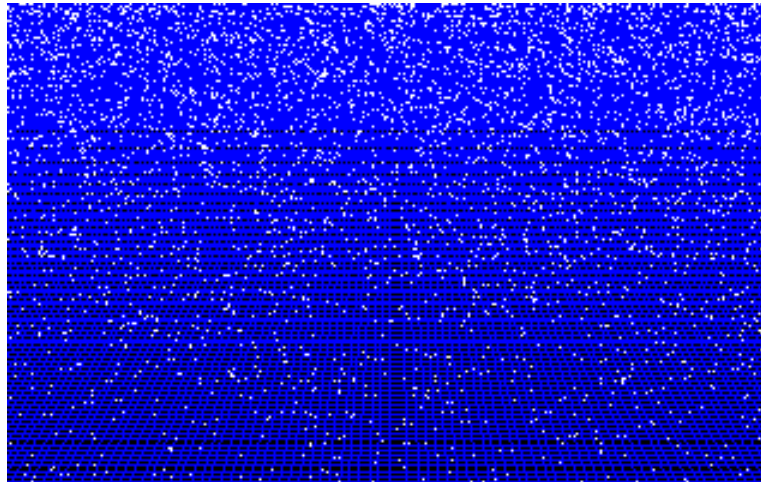


Elementaire Deeltjesfysica

FEW Cursus

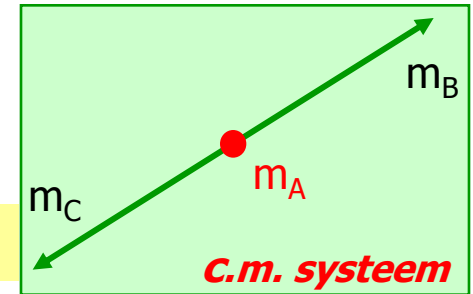


Jo van den Brand
24 November, 2008
Structuur der Materie

Inhoud

- **Inleiding**
 - Deeltjes
 - Interacties
- **Relativistische kinematica**
 - Lorentz transformaties
 - Viervectoren
 - Energie en impuls
- **Symmetrieën**
 - Behoudwetten
 - Discrete symmetrieën
- **Feynman berekeningen**
 - Gouden regel
 - Feynman regels
 - Diagrammen
- **Elektrodynamica**
 - Dirac vergelijking
 - Werkzame doorsneden
- **Quarks en hadronen**
 - Elektron-quark interacties
 - Hadron productie in e^+e^-
- **Zwakke wisselwerking**
 - Muon verval
 - Unificatie

Levensduur



Bijna alle elementaire deeltjes vervallen! d.w.z.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \# \text{ Deeltjes } t = t : & N(t) \text{ deeltjes} \\ \text{Begin } t = 0 : & N(0) \text{ deeltjes} \\ \text{Verval:} & dN(t) = -\Gamma N(t)dt \end{array} \right. \Rightarrow N(t) = N(0)e^{-\Gamma t}$$

Levensduur:

$$\tau \equiv \langle t \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} t N(t) dt}{\int_0^{+\infty} N(t) dt} = \frac{1}{\Gamma}$$

verschillende
vervalskanalen, b.v.

Vertakkings-
verhouding

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{tot} = \sum_{verval} \Gamma_i \\ \text{vertakkingsverhouding: } \frac{\Gamma_i}{\Gamma_{tot}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^+ \rightarrow p\pi^0, \\ \Delta^+ \rightarrow n\pi^+, \\ \Delta^+ \rightarrow \dots \end{array} \right.$$

Eenheden

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau : [T] = \frac{\hbar}{\text{GeV}} \\ \Gamma : [T]^{-1} = \frac{\text{GeV}}{\hbar} \end{array} \right. \text{ en } \hbar \approx 6.6 \times 10^{-25} \text{ GeV s}$$

b.v.

$$\begin{array}{l} J/\psi : \Gamma_{J/\psi} = 86 \text{ keV} \rightarrow \tau \approx \frac{6.6 \times 10^{-25}}{86 \times 10^{-6}} \approx 7.7 \times 10^{-21} \text{ s} \\ \mu : \tau = 2.2 \times 10^{-6} \text{ s} \rightarrow \Gamma_\mu \approx \frac{6.6 \times 10^{-25}}{2.2 \times 10^{-6}} \approx 3 \times 10^{-10} \text{ eV} \end{array}$$

