

2 GEDWONGEN TRILLINGEN

2.0 INLEIDING

Onder de titel *gedwongen trillingen* bekijken we de trillingen van een zwak gedempte harmonische oscillator die ontstaan als deze niet zelfstandig trilt, maar wordt aangedreven door een externe invloed. We doen dit zowel voor een mechanisch systeem als voor een elektrisch systeem.

Van belang zijn vooral de *stationaire toestanden*, waarbij harmonische trillingen een centrale rol spelen. De frequentie van de aandrijving in relatie tot de systeemgrootheden is bepalend voor het gedrag van het systeem. Als deze frequentie in de buurt ligt van de eigenfrequentie die het systeem zonder demping zou hebben zullen er *resonantieverschijnselen* optreden: het systeem reageert dan relatief sterk op de aandrijving.

Daarnaast kijken we naar *inslingerverschijnselen*, die voorkomen tijdens het bereiken van stationaire toestanden. Deze kunnen worden beschreven met het begrip *superpositie*.

Met name bij de kwantitatieve beschrijving van het gedrag van het aangedreven elektrische systeem maken we gebruik van het begrip (*complexe*) *impedantie*. Hiermee kunnen *overdrachtsfuncties* van dit systeem worden beschreven.

2.1 MECHANISCH SYSTEEM

2.1.1 bewegingsvergelijking bij externe aandrijving

We kunnen de mechanische gedempte oscillator uit sectie 1.2.2 onderwerpen aan een periodiek variërende uitwendige kracht $F(t)$ die als een externe aandrijving gaat fungeren. We nemen hiervoor de eenvoudige vorm

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \quad [2.1]$$

Hoofdstuk 2 - Gedwongen trillingen

Dit betekent dat een nieuwe term aan de bewegingsvergelijking wordt toegevoegd, waardoor [1.33] overgaat in

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t \quad [2.2]$$

Met behulp van [1.6] en [1.34] wordt dit

$$\boxed{m \frac{d^2x}{dt^2} + 2m\gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t} \quad [2.3]$$

Dit is de differentiaalvergelijking voor de *gedwongen harmonische oscillator*. Let op: de hoekfrequentie ω wordt bepaald door de aandrijving, en heeft dus in het algemeen een andere waarde dan de hoekfrequenties ω_0 uit [1.6] of ω_1 uit [1.38].

Het is interessant om na te gaan hoe het gedempte massa-veersysteem bij vaste F_0 reageert voor verschillende waarden van ω . Het zal blijken dat de oscillator bij elke ingestelde waarde van ω na enige tijd *inslingeren* een harmonische beweging met hoekfrequentie ω aanneemt, waarbij de amplitude en de faseachterstand ten opzichte van $F(t)$ beide van de keuze van ω afhankelijk zijn. We spreken dan van een *stationaire toestand*. De eigenschappen van stationaire toestanden zullen we hieronder nader bekijken.

- Zullen amplitude en faseachterstand van de gedwongen trilling in een stationaire toestand, behalve van F_0 en van ω , ook afhangen van de systeemgrootheden van de gedempte oscillator? En van de begincondities van waaruit de stationaire toestand wordt bereikt?

stationaire oplossing

Een stationaire oplossing van [2.3] is te brengen in één van de vormen

$$\boxed{x(t) = A \cos(\omega t - \beta)} \quad [2.4a]$$

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad [2.4b]$$

waarbij

$$a = A \cos \beta, b = A \sin \beta \quad [2.5]$$

Volgens [2.1] en [2.4a] stelt β de *faseachterstand* voor die de uitwijking $x(t)$ van de stationaire oplossing heeft ten opzichte van de externe kracht $F(t)$.

Als bijvoorbeeld [2.4b] in [2.3] wordt ingevuld ontstaan er twee algebraïsche vergelijkingen waaruit a en b (en dus via [2.5] ook A en β) kunnen worden opgelost. De resultaten zijn:

$$a = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(2\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad [2.6a]$$

$$b = \frac{F_0}{m} \frac{2\gamma\omega}{(2\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad [2.6b]$$

Hoofdstuk 2 - Gedwongen trillingen

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(2\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \quad [2.7a]$$

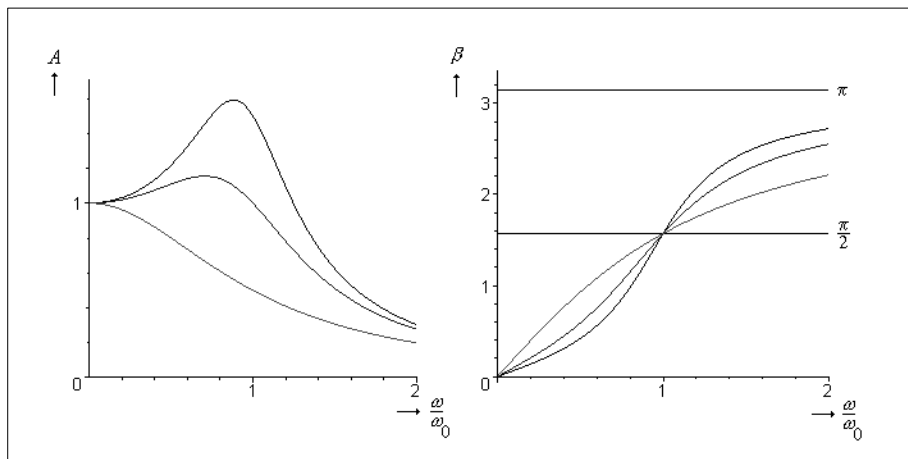
$$\tan \beta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad [2.7b]$$

- Controleer met de hierboven aangegeven procedure de resultaten [2.6a] en [2.6b].

