

# Tentamen: Structuur der materie: subatomaire fysica

Docent: J. F. J. van den Brand  
Datum: 19 Februari 2009  
Zaal: M6.39  
Tijd: 18.30 - 20.30 uur

- Vermeld je naam op elke pagina.
- Vermeld je collegenummer.
- Alle benodigde fysische constanten en het quarkmodel zijn te vinden in de bijlage.
- Gebruik van een rekenmachine is toegestaan.
- Alle opgaven hebben hetzelfde gewicht.
- Motiveer je resultaat teneinde een maximale score te bereiken.

Opgave 1a. Geef met argumenten aan welke van de volgende reacties wel of niet mogelijk zijn. Geef een schets van de Feynmandiagrammen voor de reacties die wel mogelijk zijn.

- (a)  $\pi^0 \rightarrow e^+e^-\gamma$
- (b)  $p \rightarrow ne^+\nu_e$
- (c)  $\mu^+ \rightarrow e^+e^-e^+$
- (d)  $\Lambda \rightarrow K^+\pi^-$
- (e)  $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ .

Opgave 2. We beschouwen de vervalsreacties  $\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0$  en  $\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+$ . Hierbij kunt u de kleine verschillen in faseruimte verwaarlozen.

Opgave 2a. Neem aan dat de eindtoestand een zuivere isospin  $I = \frac{3}{2}$  toestand is en bepaal de relatieve sterkte van de vervalven  $\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0$  en  $\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+$ .

Opgave 2b. Hetzelfde, maar doe de berekening over en neem aan dat de eindtoestand nu een zuivere isospin  $I = \frac{1}{2}$  toestand is.

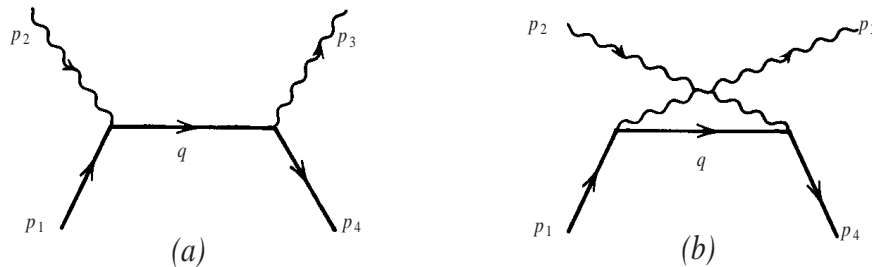
Opgave 2c. Experimenten laten zien dat de verhouding tussen de vervalsnelheden voor  $p\pi^0$  en  $n\pi^+$  bijna gelijk is aan 1. Wat betekent dat?

Opgave 3. We beschouwen het pionverval in een muon en een neutrino volgens  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ .

Opgave 3a) Een pion beweegt met een snelheid  $\beta$  en het vervalft volgens bovenstaande reactie. Stel dat het neutrino onder een hoek van  $90^\circ$  wordt uitgezonden ten opzichte van de richting van het originele pion. Bepaal een uitdrukking voor de hoek waaronder het  $\mu^-$  wordt uitgezonden.

Opgave 3b) We beschouwen het systeem waarin het pion in rust is. Hoeveel afstand zal het muon gemiddeld in vacuum afleggen voordat het vervalft (de levensduur van een muon is  $2,2 \mu\text{s}$ )? Geef zowel de formule als een numerieke schatting.

Opgave 4. In deze opgave beschouwen we de Feynman regels voor QED.



**Figuur 1:** Feynmandiagrammen voor Compton verstrooiing  $e^-\gamma \rightarrow e^-\gamma$ . De horizontale richting komt overeen met een toename van de tijd (van links naar rechts).

Opgave 4a) In Compton verstrooiing botst een foton met golflengte  $\lambda$  op een stilstaand elektron (massa  $m_e$ ). Na de botsing heeft het foton golflengte  $\lambda'$  en is het verstrooid over een hoek  $\theta$ . Leid de onderstaande uitdrukking af:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta). \quad (1)$$

Opgave 4b) Figuur 1a toont een Feynmandiagram voor Compton verstrooiing. Gebruik de Feynman regels om de amplitude van diagram (a) te bepalen.

