A APPENDIX: Opgaven Elektrodynamica

Hieronder vind je de opdrachten die je tijdens de colleges en thuis gaat maken.

Het is gebleken dat oefenen met de leerstof zijn vruchten afwerpt. Een kleine wekelijkse investering in de vorm van tijd en energie als je de opgaves maakt zal je dubbel en dwars terugverdienen. Een prettige bijkomstigheid is dat het volgen vande colleges gemakkelijker en efficienter zal worden omdat je 'bij' bent en blijft door het maken van deze 'papieren' opgaves.

Als extra stimulans zijn er ook 'digitale' opgaves die je wekelijks dient in te leveren. De digitale 'inlever opdrachten' kun je vinden via de webpage:

http://www.nikhef.nl/user/h73/kned.html

A.1 Dagdeel I

- interactief hoorcollege Wet van Ohm, Wet van Faraday
- werkcollege

A.1.1 Draadjes, plaatjes, blokjes

a) Als je een metaaldraadje vergelijkt met een even dik maar twee keer zo lang draadje, hoe verhouden de weerstanden zich dan?

b) Als je een draadje uitrekt tot twee maal zijn oorspronkelijke lengte (waarbij de draad ook na het uitrekken op elk punt even dik is), hoe verandert de weerstand dan?

c) Beschouw een vierkant plaatje met dikte d en zijden van lengte L, met op twee tegenover elkaar liggende punten een contact. Geef een uitdrukking voor de weerstand van dit plaatje.

d) Beschouw twee even dikke plaatjes, waarvan de zijden van het ene plaatje twee keer zo lang zijn als van het andere en vergelijk de weerstanden.

e) Beschouw twee massieve blokjes waarvan de zijden van het ene blokje twee keer zo lang zijn als van het andere en vergelijk de weerstanden.

A.1.2 Bewegen en meten

Bedenk en beschrijf wat er met de spanning over een lus gebeurt als je een magneet naar de lus toe en van de lus af beweegt. Bedenk ook na wat er gebeurt als je de lus beweegt ten opzichte van magneet. Wat is de invloed van het verwisselen van de polen van de magneet? Bedenk wat het effect is van het met grotere snelheid bewegen van de magneet.

A.1.3 Hele lus in veld

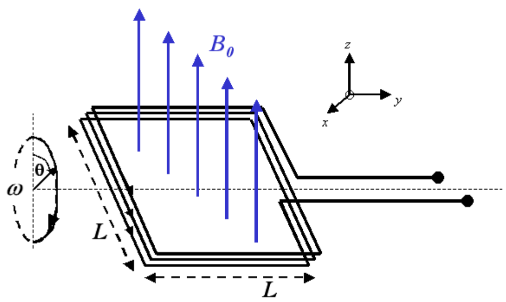
Tijdens het college is afgeleid dat de inductiewet van Faraday overeenkomt met wat je krijgt door een rechthoekige lus die aan één kant in een magneetveld steekt te beschouwen, en de kringintegraal van de lorentzkracht te nemen. Laat op dezelfde manier zien dat er geen elektromotorische kracht is als de lus wel beweegt, maar met alle zijden binnen het magneetveld.

A.1.4 Ronde lus in het veld

Je beweegt een cirkelvormige lus met constante snelheid. In een deel van de ruimte is een constant magneetveld aanwezig, loodrecht op het vlak van de lus. Schets de grafiek van de inductiespanning als functie van de tijd.

A.1.5 Dynamo I

Een vierkante draadspoel met N windingen draait rondom een as (y-as) die loodrecht staat op de richting van het magneetveld (// z-as) (zie figuur). Het magneetveld is constant en heeft de waarde B_0. Neem assenstelsel zoals gegeven in de figuur. De spoel heeft een oppervlakte $S = L^2$. De hoeksnelheid waarmee de spoel ronddraait is ω. Dus de hoek θ die de normaal op het spoeloppervlak maakt met het B-veld varieert als functie van de tijd t als: $\theta = \omega t$. Op $t = 0$ bevindt de spoel zich in het XY vlak d.w.z. B_0 en de normaal op het spoeloppervlak zijn parallel.



a Bereken op $t = 0$ de magnetische flux, Φ_B, door de spoel.

b Bereken op een willekeurig tijdstip t de magnetische flux door de spoel.

