1 Opgaven Elektro-Statica

Hieronder vind je de opdrachten die je tijdens de colleges en thuis gaat maken.

Het is gebleken dat oefenen met de leerstof zijn vruchten afwerpt. Een kleine wekelijkse investering in de vorm van tijd en energie als je de opgaven maakt zal je dubbel en dwars terugverdienen. Een prettige bijkomstigheid is dat het volgen van de colleges gemakkelijker en efficiënter zal worden omdat je 'bij' bent en blijft door het maken van deze 'papieren' opgaven. Ook vind je in deze oefenopgaven twee verplichte huiswerkopgaven.

Als extra stimulans zijn er ook 'digitale' opgaven die je wekelijks moet inleveren. De digitale 'inlever opdrachten' kun je vinden via de webpage:

http://www.nikhef.nl/user/h73/knem.html

1.1 Dagdeel I: De wet van Coulomb

- Welkom - opmerkingen van huishoudelijke aard.
- Interactief Hoorcollege
- Werkcollege

Voordat je met deze opgaven begint moet je natuurlijk de stof bestudeerd hebben of het college nog vers in het geheugen hebben. De stof die op het college besproken is vind je op de bijbehorende transparanten. Daar staan ook verwijzingen naar de verdere literatuur, waar je in detail de stof kunt nalezen of voorbeelden kunt bekijken.

1.1.1 Vectoren

We hebben kennis gemaakt met de Coulomb kracht en de formule die daar bij hoort:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\hat{r} \tag{1}$$

a) Wat zijn vectoren en wat zijn scalars in deze formule?

b) Geef de grootte van iedere vector in de formule.

c) Schrijf de formule om zodat er geen $\hat{r}$ meer in voorkomt, maar wel een $\vec{r}$.

d) Wat vind je als je van een vector het inproduct met zichzelf neemt? (bijvoorbeeld $\hat{r} \cdot \hat{r} =?$.)

1.1.2 Het antwoord komt langs

De grootte van het elektrisch veld $\left|\vec{E}\right|$ in een punt op afstand r van een dipool valt af als $\frac{1}{r^3}$. Welk principe wordt gebruikt in de afleiding van dit resultaat?

1.1.3 Het E veld in een kubus

Teken een kubus (midden op oorsprong) met op alle hoekpunten een puntlading.

a) teken de bijdrage aan het E veld in de oorsprong van iedere lading afzonderlijk.

b) beredeneer m.b.v. je schets dat er netto geen E veld in de oorsprong is.

c) Geef een uitdrukking voor het E veld (overal) in de kubus.

1.1.4 Een lijntje lading (I)

Bereken het elektrisch veld ergens op de x-as van een draadje met lading langs de z-as. De ladings dichtheid is λ en het draadje ligt tussen $z = -L/2$ en $z = +L/2$. Splits de opgave in 'begrijpen wat je moet uitrekenen' en ' de berekening uitvoeren'! Maak ALTIJD eerst een schets van de situatie.

1.1.5 Een lijntje lading (II)

Bereken het elektrisch veld ergens op de z-as ($z > L/2$) van een draadje met lading langs de z-as. De ladings dichtheid is λ en het draadje ligt tussen $z = -L/2$ en $z = +L/2$. Splits de opgave in 'begrijpen wat je moet uitrekenen' en ' de berekening uitvoeren'!

1.1.6 Hoeveel dipool, hoeveel lading?

In de oorsprong bevindt zich een ladingsverdeling. Het is niet bekend of het gaat om een netto lading of om een dipool, of om een combinatie daarvan. Je meet de elektrische veldsterkte op de x-as. Op 1 mm afstand geldt dat de veldsterkte gelijk is aan $6,0 \times 10^2 \frac{V}{m}$. gericht in positieve x-richting. In alle andere richtingen is de elektrische veldsterkte op dezelfde afstand van de oorsprong *kleiner*. Op de x-as, op 2 mm afstand van de oorsprong is de gemeten waarde $1,2 \times 10^2 \frac{V}{m}$ Bereken de waarden van de netto-lading en van het dipoolmoment.

1.1.7 Dagdeel I: De wet van Coulomb - Wat moet ik kunnen?

Bevestig voor jezelf dat je de volgende kennis beheerst (bijvoorbeeld door de relevante formules op te schrijven):

- De uitdrukking voor de Coulomb kracht tussen twee puntladingen. Wat is de relatieve grootte van de kracht als we de afstand tussen de ladingen verdubbelen? Wat gebeurt er met de richting in dit geval?
- Het elektrische veld van een puntlading.
- De uitdrukking van het het elektrische veld van een lijnlading, een oppervlakte lading en een ruimtelading.

1.2 Dagdeel II: De wet van Gauss

- bespreking opgaven.
- interactief hoorcollege
- werkcollege

1.2.1 Het inprodukt intens.

We zijn het inprodukt al tegengekomen. Formeel geldt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos(\alpha_{ab}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{2}$$

a) Het resultaat van het inproduct is opnieuw vector, waar of onwaar?

In dit vak komen we vaak het inprodukt tegen met een eenheidvector, bijvoorbeeld $\vec{a} \cdot \hat{r}$, met $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$.

b) Leg uit dat $\vec{a} \cdot \hat{r}$ als het ware de component van $\vec{a}$ in de richting van $\vec{r}$ oplevert.

Op dit principe kunnen we nog even voortborduren. Laten we eens kijken naar een de integraal over een oppervlak O met normaalvector $\vec{n}$:

$$\int_O \vec{E} \cdot \vec{n} dO \tag{3}$$

De integrand is $\vec{E} \cdot \vec{n}$ is de component van $\vec{E}$ die loodrecht op het oppervlak staat.

c) Waaraan moet je $\vec{E}$ gelijk stellen als je de oppervlakte van oppervlak O zou willen berekenen? Geef de integraal voor het geval dat O een vierkant is en bereken de oppervlakte.

1.2.2 Ladingsverdeling en totale lading

a) Je hebt een bol met straal R en uniforme ladingsdichtheid ρ. Schrijf de integraal op die de totale lading geeft, en voer de integratie uit.

Nu heb je een bol met in het centrum een ladingsdichtheid ρ_{max}, die lineair afneemt tot nul op de rand, dus bij $r = R$. De lading is minder dan wanneer de hele bol ladingsdichtheid ρ_{max} zou hebben.

b) hoeveel keer zo klein verwacht je dat de lading is?

c) Geef de functie $\rho(r)$ en schets de bijbehorende grafiek.

d) Bereken de totale lading.

e) Vergelijk je antwoord met je voorspelling bij b)

f) Check je antwoord bij je buurman. Hadden jullie hetzelfde antwoord?