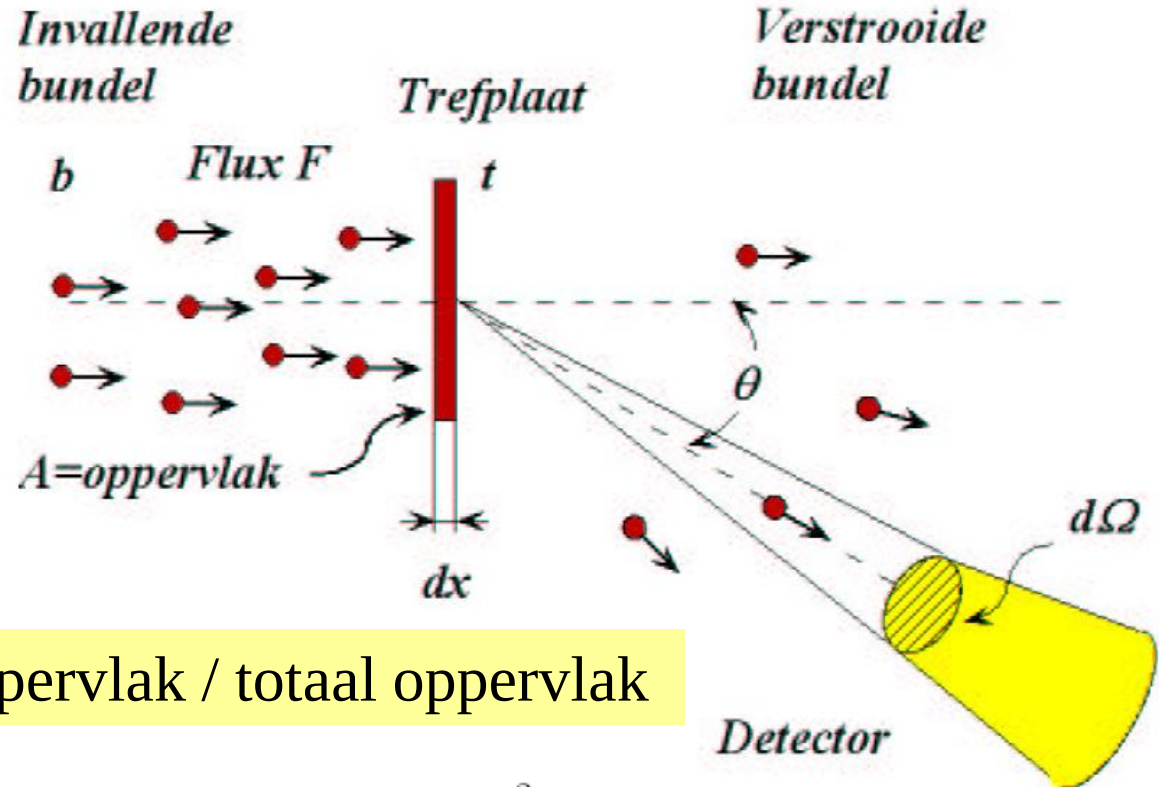
Werkzame doorsnede

Telsnelheid $A + B \rightarrow C + D$

$$\sigma \approx 1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$$

'fixed-target' experimenten

'collider' experimenten



Reactiekans: effectief oppervlak / totaal oppervlak

$$dP = \frac{\sigma n A dx}{A} = \sigma n dx$$

$$\sigma_{\text{geometrisch}} = \pi(R_b + R_t)^2$$

$$N(d) = N_0 e^{-n\sigma_{\text{totaal}} d},$$

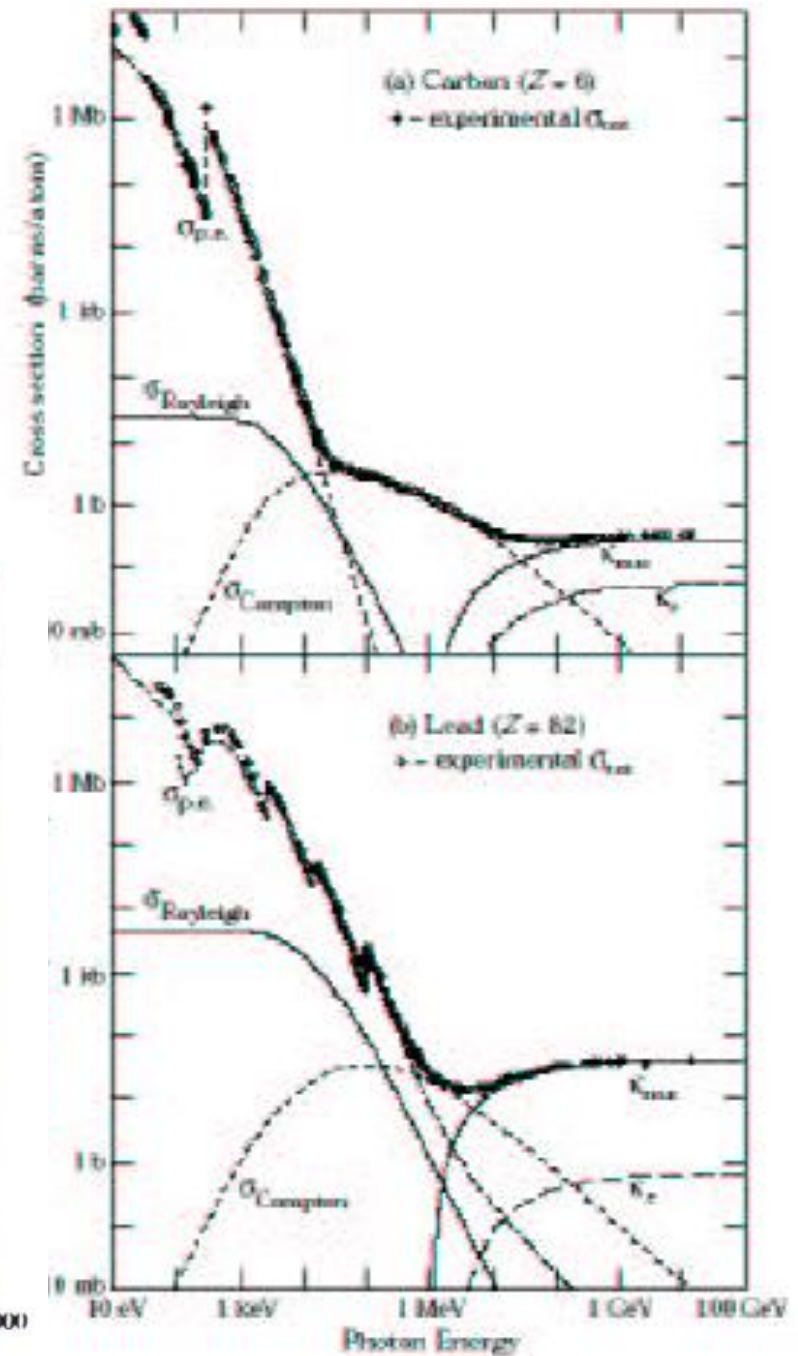
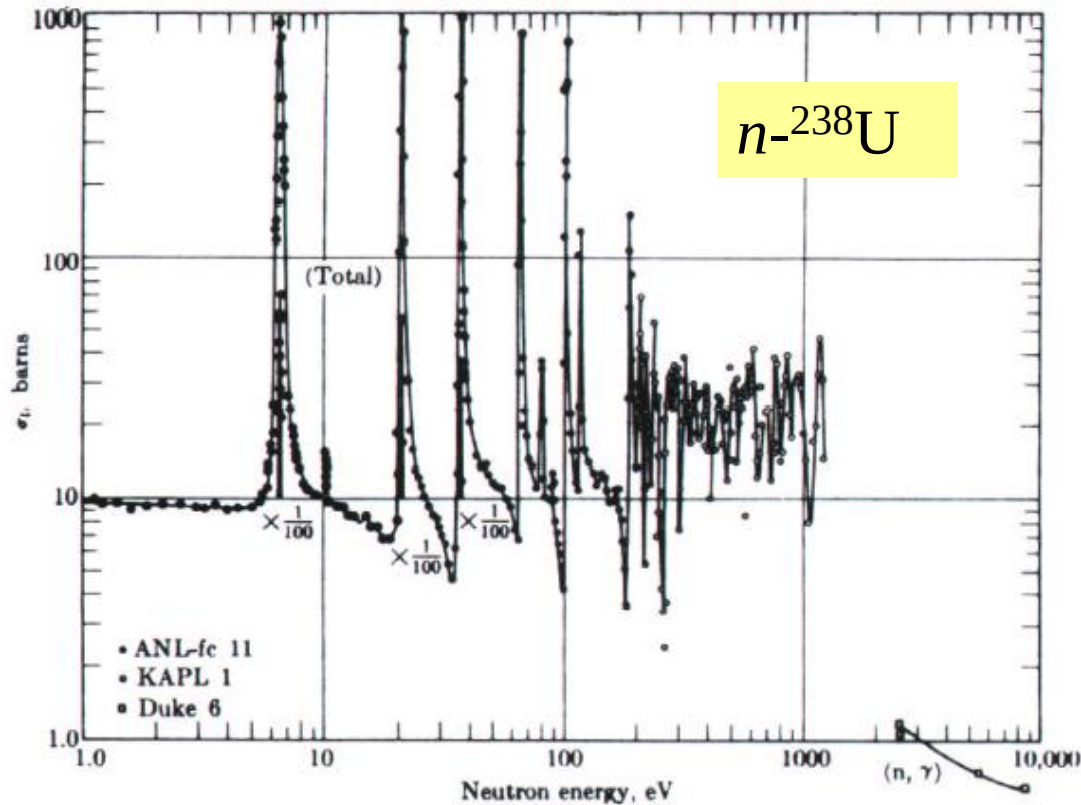
$$\sigma_{\text{totaal}} = \sum_i \sigma_i$$

$$N_i = N_0 \frac{\sigma_i}{\sigma_{\text{totaal}}} (1 - e^{-n\sigma_{\text{totaal}} d})$$

$$\approx N_0 n \sigma_i d \quad (\text{voor } n\sigma_{\text{totaal}} d \ll 1)$$

Voorbeelden

Foton-koolstof/lood



Voorbeeld: verstrooiing aan een harde bol

Verstrooiing aan een massieve bol:
Berekening werkzame doorsnede

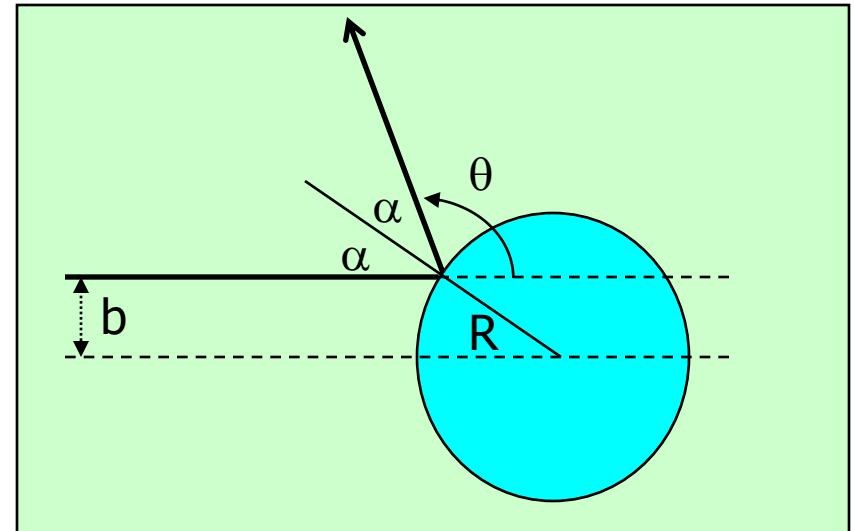
Geometrie

$$\begin{aligned} b &= R \sin \alpha \text{ en } 2\alpha + \theta = \pi \\ \sin \alpha &= \sin\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = \cos \frac{\theta}{2} \\ b &= R \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Berekening werkzame doorsnede:
(vgl. Rutherford verstrooiing)

$$d\Omega = d \cos \theta d\phi$$

Totale werkzame doorsnede,
oppervlak zoals de bundel die ziet:

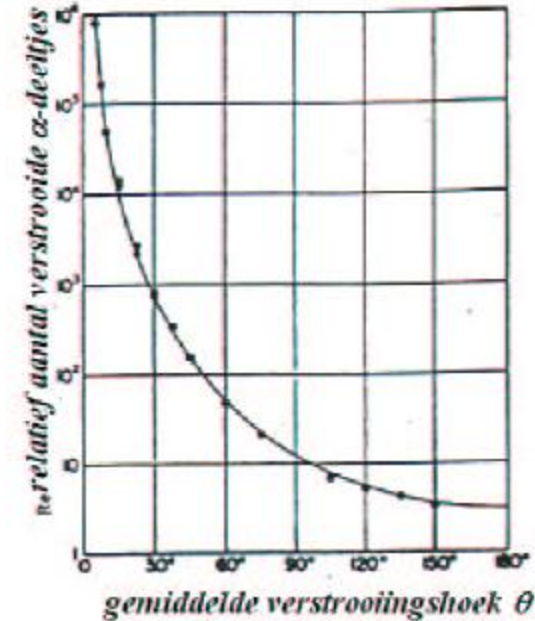
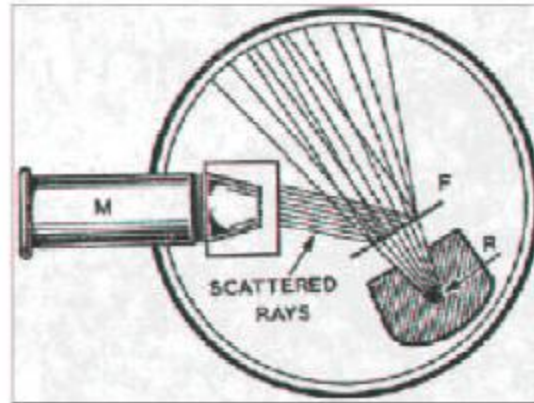


$$\begin{aligned} d\sigma &= 2\pi b db = 2\pi R \cos \frac{\theta}{2} d(R \cos \frac{\theta}{2}) \\ &= \pi R^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{\pi R^2}{2} \sin \theta d\theta = \frac{\pi R^2}{2} d \cos \theta \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{d\sigma}{d \cos \theta d\phi} = \frac{R^2}{4} \end{aligned}$$