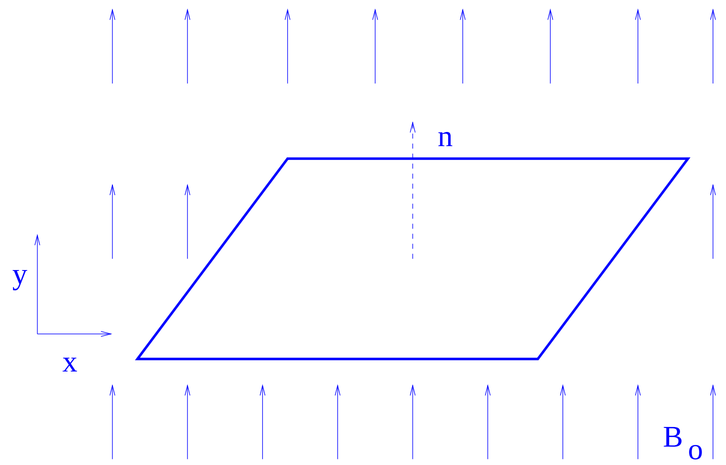
c Gebruik de Wet van Faraday om te laten zien dat de EMK van deze opstelling gegeven wordt door (f: kracht per eenheidslading, E: elektrische veld):

d Laat zien dat dezelfde EMK gevonden wordt door de component van de Lorentz-kracht (die werkt op de ladingsdragers in de spoel) parallel aan de draad(stroom)richting te integreren rond de spoel.

$$EMK = \oint_{spoel} \vec{f} \cdot d\vec{l} = \oint_{spoel} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = BN\omega L^2 \sin \omega t$$

A.1.6 Dynamo II

Een vierkant draadraam met zijde a roteert om de x-as met constante hoeksnelheid ω. Op het tijdstip $t = 0$ wijst de normaalvector in de positieve z-richting. In de door het roterende draadraam bestreken ruimte heerst een magnetisch veld in de positieve z-richting met grootte $\mathcal{B}$. Neem eerst aan dat $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$, waarbij $\mathcal{B}_0$ niet afhangt van plaats of tijd.



a) Leg uit dat de magnetische flux $\Phi(t)$ door het draadraam en de bijbehorende emf $V(t)$ gegeven worden door

$$\Phi(t) = \mathcal{B}_0 a^2 \cos \omega t \text{en } V(t) = \mathcal{B}_0 a^2 \omega \sin \omega t$$

Neem in het vervolg aan dat in werkelijkheid $\mathcal{B}$ afhangt van y volgens

$$\frac{\mathcal{B}(y)}{\mathcal{B}_0} = 1 - 2\left(\frac{y}{a}\right)^2$$

b) Geef kwalitatief aan welke invloed dit zal hebben op de grafieken van $\Phi(t)$ en $V(t)$ uit onderdeel a).

   Het punt P is een willekeurig punt dat meedraait in het vlak van het draadraam; op het tijdstip $t = 0$ is de y-coördinaat van P gelijk aan y_0.

c) Leg uit dat de magnetische veldsterkte in P gegeven wordt door

$$\mathcal{B}_{\mathrm{P}}(t) = \mathcal{B}_0 \left(1 - \frac{2y_0^2 \cos^2 \omega t}{a^2}\right)$$

d) Maak y_0 nu variabel tussen $-\frac{a}{2}$ en $+\frac{a}{2}$, en leid via integratie over y_0 af dat

$$\Phi(t) = \mathcal{B}_0 a^2 \cos \omega t \; (1 - \tfrac{1}{6} \cos^2 \omega t) \mathrm{en} V(t) = \mathcal{B}_0 a^2 \omega \sin \omega t \; (1 - \tfrac{1}{2} \cos^2 \omega t)$$

e) Ga na of het resultaat van d) overeenkomt met je beantwoording van b).

A.1.7 Stroomkosten

Beschouw een stroomlusje dat (loodrecht) in een magneetveld staat. Iemand beweegt de stroomlus vervolgens uit het magneetveld (zie de transparanten over de Wet van Faraday). Ten koste van wat loopt de stroom? Laat zien dat het magneetveld geen arbeid verricht. Laat zien dat de persoon die aan het stroomlusje trekt wel arbeid verricht.