Als op een gedempt systeem met gegeven m , γ en ω_0 een externe kracht werkt met constante amplitude F_0 en instelbare hoekfrequentie ω kunnen we dus A en β opvatten als functies van ω . Hierbij valt op te merken dat we A en β voor elke waarde van ω als positief kunnen beschouwen (zie [2.7a] en [2.6b]), zodat uit [2.5] voor de faseachterstand β van $x(t)$ op $F(t)$ volgt dat

$$0 < \beta < \pi \quad [2.8]$$

Het is instructief om A en β voor enkele vaste waarden van γ uit te zetten tegen $\frac{\omega}{\omega_0}$; dit is gedaan in figuur 2.1 (met $\gamma = \frac{\omega_0}{3}$, $\gamma = \frac{\omega_0}{2}$ en $\gamma = \omega_0$ terwijl $\frac{F_0}{m\omega_0^2} = 1$).



figuur 2.1

Zolang de demping zwak is vertoont de amplitude A een maximum dat duidelijker herkenbaar is en ook dichter bij $\omega = \omega_0$ ligt naarmate de demping zwakker is. Bij $\omega = \omega_0$ is de faseachterstand β voor elke waarde van γ gelijk aan $\frac{\pi}{2}$; voor andere waarden van ω wijkt β meer af van $\frac{\pi}{2}$ naarmate de demping zwakker is. In deze context wordt ω_0 ook wel de *resonantiehoekfrequentie* genoemd.

- Voor welke waarden van $\frac{\omega}{\omega_0}$ zijn uitwijking en uitwendige kracht ongeveer in fase? Voor welke waarden ongeveer in tegenfase? Geef een kwalitatieve verklaring met behulp van de differentiaalvergelijking [2.3].

2.1.2 resonantie

Uit het voorgaande blijkt dat het hoekfrequentiegebied $\omega \simeq \omega_0$ speciale aandacht verdient. De termen $m \frac{d^2x}{dt^2}$ en $m\omega_0^2 x$ in [2.3] zijn dan nagenoeg tegengesteld gelijk, zodat $F(t)$ steeds bijna in fase is met de snelheid $\frac{dx}{dt}$. De amplitude A bereikt dan bij geringe demping relatief grote waarden, terwijl door de oscillator relatief veel vermogen wordt opgenomen en weer afgestaan. Deze verschijnselen duidt men aan met *resonantie*.

gemiddeld vermogen als functie van de frequentie

Een goed uitgangspunt om de resonantieverschijnselen iets nauwkeuriger te beschrijven is het opstellen van een uitdrukking voor het *gemiddelde vermogen* dat in een stationaire toestand door de uitwendige kracht $F(t)$ aan de oscillator wordt geleverd.

Het (tijdsafhankelijke) vermogen $P(t)$ wordt gegeven door

$$P(t) = F(t)v(t) = F(t) \frac{dx}{dt} \quad [2.9]$$

Het gemiddelde vermogen $\langle P \rangle$ is het tijdsgemiddelde van $P(t)$ over één periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \frac{dx}{dt} dt \quad [2.10]$$

Uit [2.4b] volgt

$$\frac{dx}{dt} = -\omega a \sin \omega t + \omega b \cos \omega t \quad [2.11]$$

Invullen van [2.1], [2.11] en [2.6b] in [2.10] leidt tot

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T F_0 \cos \omega t (-\omega a \sin \omega t + \omega b \cos \omega t) dt \\ &= -F_0 \omega a \langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle + F_0 \omega b \langle \cos^2 \omega t \rangle \\ &= 0 + F_0 \omega \left(\frac{F_0}{m} \frac{2\gamma \omega}{(2\gamma \omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{F_0^2}{4m\gamma} \frac{(2\gamma \omega)^2}{(2\gamma \omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \end{aligned} \quad [2.12]$$

Aan [2.12] is te zien hoe $\langle P \rangle$ zich bij vaste m , γ , ω_0 en F_0 gedraagt als functie van ω . De laatste factor in [2.12] bereikt een maximale waarde 1 voor $\omega = \omega_0$, zodat $\langle P \rangle$ een maximum