1.2.3 Wat moet er uitkomen?

Geef aan of je eenvoudig met de Wet van Gauss het veld van onderstaande geladen voorwerpen zou kunnen bepalen. Waarom en waarom niet. Als het mogelijk is geef dan het veld buiten het voorwerp (geef altijd ook je berekening).

a) een bal

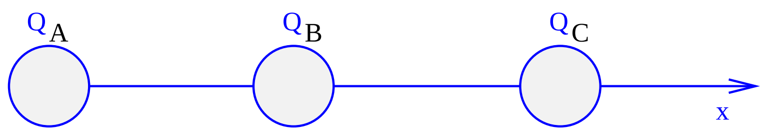
b) een schoen

c) een dozijn parallelle platen die oneindig groot zijn.

d) een kubus

1.2.4 Clubjes lading

Drie rustende, positieve puntladingen Q_A, Q_B en Q_C bevinden zich op één lijn (zie figuur).



a) Bereken voor elk van de ladingen grootte en richting van de kracht die in het gezamenlijke veld van de andere wordt ondervonden.

Beschouw drie ladingen die op een lijn liggen: In x=-0,1 mm een lading van -0,1 C, in x=0 een lading van +0,2 C en in x=0,1 mm een lading van -0,1 C.

b) Bereken het veld in x=1 cm, x= 2 cm en x=3 cm. Met welke macht van de afstand tot de oorsprong neemt het veld af?

c) Wat kun je zeggen over het elektrisch veld als functie van de afstand tot een watermolecuul? En het veld als functie van de afstand tot een koolstofdioxide-molecuul?

1.2.5 Bollen in soorten en maten

a) Een niet geleidende massieve bol met straal R heeft een uniforme ladingsdichtheid. Buiten de bol is de ladingsverdeling onbekend. Je wilt het elektrisch veld in een punt M binnen de bol uitrekenen.

   Leg uit of dat kan zonder de ladingsverdeling buiten de bol te weten.

We bekijken enkele ladingsverdelingen die bolsymmetrisch zijn om de oorsprong, zonder lading buiten de bol. Bepaal voor de gevallen b t/m f de grootte $E(r)$ van de elektrische veldsterkte en maak daar schetsjes van.

b) een puntlading Q,

c) een holle, niet geleidende bolschil met straal R en oppervlaktelading $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$,

d) een homogeen geladen, niet geleidende bol met ladingsdichtheid $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$,

e) een dikke neutrale geleidende bolschil rondom een puntlading Q. Voor later definieren we: de binnenstraal R_1 en de buitenstraal R_2.

   Aanwijzing voor e: binnen in een geleider is het elektrisch veld nul.

f) Bepaal voor geval e de oppervlaktelading bij R_1en R_2.

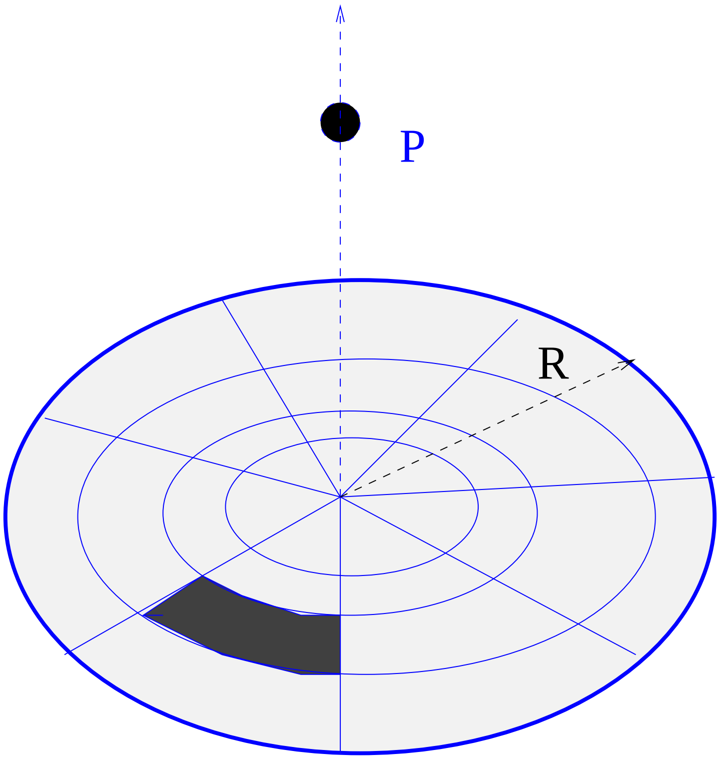
g) Bedenk een ladingsverdeling $\rho(r)$ zo dat het elektrisch veld kwadratisch toeneemt als functie van de afstand tot de oorsprong.

1.2.6 Ring- en Schijfladingen

Uit de formule voor de elektrische veldsterkte $\mathrm{d}\vec{E}$ in een gegeven veldpunt P en afkomstig van een kleine puntlading $\mathrm{d}Q$, zijn formules voor de velden van ruimtelijke ladingsverdelingen af te leiden. Je moet deze verdelingen dan uit (oneindig) veel puntladingen $\mathrm{d}Q$ opgebouwd denken, en hun bijdragen $\mathrm{d}\vec{E}$ aan het totale veld integreren.
We beschouwen (zie figuur) een geladen cirkelschijf met straal R, die een vaste ladingsdichtheid (hier: lading per oppervlakte-eenheid) σ heeft. Het gekozen veldpunt P bevindt zich op de z-as buiten het vlak van de schijf, op een afstand z recht tegenover met middelpunt O. We verdelen de schijf in dunne concentrische ringen met straal r en dikte $\mathrm{d}r$ (r loopt van 0 tot R), en deze ringen weer in smalle sectoren met oppervlakte $r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$ (ϕ loopt van 0 tot 2π).

a) Laat zien dat de grootte van de veldbijdrage $\mathrm{d}\vec{E}$ in P ten gevolge van één sector uit één ring (het zwarte stukje in de figuur) gegeven wordt door

$$\mathrm{d}E = \frac{\sigma r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)}$$



b) Verklaar uit de symmetrie van de ringen dat voor de bijdrage van d$\vec{E}$ aan het totale veld $\vec{E}$ van de schijf in P alleen de z-component van d$\vec{E}$ hoeft te worden beschouwd.

c) Schrijf de integraal op die je moet uitvoeren om het veld van de hele schijf te verkrijgen.

d) Laat zien dat deze integraal de volgende uitdrukking oplevert:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}})\,\hat{\mathrm{z}}$$

e) Geef benaderingsformules voor $z \ll R$ en voor $z \gg R$, en geef commentaar op de resultaten.