A.1.8 Webmotoren

(alleen als je tijd over hebt)
Met de zoekterm elektromotor (aangevuld met termen als principe, werking ed) is veel informatie te vinden over dit onderwerp. Niet alles op het web is even betrouwbaar. Noem een website en geef commentaar op wat daar beweerd wordt, wat is goed aan de uitleg, wat verkeerd?

A.1.9 Slakkengang

(alleen als je tijd over hebt)
Zoek het transparant op waar wordt berekend dat de elektronen in een stroomdraad driften met 15 cm/uur. Bereken zelf de drift van elektronen in een stroomdraad.

A.2 Dagdeel II Zelfinductie en energie

- herhaling, bespreking van de opgaves
- hoorcollege zelfinductie en energie
- werkcollege

A.2.1 Kringen

Een elektrische kring bestaat uit een ohmse weerstand met weerstand R en een spoel met zelfinductiecoëfficiënt L. Op het tijdstip $t = 0$ loopt in de kring een stroom I_0.

a Stel voor de kring een differentiaalvergelijking op en bereken de stroom $I(t)$.

b) Bereken de totale energie E die in de weerstand wordt gedissipeerd en interpreteer het resultaat.

Een tweede elektrische kring bestaat uit een ohmse weerstand met weerstand R en een plaatcondensator met capaciteit C. Ook in deze kring loopt op het tijdstip $t = 0$ een stroom I_0.

c) Herhaal onderdelen a) en b) voor deze tweede kring.

d) Leg uit of in de situatie van onderdeel c) in de ruimte tussen de condensatorplaten een magnetisch veld ontstaat.

A.2.2 Spoel in kring

We beschouwen een solenoide in vacuüm (een gewone rechte spoel) met lengte l waar een stroom I_0 doorheen loopt. De spoel heeft N windingen per meter en radius R.

a Bepaal de zelfinductie L van deze spoel.

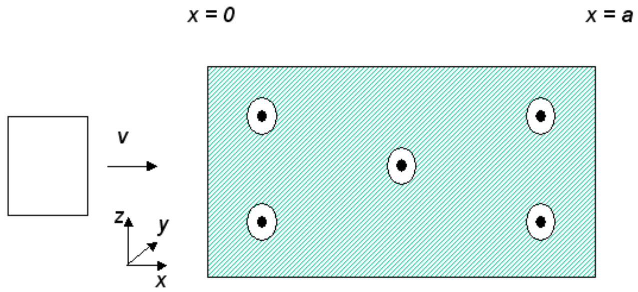
b De stroom $I(t = 0) = I_0$ wordt verzorgd door een stroombron. Deze verwijderen we vliegensvlug en plaatsen hiervoor op $t = 0$ een ongeladen condensator met capaciteit C voor in de plaats. De lading $Q(t)$ op de condensator zal een periodieke functie gaan beschrijven.

c Bereken de stroom in deze (ideale) LC kring als functie van de tijd in termen van L, C en I_0 . Begin met de differentiaalvergelijking voor $Q(t)$. Schrijf de stappen van je berekening duidelijk op.

d Leid m.b.v. een energie-beschouwing af, wat de maximale lading op de condensator is. Hoe volgt dit ook uit je antwoord op c?

A.2.3 De Strop

Een metalen vierkante lus wordt met constante snelheid v door een magneetveld bewogen, zoals aangegeven in de tekening. De lus heeft zijdes met een lengte l, een totale weerstand R en een verwaarloosbare zelfinductie. Het magneetveld heeft de constante grootte B_0 tussen $x = 0$ en $x = a$ en het wijst het blad uit. Elders is het veld nul.



a Op tijd $t = 0$ ligt de lus op $x = -a$ en wordt vevolgens bewogen tot $x = 2a$. Bereken de magnetische flux door de lus als functie van de tijd. Geef tevens aan hoe je uit de flux de elektromotorische kracht (EMK) berekenen kunt.

Op het moment dat de lus het veld binnendringt, zal er ten gevolge van de EMK een stroom gaan lopen.

b Laat zien dat de maximale grootte van deze stroom gegeven is door:

$$I = \frac{B}{R} l v \tag{1}$$

en schets het verloop van I als functie van de tijd.

c Hoe groot is de kracht die je moet uitoefenen om de snelheid constant te houden als functie van de tijd? (Tip: Bepaal de Lorentz kracht op het lusje.)