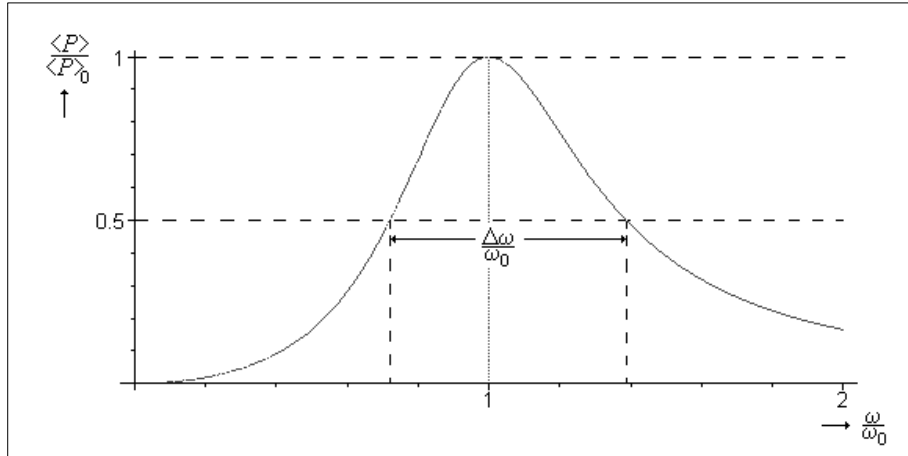
$$\langle P \rangle_0 = \frac{F_0^2}{4m\gamma} \quad [2.13]$$

heeft voor $\omega = \omega_0$. Bij de resonantiehoekfrequentie wordt dus gemiddeld over de tijd het grootste vermogen door de externe kracht aan het systeem geleverd (zie ook figuur 2.2).

Hoofdstuk 2 - Gedwongen trillingen

halfwaardebreedte

In figuur 2.2 is, bij wijze van voorbeeld, $\frac{\langle P \rangle}{\langle P \rangle_0}$ tegen $\frac{\omega}{\omega_0}$ uitgezet voor de waarde $\gamma = \frac{\omega_0}{3}$. In verband met het optredende maximum spreken we van een *resonantiecurve*. Let op: in tegenstelling tot de curves voor A uit figuur 2.1 hebben *alle* resonantiecurves voor $\langle P \rangle$ een maximum, ook voor grote waarden van γ . Bovendien liggen al deze maxima exact bij $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$.



figuur 2.2

In figuur 2.2 zijn ook de twee waarden van $\frac{\omega}{\omega_0}$ aangegeven waarvoor $\langle P \rangle = \frac{1}{2}\langle P \rangle_0$. Het verschil $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ tussen deze twee waarden is een maat voor de breedte van de resonantiecurve, en wordt de *halfwaardebreedte* genoemd. Evenzo is in een niet-genormeerd diagram, waarin $\langle P \rangle$ voor zekere γ direct tegen ω is uitgezet, de halfwaardebreedte gelijk aan de *bandbreedte* $\Delta\omega$. Dit is dus het verschil tussen de twee hoekfrequenties ω_2 en ω_1 waarvoor het gemiddeld overgedragen vermogen de helft van het maximum (bij die γ) bedraagt. Eenvoudig kan worden afgeleid dat

$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = 2\gamma \quad [2.14]$$

- Ga met behulp van [2.12] en [2.13] na dat $\omega_1 = -\gamma + \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2}$ en $\omega_2 = \gamma + \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2}$. Hoe liggen ω_1 en ω_2 ten opzichte van ω_0 bij zwakke demping?

kwaliteitsfactor

Hoe kleiner $\Delta\omega$ is ten opzichte van ω_0 , des te smaller is de resonantiepiek. Daarom wordt $\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ de *kwaliteitsfactor* Q genoemd, die verschillend geschreven kan worden:

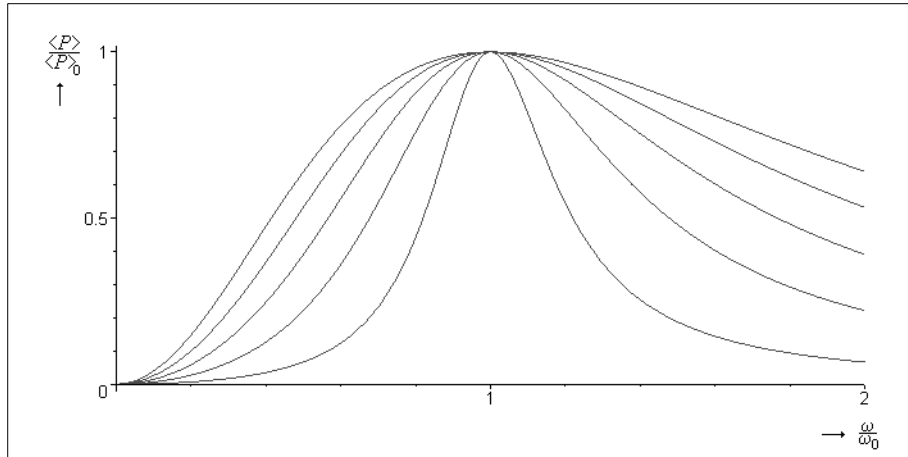
$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{m\omega_0}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{mk} \quad [2.15]$$

Een zwak gedempt systeem heeft dus een hoge kwaliteitsfactor. Het reageert met betrekking tot

Hoofdstuk 2 - Gedwongen trillingen

het opnemen van vermogen *selectief* (met een scherpe piek) als de aangeboden frequentie gevarieerd wordt.

