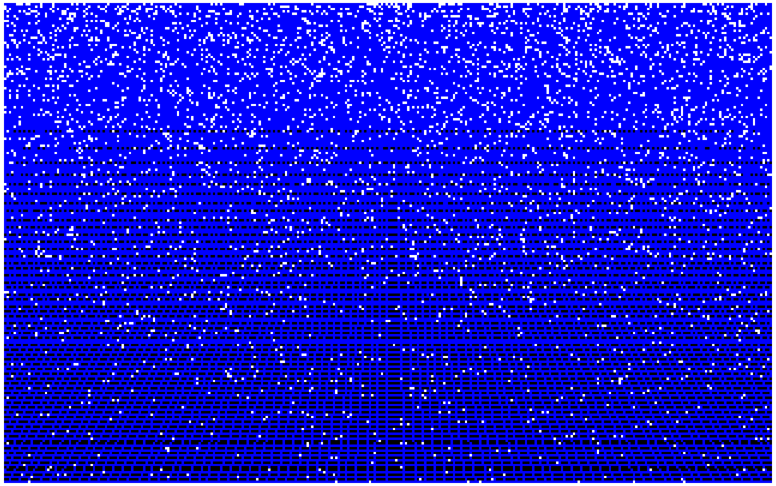
Elementaire Deeltjesfysica

FEW Cursus



Jo van den Brand

10 November, 2009

Structuur der Materie

Inhoud

- Inleiding
  - Deeltjes
  - Interacties
- Relativistische kinematica
  - Lorentz transformaties
  - Viervectoren
  - Energie en impuls
- Symmetrieën
  - Behoudwetten
  - Quarkmodel
  - Discrete symmetrieën
- Feynman berekeningen
  - Gouden regel
  - Feynman regels
  - Diagrammen
- Elektrodynamica
  - Dirac vergelijking
  - Werkzame doorsneden
- Quarks en hadronen
  - Elektron-quark interacties
  - Hadron productie in e^+e^-
- Zwakke wisselwerking
  - Muon verval
  - Unificatie

Relatieve beweging

Einstein 1905:

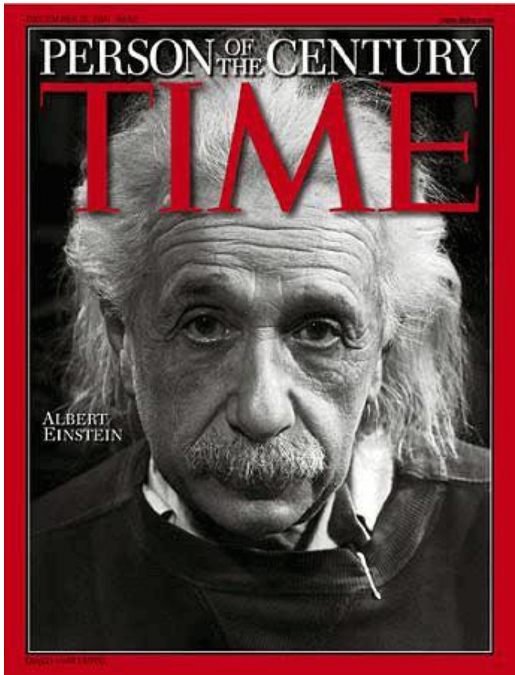
Alle natuurwetten blijven dezelfde (zijn invariant) voor alle waarnemers die eenparig rechtlijnig t.o.v. elkaar bewegen.

De lichtsnelheid is invariant – heeft voor alle waarnemers dezelfde waarde.