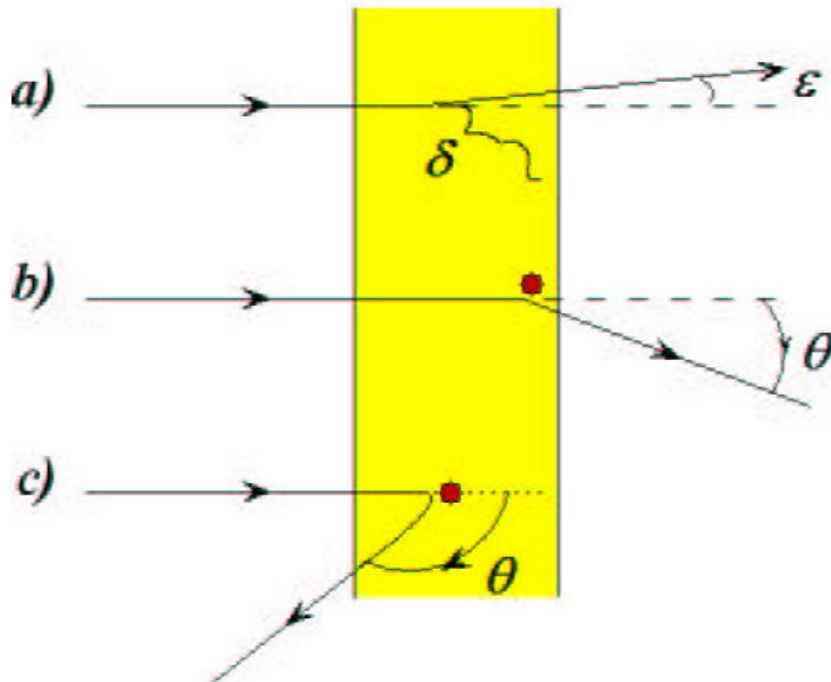
$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \pi R^2$$

Voorbeeld: Rutherford verstrooiing

Marsden en Geiger
rond 1910



Alfa deeltjes: $T_b = 4 - 7$ MeV



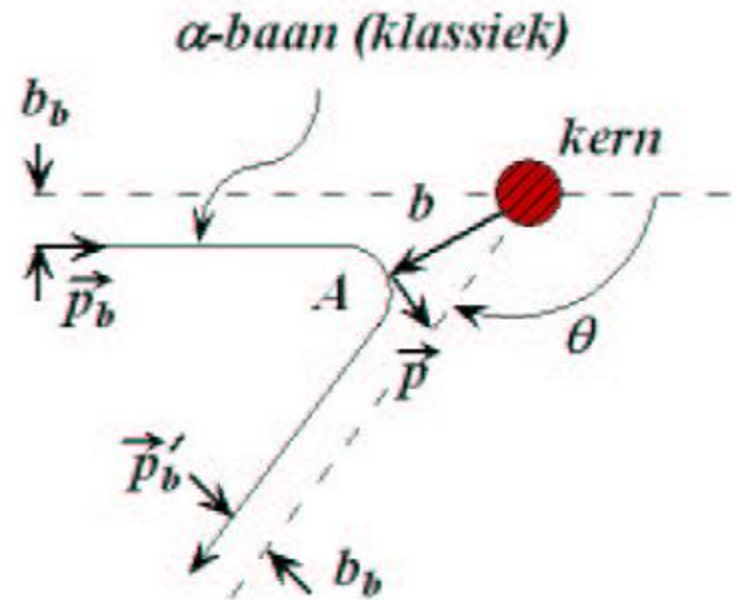
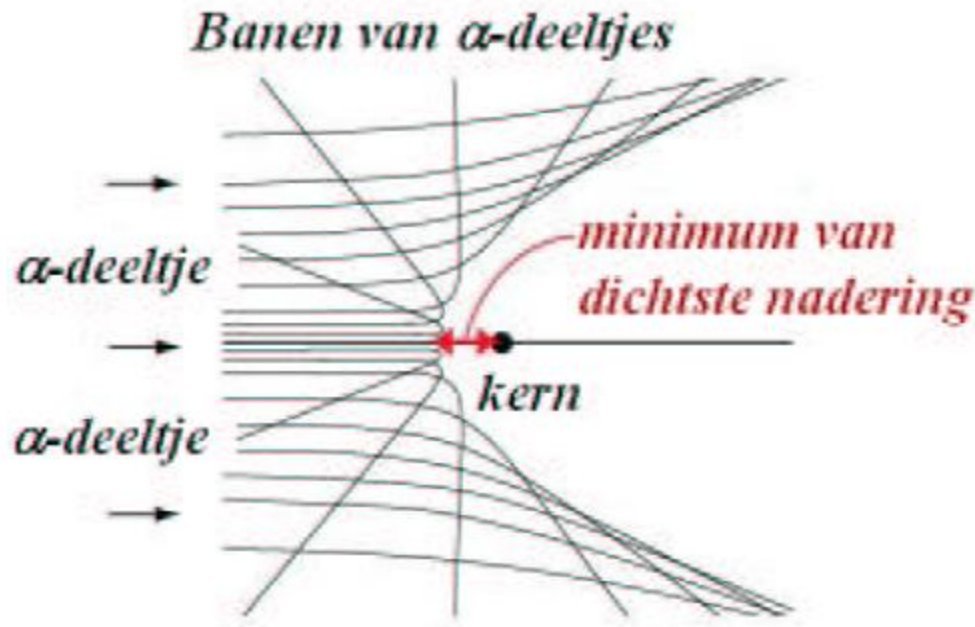
Coulomb potentiaal

$$V(r) = \frac{Z_b Z_t e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = Z_b Z_t \alpha \hbar c \frac{1}{r} = Z_b Z_t \cdot \frac{1.4}{r} \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$

$$\alpha = e^2 / 4\pi\epsilon_0 \hbar c = 1 / 137.035\,989\,5(61)$$

Rutherford verstrooiing

Coulomb potentiaal



Klassieke mechanica

$$T_b = T + Z_b Z_t \alpha \hbar c (b)^{-1}$$

behoud van energie,

$$p_b b_b = p b$$

behoud van impulsmoment,

$$\tan \frac{\theta}{2} = Z_b Z_t \alpha \hbar c (2 b_b T_b)^{-1}$$

bewegingsvergelijking.

Werkzame doorsnede

$$d\sigma = 2\pi b_b db_b = 2\pi (Z_b Z_t \alpha \hbar c)^2 \left(\frac{1}{2T_b} \right)^2 \cot \frac{\theta}{2} \sin^{-2} \frac{\theta}{2} \cdot \frac{d\theta}{2}$$

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta = 4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta$$

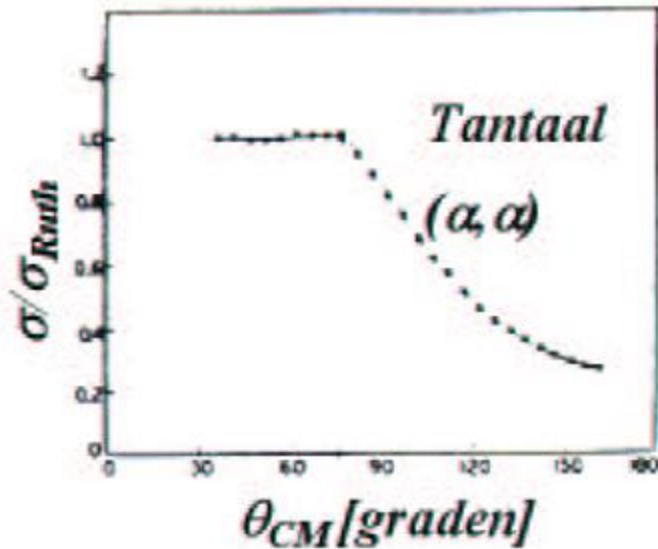
Voor $b_b < b < b_b + db_b$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} = \left(\frac{Z_b Z_t \alpha \hbar c}{4T_b} \right)^2 \sin^{-4} \frac{\theta}{2}$$

Rutherford verstrooiing

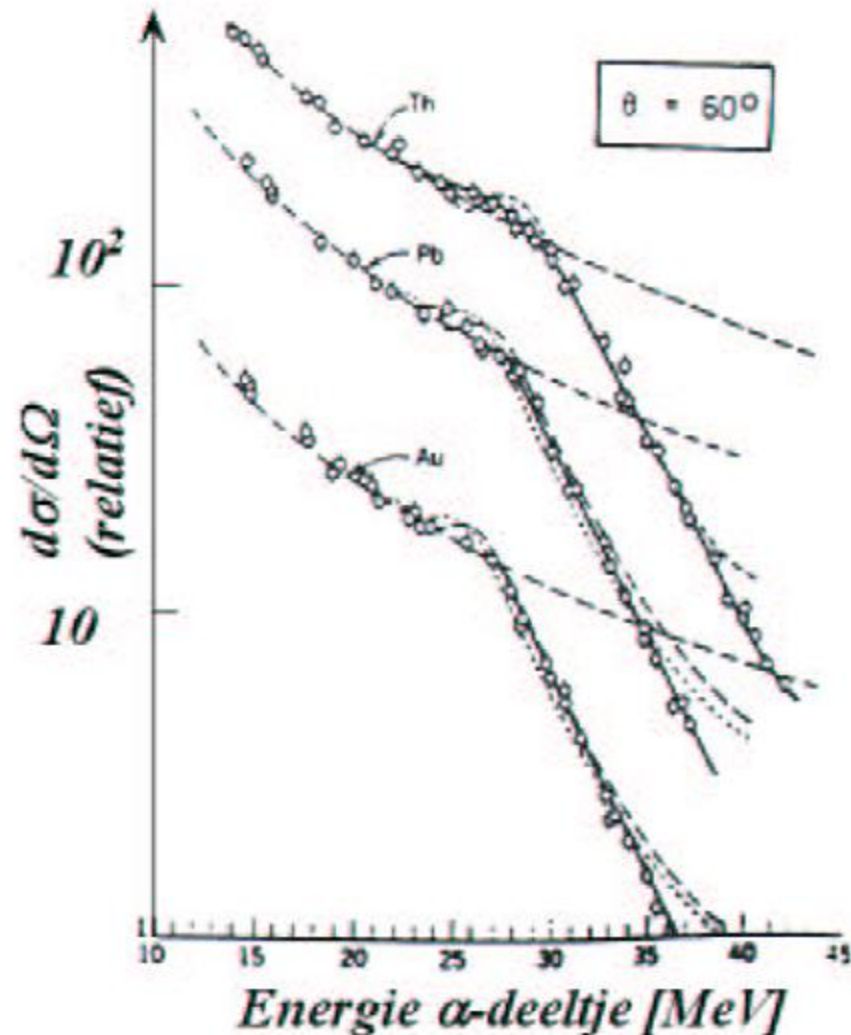
Geldig voor $b > b_{\min} = R_{\alpha} + R_t$ ofwel

$$\sin \frac{\theta_{\min}}{2} = \left| 1 - \frac{2T_b b_{\min}}{Z_b Z_t \alpha \hbar c} \right|^{-1}$$



