

Tentamen: Structuur der materie: subatomaire fysica

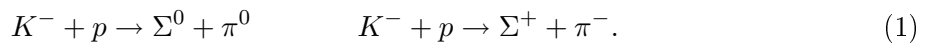
Docent: J. F. J. van den Brand
Datum: 19 December 2008
Zaal: S2.09
Tijd: 12.00 - 14.00 uur

- Vermeld je naam op elke pagina.
- Vermeld je collegenummer.
- Alle benodigde fysische constanten en het quarkmodel zijn te vinden in de bijlage.
- Gebruik van een rekenmachine is toegestaan.
- Alle opgaven hebben hetzelfde gewicht.
- Motiveer je resultaat teneinde een maximale score te bereiken.

Opgave 1a. Geef met argumenten aan welke van de volgende reacties wel of niet mogelijk zijn. Ga ervan uit dat voor botsingsprocessen er voldoende energie beschikbaar is om de deeltjes te kunnen produceren.

Reactie	Wel/niet mogelijk (+ = wel; - = niet)	Commentaar
$\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow e^+ + n$		
$\nu_e + p \rightarrow e^+ + \Lambda^0 + K^0$		
$\nu_e + p \rightarrow e^- + \Sigma^+ + K^+$		
$p + \pi^- \rightarrow p + K^-$		
$p + \pi^- \rightarrow \Lambda^0 + \bar{\Sigma}^0$		
$\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n$		

Opgave 1b. Beschouw de volgende twee reacties:



Wat is de waarde van de isospin I en I_3 (de z -component van I) voor de verschillende deeltjes?

Opgave 1c. Welke waarden kan de totale isospin aannemen voor de reacties gegeven in opg. 1b?

Opgave 1d. Vind de verhouding van de werkzame doorsneden voor deze reacties door aan te nemen dat de een of de andere van beide isospins domineert. Gebruik de Clebsch-Gordan tabel om de isospin decomposities van de verstrooiingsamplituden voor beide reacties te vinden.

Opgave 2. We beschouwen de verhouding R van werkzame doorsneden,

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}.$$

Opgave 2a. Maak een schatting van R voor een totale zwaartepuntenergie van 2.8 GeV.

Opgave 2b. Hoe verwacht je dat R zal veranderen als de energie hoog genoeg is om ook b -quarks te produceren?

Opgave 3. De spinoren $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ en $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ zijn gegeven.

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c(p_z)}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad v^{(1)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = -N \begin{pmatrix} \frac{c(p_z)}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Opgave 3a) Toon aan dat de spinoren *orthogonaal* zijn,

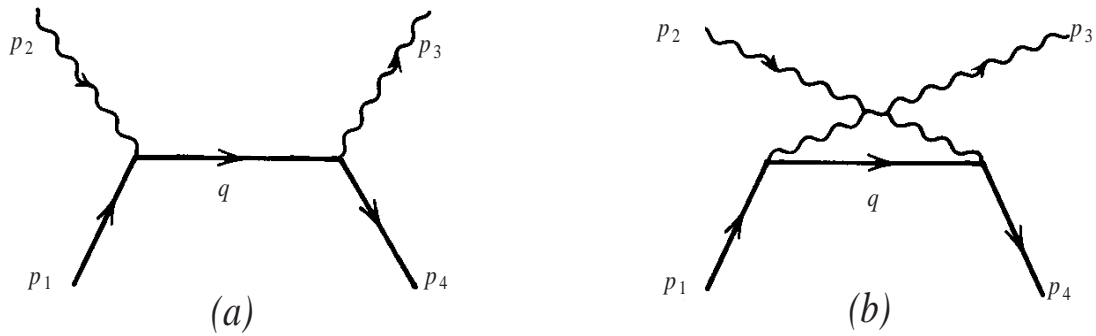
$$\bar{u}^{(1)}u^{(2)} = 0 \quad \text{en} \quad \bar{v}^{(1)}v^{(2)} = 0.$$

Opgave 3b) Toon aan dat de spinoren *compleet* zijn, in de zin dat geldt

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}\bar{u}^{(s)} = (\gamma^\mu p_\mu + mc).$$

Merk op dat $N = \sqrt{\frac{E+mc^2}{c}} \rightarrow N^2 = \frac{E+mc^2}{c}$ en dat $\frac{c^2|\vec{p}|^2}{(E+mc^2)^2}(E+mc^2) = E - mc^2$.

