1 ELECTROSTATICA: Recht toe, recht aan

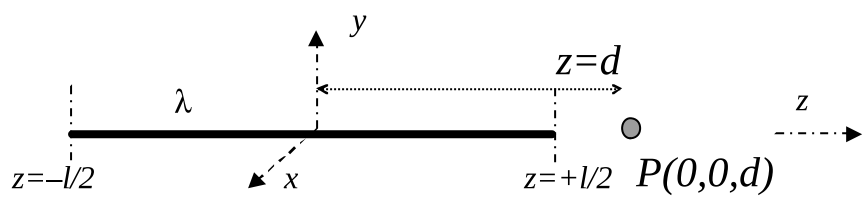
We beschouwen eerst een oneindig lange lijnlading met uniforme ladingsdichtheid λ , langs de *z*-as van ons coördinatenstelsel.

1a Gebruik de wet van Gauss en beredeneer dat het elektrische veld buiten de draad alleen een component in de radiële richting heeft, die in grootte afvalt met *1/r*, waarbij *r* de afstand tot de draad is (in cilindrische coördinaten).

1b Laat zien dat voor deze situatie voor *r>0* aan de uitdrukking voor de rotatie van het *E*-veld wordt voldaan:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{E}} = \vec{0}$$

Vervolgens beschouwen we een draad met uniforme lijnlading (ladingsdichtheid λ) met eindige lengte *l*, met midden op de oorsprong, langs de *z*-as. We willen het elektrische veld bepalen in een punt *P* buiten de draad met *x=0, y=0, z=d.*



1c Waarom is het nu niet mogelijk om eenvoudig m.b.v. de wet van Gauss het electrische veld te bepalen?

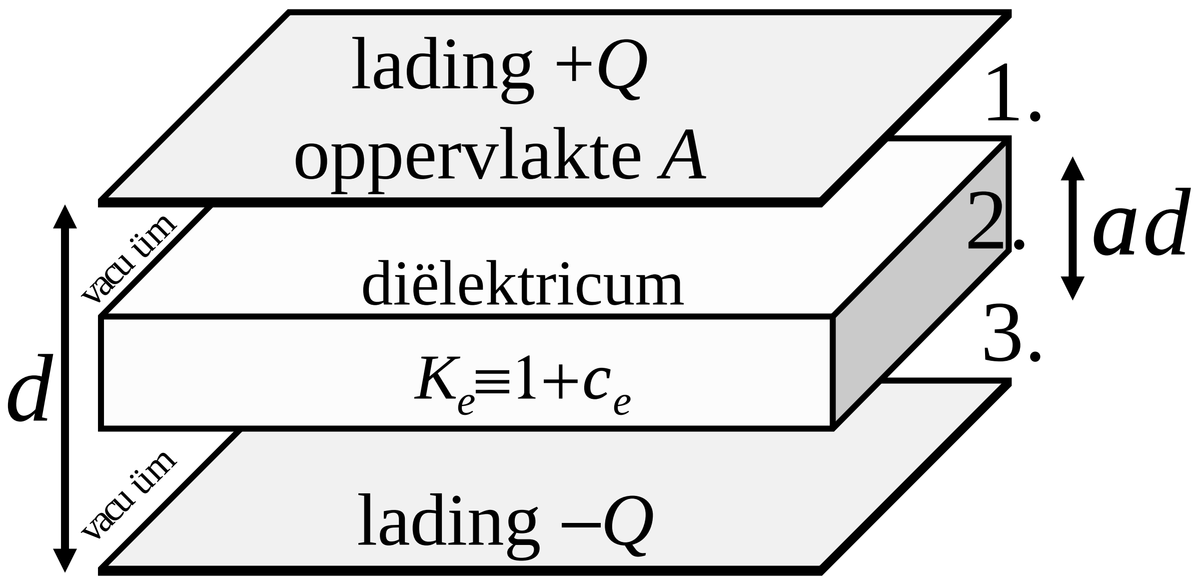
1d Geef een uitdrukking (een integraal) voor het electrische veld in punt *P*. Voer de integraal vervolgens uit en laat zien dat voor het *E*-veld geldt:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d - l/2} - \frac{1}{d + l/2}\right)\hat{z}$$

1e Bereken de potentiaal *V* in punt *P*. Laat zien dat als je uitgaat van de uitdrukking voor *V* je inderdaad de uitdrukking voor het *E*-veld terugvindt.