Meet interactieafstand $b_{\min}$ versus A

Eigenlijk $b_{\min} \approx R_{\alpha} + R_t + R_s$



Rutherford verstrooiing

Plot b_{min} versus $A^{1/3}$

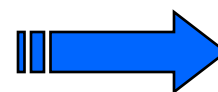
Er geldt $R \simeq 1.4 \text{ fm } \sqrt[3]{A}$

Goede beschrijving dus

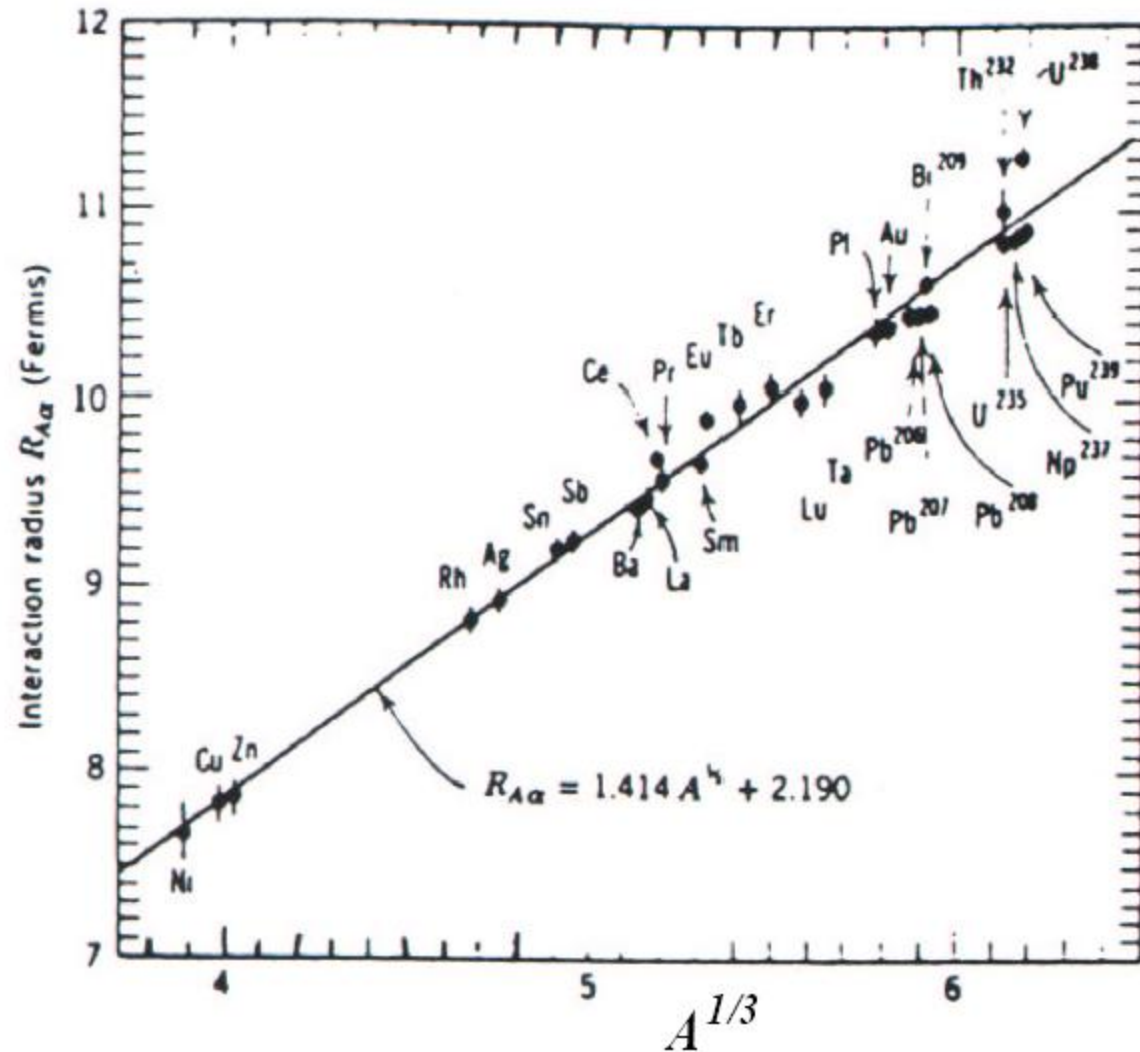
- Coulombwet geldig op korte afstand (femtometers)
- Sterke WW korte dracht
- Alle lading zit in kleine bol

Rutherford vindt

$$V_{\text{kern}} = \frac{4\pi}{3} R^3 \propto A, \quad \text{met } A = N + Z$$



$$\rho_{\text{kern}} \simeq 4 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$$



Gouden regel van Fermi

In deeltjesfysica werken we voornamelijk met interacties tussen deeltjes en verval van deeltjes: overgangen tussen toestanden

Overgangswaarschijnlijkheid volgt uit Fermi's Golden Rule

$$\text{transition rate} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}|^2 \times (\text{phase space})$$

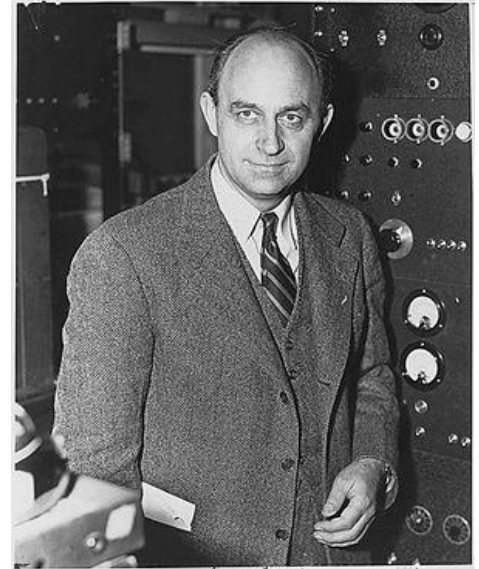
Amplitude

bevat alle dynamische informatie en berekenen we met de Feynman regels. Dit bevat de fundamentele fysica.

Faseruimte

bevat alle kinematische informatie en hangt af van massa's, energieën en impulsen

Voor de afleiding: zie dictaat quantummechanica.
Verder eisen wij een Lorentzinvariante beschrijving.



Faseruimte – Klassiek

Faseruimte in 1D:

Klassiek neemt elke toestand een punt met (x, p_x) in
In QM hebben we rekening te houden met $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$

Volume van elke toestand is h

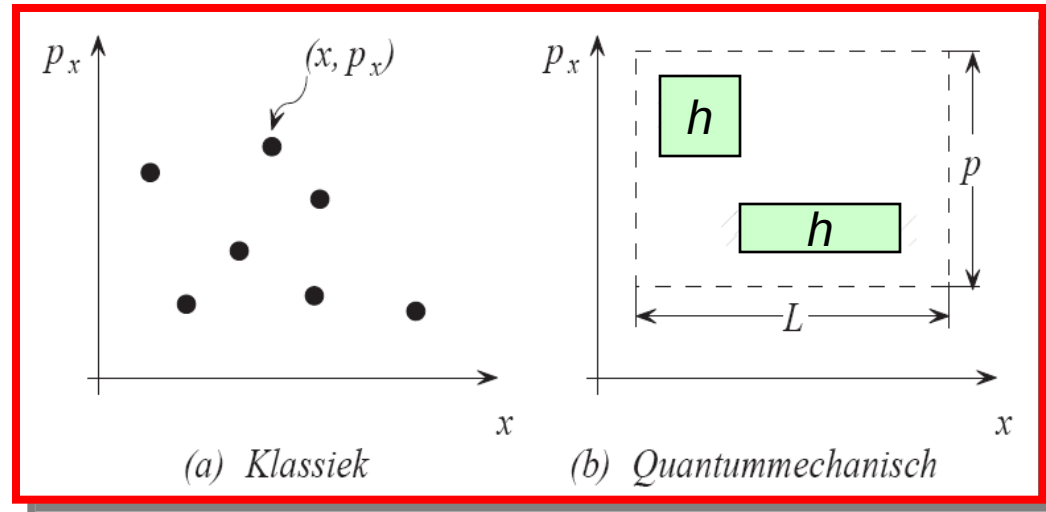
Faseruimte met volume Lp bevat N cellen,
$$N = \frac{Lp}{2\pi\hbar}$$