1.2.7 Dagdeel II: De wet van Gauss - Wat moet ik kunnen?

Bevestig voor jezelf dat je de volgende kennis beheerst (bijvoorbeeld door de relevante formules op te schrijven):

- Het volume kunnen berekenen van een cilinder en een bol in respectievelijk cilinder- en bol-coördinaten.
- Begrijpen dat de elektrische flux door een boloppervlak met willekeurige straal (en als middelpunt een puntlading) constant is.
- Met behulp van de Wet van Gauss het elektrische veld berekenen van de volgende objecten:
  - oneindig lange lijnlading,
  - oneindig grote geladen plaat,
  - geladen bol.

1.3 Dagdeel III (new): De divergentie van het elektrisch veld

- bespreking opgaven.
- interactief hoorcollege
- werkcollege

1.3.1 Weet je wat hier fout aan is?

Een student schrijft het volgende op:

$$\vec{E} = (x^2, -2y^2, 3z^2) \tag{4}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = (2x, -4y, 6z) \tag{5}$$

a) Omschrijf zijn fout.

b) Corrigeer zijn antwoord.

1.3.2 Komt er uit wat er uit zou moeten komen?

a) Geef het elektrisch veld buiten een homogeen geladen bol.

b) Wat zou er volgens de wet van Gauss in differentiële vorm uit de divergentie moeten komen?

c) Controleer dit expliciet door de divergentie van je antwoord bij te nemen.

e) Gegeven een elektrisch veld $\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r - \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0 R} r^2\right) \hat{r}$. Bepaal de ladingsdichtheid $\rho(\vec{r})$ voor $r < R$.

1.3.3 Vierkant

Vier gelijke ladingen $Q = 2.0 \times 10^{-6}$C bevinden zich in een overigens lege ruimte op de hoekpunten van een vierkant met zijde $a = 0.50$. De permittiviteit van het vacuüm is $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$.

a) Hoe groot is de elektrische veldsterkte in het middelpunt van het vierkant?

b) Hoe groot is de elektrische potentiaal in het middelpunt van het vierkant?

c) Geef een uitdrukking voor de potentiële energie van de gegeven ladingsconfiguratie? Bedenk zelf wat redelijk is. In het volgende college komt het antwoord voorbij!

1.3.4 Ook bij een lijnlading?

Beschouw een oneindig doorlopende, rechte lijnlading. Beschouw de lijn en een vierkantje in een plat vlak dat twee zijden parallel aan de lijn heeft en twee zijden loodrecht daar op, dus van de lijn uit gezien radieel gericht. Het vierkantje ligt niet op de lijnlading. Teken eerst de situatie (essentieel!). Vervolgens, bereken de kringintegraal van het elektrisch veld en geef commentaar op het resultaat van de berekening.

1.3.5 Dagdeel III: De divergentie van het elektrisch veld - Wat moet ik kunnen?

Bevestig voor jezelf dat je de volgende kennis beheerst (bijvoorbeeld door de relevante formules op te schrijven):

- Een integrale en een differentiële vergelijking voor het elektrische veld opschrijven.
- Begrijpen hoe je m.b.v. de Stelling van Gauss bovengenoemde integrale en differentiële vergelijkingen in elkaar over kunt laten gaan.

1.4 Dagdeel IV (new): De gradiënt van de potentiaal

- bespreking opgaven.
- interactief hoorcollege
- werkcollege

1.4.1 Energievraagstuk opgelost op college

De energie die een elektrisch veld heeft, is gegeven door U=$\frac{\varepsilon_0}{2}\int E^\alpha dV$.
Wat is de waarde van α?

1.4.2 Gradiënten berekenen

a) Bereken de gradiëntvan $V(\vec{r}) = r^{4/3}$.

b) Bereken de gradiënt van $V(\vec{r}) = x - 3y + 7z$

c) Bereken de gradiënt van $V(\vec{r}) = x - 3y + 7z - 12$

d) Bereken de gradiënt van $V(\vec{r}) = e^r$

1.4.3 Wat kun je zeggen over een geleider?

Iemand beweert: Op een een metalen draadje zal een lading zich gelijkmatig verdelen, de lading per lengte-eenheid is overal gelijk.

a) Beschouw een punt op driekwart van het draadje en leg uit dat op een lading in dat punt een kracht zou werken, als de ladingsverdeling inderdaad uniform zou zijn.

b) Formuleer twee criteria, één in termen van het elektrisch veld en één in termen van de potentiaal, die geldig zijn in en op een geleider.

1.4.4 Energie

Bereken hoeveel energie is opgeslagen in de ladingsverdeling van opdracht 1.2.2c, horend bij het tweede dagdeel.

1.4.5 Ronde bollen, spitse punten

Je weet wellicht dat het elektrisch veld bij een spitse punt van een geladen geleider groot is. Als illustratie hiervan beschouwen we twee geleidende bollen, elk met lading +Q, met stralen a en b (b > a). Op een gegeven moment verbind je de bollen door een lange, geleidende draad. Je mag aannemen dat de ladingsverdeling op beide bollen bolsymmetrisch blijft en dat de hoeveelheid lading die op de draad blijft zitten verwaarloosbaar klein is.

a) Schets de situatie.

b) Leg uit of op het moment dat je de verbindingsdraad aanlegt er lading van de ene naar de andere bol zal gaan.

c) Bepaal de verhouding van de sterktes van de elektrische velden net buiten beide bollen, na het aanleggen van de verbinding.

1.4.6 Rare verdeling

Gegeven is een potentiaal $V(r) = r^{7/2}$

a) Beredeneer dat het elektrisch veld radiëel gericht zal zijn.

b) Bereken het elektrisch veld uit de gegeven potentiaal. Is het inderdaad radiëel gericht?

c) Bepaal met behulp van de wet van Gauss in differentiële vorm hoe de lading over de ruimte is verdeeld.

d) Controleer met behulp van de wet van Gauss in integraalvorm of je antwoorden bij b en c met elkaar kloppen.