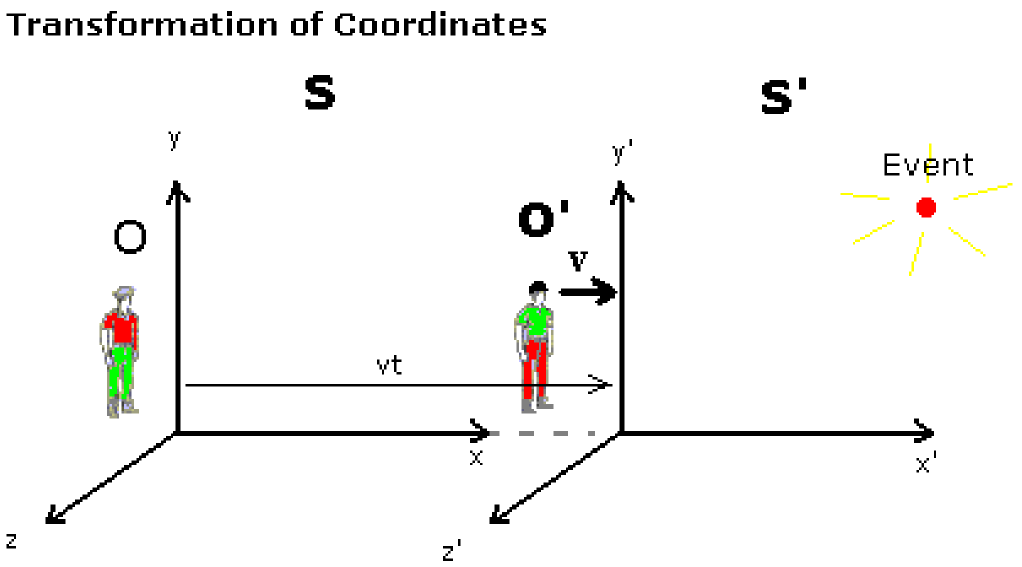
Inertiaalsysteem: objecten bewegen in rechte lijnen als er geen krachten op werken (Newton's eerste wet).

Indien een systeem met constante snelheid t.o.v. een inertiaalsysteem beweegt, dan is het zelf ook een inertiaalsyteem.

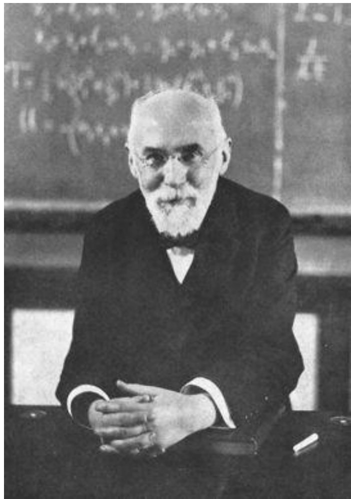
Einstein 1921



Lorentztransformaties



Lorentz 1902



Waarnemers in *S* en *S’* bewegen met snelheid v t.o.v. elkaar. Systemen vallen samen op $t = t' = 0$.

Waarnemer in *S* kent (x, y, z, t) toe aan het event.
Waarnemer in *S’* kent (x', y', z', t') toe aan hetzelfde event.

Wat is het verband tussen de ruimtetijd coordinaten voor dit zelfde event?

Lorentztransformaties

i. $x' = \gamma(x - vt)$
ii. $y' = y$
iii. $z' = z$
iv. $t' = \gamma\left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right)$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Lorentztransformatie

i′. $x = \gamma(x' + vt')$
ii′. $y = y'$
iii′. $z = z'$
iv′. $t = \gamma\left(t' + \dfrac{v}{c^2}x'\right)$

Inverse transformatie
(snelheid *v* verandert van teken)

Relativiteit van gelijktijdigheid

$$
\begin{aligned}
x' &= \gamma(x - vt)\\
y' &= y\\
z' &= z\\
t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)
\end{aligned}
$$

Stel dat in systeem S twee events, A en B, op dezelfde tijd, $t_A = t_B$, gebeuren, maar op verschillende plaatsen, $x_A \neq x_B$.

Invullen levert

$$
t'_A = t'_B + \frac{\gamma v}{c^2}(x_B - x_A)
$$

Events vinden niet simultaan plaats in systeem S’

Lorentzcontractie (lengtekrimp)

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Stel dat in systeem S' een staaf ligt, in rust, langs de x' as. Een einde op $x' = 0$, het andere op $x' = L'$.

Wat is de lengte L gemeten in S?