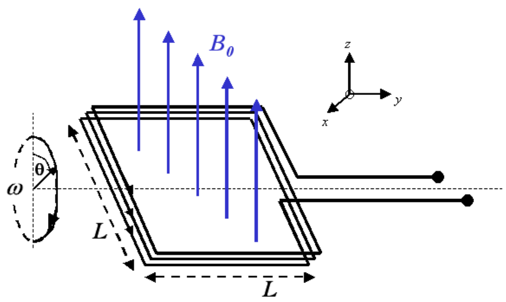
d Laat zien dat de arbeid die jij zou moeten leveren om het lusje door het veld te bewegen gelijk is aan de elektrische energie die in de weerstand is omgezet. (Tip: Het elektrisch vermogen is gegeven door $P = I^2 R$)

Tot nu toe hebben we de zelfinductie L van de spoel verwaarloosd, nu willen we deze ook meenemen in de berekening.

e Stel een differentiaal vergelijking op met daarin, naast de termen voor de EMK t.g.v. de flux verandering en de spanning over de weerstand, een term voor de bijdrage ten gevolge van de zelfinductie. Schets het verloop van de stroom als functie van de tijd en licht eventuele veranderingen ten opzichte van opgave b toe.

A.2.4 Spoel in spoel

Een vierkant draadraam met N_d windingen draait rondom een as (y-as). Dit draadraam bevindt zich in een homogeen magnetich veld B_0 , dat in de z-richting wijst. Neem het assenstelsel zoals gegeven in de figuur. Het draadraam heeft een oppervlakte $S = L^2$. De hoeksnelheid waarmee het draadraam ronddraait is ω. Dus de hoek θ die de normaal op het denkbeeldige raamoppervlak maakt met het magnetisch veld varieert als functie van de tijd t als: $\theta = \omega t$. Op $t = 0$ bevindt het draadraam zich in het XY vlak d.w.z. B_0 en de normaal op het oppervlak zijn parallel.



a Bereken op een willekeurig tijdstip t de magnetische flux door de spoel.

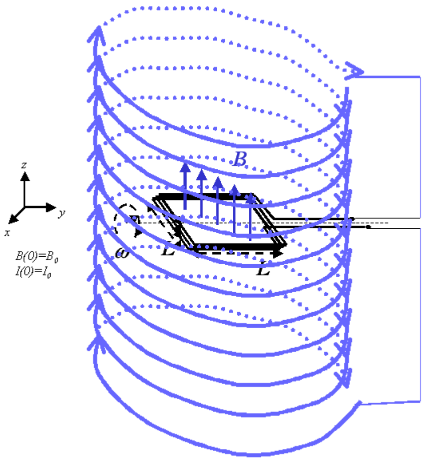
b Gebruik de Wet van Faraday om te laten zien dat de EMK van deze opstelling gegeven wordt door

$$EMK = B_0 N \omega L^2 sin(\omega t) \tag{2}$$

Een student heeft een ingeving. De student plaatst het draadraam in het midden van een rechte spoel met lengte 1m met N_s windingen (as langs z-as), waar de randeffecten verwaarloosd kunnen worden. Zie figuur van deze configuratie. Hij/zij verbindt de uiteinden van het draadraam in serie met de rechte spoel. De draaisnelheid van het draadraam wordt constant gehouden. Op $t = 0$ ligt het draadraam in het XY vlak, loopt er een stroom I_0. De verbinding is zo gekozen dat de inductie stroom op $t = 0$ hetzelfde teken krijgt als I_0 . De zelfinductie coëfficiënten van de spoelen mag je als gegeven beshouwen; gebruik L_d en L_s voor de zelfinductie van draadraam en spoel respectievelijk.

c Geef de formule voor de magnetische flux op een willekeurig tijdstip t door het draadraam als functie van de (nog onbekende) stroom $I(t)$. Houdt rekening met de flux t.g.v. het veld van de rechte spoel en de flux t.g.v. zelfinductie.