1.4.7 Dagdeel IV De gradiënt van de potentiaal - Wat moet ik kunnen?

Bevestig voor jezelf dat je de volgende kennis beheerst (bijvoorbeeld door de relevante formules op te schrijven):

- De uitdrukking voor de potentiaal van een puntlading geven.
- Begrijpen hoe je de potentiaal van een dipool vindt.
- De gradiënt van een functie $f(x, y, z)$ berekenen.
- Begrijpen hoe je de uitdrukking voor de energie van een willekeurige ladingsverdeling vindt.

1.5 Dagdeel V: Geleiders in elektrische velden

- bespreking opgaven.
- interactief hoorcollege
- werkcollege

1.5.1 Oprollen

Beschouw een vlakke-plaatcondensator met vierkante , L bij L grote platen, met afstand tussen de platen d. Nu maak je daar een cilindercondensator van: je rolt een plaat tot een buis, van de andere knip je een strook af, en ook daarvan maak je een buis, die in de andere past, met afstand tussen de binnenste en de buitenste buis nog steeds dezelfde d. Bereken of de capaciteit van je nieuwe cilindercondensator groter of kleiner is dan die van de plaatcondensator.

Leg uit hoe dit van L en d afhangt.

1.5.2 Schud het uit je mouw!

Je hebt inmiddels een aantal methoden geleerd die je kunt toepassen om het elektrisch veld in een gegeven configuratie te bepalen:

De Wet van Gauss moet je nu snel, bijna routinematig kunnen toepassen. Dat kun je testen met de volgende vraagstukken. Voor alle opdrachten geldt dat je duidelijk de elektrische flux door het Gauss oppervlak dient te berekenen. En als je het E veld buiten de integraal haalt beredeneer dan waarom je dat mag doen.

a) Bepaal het E veld op afstand d van een vlakke plaat (ladingsdichtheid σ) met een grote oppervlakte A, zodat $A >> d$. Gebruik een 'vierkant Gauss pillen-doosje'.

b) Bepaal het E veld op afstand d van een lange cilinder (lengte L) met straal R met $d >> R$ en $d << L$. Gebruik een 'rond pillendoosje'. Laat zien dat dit alleen gaat als je bij de uiteinden van de cilinder vandaan blijft.

c) Bepaal het E veld buiten een geladen bol met lading Q op afstand d. Gebruik een geschikt Gauss oppervlak.

1.5.3 Dagdeel V: Geleiders in elektrische velden - Wat moet ik kunnen?

- Begrijpen waarom de lading op een geleider gaat zitten.
- Begrijpen waarom het E veld in een geleider altijd nul is en waarom het E veld altijd loodrecht op het oppervlak van een geleider staat.
- Uitleggen wat de beeldladingsmethode inhoudt.
- Uitleggen wat een condensator is.

1.6 Dagdeel VI: Isolatoren in elektrische velden

- bespreking opgaven.
- interactief hoorcollege
- werkcollege

1.6.1 Groter, kleiner, of onveranderd?

Een condensator heeft een capaciteit C als tussen de platen vacuüm heerst. Nu wordt een diëlektrikum tussen de platen geschoven. Wordt de capaciteit kleiner, groter, of blijft zij onveranderd?

1.6.2 Wat is constant?

Als je een condensator hebt, en je vraagt je af wat er met het elektrisch veld zal gebeuren als je een isolator tussen de platen schuift, zijn er twee mogelijke situaties.

a) Beschrijf die twee mogelijke situaties.

   De condensator bestaat uit twee vlakke platen met oppervlakte A op afstand d. De condensatorplaten hebben een potentiaal verschil V.

b) Bepaal de lading op ieder van de platen.

   Nu schuiven we een isolator met di-elektrische constante ϵ tussen de platen.

c) We houden het potentiaal verschil V constant d.m.v. een batterij tijdens deze actie. Wat is nu de lading op ieder van de platen?

d) Als we het potentiaal verschil niet constant hadden gehouden en er voor gezorgd hadden dat er geen lading van de platen kan ontsnappen. Wat is dan het potentiaal verschil?

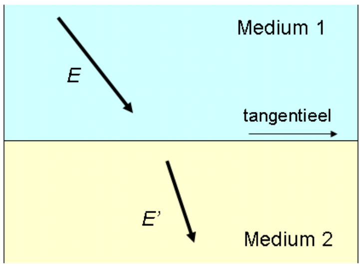
1.6.3 Wat voelt de testlading?

Een testlading wordt in een ruimte geplaatst waarvoor geldt dat $\vec{E}$ en $\vec{P}$ beide ongelijk aan nul zijn. Geef de uitdrukking voor de kracht op de testlading.

1.6.4 Van het ene naar het andere materiaal

Gegeven is een grensvlak tussen twee media (zie figuur) waarin zich geen vrije ladingen bevinden. Laat met behulp van een geschikt gekozen kringintegraal zien dat in dit grensvlak de de tangentiële component van de elektrische veldsterkte $\vec{E}$ continue is.

Ter vereenvoudiging van dit vraagstuk mag je aannemen dat binnen medium 1 en ook in medium 2 het elektrische veld overal gelijk is. Definieer zelf de eventuele variabelen en constantes die je nodig hebt.



Figuur 1: Van het ene naar het andere materiaal.

1.6.5 Half vol en half leeg.

We bekijken twee gevallen van een gedeeltelijk met een diëlektricum gevulde condensator. Gegeven is eerst een ideale condensator (in twee delen, zie figuur) met plaatafstand d en spanning V. De tussenruimte van deel 1 (tegenover de oppervlakte S_1) is vacuüm; de tussenruimte van deel 2 (tegenover de resterende oppervlakte S_2) is gevuld met een diëlektricum (permittiviteit ε).

c) Bepaal voor elk van de delen 1 en 2:

   1) de grootte E van de elektrische veldsterkte;
   2) de grootte P van de polarisatie;
   3) de vrije lading Q;
   4) de capaciteit C.

