

Tentamen: Structuur der materie: subatomaire fysica

Docent: J. F. J. van den Brand

Datum: 4 April 2007

Zaal: S2.01

Tijd: 18.30 - 20.30 uur

- Vermeld je naam op elke pagina.
- Vermeld je collegenummer.
- Alle benodigde fysische constanten en het quarkmodel zijn te vinden in de bijlage.
- Gebruik van een rekenmachine is toegestaan.
- Gebruik van het *Particle Physics Booklet* is toegestaan.
- Alle opgaven hebben hetzelfde gewicht.
- Motiveer je resultaat teneinde een maximale score te bereiken.

Opgave 1. Deze opgave bestaat uit drie korte opgaven over verschillende onderwerpen.

Opgave 1a) Wat is het baryongetal van een quark? Waarom is baryongetal van belang?

Opgave 1b) De primaire energiebron van de zon is de fusie van twee protonen tot een deutron. De reactie verloopt via de zwakke wisselwerking. Geef de reactievergelijking en toon aan dat de zon een bron van neutrino's (en niet van antineutrino's) is.

Opgave 1c) Beschouw het verval $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$.

Waarom is dit geen sterke wisselwerking? Geef een Feynmandiagram voor dit verval (hint: laat s quark overgaan in u via koppeling aan geladen stroom).

Opgave 2. Kosmische straling bestaat voor een deel uit zeer energetische protonen. Een ultra-relativistisch proton zal geabsorbeerd worden door fotonen die de kosmische microgolfstraling (CMBR) vormen. De reactie die optreedt is

$$p + \gamma \rightarrow \Delta^+.$$

Het Δ^+ deeltje vervalst snel naar een nucleon en een pion en verliest op deze wijze zijn energie. Dit zogenaamd GZK proces leidt tot een limiet voor de energie van kosmische protonen. Het bepaalt de maximum energie van kosmische protonen (men spreekt van de GZK cut-off).

Opgave 2a) Neem aan dat de CMBR fotonen een energie hebben gegeven door $E = kT$. De temperatuur van deze straling is 2.7 K. Bereken de proton energie waarbij dit proces optreedt.

De massa van de Δ^+ is $m_{\Delta^+} = 1232 \text{ MeV}/c^2$.

De massa van een proton is $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$.

Hint: neem aan dat proton en foton frontaal op elkaar botsen.

De Lorentztransformatie wordt gegeven door

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad \text{met} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

voor een relatieve beweging in de x -richting.

Opgave 2b) Hoeveel tijd (gemeten in het referentiesysteem van het proton) heeft een dergelijk proton nodig om het ons bekende heelal te doorkruisen (met een straal van 13.7 miljard lichtjaren).

Hint: indien je opgave 2a) niet kunt oplossen, neem dan aan dat de energie 10^{21} eV is.

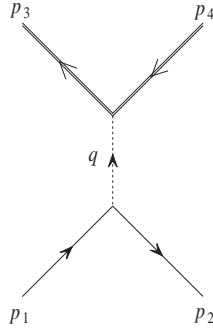
Opgave 2c) De gevormde Δ^+ vervalst snel als volgt

$$\Delta^+ \rightarrow p + \pi^0 \quad \text{en} \quad \Delta^+ \rightarrow n + \pi^+.$$

Bereken de verhouding van de aantallen in Δ^+ -verval geproduceerde protonen en neutronen.

Opgave 2d) Recent werd er in een publicatie (<http://arXiv.org/abs/hep-ex/0208024>) bewezen dat men deeltjes in kosmische straling heeft waargenomen met energieën boven deze GZK cutoff. Leg uit hoe je zo iets interpreteert.

Opgave 3. Beschouw de reactie $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$ en de reactie $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow q\bar{q}$. Het bijbehorende Feynmandiagram wordt gegeven in onderstaande figuur.



Figuur 1: Elektron-positron annihilatie met muon-antimuon of quark-antiquark in de eindtoestand (tijd neemt toe in de verticale richting).

Opgave 3a) Laat zien hoe toepassen van de Feynmanregels leidt tot de volgende vergelijking voor de amplitude,

$$M = \frac{Qg_e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)][\bar{u}(p_3)\gamma_\mu v(p_4)],$$

met Q de lading van het muon (of quark), in eenheden van e ($\frac{2}{3}$ voor u, c, t ; $-\frac{1}{3}$ voor d, s, b).

Opgave 3b) Laat zien dat Casimir's 'trick' leidt tot de uitdrukking

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{1}{4} \left[\frac{Qg_e^2}{(p_1 + p_2)^2} \right]^2 \text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}_1 + mc)\gamma^\nu(\not{p}_2 - mc)] \times \text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_4 - Mc)\gamma_\nu(\not{p}_3 + Mc)],$$

met m de massa van het elektron en M dat van het muon (of quark).

Opgave 3c) Gebruik de trace theorema's om bovenstaande uitdrukking te reduceren tot

$$\langle |M|^2 \rangle = 8 \left[\frac{Qg_e^2}{(p_1 + p_2)^2} \right]^2 [(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + (mc)^2(p_3 \cdot p_4) + (Mc)^2(p_1 \cdot p_2) + 2(mc)^2(Mc)^2].$$

Hint: Het spoor van het product van een oneven aantal gamma matrices is nul. Verder $\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$ en $\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda})$.