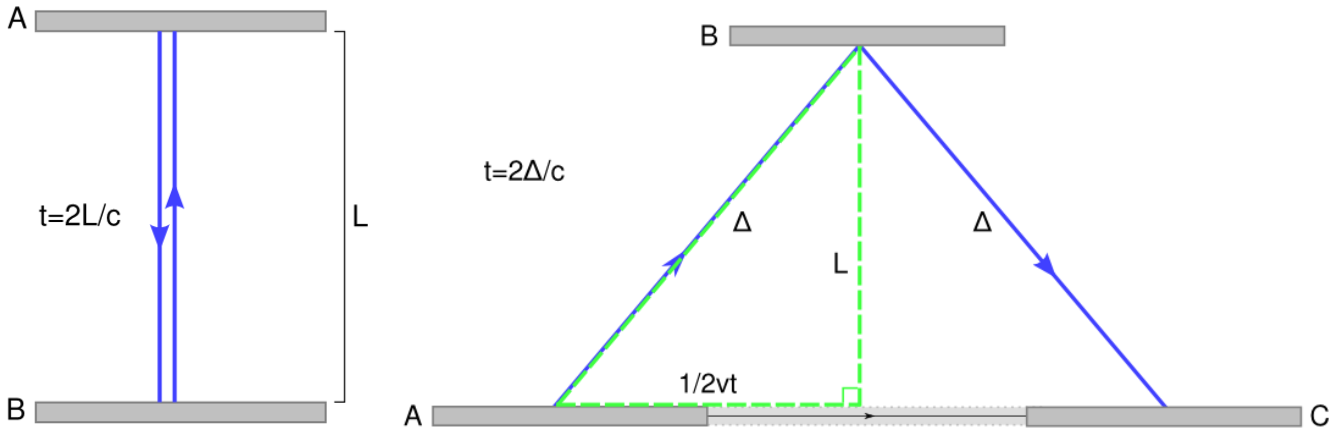
We moeten dan de posities van de uiteinden meten op dezelfde tijd, zeg op $t = 0$.

Het linker einde bevindt zich dan op $x = 0$.
Het rechter einde op positie $x = L' / \gamma$.

Langs bewegingsrichting!

Een bewegend object wordt korter met een factor γ in vergelijking tot zijn lengte in rust.

Tijddilatatie (tijdrek)

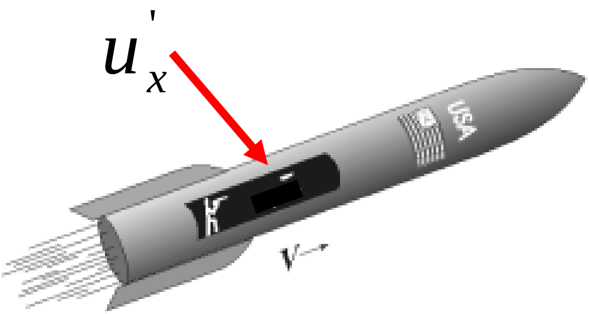


$$t = \frac{2\Delta}{c} \qquad \Delta = \sqrt{\left(\frac{1}{2}vt\right)^2 + L^2} \qquad ct = 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}vt\right)^2 + L^2}$$

$$c^2t^2 = v^2t^2 + 4L^2 \qquad t^2 = \frac{4L^2}{c^2 - v^2} \qquad \boxed{t = \frac{2L/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}}$$

Een bewegende klok loopt langzamer met een factor γ in vergelijking tot toestand in rust.
Deeltjes hebben `*ingebouwde'* klokken (verval).

Optellen van snelheden



Een raket is in rust in inertiaalsysteem S' dat met snelheid v beweegt t.o.v. S.

Iemand vuurt een kogel af in systeem S' met snelheid u_x' in S'.

Wat is de snelheid van de kogel in S ?

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v\,dt)}{\gamma\left(dt - \frac{v\,dx}{c^2}\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v\,dx}{c^2 dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}}$$

Een kwestie van afgeleiden nemen …

Als $u_x' = c$, dan $u = c$ en lichtsnelheid gelijk voor alle systemen!!!

