

## Tentamen: Structuur der materie: subatomaire fysica

Docent: J. F. J. van den Brand

Datum: 20 December 2006

Zaal: Q1.05

Tijd: 12.00 - 14.00 uur

- Vermeld je naam op elke pagina.
- Vermeld je collegenummer.
- Alle benodigde fysische constanten en het quarkmodel zijn te vinden in de bijlage.
- Gebruik van een rekenmachine is toegestaan.
- Gebruik van het *Particle Physics Booklet* is toegestaan.
- Alle opgaven hebben hetzelfde gewicht.
- Motiveer je resultaat teneinde een maximale score te bereiken.

Opgave 1. Deze opgave bestaat uit drie korte opgaven over verschillende onderwerpen.

Opgave 1a) De Mandelstam variabelen zijn voor een proces,  $A + B \rightarrow C + D$ , gedefinieerd als

$$\begin{aligned} s &\equiv (p_A + p_B)^2/c^2, \\ t &\equiv (p_A - p_C)^2/c^2, \\ u &\equiv (p_A - p_D)^2/c^2. \end{aligned}$$

Toon aan dat voor elastische verstrooiing van identieke deeltjes,  $A + A \rightarrow A + A$ , de Mandelstam variabelen gelijk zijn aan

$$\begin{aligned} s &= 4(\mathbf{p}^2 + m^2 c^2)/c^2, \\ t &= -2\mathbf{p}^2(1 - \cos \theta)/c^2, \\ u &= -2\mathbf{p}^2(1 + \cos \theta)/c^2, \end{aligned}$$

met  $\mathbf{p}$  de impuls van het inkomend deeltje en  $\theta$  de verstrooiingshoek in het zwaartepuntsysteem.

Opgave 1b) Beschouw nucleon-nucleon verstrooiing,

$$\begin{aligned} (a) \quad &p + p \rightarrow d + \pi^+, \\ (b) \quad &p + n \rightarrow d + \pi^0, \\ (c) \quad &n + n \rightarrow d + \pi^-. \end{aligned}$$

Het deuteron,  $d$ , draagt isospin  $I_d = 0$ , terwijl het nucleon isospin  $I_{\text{nucleon}} = \frac{1}{2}$  en het pion  $I_\pi = 1$  heeft. Bereken de verhouding van de werkzame doorsneden voor de drie processen  $\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c$ .

Opgave 1c) Welk verval van het  $D^0(c\bar{u})$  is het meest waarschijnlijk,

$$D^0 \rightarrow K^- + \pi^+, \quad D^0 \rightarrow \pi^- + \pi^+, \quad \text{of} \quad D^0 \rightarrow K^+ + \pi^-?$$

Welk verval is het minst waarschijnlijk? Teken de Feynmandiagrammen, verklaar je antwoord en vergelijk met de meetgegevens.

Hint: de CKM matrix geeft de koppeling tussen quarks in de zwakke wisselwerking. Zo geeft  $V_{us}$  de sterkte van de koppeling tussen  $u$  en  $s$  quarks. Deze vertexkoppelingen zijn complexe getallen en de absolute waarden zijn (stand van zaken in 2006)

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.974 & 0.227 & 0.004 \\ 0.227 & 0.973 & 0.042 \\ 0.008 & 0.042 & 0.999 \end{pmatrix}.$$

Opgave 2. Kosmische straling bestaat voor een deel uit zeer energetische protonen. Een ultra-relativistisch proton zal geabsorbeerd worden door fotonen die de kosmische microgolfstraling (CMBR) vormen. De reactie die optreedt is

$$p + \gamma \rightarrow \Delta^+.$$

Het  $\Delta^+$  deeltje vervalt snel naar een nucleon en een pion en verliest op deze wijze zijn energie. Dit zogenaamd GZK proces leidt tot een limiet voor de energie van kosmische protonen. Het bepaalt de maximum energie van kosmische protonen (men spreekt van de GZK cut-off).

*Opgave 2a)* Neem aan dat de CMBR fotonen een energie hebben gegeven door  $E = kT$ . De temperatuur van deze straling is 2.7 K. Bereken de proton energie waarbij dit proces optreedt.

De massa van de  $\Delta^+$  is  $m_{\Delta^+} = 1232 \text{ MeV}/c^2$ .

De massa van een proton is  $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$ .

Hint: neem aan dat proton en foton frontaal op elkaar botsen.

De Lorentztransformatie wordt gegeven door

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{met} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

voor een relatieve beweging in de  $x$ -richting.

*Opgave 2b)* Hoeveel tijd (gemeten in het referentiesysteem van het proton) heeft een dergelijk proton nodig om het ons bekende heelal te doorkruisen (met een straal van 13.7 miljard lichtjaren).