Opgave 3c) We definiëren de verhouding R van hadron productie ten opzichte van die van muon paren als

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}.$$

Laat zien dat $R(E) = 3\Sigma Q_i^2$, waarbij gesommeerd wordt over alle quarksmaken met drempel boven energie E . Wat is R als enkel u, d en s quarks geproduceerd kunnen worden? Wat is R als ook c en b quarks geproduceerd kunnen worden?

Opgave 4. In deze opgave beschouwen we discrete symmetriën.

Opgave 4a) De ladingconjugatie operator (C) transformeert een Dirac spinor ψ naar een ‘ladinggeconjugeerde’ spinor ψ_C , gegeven door

$$\psi_C = C\psi = i\gamma^2\psi^*.$$

Bepaal de ladinggeconjugeerden van $u^{(1)}$ en $u^{(2)}$ en vergelijk deze met $v^{(1)}$ en $v^{(2)}$.

Opgave 4b) De pariteit operator (P) transformeert een Dirac spinor ψ naar een spinor ψ' , gegeven door

$$\psi' = P\psi = \gamma^0\psi.$$

Gegeven is de viervector $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. Laat zien dat deze transformeert als een (polaire) vector onder een pariteit transformatie (d.w.z. dat de ‘tijd’ component invariant is, terwijl de ‘ruimtelijke’ componenten van teken veranderen).

De gamma matrices zijn gedefinieerd door

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De spinoren $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ en $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ zijn gegeven.

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c(p_z)}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad v^{(1)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_z)}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

BIJLAGE: FUNDAMENTELE CONSTANTEN

$$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_p = 1.672 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

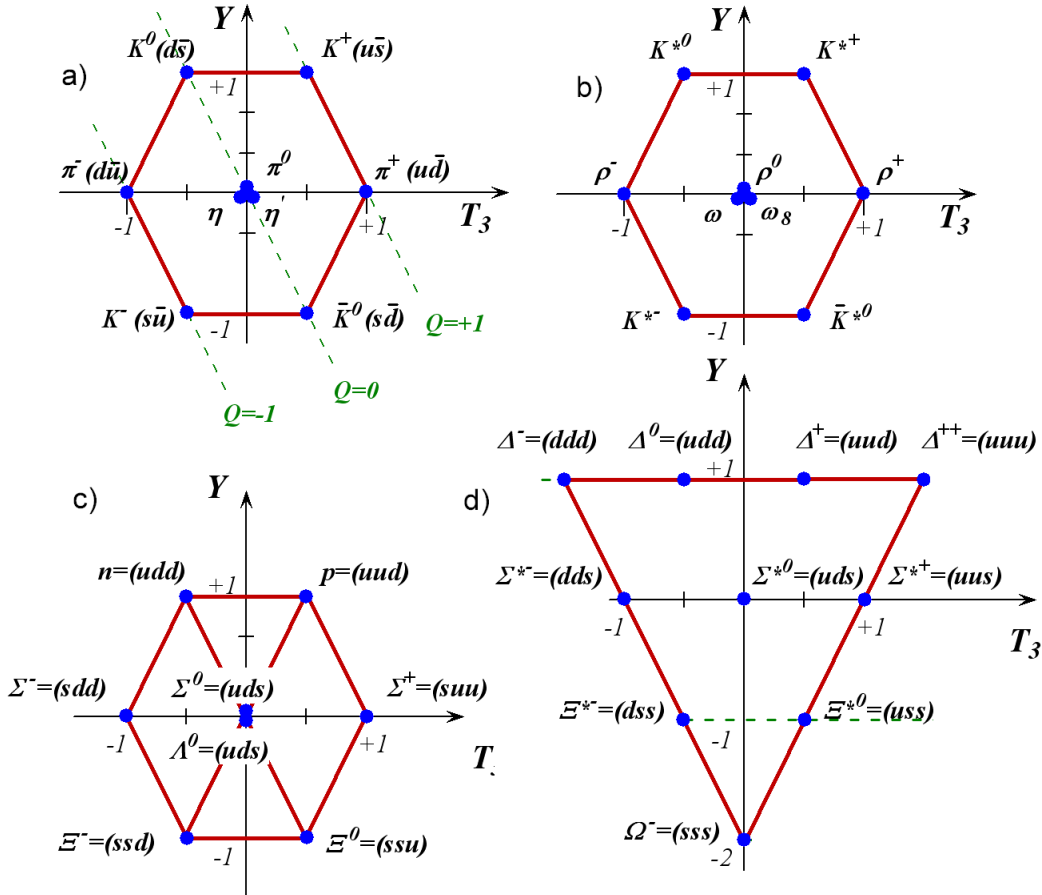
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

$$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ 1/mol}$$

$$k = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

lichtsnelheid
constante van Planck
lading van het elektron
massa van het elektron
massa van het proton
permittiviteit van het vacuüm
permeabiliteit van het vacuüm
constante van Avogadro
constante van Boltzmann

BIJLAGE: QUARKMODEL



Figuur 2: Samenstelling van mesonen en baryonen uit quarks met flavors up, down, en strange in multipletten. Figuur a) toont het $J^\pi = 0^-$ pseudoscalaire meson-octet en meson-singlet; b) de vectormesonen met $J^\pi = 1^-$; c) het baryon-octet met $J^\pi = \frac{1}{2}^+$; d) het baryon-decouplet met $J^\pi = \frac{3}{2}^+$. T_3 is de z-projectie van de isospin en $Y = S$ voor mesonen en $Y = S + 1$ voor baryonen, met S de vreemdheid.