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Het klassieke antwoord

Viervectoren

Positie-tijd viervector x^μ, met $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$x^0 = ct, \qquad x^1 = x, \qquad x^2 = y, \qquad x^3 = z$$

Lorentztransformaties

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x^{0\prime} &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x^{1\prime} &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x^{2\prime} &= x^2 \\ x^{3\prime} &= x^3 \end{aligned}}$$

$$\beta \equiv \frac{v}{c}$$

Viervectoren

Lorentztransformaties

$$\begin{aligned} x^{0\prime} &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x^{1\prime} &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x^{2\prime} &= x^2 \\ x^{3\prime} &= x^3 \end{aligned}$$

In matrixvorm

$$\begin{aligned} x^{0\prime} &= \Lambda^0_0 x^0 + \Lambda^0_1 x^1 + \Lambda^0_2 x^2 + \Lambda^0_3 x^3 \\ x^{1\prime} &= \Lambda^1_0 x^0 + \Lambda^1_1 x^1 + \Lambda^1_2 x^2 + \Lambda^1_3 x^3 \\ x^{2\prime} &= \Lambda^2_0 x^0 + \Lambda^2_1 x^1 + \Lambda^2_2 x^2 + \Lambda^2_3 x^3 \\ x^{3\prime} &= \Lambda^3_0 x^0 + \Lambda^3_1 x^1 + \Lambda^3_2 x^2 + \Lambda^3_3 x^3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad x^{\mu\prime} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu_\nu x^\nu \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu_\nu x^\nu}$$

algemeen geldig

met

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lorentz invariantie

Ruimtetijd coordinaten
zijn systeem afhankelijk

$$\boxed{x^{\mu\prime} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}}$$

Invariantie voor

$$\boxed{I \equiv (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^{0\prime})^2 - (x^{1\prime})^2 - (x^{2\prime})^2 - (x^{3\prime})^2}$$

Net als r^2 voor rotaties in R3 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Analoog zoeken we een uitdrukking als $\Sigma_{\mu=0}^{3} x^{\mu} x^{\mu}$

Hiervoor schrijven we de invariant I
als een dubbelsom

$$\boxed{I = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}}$$

Met metrische tensor

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Co- en contravariante vectoren

Contravariante viervector

$$\boxed{x^\mu \text{ (index } up\text{)}}$$

Covariante viervector

$$\boxed{x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu}$$

Invariant

$$I = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = x_\mu x^\mu}$$

Dit is de uitdrukking die we zochten.
De metriek is nu ingebouwd in de notatie!

Deze notatie wordt ook gebruikt voor niet-cartesische systemen en gekromde ruimten (Algemene Relativiteitstheorie)

Viervectoren

Viervector a^μ (contravariant) transformeert als x^μ

$$\boxed{x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu_\nu x^\nu}$$

$$\boxed{a^{\mu\prime} = \Lambda^\mu_\nu a^\nu}$$

We associeren hiermee een covariante viervector

$$\boxed{a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu}$$

Ruimte componenten krijgen een minteken

Ook geldt $a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$

Invariant $a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$

Scalar product $\boxed{a \cdot b \equiv a_\mu b^\mu}$ ⇒ $\boxed{a \cdot b = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}$

Er geldt $a^2 \equiv a \cdot a = (a^0)^2 - \mathbf{a}^2$

If $a^2 > 0$,	a^μ is called *timelike*
If $a^2 < 0$,	a^μ is called *spacelike*
If $a^2 = 0$,	a^μ is called *lightlike*

Snelheid

Snelheid van een deeltje t.o.v. het LAB: afstand gedeeld door tijd (beide gemeten in het LAB)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

Proper snelheid: afstand in LAB gedeeld door eigentijd (gemeten met klok van het deeltje)

$$\boxed{\boldsymbol{\eta} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}}$$

Een hybride grootheid. Er geldt $\boldsymbol{\eta} = \gamma \mathbf{v}$

viersnelheid $\boxed{\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}}$

$$\eta^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d(ct)}{(1/\gamma)dt} = \gamma c \quad \Rightarrow \quad \eta^\mu = \gamma(c, v_x, v_y, v_z)$$

Er geldt $\eta_\mu \eta^\mu = \gamma^2(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) = \gamma^2 c^2 (1 - v^2/c^2) = c^2$