Hint: indien je opgave 2a) niet kunt oplossen, neem dan aan dat de energie  $10^{21} \text{ eV}$  is.

*Opgave 2c)* De gevormde  $\Delta^+$  vervalt snel als volgt

$$\Delta^+ \rightarrow p + \pi^0 \quad \text{en} \quad \Delta^+ \rightarrow n + \pi^+.$$

Bereken de verhouding van de aantallen in  $\Delta^+$ -verval geproduceerde protonen en neutronen.

*Opgave 2d)* Recent werd er in een publicatie (<http://arXiv.org/abs/hep-ex/0208024>) beweert dat men deeltjes in kosmische straling heeft waargenomen met energieën boven deze GZK cutoff. Leg uit hoe je zo iets interpreteert.

Opgave 3. Beschouw het verval  $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_{\mu}$ .

*Opgave 3a)* Verifieer behoud van leptongetal; geef het Feynmandiagram van dit verval.

*Opgave 3b)* Waarom kan het muon niet in hadronen vervallen?

*Opgave 3c)* Wat is de minimale en wat de maximale energie van het elektron in het muon rustsysteem?

De massa van het muon is  $m_{\mu^-} = 105.7 \text{ MeV}/c^2$ .

De massa van het elektron is  $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$ .

Neem aan dat de neutrino's massaloos zijn.

*Opgave 3d)* Wat is de heliceiteit van het elektron als het muon zodanig vervalt dat het elektron maximale energie krijgt?

Opgave 4. Het effect van tijdomkering kan beschreven worden door de actie

$$\psi \rightarrow \psi'(x', t') = T\psi \equiv i\gamma^1\gamma^3\psi^*(x, t).$$

De gamma matrices zijn gedefinieerd door

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De getransformeerde coördinaten zijn nu gedefinieerd als  $x' \equiv x$ ,  $y' \equiv y$ ,  $z' \equiv z$  en  $t' \equiv -t$ .

Opgave 4a) Toon aan dat de Diracvergelijking

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0 \quad \text{ofwel} \quad i\hbar\gamma^1\frac{\partial\psi}{\partial x} + i\hbar\gamma^2\frac{\partial\psi}{\partial y} + i\hbar\gamma^3\frac{\partial\psi}{\partial z} - mc\psi = -\frac{i\hbar}{c}\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

invariant is onder deze operatie.

Hint: bepaal afgeleiden zoals  $\partial\psi'/\partial x'$ . Verder  $\gamma^2 \rightarrow -\gamma^2$  onder complexe conjugatie.

Opgave 4b) Bepaal de tijdomgekeerde van spinoren  $u^{(1)}$  en  $u^{(2)}$  en vergelijk deze met  $v^{(1)}$  en  $v^{(2)}$ . Gegeven zijn

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c(p_z)}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad v^{(1)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_z)}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Opgave 4c) De operator voor ladingconjugatie,  $C$ , is gegeven door de actie  $\psi_c = i\gamma^2\psi^*$ , terwijl de pariteitsoperator gegeven wordt door  $P = \gamma^0$ . Laat zien hoe de negatieve energie oplossing  $\psi(\mathbf{r}, t) = v^{(2)}e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)}$  transformeert onder de gecombineerde operatie  $CPT$ .

De  $CPT$  operatie leidt tot een tekenwisseling in de vier ruimtetijd coördinaten,  $x' \equiv -x$ ,  $y' \equiv -y$ ,  $z' \equiv -z$  en  $t' \equiv -t$ , terwijl  $C$  ervoor zorgt dat de lading van het deeltje van teken omkeert. Hoe interpreteer je deze  $CPT$  transformatie van de negatieve energieoplossing van de Diracvergelijking?

Opgave 5. Geef met argumenten aan welke van de volgende reacties wel of niet mogelijk zijn volgens het Standaard Model van de deeltjesfysica. Geef voor de reacties die wel mogelijk zijn aan welke interactie verantwoordelijk is - sterk, elektromagnetisch, of zwak. Indien er neutrino's en/of antineutrino's voorkomen, geef dan aan welke dit zijn. Maak dus een keuze uit  $\nu_e$ ,  $\bar{\nu}_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\bar{\nu}_\mu$ ,  $\nu_\tau$  en  $\bar{\nu}_\tau$ . Ga ervan uit dat voor elke reactie voldoende energie beschikbaar is om de deeltjes te kunnen produceren (Zoals gebruikelijk geef ik niet aan wat de lading is indien dit vanzelfsprekend is, dus  $\gamma$ ,  $\Lambda$  en  $n$  zijn neutraal;  $p$  is positief en  $e$  is negatief, *etc.*).