2 ELECTROSTATICA: de Condensator

Beschouw de (vierkante) vlakke plaat condensator van de figuur hieronder. De oppervlakte van elke plaat is A. De lading op de ene plaat is $+Q$ en de lading op de andere plaat is $-Q$. Deze ladingen verdelen zich uniform over het plaatoppervlak (de platen zelf mogen oneindig dun verondersteld worden).
De afstand tussen de platen is d<<ÖA. In de ruimte tussen de platen bevindt zich een $a\,d$ dik (0<a<1) diëlektricum met diëlektrische constante $K_e \equiv 1 + c_e$ (d.w.z. permittiviteit $e \equiv K_e e_0$). De ruimte buiten dit diëlektricum is vacuüm d.w.z. heeft een permittiviteit e_0. Voor deze opgave mag je rand effecten verwaarlozen.



2a Geef kwalitatief duidelijk aan waar de vrije ladingen zitten. Gebruik het grafisch antwoordenblad.

2b Geef kwalitatief duidelijk aan waar de gebonden ladingen zitten. Gebruik het grafisch antwoordenblad.

2c Laat zien dat het elektrische veld E in de gebieden "1.", "2." en "3." (zie figuur) in grootte gelijk zijn aan:

$$\left|\vec{E}_1\right| = \frac{Q}{e_0 A}, \qquad \left|\vec{E}_2\right| = \frac{Q}{e\ A}, \qquad \left|\vec{E}_3\right| = \frac{Q}{e_0 A}$$

<u>Aanwijzing:</u> *bereken eerst het veld van de 'lege' condensator m.b.v. de wet van Gauss*

2d Bepaal het potentiaal verschil V tussen de twee platen.

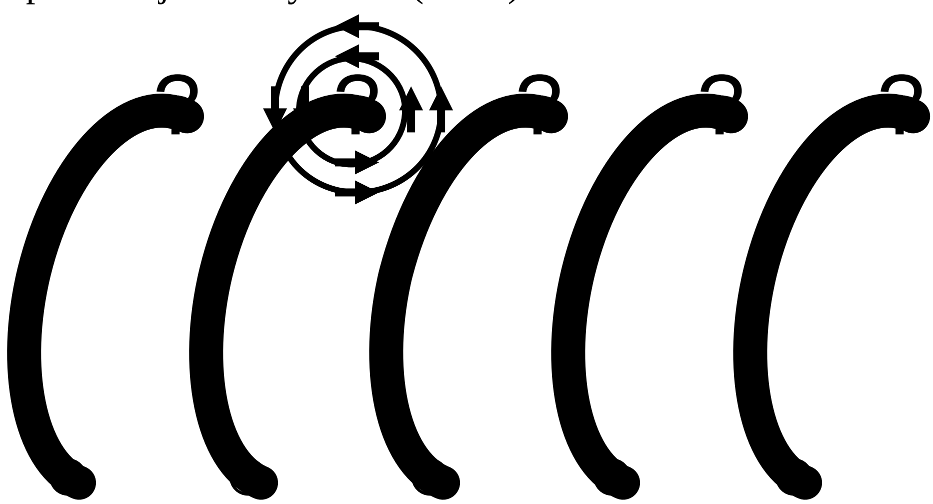
2e Bepaal de capaciteit C van deze condensator.

2f Bepaal de energie U opgeslagen in deze condensator.

2 MAGNETOSTATICA: Spoellaria.

2a) In onderstaande figuur is een spoel met vijf windingen geschetst. Dichtbij de stroomvoerende draad is het magnetische veld, *B*, gelijk aan dat van een oneindig lange rechte draad (zoals geschetst voor 1 winding). Schets het volledige magnetische veld op dezelfde figuur van het antwoordenblad. Verklaar kwalitatief waarom het veld binnen de spoel zoveel sterker is dan buiten de spoel.