Opgave 4c) Figuur 1b geeft het tweede Feynmandiagram dat in eerste orde bijdraagt tot Compton verstrooiing. Gebruik de Feynman regels om ook de amplitude van diagram (b) te bepalen.

Opgave 4d) Bepaal de totale amplitude voor het (eerste-orde) verstrooiingsproces. Dient er wel of niet een relatief minteken te worden gebruikt?

## BIJLAGE: FUNDAMENTELE CONSTANTEN

$$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_p = 1.672 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

$$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ 1/mol}$$

$$k = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

lichtsnelheid

constante van Planck

lading van het elektron

massa van het elektron

massa van het proton

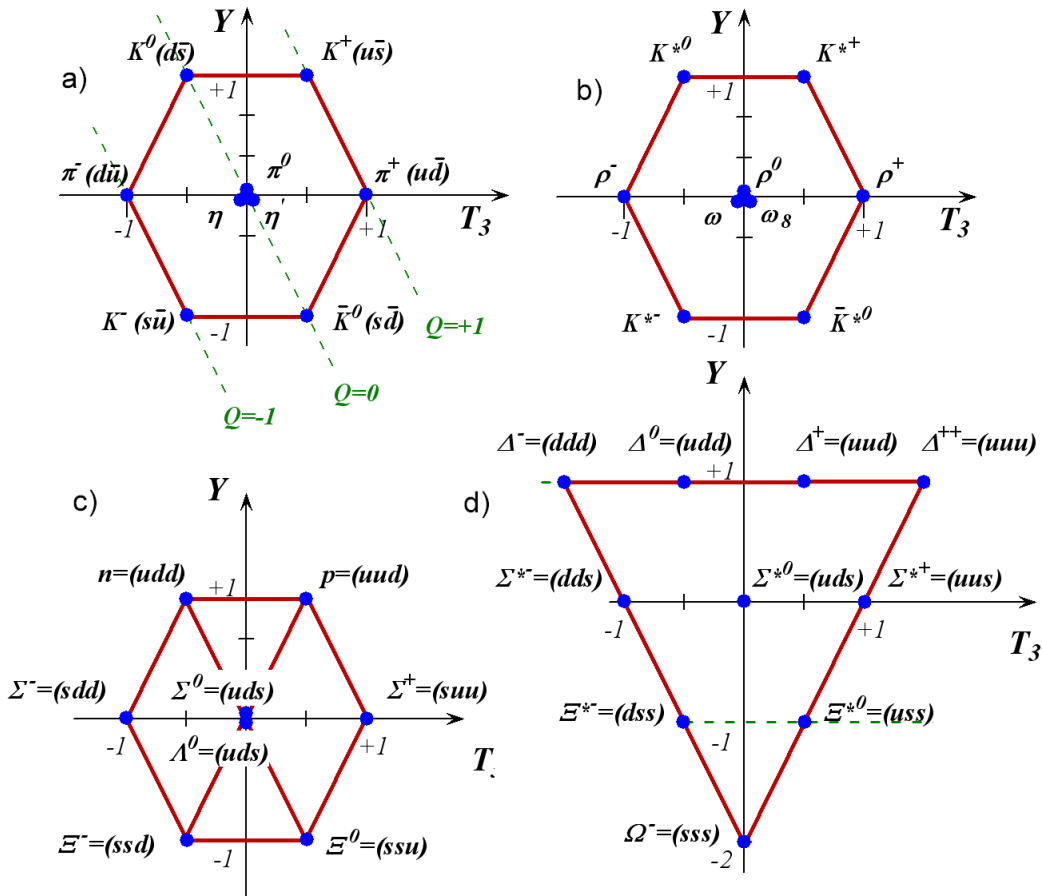
permittiviteit van het vacuüm

permeabiliteit van het vacuüm

constante van Avogadro

constante van Boltzmann

## BIJLAGE: QUARKMODEL



**Figuur 2:** Samenstelling van mesonen en baryonen uit quarks met flavors up, down, en strange in multipletten. Figuur a) toont het  $J^\pi = 0^-$  pseudoscalaire meson-octet en meson-singlet; b) de vectormesonen met  $J^\pi = 1^-$ ; c) het baryon-octet met  $J^\pi = \frac{1}{2}^+$ ; d) het baryon-decouplet met  $J^\pi = \frac{3}{2}^+$ .  $T_3$  is de  $z$ -projectie van de isospin en  $Y = S$  voor mesonen en  $Y = S + 1$  voor baryonen, met  $S$  de vreemdheid.

### 35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND $d$ FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for  $-8/15$  read  $-\sqrt{8/15}$ .

Notation:

$J$	$J$	$\dots$
$M$	$M$	$\dots$
$m_1$	$m_2$	$\dots$
$m_1$	$m_2$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Coefficients		

$1/2 \times 1/2$

1		
+1/2	+1/2	1
+1/2	-1/2	1/2
-1/2	+1/2	1/2
-1/2	-1/2	1

$2 \times 1/2$

5/2	5/2	3/2
+2	+1/2	1
+2	-1/2	1/5
+1	+1/2	4/5
+1	+1/2	3/5
+1	+1/2	-1/2

$1 \times 1/2$

3/2	3/2	1/2
+1	+1/2	1
+1	-1/2	1/3
0	+1/2	2/3
0	+1/2	-1/3
0	+1/2	-1/2

$3/2 \times 1/2$

2	2	1
+3/2	+1/2	1
+3/2	-1/2	1/4
+1/2	+1/2	3/4
+1/2	+1/2	-1/4
+1/2	+1/2	0

$2 \times 1$

3	3	2
+2	+1	1
+2	0	1/3
+1	+1	2/3
+1	+1	-1/3
+1	+1	-1

$3/2 \times 1$

5/2	5/2	3/2
+3/2	+1	1
+3/2	0	2/5
+1/2	+1	3/5
+1/2	+1	-2/5
+1/2	+1	1/2

$1 \times 1$

2	2	1
+1	+1	1
+1	0	1/2
0	+1	1/2
0	+1	-1/2
0	+1	-1/2

$3 \times 1$

1/5	1/2	3/10
+1	-1	1/5
+1	0	8/15
0	+1	1/6
0	+1	-3/10
0	+1	1/10

$2 \times 2$

4	4	3
+2	+2	1
+2	+1	1/2
+1	+2	1/2
+1	+2	-1/2
+1	+2	-1/2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2	+3/2	1
+3/2	+1/2	1/2
+1/2	+3/2	1/2
+1/2	+3/2	-1/2
+1/2	+3/2	-1/2