Opgave 4. In deze opgave beschouwen we de Feynman regels voor QED.



Figuur 1: Feynmandiagrammen voor Compton verstrooiing $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$. De horizontale richting komt overeen met een toename van de tijd (van links naar rechts).

Opgave 4a) In Compton verstrooiing botst een foton met golflengte λ op een stilstaand elektron (massa m_e). Na de botsing heeft het foton golflengte λ' en is het verstrooid over een hoek θ . Leid de onderstaande uitdrukking af:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta). \quad (2)$$

Opgave 4b) Figuur 1a toont een Feynmandiagram voor Compton verstrooiing. Gebruik de Feynman regels om de amplitude van diagram (a) te bepalen.

Opgave 4c) Figuur 1b geeft het tweede Feynmandiagram dat in eerste orde bijdraagt tot Compton verstrooiing. Gebruik de Feynman regels om ook de amplitude van diagram (b) te bepalen.

Opgave 4d) Bepaal de totale amplitude voor het (eerste-orde) verstrooiingsproces. Dient er wel of niet een relatief minteken te worden gebruikt?

BIJLAGE: FUNDAMENTELE CONSTANTEN

$$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_p = 1.672 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

$$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ 1/mol}$$

$$k = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

lichtsnelheid

constante van Planck

lading van het elektron

massa van het elektron

massa van het proton

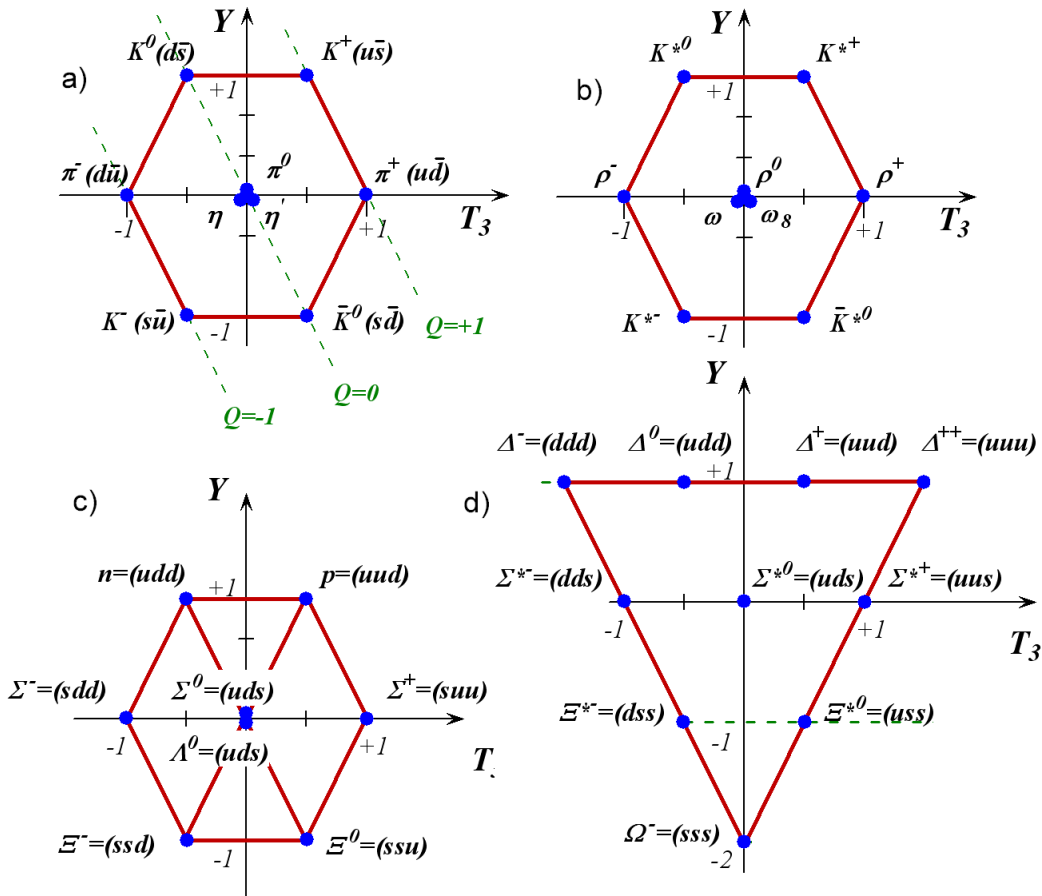
permittiviteit van het vacuüm

permeabiliteit van het vacuüm

constante van Avogadro

constante van Boltzmann

BIJLAGE: QUARKMODEL



Figuur 2: Samenstelling van mesonen en baryonen uit quarks met flavors up, down, en strange in multipletten. Figuur a) toont het $J^\pi = 0^-$ pseudoscalaire meson-octet en meson-singlet; b) de vectormesonen met $J^\pi = 1^-$; c) het baryon-octet met $J^\pi = \frac{1}{2}^+$; d) het baryon-decouplet met $J^\pi = \frac{3}{2}^+$. T_3 is de z -projectie van de isospin en $Y = S$ voor mesonen en $Y = S + 1$ voor baryonen, met S de vreemdheid.

35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

J	J	\dots
M	M	\dots
m_1	m_2	\dots
m_1	m_2	\dots
\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots
Coefficients		

$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$

$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$

$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}\right)$

$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$

$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$

$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$

$d_{m,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$

$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M \rangle$
 $= (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M \rangle$

$d_{m',m}^j = (-1)^{m-m'} d_{-m,-m'}^j = d_{-m,-m'}^j$

$d_{0,0}^1 = \cos \theta$

$d_{1/2,1/2}^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2}$

$d_{1,1}^1 = \frac{1 + \cos \theta}{2}$

$d_{1/2,-1/2}^{1/2} = -\sin \frac{\theta}{2}$

$d_{1,0}^1 = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$

$d_{1,-1}^1 = \frac{1 - \cos \theta}{2}$

$d_{3/2,3/2}^{3/2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$

$d_{3/2,1/2}^{3/2} = -\sqrt{3} \frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$

$d_{3/2,-1/2}^{3/2} = \sqrt{3} \frac{1 - \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$

$d_{3/2,-3/2}^{3/2} = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$

$d_{1/2,1/2}^{3/2} = \frac{3 \cos \theta - 1}{2} \cos \frac{\theta}{2}$

$d_{1/2,-1/2}^{3/2} = -\frac{3 \cos \theta + 1}{2} \sin \frac{\theta}{2}$

$d_{2,2}^2 = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2}\right)^2$

$d_{2,1}^2 = -\frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \theta$

$d_{2,0}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4} \sin^2 \theta$

$d_{2,-1}^2 = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \theta$

$d_{2,-2}^2 = \left(\frac{1 - \cos \theta}{2}\right)^2$

$d_{1,1}^2 = \frac{1 + \cos \theta}{2} (2 \cos \theta - 1)$

$d_{1,0}^2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \theta$

$d_{1,-1}^2 = \frac{1 - \cos \theta}{2} (2 \cos \theta + 1)$

$d_{0,0}^2 = \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}\right)$

Figure 35.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.

PARTICLE DATA
(Mass in MeV/c²; Lifetime in Seconds; Charge in Units of Proton Charge.)

