1 Opgaves Elektromagnetisme en Licht

(Klassieke Natuurkunde IC) 2002

In dit werkboek vind je de opdrachten die je tijdens de colleges en thuis gaat maken.

Het is gebleken dat oefenen met de leerstof zijn vruchten afwerpt. Een kleine wekelijkse investering in de vorm van tijd en energie als je de opgaves maakt zal je dubbel en dwars terugverdienen. Een prettige bijkomstigheid is dat het volgen vande colleges gemakkelijker en efficienter zal worden omdat je 'bij' bent en blijft door het maken van deze 'papieren' opgaves.

Het is ondenkbaar de je het tentamen haalt zonder actief mee te doen met de opgaves. Als extra stimulans zijn er ook 'digitale' opgaves die je wekelijks moet inleveren en, mits dit een positief effect oplevert, bij je tentamencijfer opgeteld worden[1] De 'inlever opdrachten' zijn digitaal beschikbaar en kun je vinden via de webpage: http://www.nikhef.nl/user/h73/ onder 'Question Mark'.

[1] De weging van het cijfer voor je opgaves en dat van je tentamen is 1/3H+2/3T.

2 Electro-Dynamica

2.1 Dagdeel I

- herhaling, bespreking van de opgaves
- hoorcollege Wet v Ohm, Wet v Faraday
- werkcollege

2.1.1 Draadjes, plaatjes, blokjes

a) Als je een metaaldraadje vergelijkt met een even dik maar twee keer zo lang draadje, hoe verhouden de weerstanden zich dan?

b) Als je een draadje uitrekt tot twee maal zijn oorspronkelijke lengte (waarbij de draad ook na het uitrekken op elk punt even dik is), hoe verandert de weerstand dan?

c) Beschouw een vierkant plaatje met dikte d en zijden van lengte L, met op twee tegenover elkaar liggende punten een contact. Geef een uitdrukking voor de weerstand van dit plaatje.

d) Beschouw twee even dikke plaatjes, waarvan de zijden van het ene plaatje twee keer zo lang zijn als van het andere en vergelijk de weerstanden.

e) Beschouw twee massieve blokjes waarvan de zijden van het ene blokje twee keer zo lang zijn als van het andere en vergelijk de weerstanden.

2.1.2 Bewegen en meten

Onderzoek wat er met de spanning over de lus gebeurt als je de magneet naar de lus toe en van de lus af beweegt. Ga ook na wat er gebeurt als je de lus beweegt ten opzichte van magneet. Ga na wat de invloed is van het verwisselen van de polen van de magneet. Ga na wat het effect is van het met grotere snelheid bewegen van de magneet.

2.1.3 Hele lus in veld

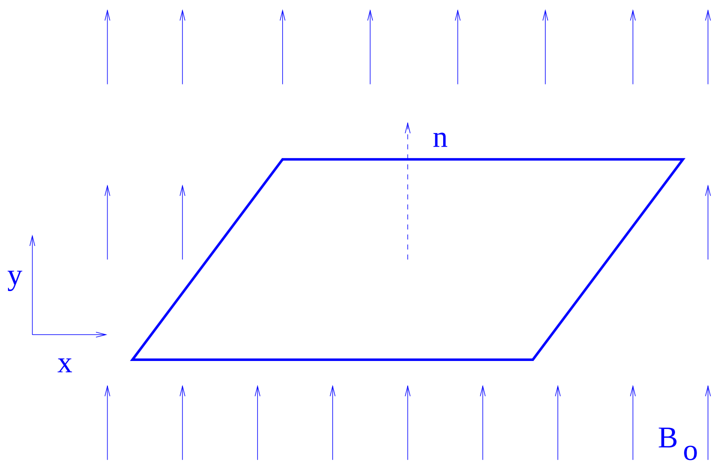
In de powerpointpresentatie werd afgeleid dat de inductiewet van Faraday overeenkomt met wat je krijgt door een rechthoekige lus die aan één kant in een magneetveld steekt.te beschouwen, en de kringintegraal van de lorentzkracht te nemen. Laat op dezelfde manier zien dat er geen elektromotorische kracht is als de lus wel beweegt, maar met alle zijden binnen het magneetveld.

2.1.4 Ronde lus in het veld

Je beweegt een cirkelvormige lus met constante snelheid. In een deel van de ruimte is een constant magneetveld aanwezig, loodrecht op het vlak van de lus. Schets de grafiek van de inductiespanning als functie van de tijd.

2.1.5 Dynamo?

Een vierkant draadraam met zijde a roteert om de x-as met constante hoeksnelheid ω. Op het tijdstip $t = 0$ wijst de normaalvector in de positieve z-richting. In de door het roterende draadraam bestreken ruimte heerst een magnetisch veld in de positieve z-richting met grootte $\mathcal{B}$. Neem eerst aan dat $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$, waarbij $\mathcal{B}_0$ niet afhangt van plaats of tijd.



a) Leg uit dat de magnetische flux $\Phi(t)$ door het draadraam en de bijbehorende emf $V(t)$ gegeven worden door

$$\Phi(t) = \mathcal{B}_0 a^2 \cos \omega t \text{en } V(t) = \mathcal{B}_0 a^2 \omega \sin \omega t$$

Neem in het vervolg aan dat in werkelijkheid $\mathcal{B}$ afhangt van y volgens

$$\frac{\mathcal{B}(y)}{\mathcal{B}_0} = 1 - 2\left(\frac{y}{a}\right)^2$$

b) Geef kwalitatief aan welke invloed dit zal hebben op de grafieken van $\Phi(t)$ en $V(t)$ uit onderdeel a).