In figuur 2.3 is, op de manier van figuur 2.2, een verzameling resonantiecurves uitgezet voor verschillende waarden van γ . Voor kleine γ liggen ω_1 en ω_2 vrijwel symmetrisch ten opzichte van ω_0 .



figuur 2.3

2.1.3 inslingerverschijnselen

superpositiebeginsel

Stel we nemen de vergelijkingen

$$H(x(t)) = F_1(t) \quad [2.16a]$$

$$H(x(t)) = F_2(t) \quad [2.16b]$$

$$H(x(t)) = F_1(t) + F_2(t) \quad [2.16c]$$

waarin $H(x(t))$ steeds dezelfde lineaire veelterm in $x(t)$ en afgeleiden van $x(t)$ voorstelt. Neem aan dat $x_1(t)$ een oplossing is van [2.16a], en $x_2(t)$ een oplossing van [2.16b]. Dan geldt:

$$H(x_1(t) + x_2(t)) = H(x_1(t)) + H(x_2(t)) = F_1(t) + F_2(t) \quad [2.17]$$

ofwel, $x_1(t) + x_2(t)$ is een oplossing van [2.16c]. We noemen dit het *superpositiebeginsel*: vanwege de lineariteit van H worden de oplossingen opgeteld (gesuperponeerd) als de rechterleden worden opgeteld.

overgangsooplossing

Het bovenstaande passen we nu als volgt toe. Voor [2.16a] én voor [2.16c] nemen we de

Hoofdstuk 2 - Gedwongen trillingen

differentiaalvergelijking voor de *gedwongen* harmonische oscillator [2.3], en voor [2.16b] die voor de *vrije gedempte* harmonische oscillator, zoals die volgt uit [1.33]:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + 2m\gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t \quad [2.3]$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + 2m\gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = 0 \quad [1.33]$$

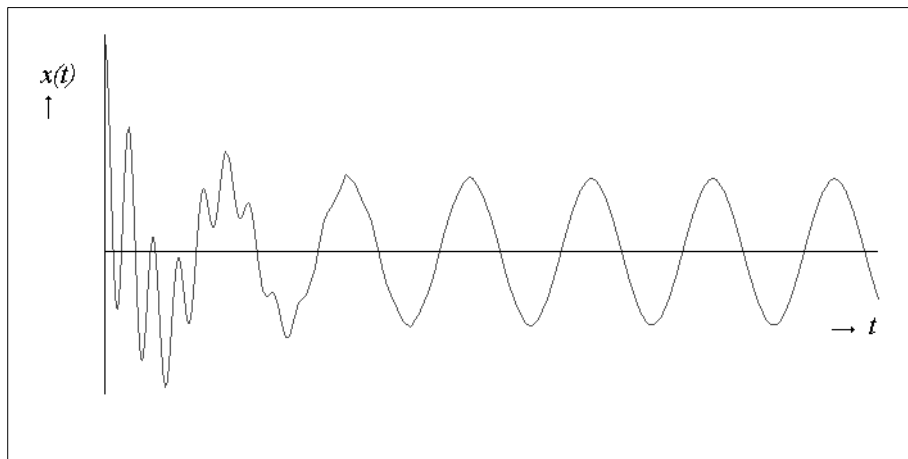
Het superpositiebeginsel zegt nu dat elke superpositie van een willekeurige oplossing $x_{vrij}(t)$ van [1.33] en een stationaire oplossing $x_{stat}(t)$ van [2.3]

$$x(t) = x_{vrij}(t) + x_{stat}(t) \quad [2.18]$$

opnieuw een oplossing is van [2.3]. Volgens [1.41] en [2.4a] wordt dit bij zwakke demping:

$$x(t) = e^{-\gamma t} A_1 \cos(\omega_1 t - \beta_1) + A \cos(\omega t - \beta) \quad [2.19]$$

waarbij A_1 en β_1 bepaald worden door de begincondities, maar A en β door [2.7]. Deze oplossingen voor het gedwongen systeem zijn dus algemener dan een stationaire oplossing, en niet periodiek. De *uitstervende* term $x_{vrij}(t)$ wordt, in tegenstelling tot de *periodieke* term $x_{stat}(t)$, beheerst door de hoekfrequentie ω_1 . Het resultaat voor de superpositie $x(t)$ kan er bijvoorbeeld uitzien zoals in figuur 2.4 (Let wel: $x_{vrij}(t)$ is op zich zelf géén oplossing van [2.3], maar draagt tijdens het inslingeren wel bij aan $x(t)$).



figuur 2.4

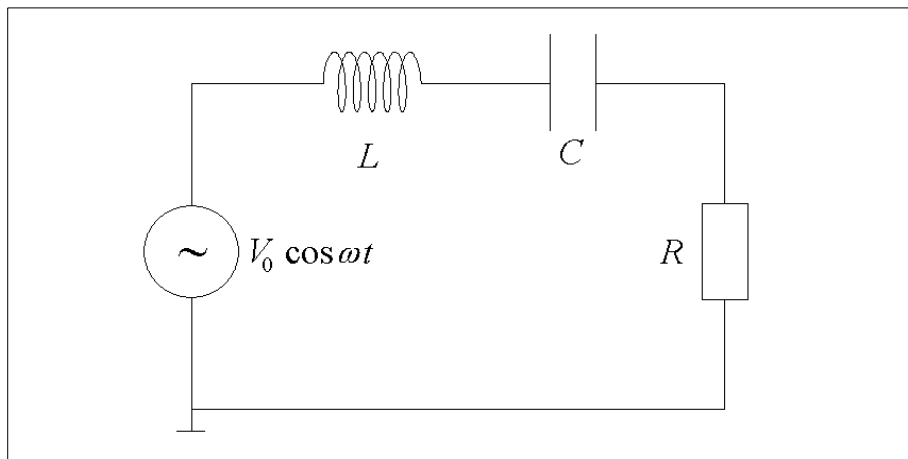
- Druk de *tijdconstante* τ voor het inslingerverschijnsel uit in γ .
- Geef in het geval van figuur 2.4 de grootste frequentie aan: ω of ω_1 .