Omgekeerd, is de flux door de rechte spoel t.g.v. het draaiende draadraam veel lastiger te berekenen. Hiervoor bestaat echter een slimme truc! Voor



twee willekeurige spoelen geldt: $\Phi_{1tgv2} = MI_2$ en $\Phi_{2tgv1} = MI_1$. Φ_{1tgv2} is de bijdrage aan de magnetische flux door spoel 1 t.g.v. de stroom I_2 door spoel 2 (en omgekeerd). De tijdsafhankelijk cofficint M wordt de mutuele inductie genoemd. Uit opgave c volgt dat $M(t) =$ Constante $cos(\omega t)$.

d De som van alle EMKs dient gelijk aan nul te zijn. Laat zien dat deze som een differentiaal vergelijking oplevert van de vorm:

$$k_1 \frac{dI(t)}{dt} + k_2 \frac{d}{dt}(M(t)I(t)) = 0 \tag{3}$$

Geef uiteraard ook de constantes $k1$ en $k2$.

e Laat zien dat de functie $I(t) = a/(b + cos(\omega t))$ een oplossing is. Geef a en b. Houdt dit systeem zichzelf in stand?

A.2.5 Transformator

Een transformator (voor het omzetten van een gegeven wisselspanning in een hogere of lagere wisselspanning) bestaat meestal uit een juk van weekijzer, waaromheen een primaire en een secundaire spoel zijn gewikkeld. Het weekijzer geeft de magnetische flux, opgewekt door de primaire spoel, door naar de secundaire spoel.

We nemen nu een transformator met 'perfecte koppeling', zodat alle veldlijnen in het weekijzer zijn geconcentreerd. De primaire spoel heeft N_1 windingen, de secundaire spoel N_2 windingen. De stromen in de primaire en secundaire stroomkringen zijn I_1 en I_2. De omtrek (langs de hartlijn) van het juk is l, de dwarsdoorsnede is S. Het weekijzer heeft een constante permeabiliteit μ.

a Teken de situatie. Geef uitdrukkingen voor de grootte $\mathcal{B}$ van het totale magnetisch veld in het juk, en voor de magnetische flux Φ door één enkele winding.

b Geef uitdrukkingen voor de totale fluxen Φ_1 en Φ_2 omvat door de spoelen 1 en 2.

c Laat zien dat de geïnduceerde spanningen V_2 en V_1 over de spoelen zich verhouden als

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

d Geef uitdrukkingen voor de coëfficiënten van zelfinductie L_1 en L_2 van de spoelen, en ook voor de coëfficiënt van mutuele inductie M. De mutuele inductie is gedefinieerd als $\Phi_1 = MI_2$ en/of $\Phi_2 = MI_1$.

Laat vervolgens zien dat voldaan is aan

$$L_1 L_2 = M^2 \qquad \text{en} \qquad \frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

Op de ingang van de transformator is een wisselspanning $V_{in}(t) = V_m \cos \omega t$ aangesloten. Over de uitgang staat als belasting een weerstand R. Het spanningsverval over R bedraagt $V_{uit} = -RI_2(t)$.

e Ga na dat de stromen I_1 en I_2 voldoen aan de differentiaalvergelijkingen

$$L_1 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = V_m \cos \omega t \tag{4}$$

$$M \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = -RI_2(t) \tag{5}$$

f Los de stromen $I_1(t)$ en $I_2(t)$ uit bovenstaande vergelijkingen op. *aanwijzing*: elimineer eerst I_1 en los I_2 op; bepaal vervolgens I_1 door integratie van 4 en stel daarbij de gelijkstroomcomponent gelijk aan nul.

g Laat zien dat

$$\frac{V_{uit}}{V_{in}} = \frac{N_2}{N_1}$$

h Bereken met de in f) gevonden uitdrukkingen voor $I_1(t)$ en $I_2(t)$ het ingaande vermogen $P_{in} = V_{in} I_1$ en het uitgaande vermogen $P_{uit} = -V_{uit} I_2$. Laat zien dat, gemiddeld over een periode, P_{in} en P_{uit} aan elkaar gelijk zijn.

Gegeven is nu een speciaal geval van 'omlaag transformeren' waarin $N_1 = 2N_2$ en $R = \frac{1}{4}\omega L_2$.

i Teken voor dit geval een complex vectordiagram van de relaties 4 en 5 (kies RI_2 langs de positieve reële as). Geef hierin ook de richtingen van I_1 en $\mathcal{B}$ aan.

j Keer nu terug naar het algemene geval en laat zien dat bij benadering steeds geldt dat de stromen zich verhouden als

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{N_1}{N_2} \tag{6}$$

mits voldaan is aan $R \ll \omega L_2$.