- |  |   |
|--|---|
| (a) $p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ ,                | (b) $\eta \rightarrow \gamma + \gamma$ ,  |
| (c) $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \pi^0$ ,                 | (d) $\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$ ,    |
| (e) $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ ,                  | (f) $\mu^- \rightarrow e^- + \nu + \nu$ , |
| (g) $\rho \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ ,                       | (h) $\rho \rightarrow \pi^0 + \pi^0$ ,    |
| (i) $\nu + p \rightarrow n + e^+$ ,                          | (j) $e + p \rightarrow \nu + \pi^0$ ,     |
| (k) $p + p \rightarrow \Sigma^+ + n + K^0 + \pi^+ + \pi^0$ . |   |

## BIJLAGE: FUNDAMENTELE CONSTANTEN

$$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_p = 1.672 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

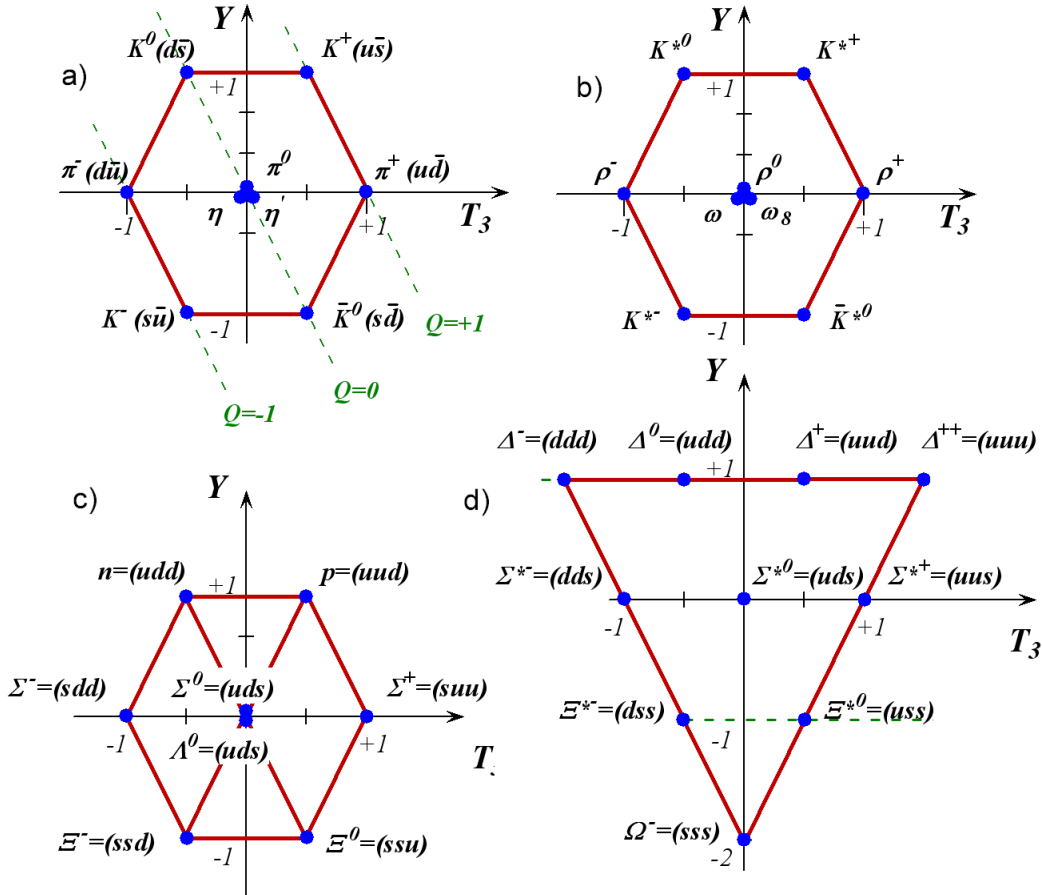
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

$$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ 1/mol}$$

$$k = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

lichtsnelheid  
constante van Planck  
lading van het elektron  
massa van het elektron  
massa van het proton  
permittiviteit van het vacuüm  
permeabiliteit van het vacuüm  
constante van Avogadro  
constante van Boltzmann

## BIJLAGE: QUARKMODEL



**Figuur 1:** Samenstelling van mesonen en baryonen uit quarks met flavors up, down, en strange in multipletten. Figuur a) toont het  $J^\pi = 0^-$  pseudoscalaire meson-octet en meson-singlet; b) de vectormesonen met  $J^\pi = 1^-$ ; c) het baryon-octet met  $J^\pi = \frac{1}{2}^+$ ; d) het baryon-decouplet met  $J^\pi = \frac{3}{2}^+$ .  $T_3$  is de z-projectie van de isospin en  $Y = S$  voor mesonen en  $Y = S + 1$  voor baryonen, met  $S$  de vreemdheid.