Impuls en energie

Klassieke impuls $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$

Indien behouden in S dan niet in S'

Definieer relativistische impuls als

$$\boxed{p^\mu = m\eta^\mu}$$

Ruimtelijke componenten $\mathbf{p} \equiv m\boldsymbol{\eta}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v} = \dfrac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Tijdachtige component $p^0 = \gamma mc$

Definieer relatv. energie $E = \gamma mc^2 = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} p^0 = \gamma mc \\ E = \gamma mc^2 \end{array}\right\} \quad p^0 = \frac{E}{c}$$

Energie-impuls viervector

$$\boxed{p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right)} \Rightarrow \boxed{p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2}$$

Energie

Taylor expansie levert

$$\boxed{E = mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots\right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \cdots}$$

Rustenergie van deeltje

Klassieke kinetische energie

Merk op dat enkel veranderingen in energie relevant zijn in de klassieke mechanica!

Relativistische kinetische energie

$$T \equiv mc^2(\gamma - 1) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \cdots$$

Massaloze deeltjes (snelheid altijd c)

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow \boxed{E = |\mathbf{p}|c}$$

$$\boxed{E = h\nu}$$

Botsingen

Energie en impuls:
behouden grootheden!

Merk op dat E en $\boldsymbol{p}$ niet (Lorentz) invariant zijn!

Massa is Lorentz invariant

Massa m is geen behouden grootheid!

Relativistic Collisions

1. Energy is conserved, $E_A + E_B = E_C + E_D$.

2. Momentum is conserved $\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_C + \mathbf{p}_D$.

$$\Rightarrow p_A^\mu + p_B^\mu = p_C^\mu + p_D^\mu$$

3. Kinetic energy may or may not be conserved.

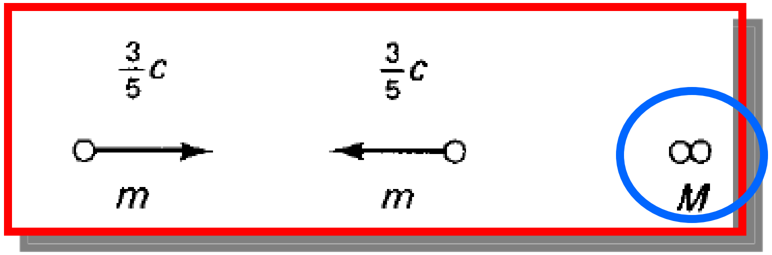
Types of Collisions (Relativistic)

(a) *Sticky:* Kinetic energy decreases, rest energy and mass increase.

(b) *Explosive:* Kinetic energy increases, rest energy and mass decrease.

(c) *Elastic:* Kinetic energy, rest energy, and mass are conserved.

Voorbeeld 1



Massa's klonteren samen tot 1 object

begintoestand

eindtoestand

Energiebehoud $E_1 + E_2 = E_M$

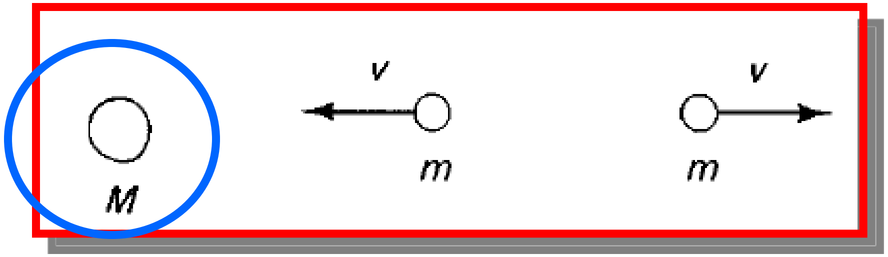
Impulsbehoud $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_M$

Er geldt $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ → Na botsing is object in rust!

Energiebehoud levert $$Mc^2 = 2E_m = \frac{2mc^2}{\sqrt{1-(3/5)^2}} = \frac{5}{4}(2mc^2)$$

Na botsing hebben we een object met massa *M = 5m/2*. Massa is toegenomen: kinetische energie is omgezet in rustenergie en de massa neemt toe.