Celvolume in 3D is $h^3 = (2\pi\hbar)^3$

Aantal toestanden in volume $d^3x d^3p$ is

Aantal toestanden per volume eenheid

Toestandsdichtheid $\rho(E) \equiv \frac{dn}{dE}$

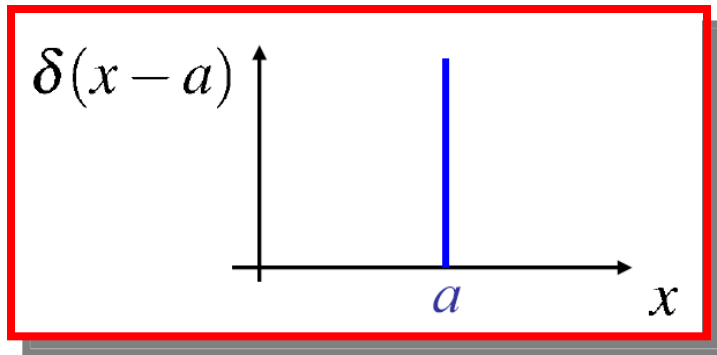


$$dN = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} d^3x d^3p$$

$$dn = \frac{dN}{d^3x} = \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$$

Delta functie van Dirac

In de berekeningen maken we veelvuldig gebruik van de Dirac δ functie: 'een oneindig smalle piek met integraal 1'



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

Elke functie met bovenstaande eigenschappen kan $\delta(x)$ representeren, bijvoorbeeld

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}$$

In relativistische quantummechanica zijn delta functies nuttig voor integralen over de faseruimte, bijvoorbeeld in het verval $a \rightarrow 1 + 2$. Ze drukken dan energie en impulsbehoud uit.

$$\int \delta(E_a - E_1 - E_2) \quad \int \delta^3(\vec{p}_a - \vec{p}_1 - \vec{p}_2)$$

Delta functie van een functie

We zoeken een uitdrukking voor $\delta(f(x))$

Stel dat $f(x)$ een enkel nulpunt heeft voor $x = x_0$

Dan geldt
$$\int_{y_1}^{y_2} \delta(y) dy = \begin{cases} 1 & y_1 < x_0 < y_2 \\ 0 & \text{anderson} \end{cases}$$

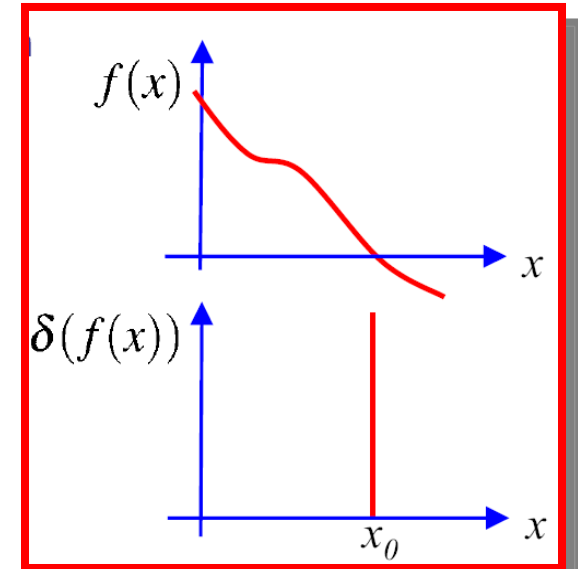
Schrijft $y = f(x)$

⇒
$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(f(x)) \frac{df}{dx} dx = \begin{cases} 1 & x_1 < x_0 < x_2 \\ 0 & \text{anderson} \end{cases}$$

Er geldt dan
$$\left| \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \int_{x_1}^{x_2} \delta(f(x)) dx = \begin{cases} 1 & x_1 < x_0 < x_2 \\ 0 & \text{anderson} \end{cases}$$

Omschrijven levert
$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(f(x)) dx = \frac{1}{\left| df/dx \right|_{x_0}} \int_{x_1}^{x_2} \delta(x - x_0) dx$$

⇒
$$\delta(f(x)) = \left| \frac{df}{dx} \right|_{x_0}^{-1} \delta(x - x_0)$$



Voorbeeld: Delta functie van een functie

Meerdere nulpunten:

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$

Opgave: Vereenvoudig de uitdrukking $\delta(x^2 + x - 2)$

Oplossing: Er geldt $g(x) = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$

Nulpunten voor $x_1 = 1$ en $x_2 = -2$

Afgeleide $g'(x) = 2x + 1$

Dus $g'(x_1) = 3$ en $g'(x_2) = -3$


$$\delta(x^2 + x - 2) = \frac{1}{3}\delta(x - 1) + \frac{1}{3}\delta(x + 2)$$

Voorbeeld: Delta functie van een functie

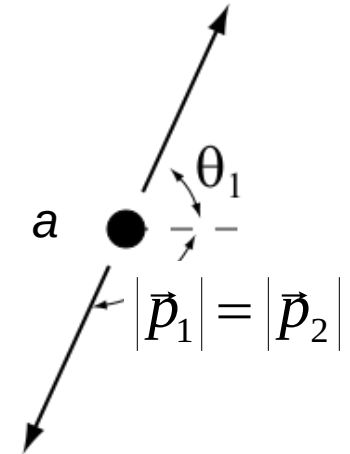
Deeltjesverval $a \rightarrow 1 + 2$ in CM systeem

Bereken $I = \int \delta(m_a - E_1 - E_2) d|\vec{p}_1|$

$$I = \int \delta(m_a - \underbrace{\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m_1^2}}_{\text{dit is je functie } f(x)} - \underbrace{\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m_2^2}}_{\text{dit is } x}) d|\vec{p}_1|$$

dit is je functie $f(x)$

dit is x



Er geldt

$$\frac{df}{d|\vec{p}_1|} = -\frac{|\vec{p}_1|}{\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m_1^2}} - \frac{|\vec{p}_1|}{\sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m_2^2}} = -\frac{|\vec{p}_1|}{E_1} - \frac{|\vec{p}_1|}{E_2} = -|\vec{p}_1| \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}$$

Stel $|\vec{p}^*|$ is de waarde van de impuls waarvoor $f(|\vec{p}_1|) = 0$

Dan

$$I = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \frac{1}{|\vec{p}^*|}$$

Gouden regel van Fermi – revisited

Gouden regel van Fermi: niet-relativistisch

$$\text{transition rate} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}|^2 \times (\text{phase space})$$

Faseruimte is dichtheid van de eindtoestanden $\rho(E_f)$

We schrijven (met $E_i = E_f$)

$$\rho(E_f) = \left| \frac{dn}{dE} \right|_{E_f} = \int \frac{dn}{dE} \delta(E - E_i) dE$$

De gouden regel luidt nu

$$\Gamma_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \int |M_{fi}|^2 \delta(E - E_i) dn$$

Integreer over alle mogelijke toestanden met elke energie, merk op dat

$$dn = \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}$$

Met impulsbehoud en $a \rightarrow 1 + 2$

$$\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{\hbar} \int |M_{fi}|^2 \underbrace{\delta(E_a - E_1 - E_2)}_{\text{energiebehoud}} \underbrace{\delta^3(\vec{p}_a - \vec{p}_1 - \vec{p}_2)}_{\text{impulsbehoud}} \underbrace{\frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi\hbar)^3}}_{\text{toestandsdichtheid}}$$

energiebehoud

impulsbehoud

toestandsdichtheid

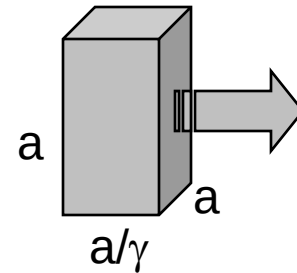
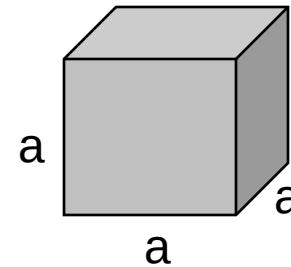
Lorentzinvariante faseruimte

In niet-relativistische QM normeren we op 1 deeltje / volume eenheid $\int \psi^* \psi dV = 1$

Relativistische contraheert volume met $\gamma = E / mc^2$

Deeltjesdichtheid neemt toe met

$$\gamma = E / mc^2$$



Conventie:

Normeer op $2E$ deeltjes / volume eenheid

$$\int \psi^{*'} \psi' dV = \frac{2E}{c} \hbar^3$$

Gebruik

$$\psi' = \sqrt{\frac{2E\hbar^3}{c}} \psi$$

Lorentzinvariant matrixelement

$$M_{fi}^{LI} = \left\langle \psi'_1 \cdot \psi'_2 \cdots | \hat{H} | \cdots \psi'_{n-1} \cdot \psi'_n \right\rangle = \left(\frac{2E_1 \hbar^3}{c} \frac{2E_2 \hbar^3}{c} \cdots \frac{2E_n \hbar^3}{c} \right)^{\frac{1}{2}} M_{fi}$$

Lorentzinvariante vervalsnelheid

Beschouw het verval $1 \rightarrow 2 + 3 + 4 + \dots + n$

$$d\Gamma = |\mathcal{M}|^2 \frac{S}{2\hbar E_1} \left[\left(\frac{c d^3 \mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \right) \left(\frac{c d^3 \mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) \dots \left(\frac{c d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} \right) \right] \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_n)$$

Deeltje i heeft vierimpuls $p_i = (E_i/c, \mathbf{p}_i)$

tijddilatatie

Energie E_i is een functie van $\mathbf{p}_i$ vanwege $E_i^2 - \mathbf{p}_i^2 c^2 = m_i^2 c^4$

We gaan er van uit dat deeltje 1 in rust is, dus $p_1 = (m_1 c, \mathbf{0})$

S is het product van statistische factoren: $1/j!$ voor elke groep van j identieke deeltjes in de eindtoestand

Formule geeft de differentiële vervalsnelheid, waarbij de impuls van deeltje 2 in het gebied $d^3 \mathbf{p}_2$ rond de waarde $\mathbf{p}_2$ ligt, etc. In het algemeen integreren we over de impulsen in de eindtoestand.