Het punt P is een willekeurig punt dat meedraait in het vlak van het draadraam; op het tijdstip $t = 0$ is de y-coördinaat van P gelijk aan y_0.

c) Leg uit dat de magnetische veldsterkte in P gegeven wordt door

$$\mathcal{B}_{\mathrm{P}}(t) = \mathcal{B}_0 \left(1 - \frac{2y_0^2 \cos^2 \omega t}{a^2}\right)$$

d) Maak y_0 nu variabel tussen $-\frac{a}{2}$ en $+\frac{a}{2}$, en leid via integratie over y_0 af dat

$$\Phi(t) = \mathcal{B}_0 a^2 \cos \omega t \; (1 - \tfrac{1}{6} \cos^2 \omega t) \mathrm{en} V(t) = \mathcal{B}_0 a^2 \omega \sin \omega t \; (1 - \tfrac{1}{2} \cos^2 \omega t)$$

e) Ga na of het resultaat van d) overeenkomt met je beantwoording van b).

2.1.6 Webmotoren

(alleen als je tijd over hebt)
Met de zoekterm elektromotor (aangevuld met termen als principe, werking ed) is veel informatie te vinden over dit onderwerp. Niet alles op het web is even betrouwbaar. Noem een website en geef commentaar op wat daar beweerd wordt, wat is goed aan de uitleg, wat verkeerd?

2.2 Dagdeel II Zelfinductie en energie

- herhaling, bespreking van de opgaves
- hoorcollege zelfinductie en energie
- werkcollege

2.2.1 Kringen

Een elektrische kring bestaat uit een ohmse weerstand met weerstand R en een spoel met zelfinductiecoëfficiënt L. Op het tijdstip $t = 0$ loopt in de kring een stroom I_0.

a Stel voor de kring een differentiaalvergelijking op en bereken de stroom $I(t)$.

b) Bereken de totale energie E die in de weerstand wordt gedissipeerd en interpreteer het resultaat.

Een tweede elektrische kring bestaat uit een ohmse weerstand met weerstand R en een plaatcondensator met capaciteit C. Ook in deze kring loopt op het tijdstip $t = 0$ een stroom I_0.

c) Herhaal onderdelen a) en b) voor deze tweede kring.

d) Leg uit of in de situatie van onderdeel c) in de ruimte tussen de condensatorplaten een magnetisch veld ontstaat.

2.2.2 Transformator

Een transformator (voor het omzetten van een gegeven wisselspanning in een hogere of lagere wisselspanning) bestaat meestal uit een juk van weekijzer, waaromheen een primaire en een secundaire spoel zijn gewikkeld (zie figuur). Het weekijzer geeft de magnetische flux, opgewekt door de primaire spoel, door naar de secundaire spoel.

We nemen nu een transformator met 'perfecte koppeling', zodat alle veldlijnen in het weekijzer zijn geconcentreerd. De primaire spoel heeft N_1 windingen, de secundaire spoel N_2 windingen. De stromen in de primaire en secundaire stroomkringen zijn I_1 en I_2. De omtrek (langs de hartlijn) van het juk is l, de dwarsdoorsnede is S. Het weekijzer heeft een constante permeabiliteit μ.

a) Teken de situatie. Geef uitdrukkingen voor de grootte $\mathcal{B}$ van het totale magnetisch veld in het juk, en voor de magnetische flux Φ door één enkele winding.

b) Geef uitdrukkingen voor de totale fluxen Φ_1 en Φ_2 omvat door de spoelen 1 en 2.

c) Laat zien dat de geïnduceerde spanningen V_2 en V_1 over de spoelen zich verhouden als

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

d) Geef uitdrukkingen voor de coëfficiënten van zelfinductie L_1 en L_2 van de spoelen, en ook voor de coëfficiënt van mutuele inductie M. Laat zien dat voldaan is aan

$$L_1 L_2 = M^2 \qquad \text{en} \qquad \frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

Op de ingang van de transformator is een wisselspanning $V_{in}(t) = V_m \cos \omega t$ aangesloten. Over de uitgang staat als belasting een weerstand R. Het spanningsverval over R bedraagt $V_{uit} = -RI_2(t)$.e) Ga na dat de stromen I_1 en I_2 voldoen aan de differentiaalvergelijkingen

$$L_1 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = V_m \cos \omega t \tag{1}$$

$$M \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = -RI_2(t) \tag{2}$$

f) Los de stromen $I_1(t)$ en $I_2(t)$ uit bovenstaande vergelijkingen op. *aanwijzing*: elimineer eerst I_1 en los I_2 op; bepaal vervolgens I_1 door integratie van [1] en stel daarbij de gelijkstroomcomponent gelijk aan nul.

g) Laat zien dat

$$\frac{V_{uit}}{V_{in}} = \frac{N_2}{N_1}$$

h) Bereken met de in f) gevonden uitdrukkingen voor $I_1(t)$ en $I_2(t)$ het ingaande vermogen $P_{in} = V_{in} I_1$ en het uitgaande vermogen $P_{uit} = -V_{uit} I_2$. Laat zien dat, gemiddeld over een periode, P_{in} en P_{uit} aan elkaar gelijk zijn.