QUARKS (Spin 1/2)

	Flavor	Charge	Mass (speculative)		
			Bare	Effective	
				In baryons	In mesons
First generation	<i>d</i>	$-\frac{1}{3}$	7.5	} 363	310
	<i>u</i>	$+\frac{2}{3}$	4.2		
Second generation	<i>s</i>	$-\frac{1}{3}$	150	538	483
	<i>c</i>	$+\frac{2}{3}$	1100		1500
Third generation	<i>b</i>	$-\frac{1}{3}$	4200		4700
	<i>t</i>	$+\frac{2}{3}$			>23,000

LEPTONS (Spin 1/2)

	Lepton	Charge	Mass	Lifetime	Principal decays
First generation	<i>e</i>	-1	0.511003	∞	—
	ν_e	0	0	∞	—
Second generation	μ	-1	105.659	2.197×10^{-6}	$e\nu_\mu\bar{\nu}_e$
	ν_μ	0	0	∞	—
Third generation	τ	-1	1784	3.3×10^{-13}	$\mu\nu_\tau\bar{\nu}_\mu, e\nu_\tau\bar{\nu}_e, \rho\nu_\tau$
	ν_τ	0	0	∞	—

MEDIATORS (Spin 1)

Mediator	Charge	Mass	Lifetime	Force
gluon	0	0	∞	strong
photon (γ)	0	0	∞	electromagnetic
W^\pm	± 1	81,800	unknown	(charged) weak
Z^0	0	92,600	unknown	(neutral) weak
				} electroweak

BARYONS (Spin $\frac{1}{2}$)

Baryon	Quark content	Charge	Mass	Lifetime	Principal decays
$N \begin{cases} p \\ n \end{cases}$	uud udd	+1 0	938.280 939.573	∞ 900	— $p\bar{e}\bar{\nu}_e$
Λ	uds	0	1115.6	2.63×10^{-10}	$p\pi^-, n\pi^0$
Σ^+	uus	+1	1189.4	0.80×10^{-10}	$p\pi^0, n\pi^+$
Σ^0	uds	0	1192.5	6×10^{-20}	$\Lambda\gamma$
Σ^-	dds	-1	1197.3	1.48×10^{-10}	$n\pi^-$
Ξ^0	uss	0	1314.9	2.90×10^{-10}	$\Lambda\pi^0$
Ξ^-	dss	-1	1321.3	1.64×10^{-10}	$\Lambda\pi^-$
Λ_c^+	udc	+1	2281	2×10^{-13}	not established

BARYONS (Spin $\frac{3}{2}$)

Baryon	Quark content	Charge	Mass	Lifetime	Principal decays
Δ	uuu, uud, udd, ddd	+2, +1, 0, -1	1232	0.6×10^{-23}	$N\pi$
Σ^*	uus, uds, dds	+1, 0, -1	1385	2×10^{-23}	$\Lambda\pi, \Sigma\pi$
Ξ^*	uss, dss	0, -1	1533	7×10^{-23}	$\Xi\pi$
Ω^-	sss	-1	1672	0.82×10^{-10}	$\Lambda K^-, \Xi^0\pi^-, \Xi^-\pi^0$

PSEUDOSCALAR MESONS (Spin 0)