A.2.6 Zelfinductie twee stroken

(alleen als je tijd over hebt)
Ga naar http://emclab.umr.edu/new-induct en ga na wat de zelfinductie is voor twee parallelle stroken, waarbij in de ene strook de stroom de ene kant op gaat, en in de andere de tegengestelde kant. Onder welke voorwaarden is de gegeven uitdrukking afgeleid?

A.3 Dagdeel III De Maxwellvergelijkingen, elektromagnetische golven

- bespreking van de opgaves
- hoorcollege
- werkcollege

A.3.1 Vlakke EM Golf

Beschouw een vlakke electromagnetische golf die zich voortplant in de z-richting. Stel dat $\vec{E}$ en $\vec{B}$ ook componenten hebben in de z richting. Gebruik de Wet van Gauss (voor electrische en magnetische veld) en laat zien dat deze componenten nul moeten zijn. Beredeneer ook dat $\vec{E}$ en $\vec{B}$ wel loodrechte componenten (op de z-richting) kunnen hebben.

A.3.2 Een gedachtenexperiment

Beschouw een condensator die wordt opgeladen. Er loopt een stroom in de draden naar beide platen. Tussen de platen loopt geen stroom. Rond de draad is er een magneetveld. Dat vind je door een cirkel rond de draad te beschouwen en

$\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I$

daar op toe te passen. Je neemt dus de kringintegraal rond de cirkel, en de stroom is de stroom die door die cirkel heen prikt.

Als je dit doet voor een cirkel die niet rond een draadstuk ligt, maar ter hoogte van de condensator, zou je vinden dat het magneetveld gelijk is aan nul. Dit is niet wat je zou verwachten, het magneetveld verandert niet plotseling ter hoogte van de condensator. Een meting zou uitwijzen dat het veld niet verandert: op afstand r in radiële richting is het veld gelijk aan $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, ook ter hoogte van de condensator.

Als je een cirkel ter hoogte van de draad neemt, maar het bijbehorende oppervlak zo oprekt dat het "vlies" tussen de platen doorloopt, is het probleem nog groter: op die manier zou je een magnetisch veld gelijk aan nul krijgen, terwijl een niet-opgerekt vlies wel een veld oplevert.

Opdracht: zoek uit welke van de volgende "pogingen tot aanpassing van de wet van Ampere voor niet-stationaire situaties" als resultaat geeft dat het magneetveld continu is in de verticale richting:

A $\quad \oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl}$

B $\quad \oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl}$

C $\quad \oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_{opp} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{do}$

D $\quad \oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_{opp} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{do}$

A.3.3 Golven

extra leesstof over licht en polarisatie is te vinden bij de slides van het college (achteraan).

Een lineair gepolariseerde vlakke elektromagnetische golf is gegeven door

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(z,t) &= \vec{\mathcal{E}}_0 \cos(kz-\omega t)\\ \vec{\mathcal{B}}(z,t) &= \vec{\mathcal{B}}_0 \cos(kz-\omega t)\end{aligned}$$

a) Gebruik de golfvergelijking om te laten zien dat er geen dispersie (zie kf1a) optreedt.

b) Gebruik de differentiële vorm van de wetten van Maxwell om te laten zien dat

   1) de golf transversaal is;

   2) $\vec{\mathcal{E}}$ en $\vec{\mathcal{B}}$ loodrecht op elkaar staan.

Beschouw in de vrije ruimte een elektromagnetische golf met als elektrische component

$$\vec{\mathcal{E}}(x,t) = (\mathcal{E}_x,\, \mathcal{E}_y,\, \mathcal{E}_z) = (0,\, \mathcal{E}_0 \cos(kx+\omega t),\, 0)$$

c) Wat is hier de polarisatierichting? Wat is de bewegingsrichting?

d) Druk de voortplantingssnelheid c, de golflengte λ en de trillingstijd T uit in k en ω.

e) Bepaal met behulp van de differentiële vorm van de wetten van Maxwell de magnetische component $\vec{\mathcal{B}}$.

f) Verifieer dat $\mathcal{E} = c\mathcal{B}$ en dat het uitproduct $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{B}}$ in de bewegingsrichting wijst.

g) Geef een uitdrukking voor een elektromagnetische golf die langs de z-as is gepolariseerd en zich langs de y-as in positieve richting voortplant.

h) Idem voor een circulair gepolariseerde golf die in de positieve x-richting beweegt en met hoeksnelheid ω rechtsom draait.