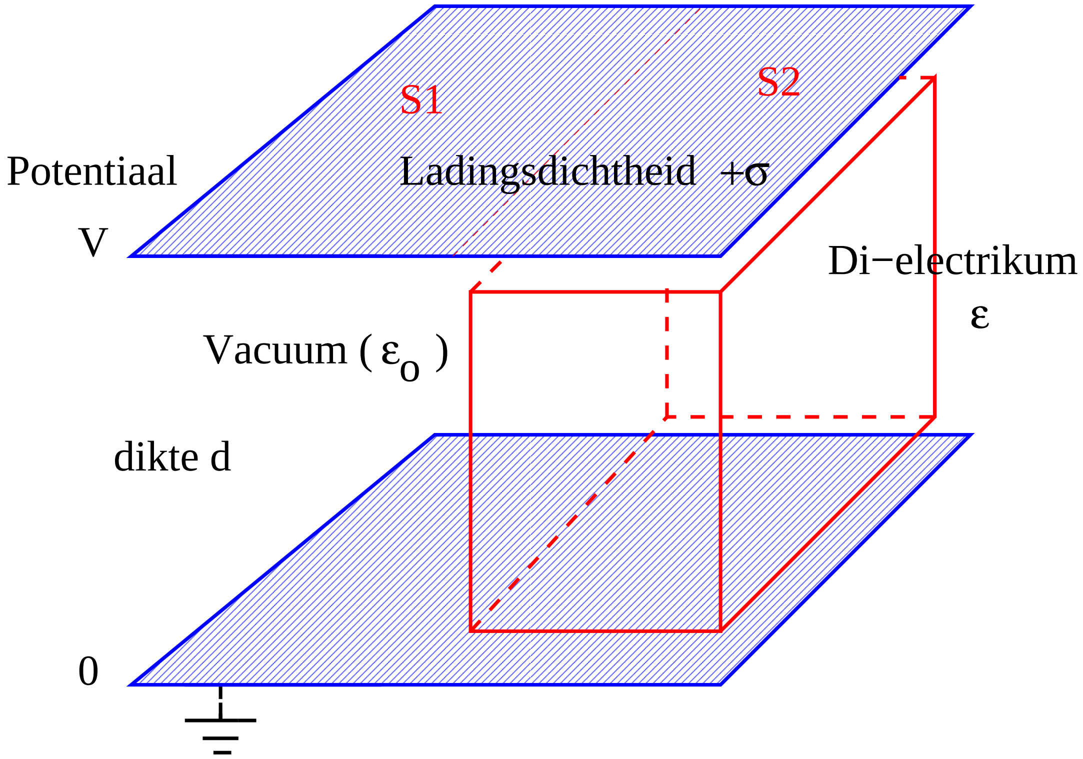
d) Geef ook een uitdrukking voor de capaciteit van de condensator als geheel.

Gegeven is nu een ideale condensator (in twee delen, zie figuur) met plaatoppervlakte S en vrije lading Q. De tussenruimte van deel 1 (over de afstand d_1) is vacuüm; de tussenruimte van deel 2 (over de resterende afstand d_2) is gevuld met een diëlektricum (permittiviteit ε).

e) Bepaal voor elk van de delen 1 en 2:

   1) de grootte P van de polarisatie;
   2) de grootte E van de elektrische veldsterkte;
   3) de spanning V;
   4) de capaciteit C.

f) Geef ook een uitdrukking voor de capaciteit van de condensator als geheel.



g) Een vooruitblik: welke wet bepaalt hoe licht van het ene naar het andere materiaal gaat, en wat is het verband met het gedrag van de loodrechte en parallelle componenten van $\vec{E}$ bij de overgang?

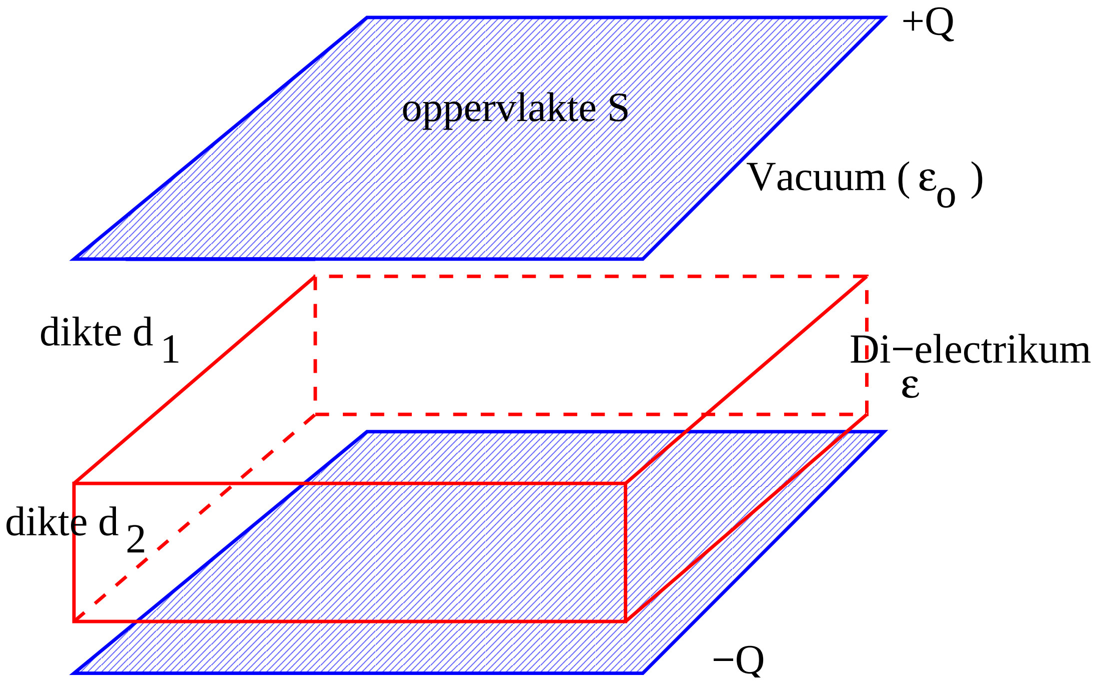
1.6.6 Hoe groot is die kracht?

a) Bepaal de orde van grootte van de kracht op een velletje papier dat tot de helft in een vierkante plaatcondensator met zijde 10 cm en afstand tussen de platen 0,1 mm steekt, als de spanning over de condensator 30 kV is.

b) Geef een uitdrukking voor de kracht die werkt op een diëlektricum dat in een cilindercondensator steekt.

1.6.7 Komt er hetzelfde uit?

aanwijzingen:
- In deze opgave stelt q een lading voor die varieert tussen 0 en Q.



- De energiedichtheid U in de ruimte hangt samen met de elektrische veldsterkte $\vec{E}$ volgens

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

Van een condensator met capaciteit C wordt de lading met een klein bedrag vergroot van q tot $q + \mathrm{d}q$.

a) Geef een uitdrukking voor de hoeveelheid energie dU die hiervoor nodig is. Bepaal hieruit door integratie de energie U van de condensator als de lading Q bedraagt.

