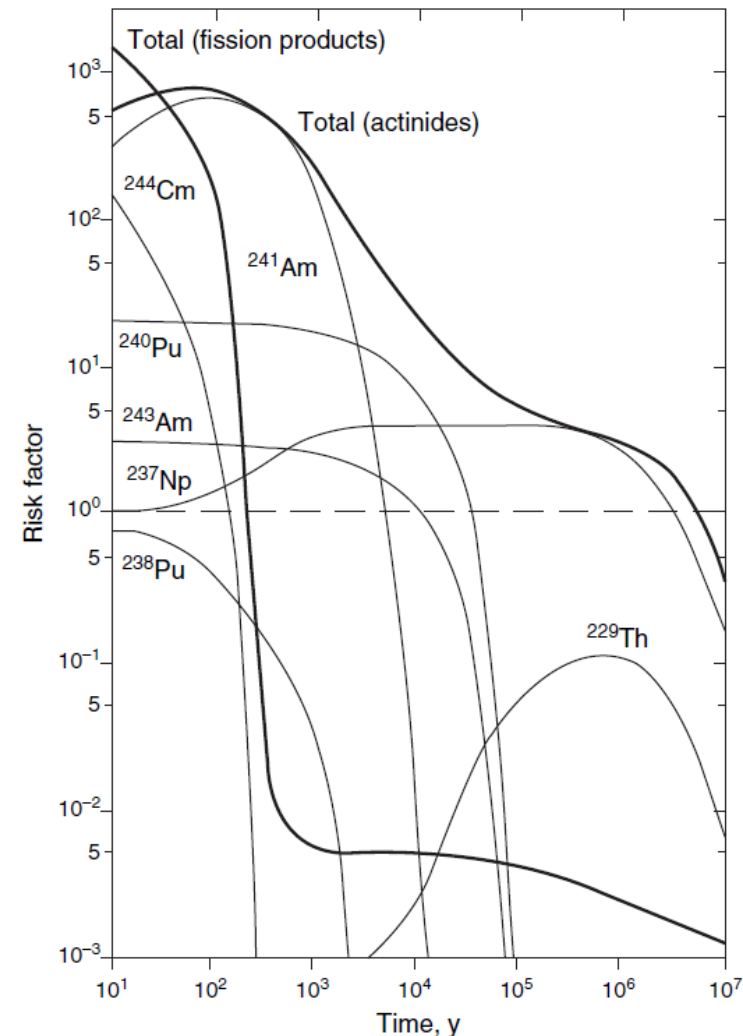
Na ongeveer een eeuw komt alle
radioactiviteit van de actiniden en *niet*
van de splijtingsproducten

Tim van der Hagen (TU Delft) over
hoogradioactief afval. Bij 100% gebruik van
kernenergie

Afval per gezin 0.4 gram per jaar
In een leven, 1 biljartbal per persoon

Borssele: 1.5 kubieke meter per jaar:
140 kilo actiniden,
450 kilo splijtingsproducten

Snelle reactoren (4e generatie) maken
transmutatie mogelijk: reduceer levensduur
van 220.000 jaar tot 500 – 5000 jaar



Diffusielengte

Afstand die een neutron aflegt van geboorte op $r = 0$ tot absorptie

Er geldt $\bar{r^2} = \frac{\int r^2 \Sigma_a \phi(r) dV}{\int \Sigma_a \phi(r) dV}$

Met $\phi(r) = \frac{s_p}{4\pi D r} \exp(-r/L)$

$$\bar{r^2} = \frac{\int_0^\infty r^2 \Sigma_a \frac{s_p}{4\pi D r} \exp(-r/L) 4\pi r^2 dr}{\int_0^\infty \Sigma_a \frac{s_p}{4\pi D r} \exp(-r/L) 4\pi r^2 dr} = \frac{\int_0^\infty r^3 \exp(-r/L) dr}{\int_0^\infty r \exp(-r/L) dr}$$

Uitrekenen levert $\bar{r^2} = 6L^2 \rightarrow L = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\bar{r^2}} = 0.408 \sqrt{\bar{r^2}}$

Diffusielengte is evenredig met rms diffusieafstand van geboorte tot absorptie

Vrije weglengte $\lambda = 1/\Sigma$

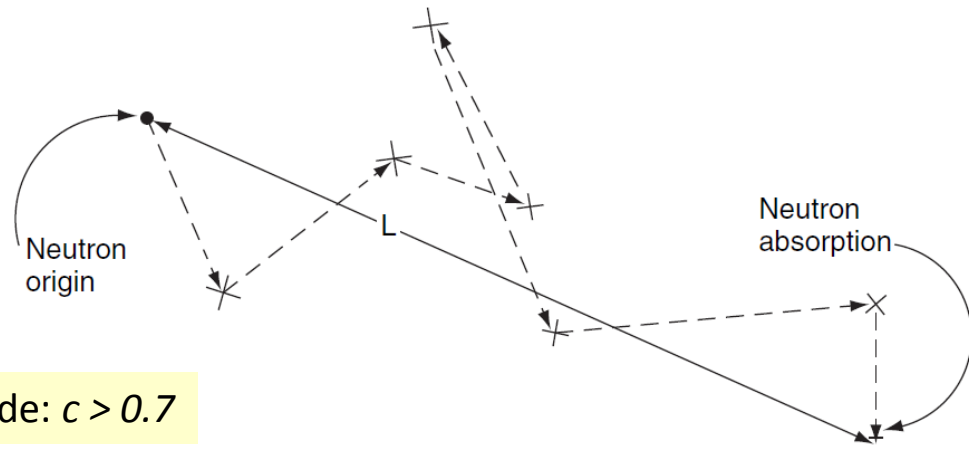
Isotrope verstrooiing $D = 1/(3\Sigma_t) = \lambda/3$

Met $c = \Sigma_s/\Sigma_t$ en $\Sigma_t = \Sigma_s + \Sigma_a$

$\rightarrow \Sigma_a = (1 - c)\Sigma_t = (1 - c)/\lambda$

Dus $L = \lambda / \sqrt{3(1 - c)}$

Voorwaarde: $c > 0.7$



Voorbeeld: kritische bolvormige reactor

Flux neemt toe met toenemende k_∞

Dit komt door de noemer in

$$\phi(r) = \frac{s_o'''}{(k_\infty - 1)\Sigma_a} \left[\frac{\tilde{R} \sin\left(L^{-1} \sqrt{k_\infty - 1} r\right)}{r \sin\left(\underbrace{L^{-1} \sqrt{k_\infty - 1} \tilde{R}}_{\pi \rightarrow \text{flux oneindig}}\right)} - 1 \right]$$

Als de flux oneindig wordt is de bol critical

We verwachten dat de uitdrukking voor de flux singulier wordt

Criticality condition voor eindige reactor $k = P_{NL} k_\infty = 1$

Voor de sferische reactor geldt $L^{-1} \sqrt{k_\infty - 1} \tilde{R} = \pi$

➡ $1 = \frac{k_\infty}{1 + (\pi L / \tilde{R})^2}$

De nonleakage probability is dus

$$P_{NL} = \frac{1}{1 + (\pi L / \tilde{R})^2}$$

Merk op: dus geldt $\Gamma = (\pi L / \tilde{R})^2$

Zoals verwacht neemt nonleakage toe met $\tilde{R}/L$ -ge-extrapoleerde reactorstraal gemeten in diffusielengten

Material buckling term $B_m = L^{-1} \sqrt{k_\infty - 1}$

Geometric buckling term $B_g = \pi / \tilde{R}$

Criticality $B_g = B_m$