Bijvoorbeeld voor $1 \rightarrow 2 + 3$

$$\Gamma = \frac{S}{\hbar m_1} \left(\frac{c}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{E_2 E_3} \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) d^3 \mathbf{p}_2 d^3 \mathbf{p}_3$$

Voorbeeld: $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$

Bereken vervalsnelheid voor $1 \rightarrow 2 + 3$ met $m_1 = m_2 = 0$; amplitude $M(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$

Herschrijf delta functie $\delta^4(p_1 - p_2 - p_3) = \delta\left(mc - \frac{E_2}{c} - \frac{E_3}{c}\right) \delta^3(-\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)$

Er geldt $m_2 = m_3 = 0$ en dus $E_2 = |\mathbf{p}_2|c$, $E_3 = |\mathbf{p}_3|c$

$$\Gamma = \frac{S}{\hbar m_1} \left(\frac{c}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{2} \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{E_2 E_3} \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) d^3\mathbf{p}_2 d^3\mathbf{p}_3$$



$$\Gamma = \frac{S}{\hbar m} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{2} \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\mathbf{p}_2||\mathbf{p}_3|} \times \delta(mc - |\mathbf{p}_2| - |\mathbf{p}_3|) \delta^3(-\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) d^3\mathbf{p}_2 d^3\mathbf{p}_3$$

$$\Gamma = \frac{S}{2(4\pi)^2 \hbar m} \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\mathbf{p}_2|^2} \delta(mc - 2|\mathbf{p}_2|) d^3\mathbf{p}_2$$

Sferische coördinaten $d^3\mathbf{p}_2 = |\mathbf{p}_2|^2 d|\mathbf{p}_2| \sin \theta d\theta d\phi$

Hoekintegratie

$$\int \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi$$

We vinden $\Gamma = \frac{S}{8\pi \hbar m} \int_0^\infty |\mathcal{M}|^2 \delta(mc - 2|\mathbf{p}_2|) d|\mathbf{p}_2|$

Er geldt $\delta(mc - 2|\mathbf{p}_2|) = \frac{1}{2} \delta\left(|\mathbf{p}_2| - \frac{mc}{2}\right)$

$$\Gamma = \frac{S}{16\pi \hbar m} |\mathcal{M}|^2$$

$S = 1/2$ voor $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$

Tweedeeltjesverval

Bereken vervalsnelheid voor $1 \rightarrow 2 + 3$

Er geldt $E_2 = c\sqrt{m_2^2 c^2 + \mathbf{p}_2^2}$, $E_3 = c\sqrt{m_3^2 c^2 + \mathbf{p}_3^2}$. Integreer over $\mathbf{p}_3$

$$\Gamma = \frac{S}{\hbar m_1} \left(\frac{c}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{2} \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{E_2 E_3} \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) d^3 \mathbf{p}_2 d^3 \mathbf{p}_3$$



$$\Gamma = \frac{S}{2(4\pi)^2 \hbar m_1} \int \frac{|\mathcal{M}|^2 \delta(m_1 c - \sqrt{m_2^2 c^2 + \mathbf{p}_2^2} - \sqrt{m_3^2 c^2 + \mathbf{p}_2^2})}{\sqrt{m_2^2 c^2 + \mathbf{p}_2^2} \sqrt{m_3^2 c^2 + \mathbf{p}_2^2}} d^3 \mathbf{p}_2$$

Sferische coördinaten en hoekintegratie. Met $\rho = |\mathbf{p}_2|$ vinden we

$$\Gamma = \frac{S}{8\pi \hbar m_1} \int_0^\infty \frac{|\mathcal{M}|^2 \delta(m_1 c - \sqrt{m_2^2 c^2 + \rho^2} - \sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2})}{\sqrt{m_2^2 c^2 + \rho^2} \sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2}} \rho^2 d\rho$$

We moeten nu nog over de delta functie integreren

Dat kan in principe met

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$

We doen het nu echter met een andere methode

Tweedeeltjesverval

We hebben
$$\Gamma = \frac{S}{8\pi\hbar m_1} \int_0^\infty \frac{|\mathcal{M}|^2 \delta(m_1 c - \sqrt{m_2^2 c^2 + \rho^2} - \sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2})}{\sqrt{m_2^2 c^2 + \rho^2} \sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2}} \rho^2 d\rho$$

Verander van variabele
$$E \equiv c(\sqrt{m_2^2 c^2 + \rho^2} + \sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2})$$

$\Rightarrow dE = \frac{E\rho}{\sqrt{m_2^2 c^2 + \rho^2} \sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2}} d\rho$

$\Rightarrow \Gamma = \frac{S}{8\pi\hbar m_1} \int_{(m_2+m_3)c^2}^\infty |\mathcal{M}|^2 \frac{\rho}{E} \delta\left(m_1 c - \frac{E}{c}\right) dE$

Er geldt $\delta(m_1 c - E/c) = c\delta(E - m_1 c^2) \Rightarrow \Gamma = \frac{S|\mathcal{M}|^2 \rho_0}{8\pi\hbar m_1^2 c}$

Mits $m_1 > m_2 + m_3$, anders niet in het integratie interval!

Merk op dat ρ_0 de waarde van ρ ($= |\mathbf{p}_2|$) is waarvoor $E = m_1 c^2$

Je vindt
$$\rho_0 = \frac{c}{2m_1} \sqrt{m_1^4 + m_2^4 + m_3^4 - 2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_3^2 - 2m_2^2 m_3^2}$$

Uiteindelijk

$$\Gamma = \frac{S|\mathbf{p}|}{8\pi\hbar m_1^2 c} |\mathcal{M}|^2$$

Bij meer dan 2 deeltjes moet je integreren over het matrixelement

Gouden regel voor verstrooiing

Beschouw de botsing $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n$

$$d\sigma = |\mathcal{M}|^2 \frac{\hbar^2 S}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \left[\left(\frac{c d^3 \mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) \left(\frac{c d^3 \mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \right) \cdots \left(\frac{c d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} \right) \right] \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - \dots - p_n)$$

Formule geeft de differentiële werkzame doorsnede, waarbij de impuls van deeltje 3 in het gebied $d^3 \mathbf{p}_3$ rond de waarde $\mathbf{p}_3$ ligt, etc. In het algemeen integreren we over de impulsen in de eindtoestand en zijn we bijvoorbeeld geïnteresseerd in enkel de hoekverdeling van deeltje 3.

Uitdrukking volgt uit *Telsnelheid* $= n_1(v_1 + v_2) n_2 \sigma \rightarrow \sigma = \Gamma_{fi} / (v_1 + v_2)$

Vervolgens wordt de fluxfactor Lorentzinvariant geschreven

$$F = 2E_1 E_2 (v_1 + v_2) \quad \Rightarrow \quad F = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}$$

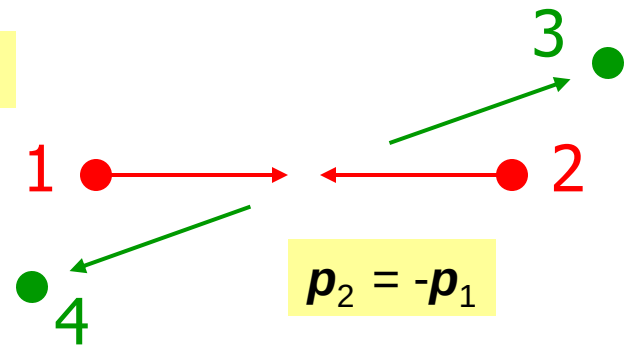
In LAB

Elastische verstrooiing in het CM systeem

Beschouw de botsing $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ in CM systeem

Dan geldt $p_1 \oplus p_2 = E_1 \oplus E_2 / c^2 + \vec{p}_1^2$

$$\Rightarrow \sqrt{(p_1 \oplus p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2} = (E_1 + E_2) |\vec{p}_1| / c$$



$$d\sigma = |\mathcal{M}|^2 \frac{\hbar^2 S}{4 \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \left[\left(\frac{c d^3 \mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) \left(\frac{c d^3 \mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \right) \cdots \left(\frac{c d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} \right) \right] \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 \cdots - p_n)$$

Dus
$$d\sigma = \left(\frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{S |\mathcal{M}|^2 c}{(E_1 + E_2) |\mathbf{p}_1|} \frac{d^3 \mathbf{p}_3 d^3 \mathbf{p}_4}{E_3 E_4} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$

Herschrijf de delta functie

$$\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \delta\left(\frac{E_1 + E_2 - E_3 - E_4}{c}\right) \delta^3(\underline{-\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4})$$

Integreer over impuls delta functie: $\vec{p}_4 \Rightarrow -\vec{p}_3$

Gebruik $E_i = c \sqrt{m_i^2 c^2 + \vec{p}_i^2}$

Elastische verstrooiing in het CM systeem

We vinden

$$d\sigma = \left(\frac{\hbar}{8\pi}\right)^2 \frac{S|\mathcal{M}|^2 c}{(E_1 + E_2)|\mathbf{p}_1|} \times \frac{\delta((E_1 + E_2)/c) - \sqrt{m_3^2 c^2 + \mathbf{p}_3^2} - \sqrt{m_4^2 c^2 + \mathbf{p}_3^2}}{\sqrt{m_3^2 c^2 + \mathbf{p}_3^2} \sqrt{m_4^2 c^2 + \mathbf{p}_3^2}} d^3 \mathbf{p}_3$$

Het matrixelement hangt in principe van alle impulsen af. Echter $\vec{p}_2 \Rightarrow -\vec{p}_1$ en $\vec{p}_4 \Rightarrow -\vec{p}_3$, dus geldt $M(\vec{p}_1, \vec{p}_3)$. Omdat $\vec{p}_1$ vastligt, geldt $M(|\vec{p}_3|, \theta)$.