   Een vlakke plaatcondensator met plaatoppervlakte S en plaatafstand d is opgesteld in vacuüm en bevat een lading Q.

b) Geef, uitgaande van a, een formule voor de energie U van deze condensator

c) Bereken U ook uit de energiedichtheid u tussen de platen en vergelijk met c .

   Een geleidende bol met straal R en lading Q bevindt zich in de lege ruimte.

d) Geef, uitgaande van a, een formule voor de energie U van deze bol.

e) Bereken dezelfde energie ook via de volume-integraal

$$U = \int u \, \mathrm{d}\mathcal{V}$$

aanwijzing: doorloop de ruimte buiten de bol met bolschillen van dikte dr, waarbij r dus loopt van R tot ∞ (hoe zit het met de ruimte binnen de bol?).

1.6.8 Interne consistentie?

Een homogeen geladen bol met ladingsdichtheid $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ is geplaatst in vacuüm en heeft zelf ook een permittiviteit ε_0. Denk de bol schilsgewijs vanuit het midden opgebouwd.

a) Druk de lading q en de potentiaal V van een deelbol met straal $r < R$ uit in ρ, r en ε_0 (Bedenk dat de potentiaal op nu is gesteld in het oneindige, niet in de oorsprong.)

b) Bereken de energietoename $\mathrm{d}U = V\mathrm{d}q$ bij uitbreiding met een schil dr.

c) Druk via integratie over r de totale energie $U(R)$ van de bol uit in Q, R en ε_0

d) Bereken $U(R)$ ook door integratie van u over de hele ruimte (binnen én buiten de bol).

1.6.9 Gevulde Condensatoren, gesneden koek?

Ook in de aanwezigheid isolatoren van en zelfs binnen materialen kunnen we vaak met een handomdraai m.b.v. De Wet van Gauss het elektrisch veld bepalen. Doe dat voor onderstaande situaties. Maak steeds onderscheid tussen het gebied binnen de condensator en buiten de condensator. Introduceer zelf de nodige grootheden en geef altijd aan waar de vrije en/of gebonden lading zich bevind. Voor alle opdrachten geldt dat je duidelijk de elektrische flux door het Gauss oppervlak dient te berekenen. En als je het E veld buiten de integraal haalt beredeneer dan waarom je dat mag doen.

a) Een vlakke plaat condensator.

b) Een cilinder condensator. Dus van binnen naar buiten: een geleider, dan een isolator die weer gehuld is een een geleidende schil. Blijf bij de uiteinden vandaan (waarom?)!

1.6.10 Dagdeel VI: Isolatoren in elektrische velden - Wat moet ik kunnen?

- Het verschil tussen een geleider en een isolator uitleggen
- Uitleggen waarom in een 'lineaire' isolator geen netto lading zit (de isolator in een extern elektrisch veld geplaatst).
- Uitleggen waarom er netto wel lading op buitenkant van een 'lineaire' isolator zit (wederom is de isolator in een extern elektrisch veld plaatst).
- Uitleggen hoe je uitgaande van de polarisatie $\vec{P}$ de bijdrage aan het het elektrische veld van een isolator kunt bepalen.

2 Opgaven Magneto-Statica

2.1 Dagdeel I: Lorentzkracht, Biot-Savart

- Interactief hoorcollege Lorentzkracht, Biot-Savart
- werkcollege
- bespreking van de opgaven

2.1.1 Even inkomen

a) Een staafmagneet heeft een noordpool links en een zuidpool rechts. Je zaagt de magneet middendoor. Omschrijf de nieuwe situatie (Dit mag ook met een tekening).

b) Twee magneten trekken elkaar aan. Nu houd je een vel papier tussen de twee magneten. Trekken de magneten elkaar nog steeds aan?

c) Twee magneten trekken elkaar aan. Nu houd je een vel aluminiumfolie tussen de twee magneten. Trekken de magneten elkaar nog steeds aan?

d) Een positieve lading wordt zonder beginsnelheid losgelaten op kleine afstand van de noordpool van een magneet. Is er een aantrekkende kracht, een afstotende kracht, of geen kracht tussen de magneet en de lading?

e) Een positieve lading q beweegt naar links met snelheid v. Er is een magneetveld van B Tesla, naar rechts gericht. Geef grootte en richting van de kracht die op het bewegende deeltje werkt.

f) Een positieve lading q beweegt naar links met snelheid v. Er is een magneetveld van B Tesla, omhoog gericht. Geef grootte en richting van de kracht die op het bewegende deeltje werkt.

g) Door een verticaal lopende stroomdraad loopt een stroom I omhoog. Geef de grootte en de richting van het magnetisch veld, op afstand r, rechts van de stroomdraad.

2.1.2 School en universiteit

Beschouw een naar rechts gericht magnetisch veld en een positief geladen deeltje dat daarin omhoog beweegt.

a) Wat zei het 'middelbare schoolregeltje' over de richting van de Lorentzkracht? Wat komt daar in dit geval als richting uit?

b) Schrijf de twee vectoren op die het magneetveld en de snelheid weergeven en bepaal met behulp van het uitproduct wat de richting van de Lorentzkracht is. Klopt dit met je antwoord bij a?

2.1.3 Een afzwaaier

We beschouwen een uniform magnetisch veld $\vec{B}$ in de z-richting. Een deeltje met massa m en lading q heeft op tijdstip $t = 0$ een snelheid v_0 in de x richting.

a Schets de situatie. Neem het vlak van je papier als het xy-vlak waar de z richting loodrecht op staat.

b Schrijf de krachten vergelijking op. Gebruik $F = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$.

c Voor de snelheid $\vec{v}$ kun je afzonderlijk voor de x en de y component een differentiaal vergelijking opschrijven van de vorm $\frac{d^2f(t)}{dt^2} = -k_1^2 f(t)$. Een oplossing van de deze vergelijking is $f(t) = k_2 cos(k_1 t)$, waarbij k_1 en k_2 constantes zijn. Ga dit na.

d Geef deze differentiaalvergelijkingen voor de componenten van $\vec{v}$.

e Los deze differentiaalvergelijkingen op.

2.1.4 Magnetische fouten

We beschouwen een lange verticale stroomdraad. Daaromheen zit een metalen ring, in een horizontaal vlak.

Een student heeft de volgende redenering: " Het magnetisch veld vind ik met de rechterhandregel. Die richting is, van boven af gezien, tegen de klok in. In het ringetje zal in die richting een stroom gaan lopen.

a) a) Omschrijf wat er fout is in deze redenering.

