

Opgave 1: In deze opgave beschouwen we verschillende manieren om de toestand van een gas te veranderen van (P_1, V_1, T_1) naar toestand (P_2, V_2, T_2) . We zullen hierbij aannemen dat het een ideaal gas betreft, zodat de relatie tussen druk P , volume V en temperatuur gegeven wordt door de ideale gaswet: $PV/T = \text{constant}$. Verder beschouwen we de situatie waarbij het gas na de verandering dezelfde temperatuur heeft als ervoor, oftewel we nemen aan dat $T_1 = T_2$. We staan echter wel toe dat het gas *tijdens* het proces van temperatuur verandert.

a). We zullen eerst kijken naar de situatie waarbij de temperatuur tijdens de toestandsverandering constant is (men spreekt dan van een *isothermisch* proces). Laat zien dat de arbeid W benodigd om de druk van het gas te verhogen van P_1 naar P_2 dan gegeven wordt door

$$W \propto T \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right).$$

Waarom hangt deze uitdrukking niet af van de waarden V_1 en V_2 van het volume voor en na de drukverhoging?

Het gas kan ook dezelfde toestandsverandering ondergaan door een ander proces: eerst wordt het volume constant gehouden (een *isochorisch* proces) op de beginwaarde V_1 terwijl de druk wordt veranderd van P_1 naar P_2 ; daarna wordt de druk constant gehouden (een *isobarisch* proces) op de waarde P_2 terwijl het volume wordt veranderd van V_1 naar V_2 .

b). Bereken de temperatuurverandering van het eerste deel en die van het tweede deel. Laat zien dat de eindtemperatuur gelijk is aan de begintemperatuur.

c). Bereken de arbeid benodigd om de toestandsverandering op deze manier te bewerkstelligen.

Opgave 2: Als we een ideaal gas zodanig isoleren van de omgeving dat er geen toestandsverandering plaats zal hebben door de Nulde Hoofdwet, kan worden aangetoond dat de relatie tussen druk en volume wordt gegeven door

$$PV^\gamma = \text{constant},$$

waar de waarde van de parameter γ afhankelijk is van het type gas, en bij zeer goede benadering als constant kan worden gezien.

a). Bewijs dat de arbeid benodigd om de toestand van het gas te doen veranderen van P_1, V_1, T_1 naar P_2, V_2, T_2 , gegeven wordt door

$$W = - \frac{P_1 V_1 - P_2 V_2}{\gamma - 1}.$$

b). Voor koolmonoxide is de waarde van γ ongeveer 1.4. Als de aanvankelijke druk gegeven werd door $P = 10^6$ Pa en de uiteindelijke druk door $P = 2 \cdot 10^5$ Pa, het aanvankelijk volume door $V_1 = 10^{-3}$ m³ en het uiteindelijk volume door $V_2 = 3.16 \cdot 10^{-3}$ m³, bereken de relatieve temperatuurstijging T_2/T_1 en de benodigde arbeid. De laatste grootheid heeft in dit geval een negatieve waarde. Wat is hiervan de fysische interpretatie?

Opgave 3: In deze opgave beschouwen we mechanische systemen, oftewel we bestuderen de dynamica van een massa onder invloed van krachten. We gaan er hierbij van uit dat de dynamica

plaatsvindt in twee dimensies.

a). Laat zien dat de arbeid, benodigd om de massa onder invloed van de kracht

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} yx \\ x^2 \end{pmatrix},$$

te verplaatsen van een beginpositie naar een eindpositie, afhankelijk is van de gekozen weg. b). Laat zien dat de arbeid, benodigd om de massa onder invloed van de kracht

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix},$$

te verplaatsen van een beginpositie naar een eindpositie, onafhankelijk is van de gekozen weg.

Aangezien de arbeid uit opgave b onafhankelijk is van het gekozen pad, is het mogelijk om de arbeid te interpreteren als een toestandsgrrootheid. Deze noemt men dan de potentiële energie $V(\vec{x})$, en is gerelateerd aan de kracht via de definitie van de arbeid

$$V(\vec{x}) + C = - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}.$$

waarin C een constante is die afhangt van de beginpositie $\vec{x}_0$.

c). Bereken de uitdrukking voor de potentiële energie $V(\vec{x})$. Doe dit door een functie $\vec{x}_p(t)$ van de tijd te definiëren die beschrijft welk pad p de massa neemt om van positie $\vec{x}_0$ naar positie $\vec{x}$ te gaan, en hiermee de integraal over het pad om te schrijven naar een integraal over de tijd. Maakt het uit hoe u dit pad kiest? Check uw uitdrukking voor de potentiële energie door $-\vec{\nabla}V(\vec{x})$ uit te rekenen, en te zien dat u weer precies de uitdrukking voor de kracht $\vec{F}(\vec{x})$ terugvindt.

Opgave 4: In deze opgave beschouwen we een mechanisch systeem waarin een massa beweegt onder invloed van een *radiale kracht*, wat wil zeggen dat de kracht een aantrekking of afstoting beschrijft ten gevolge van de aanwezigheid van een andere massa, en waarbij de kracht in de richting staat van de afstand $\vec{r}$ tussen de twee massa's.

a). Noem een aantal voorbeelden van radiale krachten, en beargumenteer dat deze altijd van de volgende vorm zijn:

$$\vec{F}(\vec{x}) = f(r) \vec{r},$$

waarin $f(r)$ een functie is die alleen van de grootte r van de afstand $\vec{r}$ afhangt.

In een tweedimensionale ruimte kan een vector $\vec{r} = (x, y)$ worden uitgedrukt in poolcoördinaten r en θ door middel van de formules

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Als we willen nagaan of de arbeid, benodigd om een massa te verplaatsen wanneer er een radiale kracht werkt, onafhankelijk is van het gekozen pad, moeten we nagaan of aan de conditie $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ is voldaan. In ons tweedimensionale geval betekent dit dat we moeten nagaan of er geldt

$$\frac{\partial}{\partial x} F_y = \frac{\partial}{\partial y} F_x.$$

Om dit te doen, zullen we eerst de krachten en de afgeleides moeten uitdrukken in poolcoördinaten.

b). Laat zien dat de kracht in poolcoördinaten kan worden uitgedrukt als

$$\vec{F}(r) = f(r) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix},$$

en dat de afgeleides in poolcoördinaten als

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

c). Gebruik makend van de antwoorden uit opgave b, laat zien dat de arbeid voor radiale krachten onafhankelijk is van het gekozen pad.

Uit de conclusie van opgave c volgt dat de arbeid kan worden opgevat als een toestandsgrootte, die de potentiële energie $V(\vec{r})$ wordt genoemd. Als we de kinetische energie K definiëren als

$$K(t) = \frac{1}{2}mv^2(t),$$

kan de totale mechanische energie E worden opgeschreven als de som van potentiële en kinetische energie

$$E = K + V.$$

d). Bewijs dat de mechanische energie constant is in de tijd. U hoeft hiervoor niet eerst de expliciete vorm van de potentiële energie te berekenen; het volstaat om aan te nemen dat de potentiële energie een functie is van de positie van de massa.

e). Stel dat de kracht naast een radiale aantrekking of afstoting ook wrijving beschrijft, en dat deze een functie is van de snelheid v . Laat zien dat de radiale kracht dan nog altijd een arbeid oplevert die onafhankelijk is van de afgelegde weg, maar dat de mechanische energie niet meer constant is in de tijd. Wat zegt de Eerste Hoofdwet van de Thermodynamica over dit systeem?