Meson	Quark content	Charge	Mass	Lifetime	Principal decays
π^\pm	$u\bar{d}, d\bar{u}$	+1, -1	139.569	2.60×10^{-8}	$\mu\nu_\mu$
π^0	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	0	134.964	8.7×10^{-17}	$\gamma\gamma$
K^\pm	$u\bar{s}, s\bar{u}$	+1, -1	493.67	1.24×10^{-8}	$\mu\nu_\mu, \pi^\pm\pi^0, \pi^\pm\pi^+\pi^-$
K^0, \bar{K}^0	$d\bar{s}, s\bar{d}$	0, 0	497.72	$\left\{ \begin{array}{l} K_S^0 0.892 \times 10^{-10} \\ K_L^0 5.18 \times 10^{-8} \end{array} \right.$	$\pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0$ $\pi e\nu_e, \pi\mu\nu_\mu, \pi\pi\pi$
η	$(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$	0	548.8	7×10^{-19}	$\gamma\gamma, \pi^0\pi^0\pi^0, \pi^+\pi^-\pi^0$
η'	$(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})/\sqrt{3}$	0	957.6	3×10^{-21}	$\eta\pi\pi, \rho^0\gamma$
D^\pm	$c\bar{d}, d\bar{c}$	+1, -1	1869	9×10^{-13}	$K\pi\pi$
D^0, \bar{D}^0	$c\bar{u}, u\bar{c}$	0, 0	1865	4×10^{-13}	$K\pi\pi$
F^\pm (now D_s^\pm)	$c\bar{s}, s\bar{c}$	+1, -1	1971	3×10^{-13}	not established
B^\pm	$u\bar{b}, b\bar{u}$	+1, -1	5271	14×10^{-13}	$D + ?$
B^0, \bar{B}^0	$d\bar{b}, b\bar{d}$	0, 0	5275		
η_c	$c\bar{c}$	0	2981	6×10^{-23}	$KK\pi, \eta\pi\pi, \eta'\pi\pi$

VECTOR MESONS (Spin 1)

Meson	Quark content	Charge	Mass	Lifetime	Principal decays
ρ	$u\bar{d}, d\bar{u}, (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	+1, -1, 0	770	0.4×10^{-23}	$\pi\pi$
K^*	$u\bar{s}, s\bar{u}, d\bar{s}, s\bar{d}$	+1, -1, 0, 0	892	1×10^{-23}	$K\pi$
ω	$(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$	0	783	7×10^{-23}	$\pi^+\pi^-\pi^0, \pi^0\gamma$
ϕ	$s\bar{s}$	0	1020	20×10^{-23}	$K^+K^-, K^0\bar{K}^0$
J/ψ	$c\bar{c}$	0	3097	1×10^{-20}	$e^+e^-, \mu^+\mu^-, 5\pi, 7\pi$
D^*	$c\bar{d}, d\bar{c}, c\bar{u}, u\bar{c}$	+1, -1, 0, 0	2010	$>1 \times 10^{-22}$	$D\pi, D\gamma$
Υ	$b\bar{b}$	0	9460	2×10^{-20}	$\tau^+\tau^-, \mu^+\mu^-, e^+e^-$

PAULI MATRICES

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k; \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k; \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$$

$$(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}); \quad e^{i\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma}} = \cos \theta + i\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin \theta$$

DIRAC MATRICES

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}; \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Product rules and trace theorems: see Appendix C.

DIRAC EQUATION

$$i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc\psi = 0$$

$$(\not{\partial} - mc)u = 0; \quad (\not{\partial} + mc)v = 0$$

$$\bar{u}(\not{\partial} - mc) = 0; \quad \bar{v}(\not{\partial} + mc) = 0$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0; \quad \bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0; \quad \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger}$$

FEYNMAN RULES

EXTERNAL LINES

Spin 0:	(Nothing)
Spin $\frac{1}{2}$:	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Incoming particle: } u \\ \text{Incoming antiparticle: } \bar{v} \\ \text{Outgoing particle: } \bar{u} \\ \text{Outgoing antiparticle: } v \end{array} \right.$
Spin 1:	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Incoming: } \epsilon^\mu \\ \text{Outgoing: } \epsilon^{\mu*} \end{array} \right.$

PROPAGATORS

Spin 0:	$\frac{i}{q^2 - (mc)^2}$
Spin $\frac{1}{2}$:	$\frac{i(\not{q} + mc)}{q^2 - (mc)^2}$
Spin 1:	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Massless: } \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \\ \text{Massive: } \frac{-i[g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / (mc)^2]}{q^2 - (mc)^2} \end{array} \right.$