2.2 ELEKTRISCH SYSTEEM

2.2.1 analogie met mechanisch systeem

stationaire oplossing voor de stroom

Als een *LRC*-kring wordt aangesloten op een wisselspanning $V(t) = V_0 \cos \omega t$ (figuur 2.5) zal er een *gedwongen elektrische trilling* optreden, waarbij in de praktijk heel snel een stationaire toestand intreedt.



figuur 2.5

Op de manier van [2.2] en [2.3] krijgt de differentiaalvergelijking één van de vormen

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0 \cos \omega t \quad [2.20a]$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + 2L\gamma \frac{dq}{dt} + L\omega_0^2 q = V_0 \cos \omega t \quad [2.20b]$$

De stationaire oplossing voor de lading op de condensator ziet er dan uit als

$$q(t) = A \cos(\omega t - \beta) \quad [2.21]$$

waarin, analoog met [2.7],

Hoofdstuk 2 - Gedwongen trillingen

$$A = \frac{V_0}{L} \frac{1}{\sqrt{(2\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \quad [2.22a]$$

$$\tan \beta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad [2.22b]$$

terwijl γ en ω_0 met R , L en C samenhangen volgens [1.47] en [1.19].

Uit [2.21] volgt voor de stationaire stroom $I(t)$ in de kring:

$$I(t) = -\omega A \sin(\omega t - \beta) = \omega A \cos(\omega t - \alpha) \quad [2.23]$$

waarbij de faseachterstand α van de stroom op de aangelegde spanning $V(t)$ moet voldoen aan

$$\alpha = \beta - \frac{\pi}{2} \quad [2.24]$$

zodat uit [2.8] volgt:

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad [2.25]$$

Dit laatste betekent dat $I(t)$, afhankelijk van de waarde van $\frac{\omega}{\omega_0}$, in werkelijkheid vóór of achter kan lopen op $V(t)$.

Voor de maximale waarde $I_m = \omega A$ en voor de faseachterstand α van $I(t)$ op $V(t)$ volgt uit [2.22] en [2.24]

$$I_m = \frac{V_0}{L} \frac{\omega}{\sqrt{(2\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \quad [2.26a]$$

$$\tan \alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega} \quad [2.26b]$$

Om formules te krijgen in termen van R , L en C vullen we [1.47] en [1.19] in, met als resultaat:

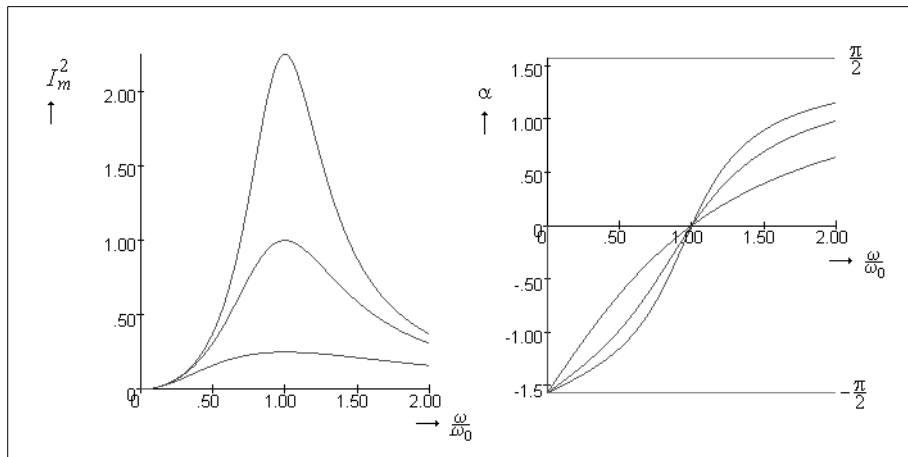
$$I_m = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad [2.27a]$$

$$\tan \alpha = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad [2.27b]$$

- Voor welke waarden van $\frac{\omega}{\omega_0}$ loopt $I(t)$ vóór op $V(t)$, voor welke waarden achter?

We zullen straks zien dat het handig is om het kwadraat van de maximale stroom als functie van ω te beschouwen. In figuur 2.6 zetten we I_m^2 en α uit tegen $\frac{\omega}{\omega_0}$ voor vaste waarden van L en C en voor verschillende waarden van R .