$2 \times 3/2$

7/2	7/2	5/2
+2	+3/2	1
+2	+1/2	3/7
+1	+3/2	4/7
+1	+3/2	-3/7
+1	+3/2	-3/7

$3/2 \times 3/2$

1/7	16/35	2/5
+1	+1/2	4/7
+1	+1/2	1/35
0	+3/2	2/7
0	+3/2	-18/35
0	+3/2	1/5

$2 \times 2$

4	4	3
+2	+2	1
+2	+1	1/2
+1	+2	1/2
+1	+2	-1/2
+1	+2	-1/2

$3/2 \times 3/2$

1/14	3/10	3/7
+1	+1	1/5
+1	0	3/7
0	+1	1/5
0	+1	-1/14
-1	+2	-3/10

$2 \times 2$

1/70	1/10	2/7
+1	-1	1/5
+1	0	8/35
0	+1	2/5
0	+1	-2/7
-1	+1	0

$3/2 \times 3/2$

4/35	27/70	2/5
+1	-3/2	1/10
+1	-1/2	18/35
0	-1/2	3/35
-1	+1/2	-1/5
-2	+3/2	-1/5

$2 \times 2$

2/7	18/35	1/5
+1	-3/2	1/10
+1	-1/2	4/7
0	-1/2	-1/35
-2	+1/2	1/7
-2	+1/2	-16/35

$3/2 \times 3/2$

1/14	3/10	3/7
+1	+1	1/5
+1	0	3/7
0	+1	1/5
0	+1	-1/14
-1	+2	-3/10

$2 \times 2$

1/70	1/10	2/7
+1	-1	1/5
+1	0	8/35
0	+1	2/5
0	+1	-2/7
-1	+1	0

$3/2 \times 3/2$

1/14	3/10	3/7
+1	+1	1/5
+1	0	3/7
0	+1	1/5
0	+1	-1/14
-1	+2	-3/10

$2 \times 2$

1/70	1/10	2/7
+1	-1	1/5
+1	0	8/35
0	+1	2/5
0	+1	-2/7
-1	+1	0

$3/2 \times 3/2$

1/14	3/10	3/7
+1	+1	1/5
+1	0	3/7
0	+1	1/5
0	+1	-1/14
-1	+2	-3/10

$2 \times 2$

1/70	1/10	2/7
+1	-1	1/5
+1	0	8/35
0	+1	2/5
0	+1	-2/7
-1	+1	0

$3/2 \times 3/2$

1/14	3/10	3/7
+1	+1	1/5
+1	0	3/7
0	+1	1/5
0	+1	-1/14
-1	+2	-3/10

$2 \times 2$

1/70	1/10	2/7
+1	-1	1/5
+1	0	8/35
0	+1	2/5
0	+1	-2/7
-1	+1	0

$3/2 \times 3/2$

1/14	3/10	3/7
+1	+1	1/5
+1	0	3/7
0	+1	1/5
0	+1	-1/14
-1	+2	-3/10

$2 \times 2$

1/70	1/10	2/7
+1	-1	1/5
+1	0	8/35
0	+1	2/5
0	+1	-2/7
-1	+1	0

$3/2 \times 3/2$

1/14	3/10	3/7
+1	+1	1/5
+1	0	3/7
0	+1	1/5
0	+1	-1/14
-1	+2	-3/10

$2 \times 2$

1/70	1/10	2/7
+1	-1	1/5
+1	0	8/35
0	+1	2/5
0	+1	-2/7
-1	+1	0

$3/2 \times 3/2$

1/14	3/10	3/7
+1	+1	1/5
+1	0	3/7
0	+1	1/5
0	+1	-1/14
-1	+2	-3/10

$2 \times 2$

1/70	1/10	2/7
+1	-1	1/5
+1	0	8/35
0	+1	2/5
0	+1	-2/7
-1	+1	0

$3/2 \times 3/2$

1/14	3/10	3/7
+1	+1	1/5
+1	0	3/7
0	+1	1/5
0	+1	-1/14
-1	+2	-3/10

$2 \times 2$

1/70	1/10	2/7
+1	-1	1/5
+1	0	8/35
0	+1	2/5
0	+1	-2/7
-1	+1	0

$3/2 \times 3/2$

1/14	3/10	3/7
+1	+1	1/5
+1	0	3/7
0	+1	1

**PARTICLE DATA**  
(Mass in MeV/c<sup>2</sup>; Lifetime in Seconds; Charge in Units of Proton Charge.)

**QUARKS (Spin 1/2)**

	Flavor	Charge	Mass (speculative)		
			Bare	Effective	
				In baryons	In mesons
First generation	<i>d</i>	$-\frac{1}{3}$	7.5	} 363	310
	<i>u</i>	$+\frac{2}{3}$	4.2		
Second generation	<i>s</i>	$-\frac{1}{3}$	150	538	483
	<i>c</i>	$+\frac{2}{3}$	1100		1500
Third generation	<i>b</i>	$-\frac{1}{3}$	4200		4700
	<i>t</i>	$+\frac{2}{3}$			>23,000