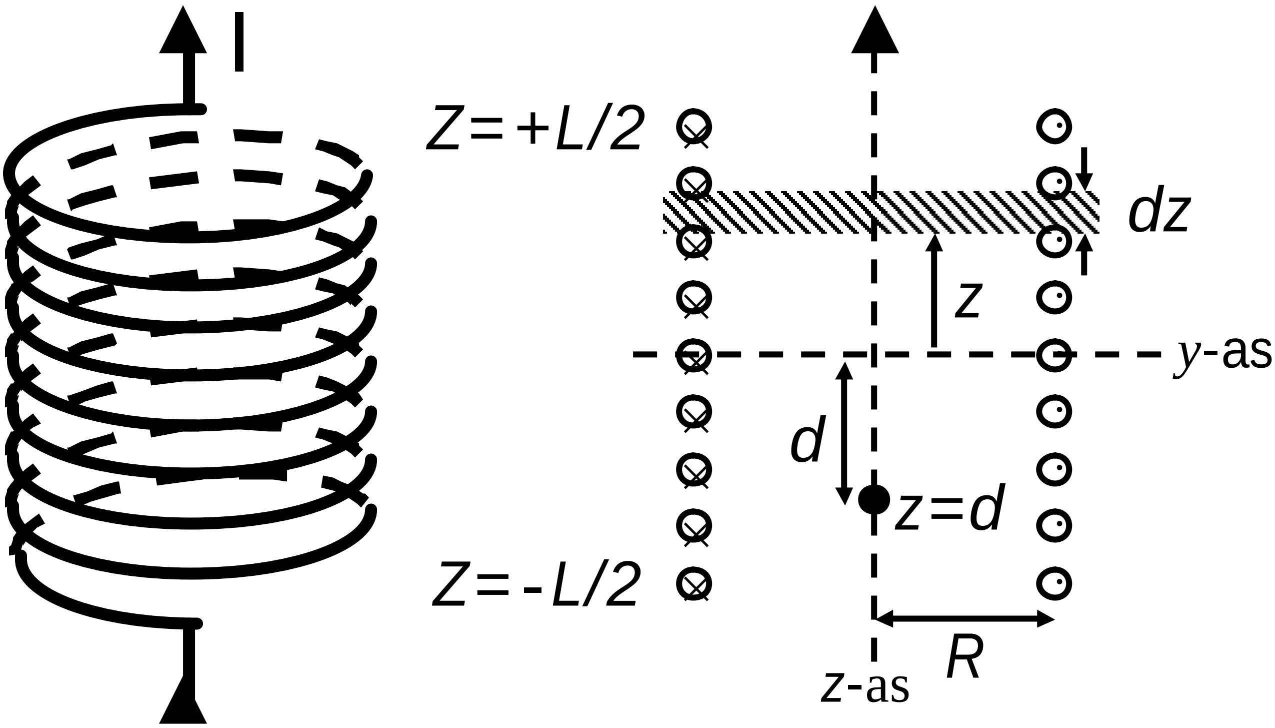
Stroom komt het papier uit bij het ? symbool (boven) en gaat het papier in bij het ⊗ symbool (onder).



2b) Beschouw nu een oneindig lange "ideale" spoel met *n* windingen per meter, straal *R* en stroom *I*. Deze opstelling is cylinder symmetrisch (*z*-as parallel aan de as van de spoel) en je mag veronderstellen dat het magnetische veld buiten de spoel ($r>R$) gelijk nul is.

b1. Geef aan hoe je met behulp van de Wet van Ampère de *z*-component van het magnetische veld bepaalt (geef gekozen Ampère lusje duidelijk aan op antwoordenblad!). Laat zien dat het magnetisch veld overal binnen de spoel gelijk is aan: $m_0 nI$.

b2. Geef aan hoe je met behulp van de Wet van Ampère de φ-component van het magnetische veld bepaalt (geef gekozen Ampère lusje duidelijk aan op antwoordenblad!). Laat zien dat deze overal binnen de spoel gelijk is aan nul.



2c) Beschouw nu een realistische spoel met N windingen, lengte L, stroom I en straal R. Het magnetische veld op de symmetrie as in een punt met $z=d$ (zie de figuur hierboven voor de geometrie en de gebruikte coördinaten) kan verkregen worden door de spoel te beschouwen als een stapeling van nagenoeg cirkelvormige stroomlussen. Voor een enkele stroomlus hebben wij het magnetische veld op de symmetrie as (hier de z-as) berekend tijdens het college (s is afstand op de z-as tot centrum stroomlus):

$$B_z(s) = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2 + s^2\right)^{3/2}}$$

c1. Geef de bijdrage dB aan het magnetische veld in het punt $z=d$ ten gevolge van het stukje spoel met dikte dz op afstand z van de oorsprong. Dit alles is aangegeven in de figuur. Let wel: alle magnetische veld componenten hebben slechts een z-component. *Hint: bepaal de stroom die in het gearceerde stukje met dikte dz (zie figuur) loopt en bepaal de afstand langs de z-as tot het punt met z=d van het gearceerde stukje. Verwerk de gevonden gegevens in de gegeven uitdrukking voor z-component magnetische veld van een enkele cirkelvormige stroomlus.*

c2. Integreer de zojuist gevonden uitdrukking tussen $z=-L/2$ en $z=+L/2$ om te laten zien dat het magnetische veld van deze spoel overal op de z-as gelijk is aan (d is afstand tot de oorsprong):

$$B_z(d) = \frac{\mu_0 IN \; R^2}{2L}\left(\frac{L/2+d}{\sqrt{R^2+\left(L/2+d\right)^2}} + \frac{L/2-d}{\sqrt{R^2+\left(L/2-d\right)^2}}\right)$$

Gebruik: $$\int \frac{1}{\left(a+x^2\right)^{3/2}}\,dx = \frac{x}{a\sqrt{a+x^2}}$$

2 MAGNETOSTATICA, vervolg

2d) Schets het verloop van het magnetische veld in een punt op de *z*-as als functie van de afstand *d* tot de oorsprong in de figuur op het antwoordenblad. Wat vind je voor het magnetische veld in het punt $z=d$ in de limiet L» R en d« L (ideale spoel)? Is dat verbazingwekkend?