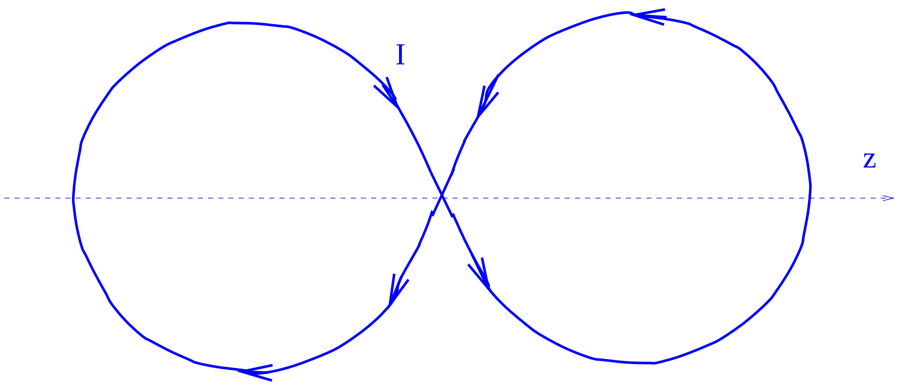
We beschouwen een wasmachine. Het vermogen dat deze verbruikt, is 2000 Watt. Een student heeft de volgende redenering: "De spanning is 230 V, dus de stroomsterkte in de draad van het stopcontact naar de wasmachine is ongeveer 10 A. Op een centimeter afstand van de draad kun je een magneetveld meten, dat ongeveer $\frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{1.26*10^{-6}*10}{2\pi*10^{-2}} = 2*10^{-4}$T groot is.

b) Wat is hier fout?

c) Vergelijk je antwoord met dat van degene die naast je zit. Omschrijf de verschillen in de antwoorden.

2.1.5 Nul en Acht

a) Op grote afstand van een elektrische dipool valt het elektrisch veld af als een bepaalde macht van de afstand. Wat is die macht? Wat is die macht voor een puntlading?



b) Met welke macht r^α valt het magnetisch veld van een stroomlus af als functie van de afstand tot die lus, voor grote r?

Beschouw nu een stroomdraad die in de vorm van een 8 is opgesteld in het y-z vlak. Er loopt een stroom I, die de in de figuur aangegeven richting heeft. In de oorsprong kruist de draad zichzelf.

c) Beredeneer dat het magnetisch veld op grote afstand *kleiner* zal zijn dan het veld van een enkele stroomlus met dezelfde stroomsterkte, en beredeneer wat de macht zal zijn waarmee het magnetisch veld afvalt als de afstand groter wordt.

2.2 Dagdeel II: De wet van Ampère in integraalvorm

- bespreking van de opgaven
- Interactief hoorcollege
- opgaven maken

2.2.1 Meer in het midden

Beschouw een stroomverdeling met een ronde doorsnede, waarin in het midden de maximale stroomdichtheid J_0 lineair aflopend tot 0 op de rand (de straal noemen we R).

a) Geef de functie $J(r)$ en schets de verdeling.

b) Bereken de grootte van het magnetisch veld als functie van de afstand tot het midden van de draad, dus de functie $B(r)$, voor $r < R$.

2.2.2 Twee platen

Twee oneindig doorlopende parallelle platen bevinden zich een afstand d van elkaar vandaan. In de platen lopen de uniforme, parallelle stroomdichtheden K_1 en K_2. Bepaal met behulp van de wet van Ampère het magnetisch veld op drie plaatsen: tussen de platen en aan beide kanten naast de platen.

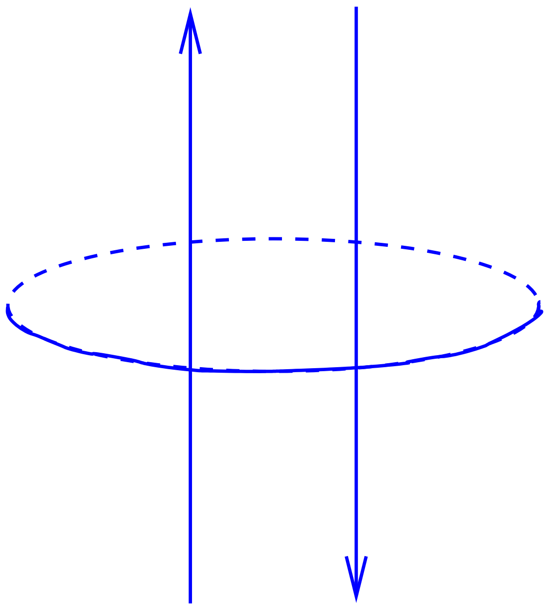
2.2.3 Heen en terug

Twee draden lopen in verticale richting, de afstand tussen de draden is 5 mm. In de ene draad loopt een stroom omhoog, in de andere een even grote stroom omlaag. Een student beschouwt een cirkel met het middelpunt precies tussen de twee draden in, die beide draden omvat. Hij redeneert: De totaal omvatte stroom is gelijk aan nul, dus uit $\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = 2\pi r B = 0$ volgt dat het magnetisch veld is gelijk aan nul, op elk punt van de cirkel. Omdat je de cirkel willekeurig kunt kiezen, als de straal maar groter is dan 2,5 mm, kun je concluderen dat het veld gelijk is aan nul, op afstanden groter dan 2,5 mm van de lijn midden tussen de draden.

a) Wat is je commentaar op de redenering? Klopt deze?

Gegeven is eerst een cilindrische geleidende draad met straal R en doorsnede $A = \pi R^2$, waardoor een homogeen verdeelde stroom I loopt.

b) Bepaal de grootte B van de magnetische veldsterkte als functie van de afstand r tot de as van de draad. Schets ook een grafiekje van $B(r)$.



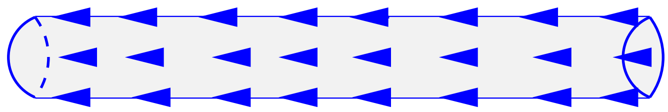
Gegeven is nu een coaxiale kabel (zie rechterfiguur) met cilindrische binnendraad ($0 \leq r \leq R_1$) en geleidende mantel ($R_2 \leq r \leq R_3$). Neem aan dat de permeabiliteit in de tussenruimte én buiten de kabel gelijk is aan μ_0.