**LEPTONS (Spin 1/2)**

	Lepton	Charge	Mass	Lifetime	Principal decays
First generation	<i>e</i>	-1	0.511003	$\infty$	—
	$\nu_e$	0	0	$\infty$	—
Second generation	$\mu$	-1	105.659	$2.197 \times 10^{-6}$	$e\nu_\mu\bar{\nu}_e$
	$\nu_\mu$	0	0	$\infty$	—
Third generation	$\tau$	-1	1784	$3.3 \times 10^{-13}$	$\mu\nu_\tau\bar{\nu}_\mu, e\nu_\tau\bar{\nu}_e, \rho\nu_\tau$
	$\nu_\tau$	0	0	$\infty$	—

**MEDIATORS (Spin 1)**

Mediator	Charge	Mass	Lifetime	Force
gluon	0	0	$\infty$	strong
photon ( $\gamma$ )	0	0	$\infty$	electromagnetic
$W^\pm$	$\pm 1$	81,800	unknown	(charged) weak
$Z^0$	0	92,600	unknown	(neutral) weak
				} electroweak

**BARYONS (Spin  $\frac{1}{2}$ )**

Baryon	Quark content	Charge	Mass	Lifetime	Principal decays
$N \begin{cases} p \\ n \end{cases}$	$uud$ $udd$	+1 0	938.280 939.573	$\infty$ 900	— $p\bar{e}\bar{\nu}_e$
$\Lambda$	$uds$	0	1115.6	$2.63 \times 10^{-10}$	$p\pi^-, n\pi^0$
$\Sigma^+$	$uus$	+1	1189.4	$0.80 \times 10^{-10}$	$p\pi^0, n\pi^+$
$\Sigma^0$	$uds$	0	1192.5	$6 \times 10^{-20}$	$\Lambda\gamma$
$\Sigma^-$	$dds$	-1	1197.3	$1.48 \times 10^{-10}$	$n\pi^-$
$\Xi^0$	$uss$	0	1314.9	$2.90 \times 10^{-10}$	$\Lambda\pi^0$
$\Xi^-$	$dss$	-1	1321.3	$1.64 \times 10^{-10}$	$\Lambda\pi^-$
$\Lambda_c^+$	$udc$	+1	2281	$2 \times 10^{-13}$	not established

**BARYONS (Spin  $\frac{3}{2}$ )**

Baryon	Quark content	Charge	Mass	Lifetime	Principal decays
$\Delta$	$uuu, uud, udd, ddd$	+2, +1, 0, -1	1232	$0.6 \times 10^{-23}$	$N\pi$
$\Sigma^*$	$uus, uds, dds$	+1, 0, -1	1385	$2 \times 10^{-23}$	$\Lambda\pi, \Sigma\pi$
$\Xi^*$	$uss, dss$	0, -1	1533	$7 \times 10^{-23}$	$\Xi\pi$
$\Omega^-$	$sss$	-1	1672	$0.82 \times 10^{-10}$	$\Lambda K^-, \Xi^0\pi^-, \Xi^-\pi^0$