Gebruik

$$d^3 \mathbf{p}_3 = \rho^2 d\rho d\Omega \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

We vinden

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar}{8\pi}\right)^2 \frac{Sc}{(E_1 + E_2)|\mathbf{p}_1|} \int_0^\infty |\mathcal{M}|^2 \times \frac{\delta((E_1 + E_2)/c) - \sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2} - \sqrt{m_4^2 c^2 + \rho^2}}{\sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2} \sqrt{m_4^2 c^2 + \rho^2}} \rho^2 d\rho$$



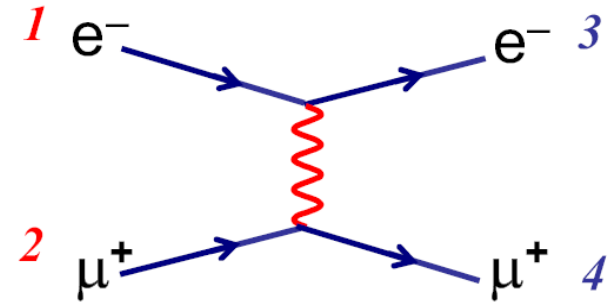
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S|\mathcal{M}|^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|}$$

Lorentzinvariante werkzame doorsnede

Voor elastische verstrooiing geldt $|\vec{p}_i^*| = |\vec{p}_f^*|$

Dan geldt $\sigma_{\text{elastisch}} = \frac{\hbar^2 c^2}{64\pi^2 s} \int S |M_{fi}|^2 d\Omega^*$

Dit geldt ook in de limiet $E_i \gg m_i$

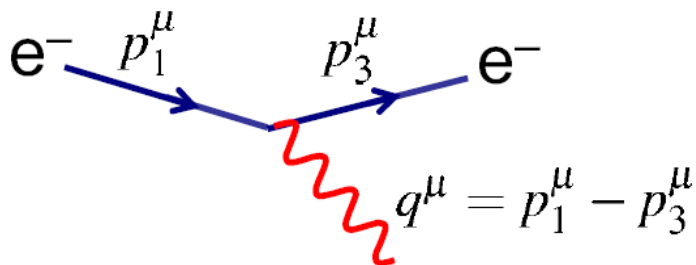


Merk op dat de differentiële werkzame doorsnede NIET Lorentzinvariant is

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{S |M_{fi}|^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} \quad \Rightarrow \quad d\sigma = \frac{\hbar^2 c^2}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_f^*|}{|\vec{p}_i^*|} S |M_{fi}|^2 d\Omega^*$$

De hoeken refereren naar het CM systeem! $d\Omega^* = d(\cos \theta^*) d\phi^*$

Voor een algemeen geldige vergelijking: druk $d\Omega$ uit in viervectoren



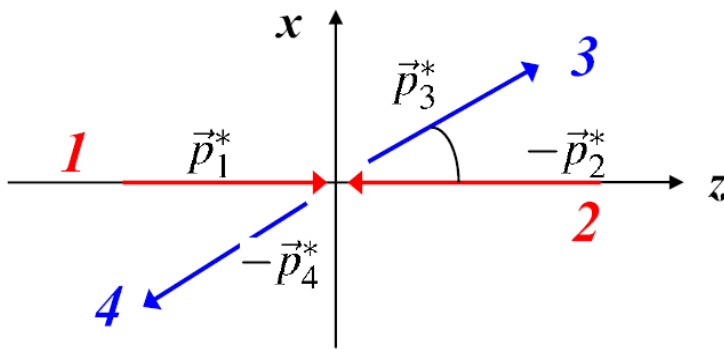
Vierimpuls overdracht

$$t = q^2 = (p_1 - p_3)^2$$

Lorentzinvariante werkzame doorsnede

Druk $d\Omega^*$ uit in termen van de Lorentzinvariant dt

$$t \equiv (p_1 - p_3)^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 \cdot p_3 = m_1^2 + m_3^2 - 2p_1 \cdot p_3$$



In CM frame:

$$p_1^{*\mu} = (E_1^*, 0, 0, |\vec{p}_1^*|)$$

$$p_3^{*\mu} = (E_3^*, |\vec{p}_3^*| \sin \theta^*, 0, |\vec{p}_3^*| \cos \theta^*)$$

$$p_1^\mu p_{3\mu} = E_1^* E_3^* - |\vec{p}_1^*| |\vec{p}_3^*| \cos \theta^*$$

$$t = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1^* E_3^* + 2|\vec{p}_1^*| |\vec{p}_3^*| \cos \theta^*$$

Dit geeft

$$dt = 2|\vec{p}_1^*| |\vec{p}_3^*| \cos \theta^* \implies d\Omega^* = d(\cos \theta^*) d\phi^* = \frac{dtd\phi^*}{2|\vec{p}_1^*| |\vec{p}_3^*|}$$

en dus

$$d\sigma = \frac{\hbar^2 c^2}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_3^*|}{|\vec{p}_1^*|} S |M_{fi}|^2 d\Omega^* = \frac{\hbar^2 c^2}{2 \cdot 64\pi^2 s |\vec{p}_1^*|^2} S |M_{fi}|^2 d\phi^* dt$$

Integratie over $d\phi^*$ geeft

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\hbar^2 c^2}{64\pi s |\vec{p}_1^*|^2} S |M_{fi}|^2$$

Lorentzinvariant

Fluxfactor voor $A + B \rightarrow \dots$

$$\text{Flux} = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}$$

c.m. stelsel:

$$P_1 = (E_1, \vec{p})$$

$$P_2 = (E_2, -\vec{p})$$

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= E_1 E_2 + p^2 \\ \Rightarrow \text{Flux}^2 &= (E_1 E_2 + p^2)^2 - m_1^2 m_2^2 \\ &= (E_1 E_2 + p^2)^2 - (E_1^2 - p^2)(E_2^2 - p^2) \\ &= 2E_1 E_2 p^2 + (E_1^2 + E_2^2)p^2 = (E_1 + E_2)^2 p^2 \\ \Rightarrow \text{Flux} &= (E_1 + E_2)p = pE_1 + pE_2 \\ &= |\vec{v}_1| E_1 E_2 + |\vec{v}_2| E_2 E_1 \\ &= |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| E_1 E_2 \end{aligned}$$

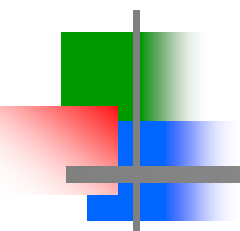
note: $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E}$

lab stelsel:

$$P_1 = (E, \vec{p})$$

$$P_2 = (m_2, 0)$$

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= E m_2 \\ \Rightarrow \text{Flux}^2 &= (E m_2)^2 - m_1^2 m_2^2 - (E^2 - m_1^2) m_2^2 - p^2 m_2^2 \\ \Rightarrow \text{Flux} &= p m_2 - |\vec{v}| E m_2 \\ &\sim |\vec{v}| E E_2 \end{aligned}$$



Toy-model: ABC theorie

*Drie deeltjes: A, B en C
Ieder deeltje is zijn eigen antideeltje
Spin van de deeltjes is 0
 $m_A > m_B + m_C$*

Feynman regels

Berekening van de amplitude $-iM$:

Hiervoor is de dynamica van wisselwerking nodig. In het vervolg zullen we de amplitudes berekenen voor elektromagnetische, sterke en zwakke wisselwerkingen.

Om een idee te krijgen eerst de amplitude voor een hypothetisch model, ϕ^3 toy-model:

Feynman regels ABC theorie:

1. Label alle *externe* lijnen: $p_1, p_2, p_3, \dots$
Label alle *interne* lijnen: $q_1, q_2, q_3, \dots$

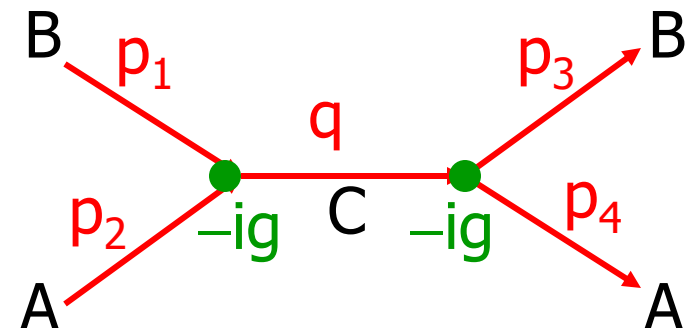
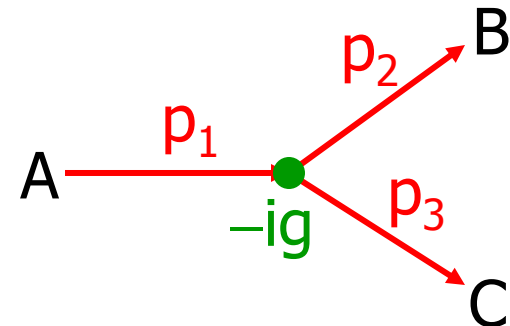
2. Vertex faktor: $-ig$

3. Propagator faktor: $\frac{i}{q_j^2 - m_j^2}$

4. 4-vektor behoud: $(2\pi)^4 \delta(\sum k_i)$

5. Integratie loop impulsen: $\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 q_i$

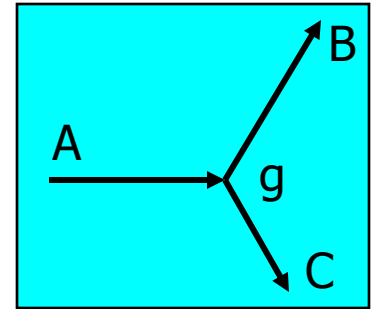
6. Laat $(2\pi)^4 \delta(\sum p_i)$ weg



Levensduur (ϕ^3 toy-model)