Hoofdstuk 2 - Gedwongen trillingen



figuur 2.6

vermogen en kwaliteitsfactor

Het gemiddelde vermogen dat de spanningsbron aan de kring levert is, analoog aan [2.10] en [2.12]:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) I(t) dt \\ &= \frac{V_0^2}{4L\gamma} \frac{(2\gamma\omega)^2}{(2\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \end{aligned} \quad [2.28]$$

Bij variatie van ω geeft dit aanleiding tot resonantiecurves zoals in figuur [2.3], met kwaliteitsfactor

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad [2.29]$$

gedrag van I_m^2

Uit [2.26a] volgt:

$$I_m^2 = \frac{V_0^2}{4L^2\gamma^2} \frac{(2\gamma\omega)^2}{(2\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad [2.30]$$

Vergelijken van [2.28] en [2.30] leert dat

$$\langle P \rangle = L\gamma I_m^2 = \frac{1}{2} R I_m^2 \quad [2.31]$$

- Waarom was het resultaat [2.31] te verwachten?

Hoofdstuk 2 - Gedwongen trillingen

Dit betekent dat I_m^2 en $\langle P \rangle$ zich voor een vaste waarde van R op dezelfde manier gedragen als functie van ω . De curves voor I_m^2 zoals in figuur 2.6 zijn dan ook gelijkvormig met vermogensresonantiecurves.

Uit curves voor I_m^2 als functie van ω kan dus, net als uit $\langle P \rangle$ als functie van ω , op 50% van de piekhoogte een halfwaardebreedte of *bandbreedte*

$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = \frac{R}{L} \quad [2.32]$$

van hoekfrequenties worden afgelezen waarvoor het gemiddeld overgedragen vermogen meer dan de helft van het maximum is. (Let op: uit I_m als functie van ω kan dezelfde bandbreedte $\Delta\omega$ dus worden afgelezen op $\frac{1}{2}\sqrt{2} \times 100\% \simeq 70\%$ van de piekhoogte).

De waarden ω_1 en ω_2 waarbij voor een bepaalde *LRC*-kring geldt dat $\langle P \rangle = \frac{1}{2}\langle P \rangle_0$ heten ook wel de *3dB-punten* van het systeem, omdat daar de verzwakking in dB gelijk is aan $-10^{10} \log \frac{1}{2} \simeq 3$. Deze verzwakking is een logaritmische maat voor $\frac{\langle P \rangle}{\langle P \rangle_0}$. Een afname met 3 dB komt dus ongeveer overeen met een factor $\frac{1}{2}$ in het vermogen.

- Hoe groot is de verzwakking in dB als $\frac{\langle P \rangle}{\langle P \rangle_0} = 0.1$, hoe groot als $\frac{\langle P \rangle}{\langle P \rangle_0} = 0.01$?

2.2.2 complexe rekenwijze

Bij de *complexe rekenwijze* vervangen we cosinusvormige spanningen en stromen door complexe functies via de substitutie

$$\cos(\omega t - \phi) \rightarrow e^{i(\omega t - \phi)} \quad [2.33]$$

Zo komt bijvoorbeeld in

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t) \quad [2.34a]$$

$$\underline{V}(t) = V_0 e^{i\omega t} \quad [2.34b]$$

de complexe functie $\underline{V}(t)$ in de plaats voor een werkelijke spanning $V(t)$ die daarvan het reële deel is. Hebben we nu een differentiaalvergelijking van de vorm

$$H(\underline{q}(t)) = \underline{V}(t) \quad [2.35]$$

met $H(\underline{q}(t))$ een *lineaire* veelterm in $\underline{q}(t)$ en afgeleiden van $\underline{q}(t)$ met *reële* coëfficiënten, dan zullen hieruit dezelfde oplossingen voor het reële deel $q(t)$ van $\underline{q}(t)$ komen als uit

$$H(q(t)) = V(t) \quad [2.36]$$

vectorvoorstelling

Het is dus mogelijk om lineaire bewerkingen zoals (delen van) H eerst toe te passen op een complexe functie $\underline{x}(t)$ met reëel deel $x(t)$ en daarna te stellen dat $H(x(t)) = \text{Re } H(\underline{x}(t))$. Daarbij kunnen de resultaten $H(\underline{x}(t))$ als *vectoren in het complexe vlak* worden weergegeven.

Hoofdstuk 2 - Gedwongen trillingen

Zo schrijven we in plaats van [2.20a] voor de differentiaalvergelijking van de aangedreven LRC-kring

$$L \frac{d^2 \underline{q}}{dt^2} + R \frac{d\underline{q}}{dt} + \frac{\underline{q}}{C} = V_0 e^{i\omega t} \quad [2.37]$$

Volgens [2.21] en [2.23] moeten hieruit als complexe oplossingen volgen (let op: $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$):

$$\underline{q}(t) = A e^{i(\omega t - \beta)} \quad [2.38a]$$

$$\underline{I}(t) = \frac{d\underline{q}}{dt} = i\omega \underline{q}(t) = \omega A e^{i(\omega t - \alpha)} \quad [2.38b]$$

$$\frac{d\underline{I}}{dt} = \frac{d^2 \underline{q}}{dt^2} = -\omega^2 \underline{q}(t) = -\omega^2 A e^{i(\omega t - \beta)} \quad [2.38c]$$

waarbij A , β en α weer voldoen aan [2.22] en [2.24].