**PSEUDOSCALAR MESONS (Spin 0)**

Meson	Quark content	Charge	Mass	Lifetime	Principal decays
$\pi^\pm$	$u\bar{d}, d\bar{u}$	+1, -1	139.569	$2.60 \times 10^{-8}$	$\mu\nu_\mu$
$\pi^0$	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	0	134.964	$8.7 \times 10^{-17}$	$\gamma\gamma$
$K^\pm$	$u\bar{s}, s\bar{u}$	+1, -1	493.67	$1.24 \times 10^{-8}$	$\mu\nu_\mu, \pi^\pm\pi^0, \pi^\pm\pi^+\pi^-$
$K^0, \bar{K}^0$	$d\bar{s}, s\bar{d}$	0, 0	497.72	$\left\{ \begin{array}{l} K_S^0 0.892 \times 10^{-10} \\ K_L^0 5.18 \times 10^{-8} \end{array} \right.$	$\pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0$ $\pi e\nu_e, \pi\mu\nu_\mu, \pi\pi\pi$
$\eta$	$(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$	0	548.8	$7 \times 10^{-19}$	$\gamma\gamma, \pi^0\pi^0\pi^0, \pi^+\pi^-\pi^0$
$\eta'$	$(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})/\sqrt{3}$	0	957.6	$3 \times 10^{-21}$	$\eta\pi\pi, \rho^0\gamma$
$D^\pm$	$c\bar{d}, d\bar{c}$	+1, -1	1869	$9 \times 10^{-13}$	$K\pi\pi$
$D^0, \bar{D}^0$	$c\bar{u}, u\bar{c}$	0, 0	1865	$4 \times 10^{-13}$	$K\pi\pi$
$F^\pm$ (now $D_s^\pm$ )	$c\bar{s}, s\bar{c}$	+1, -1	1971	$3 \times 10^{-13}$	not established
$B^\pm$	$u\bar{b}, b\bar{u}$	+1, -1	5271	$14 \times 10^{-13}$	$D + ?$
$B^0, \bar{B}^0$	$d\bar{b}, b\bar{d}$	0, 0	5275		
$\eta_c$	$c\bar{c}$	0	2981	$6 \times 10^{-23}$	$KK\pi, \eta\pi\pi, \eta'\pi\pi$

**VECTOR MESONS (Spin 1)**

Meson	Quark content	Charge	Mass	Lifetime	Principal decays
$\rho$	$u\bar{d}, d\bar{u}, (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	+1, -1, 0	770	$0.4 \times 10^{-23}$	$\pi\pi$
$K^*$	$u\bar{s}, s\bar{u}, d\bar{s}, s\bar{d}$	+1, -1, 0, 0	892	$1 \times 10^{-23}$	$K\pi$
$\omega$	$(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$	0	783	$7 \times 10^{-23}$	$\pi^+\pi^-\pi^0, \pi^0\gamma$
$\phi$	$s\bar{s}$	0	1020	$20 \times 10^{-23}$	$K^+K^-, K^0\bar{K}^0$
$J/\psi$	$c\bar{c}$	0	3097	$1 \times 10^{-20}$	$e^+e^-, \mu^+\mu^-, 5\pi, 7\pi$
$D^*$	$c\bar{d}, d\bar{c}, c\bar{u}, u\bar{c}$	+1, -1, 0, 0	2010	$>1 \times 10^{-22}$	$D\pi, D\gamma$
$\Upsilon$	$b\bar{b}$	0	9460	$2 \times 10^{-20}$	$\tau^+\tau^-, \mu^+\mu^-, e^+e^-$

## PAULI MATRICES

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k; \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k; \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$$

$$(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}); \quad e^{i\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma}} = \cos \theta + i\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin \theta$$

## DIRAC MATRICES

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}; \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Product rules and trace theorems: see Appendix C.

## DIRAC EQUATION

$$i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc\psi = 0$$

$$(\not{\partial} - mc)u = 0; \quad (\not{\partial} + mc)v = 0$$

$$\bar{u}(\not{\partial} - mc) = 0; \quad \bar{v}(\not{\partial} + mc) = 0$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0; \quad \bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0; \quad \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger}$$

## FEYNMAN RULES

### EXTERNAL LINES

Spin 0:	(Nothing)
Spin $\frac{1}{2}$ :	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Incoming particle: } u \\ \text{Incoming antiparticle: } \bar{v} \\ \text{Outgoing particle: } \bar{u} \\ \text{Outgoing antiparticle: } v \end{array} \right.$
Spin 1:	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Incoming: } \epsilon^\mu \\ \text{Outgoing: } \epsilon^{\mu*} \end{array} \right.$

### PROPAGATORS

Spin 0:	$\frac{i}{q^2 - (mc)^2}$
Spin $\frac{1}{2}$ :	$\frac{i(\not{q} + mc)}{q^2 - (mc)^2}$
Spin 1:	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Massless: } \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \\ \text{Massive: } \frac{-i[g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / (mc)^2]}{q^2 - (mc)^2} \end{array} \right.$