Het matrixelement
is $[g]=[\text{GeV}]$

$$-iM = -ig$$



De vervalsbreedte wordt
met Fermi's regel:

$$\Gamma = \frac{g^2 |\mathbf{p}|}{8\pi \hbar m_A^2 c}$$

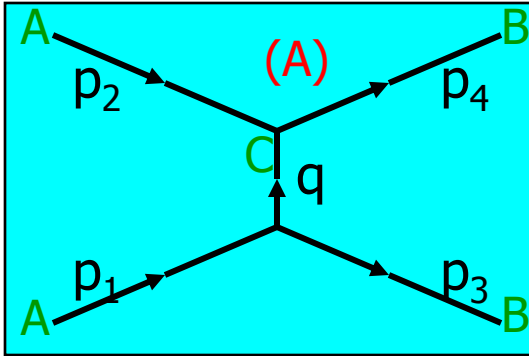
En de levensduur
van deeltje A is dus

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}$$

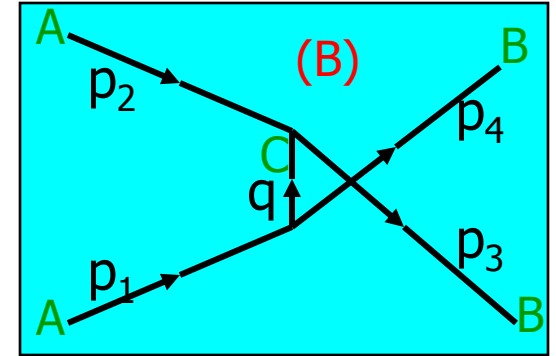
De impuls van B (of C) kan bepaald worden, in c.m. systeem:

$$|p| = \frac{\sqrt{m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 - 2m_A^2 m_B^2 - 2m_B^2 m_C^2 - 2m_C^2 m_A^2}}{2m_A}$$

Verstrooing $A+A \rightarrow B+B$ (ϕ^3 toy-model)



Tweede diagram!



(A):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q (-ig)^2 \frac{i}{q^2 - m_C^2} (2\pi)^4 \delta(q + p_3 - p_1) (2\pi)^4 \delta(q + p_2 - p_4) \\ &= (-ig)^2 \frac{i}{(p_1 - p_3)^2 - m_C^2} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \Rightarrow \\ -i\mathcal{M}_a &= (-ig)^2 \frac{i}{(p_1 - p_3)^2 - m_C^2} \Rightarrow \mathcal{M}_a = \frac{g^2}{(p_1 - p_3)^2 - m_C^2} \end{aligned}$$

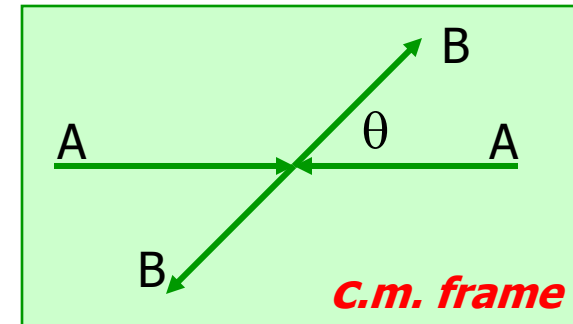
(B):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q (-ig)^2 \frac{i}{q^2 - m_C^2} (2\pi)^4 \delta(q + p_4 - p_1) (2\pi)^4 \delta(q + p_2 - p_3) \\ &= (-ig)^2 \frac{i}{(p_1 - p_4)^2 - m_C^2} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \Rightarrow \\ -i\mathcal{M}_b &= (-ig)^2 \frac{i}{(p_1 - p_4)^2 - m_C^2} \Rightarrow \mathcal{M}_b = \frac{g^2}{(p_1 - p_4)^2 - m_C^2} \end{aligned}$$

(A+B):

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{(p_1 - p_3)^2 - m_C^2} + \frac{g^2}{(p_1 - p_4)^2 - m_C^2}$$

Verstrooiing $A+A \rightarrow B+B$ (ϕ^3 toy-model)



In het c.m. stelsel

Veronderstel $m_A = m_B = m$ en $m_C = 0$

$$\begin{aligned}(p_1 - p_3)^2 &= m^2 + m^2 - 2E^2 + 2p^2 \cos \theta \\ &= -2p^2 + 2p^2 \cos \theta = -2p^2(1 - \cos \theta) = t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(p_1 - p_4)^2 &= m^2 + m^2 - 2E^2 + 2p^2 \cos(\pi - \theta) \\ &= -2p^2 - 2p^2 \cos \theta = -2p^2(1 + \cos \theta) = u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \frac{-g^2}{2p^2(1 - \cos \theta)} + \frac{-g^2}{2p^2(1 + \cos \theta)} \\ &= -\frac{g^2}{2p^2} \frac{(1 + \cos \theta) + (1 - \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} \\ &= -\frac{g^2}{p^2 \sin^2 \theta}\end{aligned}$$

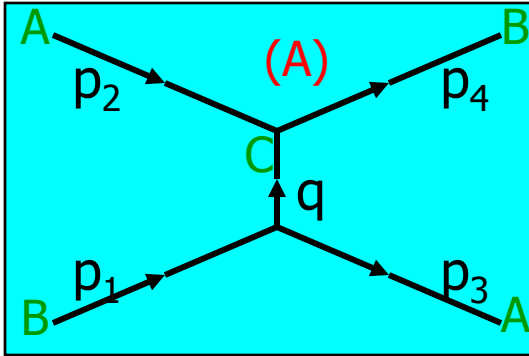
$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2} \frac{g^4}{p^4 \sin^4 \theta} \frac{1}{(E_1 + E_2)^2} \times 1 \\ &= \frac{1}{256\pi^2 E^2} \frac{g^4}{p^4 \sin^4 \theta}\end{aligned}$$

Twee identieke deeltjes in eindtoestand
(dus een extra factor $1/2! = 1/2$)

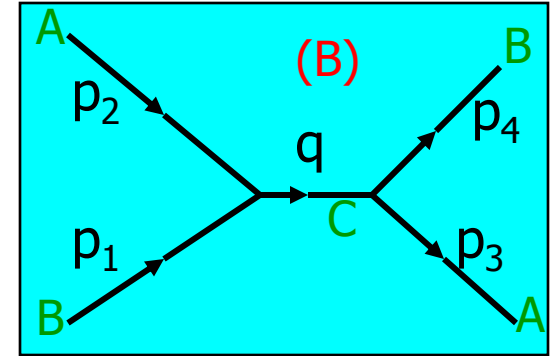
Werkzame doorsnede:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \frac{1}{512\pi^2 E^2} \frac{g^4}{p^4 \sin^4 \theta}$$

Verstrooiing $A+B \rightarrow A+B$ (ϕ^3 toy-model)



Twee diagrammen
dragen bij!



(A):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q (-ig)^2 \frac{i}{q^2 - m_C^2} (2\pi)^4 \delta(q + p_3 - p_1) (2\pi)^4 \delta(q + p_2 - p_4) \\ &= (-ig)^2 \frac{i}{(p_1 - p_3)^2 - m_C^2} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \Rightarrow \\ -i\mathcal{M}_a &= (-ig)^2 \frac{i}{(p_1 - p_3)^2 - m_C^2} \Rightarrow \mathcal{M}_a = \frac{g^2}{(p_1 - p_3)^2 - m_C^2} \end{aligned}$$

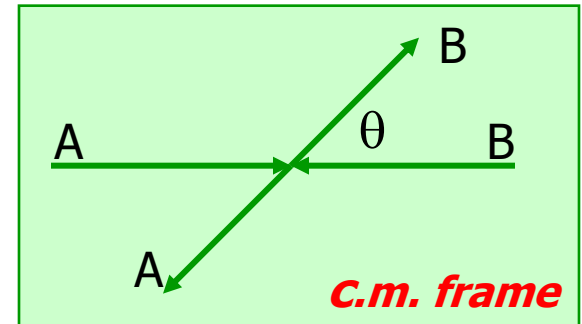
(B):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q (-ig)^2 \frac{i}{q^2 - m_C^2} (2\pi)^4 \delta(q - p_1 - p_2) (2\pi)^4 \delta(q - p_3 - p_4) \\ &= (-ig)^2 \frac{i}{(p_1 + p_2)^2 - m_C^2} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \Rightarrow \\ -i\mathcal{M}_b &= (-ig)^2 \frac{i}{(p_1 + p_2)^2 - m_C^2} \Rightarrow \mathcal{M}_b = \frac{g^2}{(p_1 + p_2)^2 - m_C^2} \end{aligned}$$

(A+B):

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{(p_1 - p_3)^2 - m_C^2} + \frac{g^2}{(p_1 + p_2)^2 - m_C^2}$$

Verstrooiing $A+B \rightarrow A+B$ (ϕ^3 toy-model)



In het c.m. stelsel

Veronderstel $m_A=m_B=m$ en $m_C=0$

$$\begin{aligned}(p_1 - p_3)^2 &= m^2 + m^2 - 2E^2 + 2p^2 \cos \theta \\ &= -2p^2 + 2p^2 \cos \theta = -2p^2(1 - \cos \theta) = t\end{aligned}$$

$$(p_1 + p_2)^2 = (2E)^2 = 4E^2 = s$$

$$\mathcal{M} = \frac{-g^2}{2p^2(1 - \cos \theta)} + \frac{g^2}{4E^2}$$

Werkzame doorsnede:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2} \left(\frac{-g^2}{2p^2(1 - \cos \theta)} + \frac{g^2}{4E^2} \right)^2 \times \frac{1}{4E^2} \\ &= \frac{1}{256E^2\pi^2} \left(\frac{-g^2}{2p^2(1 - \cos \theta)} + \frac{g^2}{4E^2} \right)^2\end{aligned}$$