Gegeven is nu een speciaal geval van 'omlaag transformeren' waarin $N_1 = 2N_2$ en $R = \frac{1}{4}\omega L_2$. i) Teken voor dit geval een complex vectordiagram van de relaties [1] en [2] (kies RI_2 langs de positieve reële as). Geef hierin ook de richtingen van I_1 en $\mathcal{B}$ aan. j) Keer nu terug naar het algemene geval en laat zien dat bij benadering steeds geldt dat de stromen zich verhouden als

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{N_1}{N_2}$$

mits voldaan is aan $R \ll \omega L_2$.

2.2.3 Zelfinductie twee stroken

(alleen als je tijd over hebt)
Ga naar http://emclab.umr.edu/new-induct en ga na wat de zelfinductie is voor twee parallelle stroken, waarbij in de ene strook de stroom de ene kant op gaat, en in de andere de tegengestelde kant. Onder welke voorwaarden is de gegeven uitdrukking afgeleid?

2.3 Dagdeel III De Maxwellvergelijkingen, elektromagnetische golven

- bespreking van de opgaves
- hoorcollege
- werkcollege

2.3.1 Een gedachtenexperiment

Beschouw een condensator die wordt opgeladen. Er loopt een stroom in de draden naar beide platen. Tussen de platen loopt geen stroom. Rond de draad is er een magneetveld. Dat vind je door een cirkel rond de draad te beschouwen en

$\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I$

daar op toe te passen. Je neemt dus de kringintegraal rond de cirkel, en de stroom is de stroom die door die cirkel heen prikt.

Als je dit doet voor een cirkel die niet rond een draadstuk ligt, maar ter hoogte van de condensator, zou je vinden dat het magneetveld gelijk is aan nul. Dit is niet wat je zou verwachten, het magneetveld verandert niet plotseling ter hoogte van de condensator. Een meting zou uitwijzen dat het veld niet verandert: op afstand r in radiële richting is het veld gelijk aan $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, ook ter hoogte van de condensator.

Als je een cirkel ter hoogte van de draad neemt, maar het bijbehorende oppervlak zo oprekt dat het "vlies" tussen de platen doorloopt, is het probleem nog groter: op die manier zou je een magnetisch veld gelijk aan nul krijgen, terwijl een niet-opgerekt vlies wel een veld oplevert.

Opdracht: zoek uit welke van de volgende "pogingen tot aanpassing van de wet van Ampere voor niet-stationaire situaties" als resultaat geeft dat het magneetveld continu is in de verticale richting:

A $\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl}$

B $\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl}$

C $\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_{opp} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{do}$

D $\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_{opp} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{do}$

2.3.2 Golven

Een lineair gepolariseerde vlakke elektromagnetische golf is gegeven door

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(z,t) &= \vec{\mathcal{E}}_0 \cos(kz - \omega t)\\ \vec{\mathcal{B}}(z,t) &= \vec{\mathcal{B}}_0 \cos(kz - \omega t)\end{aligned}$$

- a) Gebruik de golfvergelijking om te laten zien dat er geen dispersie optreedt.

  b) Gebruik de differentiële vorm van de wetten van Maxwell om te laten zien dat
  1) de golf transversaal is;
  2) $\vec{\mathcal{E}}$ en $\vec{\mathcal{B}}$ loodrecht op elkaar staan.

Beschouw in de vrije ruimte een elektromagnetische golf met als elektrische component

$$\vec{\mathcal{E}}(x,t) = (\mathcal{E}_x,\, \mathcal{E}_y,\, \mathcal{E}_z) = (0,\, \mathcal{E}_0 \cos(kx + \omega t),\, 0)$$

- c) Wat is hier de polarisatierichting? Wat is de bewegingsrichting?

  d) Druk de voortplantingssnelheid c, de golflengte λ en de trillingstijd T uit in k en ω.

  e) Bepaal met behulp van de differentiële vorm van de wetten van Maxwell de magnetische component $\vec{\mathcal{B}}$.

  f) Verifieer dat $\mathcal{E} = c\mathcal{B}$ en dat het uitproduct $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{B}}$ in de bewegingsrichting wijst.

  g) Geef een uitdrukking voor een elektromagnetische golf die langs de z-as is gepolariseerd en zich langs de y-as in positieve richting voortplant.

  h) Idem voor een circulair gepolariseerde golf die in de positieve x-richting beweegt en met hoeksnelheid ω rechtsom draait.