Voorbeeld 2



Deeltje vervalt in 2 gelijke delen

begintoestand

eindtoestand

Energiebehoud

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(zie vorige opgave)

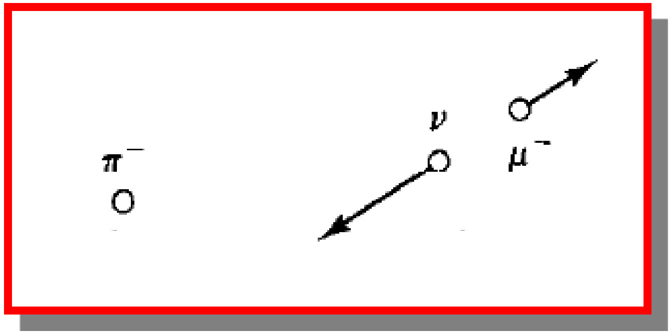
$$v = c\sqrt{1 - (2m/M)^2}$$

Heeft enkel betekenis als $M > 2m$

Men noemt $M = 2m$ de *drempelenergie* voor het verval.

Voor stabiele deeltjes is de *bindingsenergie* negatief. Bindingsenergie maakt net als alle andere interne energieën deel uit van de rustmassa.

Voorbeeld 3



Verval van een negatief pion (in rust): $\pi^- \rightarrow \nu + \mu^-$

Vraag: snelheid van het muon

Relatie tussen energie en impuls

$$\boxed{E^2 - \mathbf{p}^2c^2 = m^2c^4}$$

Dit levert

$$E_\pi = m_\pi c^2$$
$$E_\mu = c\sqrt{m_\mu^2 c^2 + \mathbf{p}_\mu^2}$$
$$E_\nu = |\mathbf{p}_\nu|c = |\mathbf{p}_\mu|c$$

Massa van neutrino is verwaarloosbaar!

Energiebehoud

$$m_\pi c^2 = c\sqrt{m_\mu^2 c^2 + \mathbf{p}_\mu^2} + |\mathbf{p}_\mu|c \Rightarrow (m_\pi c - |\mathbf{p}_\mu|)^2 = m_\mu^2 c^2 + \mathbf{p}_\mu^2$$

$$\Rightarrow |\mathbf{p}_\mu| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c$$

Voorbeeld 3 – vervolg

$$|\mathbf{p}_\mu| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c$$

Gebruik $E^2 - \mathbf{p}^2c^2 = m^2c^4$ $\Rightarrow$ $E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2$

Relatie tussen energie, impuls en snelheid

$$\left.\begin{aligned} E &= \gamma mc^2 \\ \mathbf{p} &= \gamma m\mathbf{v} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\mathbf{p}/E = \mathbf{v}/c^2}$$

Snelheid van het muon $v_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} c$

Invullen van de massa's levert $v_\mu = 0.271c$

Voorbeeld 3 – viervectoren

Energie en impulsbehoud $p_\pi = p_\mu + p_\nu \Rightarrow p_\nu = p_\pi - p_\mu$

Kwadrateren levert $p_\nu^2 = p_\pi^2 + p_\mu^2 - 2p_\pi \cdot p_\mu$

Merk op dat $p_\nu^2 = 0;\quad p_\pi^2 = m_\pi^2 c^2,\quad p_\mu^2 = m_\mu^2 c^2;$ en $p_\pi \cdot p_\mu = \frac{E_\pi}{c}\frac{E_\mu}{c} = m_\pi E_\mu$

We vinden E_μ $0 = m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2m_\pi E_\mu$

Evenzo $p_\mu = p_\pi - p_\nu \Rightarrow m_\mu^2 c^2 = m_\pi^2 c^2 - 2m_\pi E_\nu$

Er geldt $E_\nu = |\mathbf{p}_\nu| c = |\mathbf{p}_\mu| c \Rightarrow 2m_\pi |\mathbf{p}_\mu| = (m_\pi^2 - m_\mu^2)c$

Hiermee hebben we weer E_μ en ***p*** gevonden en weten we de snelheid.