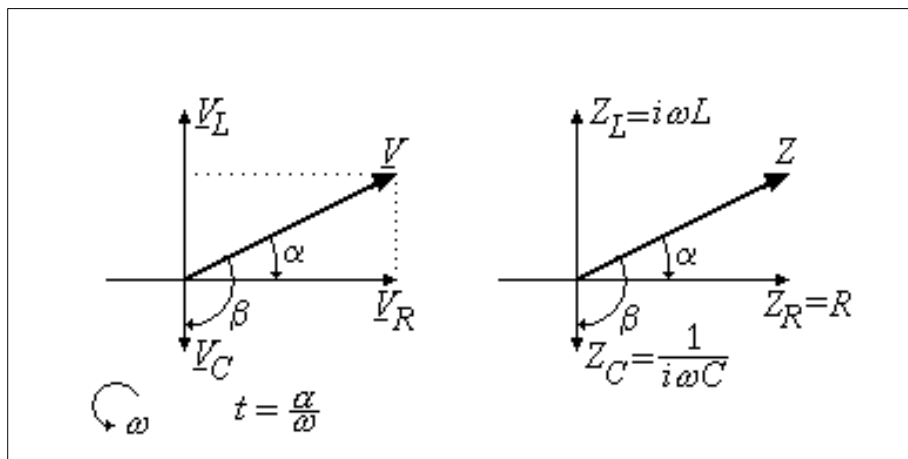
Hierbij geldt voor de complexe spanningen over condensator, weerstand en spoel:

$$\underline{V}_C = \frac{\underline{q}(t)}{C} \quad [2.39a]$$

$$\underline{V}_R = R \frac{d\underline{q}}{dt} = i\omega R \underline{q}(t) \quad [2.39b]$$

$$\underline{V}_L = L \frac{d^2 \underline{q}}{dt^2} = -\omega^2 L \underline{q}(t) \quad [2.39c]$$

Vergelijking [2.37] is de wet van Kirchhoff in complexe vorm, toegepast op de schakeling van figuur 2.5. Daarom is deze vergelijking op elk tijdstip voor te stellen door een vectoroptelling van spanningen in het complexe vlak, zoals in figuur 2.7 op het tijdstip $t = \frac{\alpha}{\omega}$.



figuur 2.7

Hoofdstuk 2 - Gedwongen trillingen

impedanties

Als we [2.37] delen door de complexe stroom \underline{I} ontstaat een vergelijking waarin elke complexe term de dimensie heeft van een weerstand. Links staan de complexe weerstanden (*impedanties*) Z_L , Z_R en Z_C van de componenten L , R en C ; rechts de impedantie Z van de hele serieschakeling:

$$\frac{V_L}{I(t)} + \frac{V_R}{I(t)} + \frac{V_C}{I(t)} = \frac{V(t)}{I(t)} \quad [2.40a]$$

$$\boxed{Z_L + Z_R + Z_C = Z} \quad [2.40b]$$

Volgens [2.38] en [2.39] geldt

$$\boxed{Z_L = i\omega L \quad Z_R = R \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}} \quad [2.41a]$$

$$Z = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{\omega A e^{i(\omega t - \alpha)}} = \frac{V_0}{I_m} e^{i\alpha} = |Z| e^{i\alpha} \quad [2.41b]$$

en dus gaat [2.37] bij het invullen van deze oplossingen over in de gelijkheid

$$R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = |Z| e^{i\alpha} \quad [2.42]$$

die consistent is met [2.27].

Ook vergelijking [2.40b] voor de impedanties kan als een vectoroptelling in het complexe vlak getekend worden; deze is echter niet tijdsafhankelijk. Ook deze optelling is weergegeven in figuur 2.7.

- Leg uit dat de vectoroptelling van spanningen in het complexe vlak ronddraait met hoeksnelheid ω .

overdrachtsfuncties en systeemkarakteristieken

In dit hoofdstuk kijken we naar het gedrag van zwak gedempte harmonische oscillatoren die worden aangedreven door een externe invloed. We kunnen dit gedrag ook opvatten als de respons van een 2^e orde-systeem (geregeerd door een 2^e orde differentiaalvergelijking) in termen van input-outputrelaties. In het elektrische geval van de LRC -kring is de sinusvormige input de bronspanning $V(t)$. Als sinusvormige output nemen we bijvoorbeeld de spanning $V_R(t)$ over de weerstand of de spanning $V_C(t)$ over de condensator. Omdat de output sterk afhangt van ω noemen we het aldus gekozen elektrische systeem een *filter*.

Als we werken met complexe spanningen kunnen we de respons telkens beschrijven via een dimensieloze *complexe overdrachtsfunctie* $F(\omega)$ die volgt uit de 2^e orde differentiaalvergelijking [2.37]. Deze functie wordt gedefinieerd als de complexe verhouding van output en input:

$$F(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{Z_{out}}{Z_{in}} \quad [2.43]$$

Deze verhouding hangt niet af van de tijd, en bevat alle informatie die nodig is om *amplitude- en fasekarakteristieken* te tekenen.