2e) Tenslotte beschouwen we nogmaals een oneindig lange spoel met straal *R* en stroom *I* en *n* windingen per meter. Je mag veronderstellen dat de opstelling cilinder symmetrisch is. Laat zien dat buiten de spoel ($r>R$) de azimuthale component van het magnetische veld gelijk is aan:

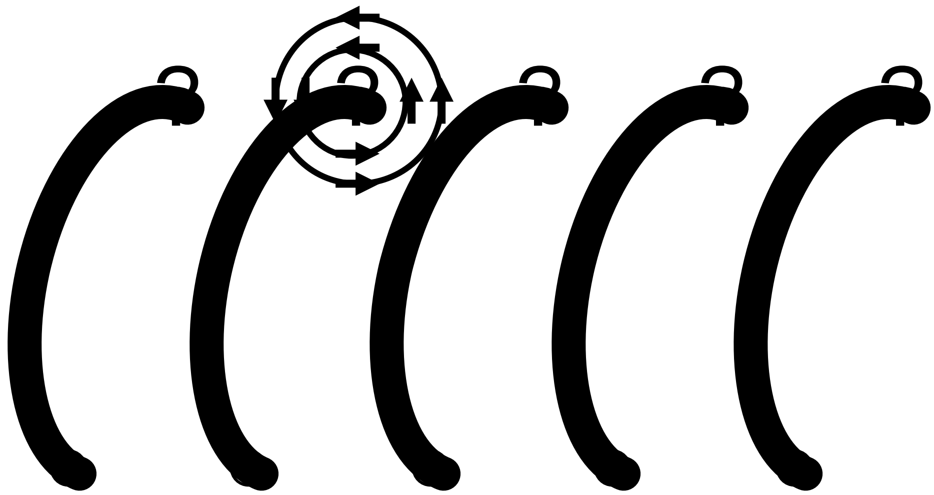
$$B_j(r) = \frac{m_0 I}{2pr}$$

Hint: kies een geschikt gekozen Ampère lusje waarin B_j *voor* $r>R$ *voorkomt.*

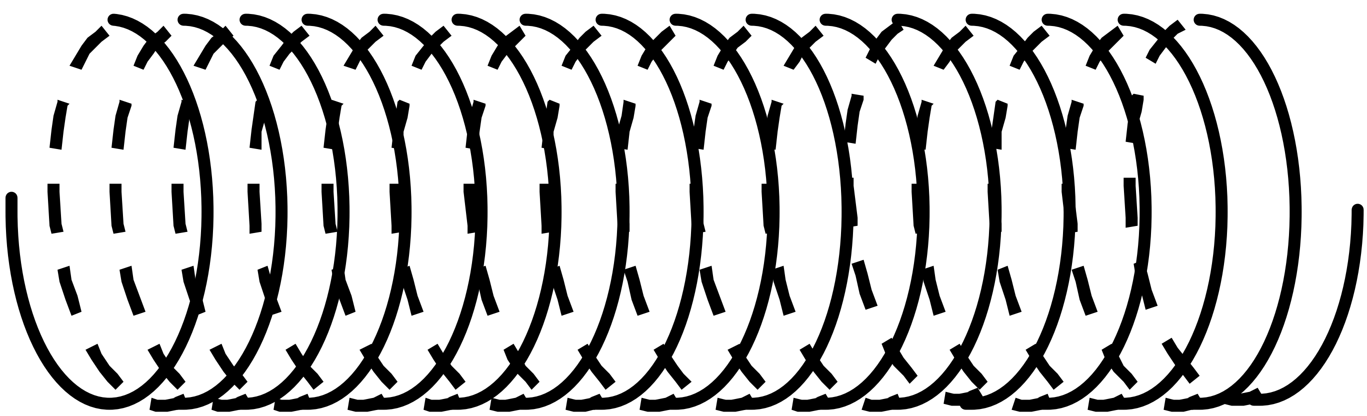
Verklaar waarom de azimuthale component van het magnetische veld buiten een spoel ($r>R$) gelijk is aan de azimuthale component van het magnetische veld buiten een oneindig lange rechte stroomdraad met stroom *I*.

Grafisch antwoordenblad

2a



2b



2c