De amplitudekarakteristiek (AK) is de grafiek van de amplitudeverhouding, de fasekarakteristiek (FK) die van de fasevoorsprong:

Hoofdstuk 2 - Gedwongen trillingen

$$|F(\omega)| = \frac{\text{amplitude van de output}}{\text{amplitude van de input}} \rightarrow \text{AK} \quad [2.44a]$$

$$\arg(F(\omega)) = \text{fasehoek van de output} - \text{fasehoek van de input} \rightarrow \text{FK} \quad [2.44b]$$

stroomresonantie

Nemen we $\underline{V}_R(t)$ als output dan gedraagt deze output zich als $\underline{I}(t)$ in [2.38b]. Daarom spreken we hier van *stroomresonantie*. Uit [2.43] en [2.41b] volgt

$$F(\omega) = \frac{\underline{V}_R}{\underline{V}} = \frac{Z_R}{Z} = \frac{R}{|Z|} e^{-i\alpha} \quad [2.45a]$$

$$|F(\omega)| = \frac{R}{|Z|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad [2.45b]$$

$$\arg(F(\omega)) = -\alpha \quad \left(\text{met } \tan \alpha = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \quad [2.45c]$$

- Ga na dat het gedrag van $|F(\omega)|^2$ en $-\arg(F(\omega))$ voor verschillende waarden van R wordt weerspiegeld door figuren 2.3 en 2.6. Waarom wordt de schakeling met $\underline{V}_R(t)$ als output een *bandfilter* genoemd?
- Bereken $F(\omega_0)$ en $\arg(F(\omega_0))$.

spanningsresonantie

Nemen we $\underline{V}_C(t)$ als output dan gedraagt deze output zich als $\underline{q}(t)$ in [2.38a]. We noemen dit *spanningsresonantie*. Uit [2.43] en [2.41b] volgt nu

$$F(\omega) = \frac{\underline{V}_C}{\underline{V}} = \frac{Z_C}{Z} = \frac{1}{i\omega C|Z|} e^{-i\alpha} = \frac{1}{\omega C|Z|} e^{-i\beta} \quad [2.46a]$$

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\omega C|Z|} = \frac{1}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad [2.46b]$$

$$\arg(F(\omega)) = -\beta \quad \left(\text{met } \tan \beta = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L} \right) \quad [2.46c]$$

- Ga na dat het gedrag van $|F(\omega)|$ en $-\arg(F(\omega))$ voor verschillende waarden van R wordt weerspiegeld door figuur 2.1. Waarom is de schakeling met $\underline{V}_C(t)$ als output een hoogafsnijgend filter?
- Laat zien dat $|F(\omega_0)| = Q$ en $\arg(F(\omega_0)) = -\frac{\pi}{2}$.

2.3 SAMENVATTING

1. De vergelijking voor de uitwijking van een mechanische gedwongen harmonische oscillator als functie van de tijd is

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + 2m\gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t \quad [2.3]$$

2. De oplossingen zijn superposities van de vorm

$$x(t) = x_{vrij}(t) + x_{stat}(t) \quad [2.18]$$

Hierin is de blijvende (stationaire) oplossing $x_{stat}(t)$ onafhankelijk van de begincondities, terwijl met de toevoeging $x_{vrij}(t)$ een inslingerverschijnsel wordt beschreven.

3. In de limiet $x_{vrij}(t) \rightarrow 0$ (stationaire toestand) geldt

$$x(t) = A \cos(\omega t - \beta) \quad [2.4a]$$

met

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(2\gamma\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \quad [2.7a]$$

$$\tan \beta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad [2.7b]$$

4. Het door de uitwendige kracht aan de oscillator geleverde gemiddelde vermogen $\langle P \rangle$ als functie van ω is maximaal voor $\omega = \omega_0$. Dit noemen we (vermogens)resonantie.

5. De bandbreedte is de halfwaardebreedte van de vermogensresonantiepiek $\langle P \rangle(\omega)$, gemeten op de halve piekhoogte:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma \quad [2.14]$$

Een zwak gedempt systeem geeft een scherpe resonantiepiek.

6. Een *LRC*-kring aangesloten op een wisselspanning $V(t) = V_0 \cos \omega t$ zal een

Hoofdstuk 2 - Gedwongen trillingen

gedwongen elektrische trilling uitvoeren. De maximale stroom en de faseachterstand van de stroom op de spanning worden in de stationaire toestand gegeven door

$$I_m = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad [2.27a]$$

$$\tan \alpha = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad [2.27b]$$

7. De (complexe) impedantie Z van de serieschakeling van de componenten L , R en C is

$$Z = Z_L + Z_R + Z_C \quad [2.40b]$$

waarbij

$$Z_L = i\omega L \quad Z_R = R \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C} \quad [2.41a]$$

8. Bij stroomresonantie ($V_R(t)$ als output) worden amplitude-en fasekarakteristiek bepaald door de (complexe) overdrachtsfunctie $F(\omega)$ volgens

$$|F(\omega)| = \frac{R}{|Z|} \quad [2.45b]$$

$$\arg(F(\omega)) = -\alpha \quad [2.45c]$$

9. Bij spanningsresonantie ($V_C(t)$ als output) worden amplitude-en fasekarakteristiek bepaald door de (complexe) overdrachtsfunctie $F(\omega)$ volgens

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\omega C |Z|} \quad [2.46b]$$

$$\arg(F(\omega)) = -\beta \quad [2.46c]$$