Door de binnendraad loopt een homogeen verdeelde stroom I (zoals opgave b), die terugkeert door de mantel. Neem aan dat de stroomdichtheid in beide gevallen dezelfde waarde J heeft.

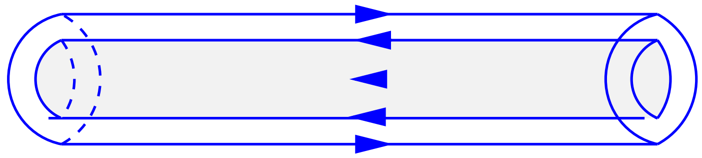
c) Leg uit dat uit de eis voor J volgt: $R_3^2 = R_1^2 + R_2^2$.

d) Bereken en schets $B(r)$.

Neem als verhoudingsgetallen $R_1 = 3, R_2 = 4$.



J=I/A



2.3 Dagdeel III: Veldvergelijkingen nader bekeken

- bespreking van de opgaven
- Interactief hoorcollege
- werkcollege

2.3.1 Rotaties oefenen

Bereken:

a) $\vec{\nabla} \times (2z, 3y, -x)$

b) $\vec{\nabla} \times (z^3, 0, 10)$

2.3.2 Een elektrisch veld

Controleer expliciet dat de rotatie van het elektrisch veld rond een puntlading gelijk is aan nul.

2.3.3 Komt het bekend voor?

Bereken de stroomverdeling die hoort bij het hieronder gegeven magnetisch veld:

$$\vec{B} = \mu_0 J_0(y, -x, 0)[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3R}\sqrt{x^2 + y^2}]$$

2.3.4 Raar magnetisch veld

Rond een verticale as is een stroomverdeling, zodanig dat de grootte van het magnetisch veld als functie van de afstand tot de as wordt gegeven door $B = \mu_0 r^2$. Zoals je misschien al had opgemerkt zijn in deze opgave, ter vereenvoudiging, dimensionele constanten (met grootte 1) niet genoteerd. De richting is net als bij een stroomdraad met uniforme stroomdichtheid: het magnetisch veld raakt aan cirkels rond de draad.

a) Laat met behulp van de wet van Ampère in differentiële vorm zien dat de stroomdichtheid toeneemt als functie van de afstand tot de as, volgens $J(r) = 3kr$..

b) Laat zien dat de wet van Ampère in integraalvorm met de gegeven $J(r)$ tot de conclusie leidt dat het magneetveld wordt gegeven door $B(r) = \mu_0 r^2$

2.3.5 Maakbare velden?

Drie oneindig grote niet-magnetiseerbare metalen platen staan parallel aan elkaar loodrecht op de x-as. In de ruimte links van de linker plaat is het magnetisch veld 1,0 T groot, gericht in positieve y-richting. Tussen de linker en de middelste plaat is het veld 0,7 T groot, in dezelfde richting. Tussen de middelste en de rechter plaat is het veld 0,1 T groot, gericht in negatieve y-richting.

a) Hoe groot zijn de oppervlaktestromen die je in de platen moet laten lopen om dit voor elkaar te krijgen?

b) Hoe groot is het veld rechts van de rechter plaat, en in welke richting staat het?

2.3.6 Wet van Ampere?

Beschouw een spoel met lengte l en radius R ($R << l$). De spoel heeft N windingen per meter en er loopt een stroom I.

a) Blijf weg bij de uiteinden en bepaal het magnetisch veld binnen de spoel. Laat zien welk Ampere 'loopje' je gebruikt; als je het B veld buiten de integraal haalt dien je duidelijk uit te leggen waarom dat mag.

b) Bereken het B veld binnen een torus (donut). Introduceer zelf de nodige grootheden.

2.4 Dagdeel IV: Magnetische velden in materialen

- bespreking van de opgaven
- Interactief hoorcollege
- opgaven maken

2.4.1 Grensvlakken op herhaling

Gegeven is een grensvlak tussen twee media waarin zich geen vrije stromen bevinden.

Laat met behulp van een geschikt gekozen kringintegraal en een geschikt gekozen gesloten oppervlakte-integraal zien dat in dit grensvlak de volgende veldvectorcomponenten continu zijn:

a) de tangentiële component van het magnetiserend veld $\vec{\mathcal{H}}$

b) de normale component van de magnetische veldsterkte $\vec{\mathcal{B}}$.

Ter inspiratie: zie de figuur en lees de aanwijzingen bij opgave 1.6.4.

2.4.2 Het oppeppen van een spoel

Beschouw een spoel met lengte L en radius R ($R << L$). De spoel heeft N windingen per meter en er loopt een stroom I.

a) Blijf weg bij de uiteinden en bepaal het magnetisch veld binnen de spoel. De spoel heeft N windingen per meter en er loopt een stroom I. Laat zien welk Ampere 'loopje' je gebruikt; als je het B veld buiten de integraal haalt dien je duidelijk uit te leggen waarom dat mag.

Nu vullen we de spoel met lineair paramagnetisch materiaal met permeabiliteit μ.

b) Wat is het H veld in de spoel uitgedrukt in de gegeven grootheden?

c) Geef het M veld in de spoel?

d) Wat is het B veld in de spoel uitgedrukt in de gegeven grootheden?

e) Wat is de verhouding tussen het originele B veld van de lege spoel en de gevulde spoel? Leg uit waarom het B veld van de gevulde spoel groter is, terwijl we de stroomsterkte I niet veranderd hebben.

2.4.3 Gevulde spoel

We beginnen weer met een lege spoel en vullen deze voor de helft met paramagnetisch materiaal zoals in opave 2.4.2.

a) Geef het B veld in de spoel, zowel in het lege als in het gevulde gedeelte. Blijf ver weg bij de uiteinden van de spoel en van de overgang van naar materiaal.

b) Schets de veldlijnen rondom het grensvlak in de spoel.

c) Wat kun je zeggen over het B veld net binnen en net buiten het materiaal?

2.5 Dagdeel V: Toepassingen

- bespreking van de opgaven
- Interactief hoorcollege
- opgaven maken en bespreken

2.5.1 Einde oefening

Voor de volgende oefeningen geldt dat je zelf de grootheden die je nodig hebt moet invoeren. Begin altijd met een degelijke schets van de situatie.

a Probeer zelf het Hall effect af te leiden.

b Probeer zelf het magnetisch veld in een dunne spleet van een toroïde die gevuld is met materiaal te berekenen.

3 Opgaven Elektrodynamica

3.1 Dagdeel I

- interactief hoorcollege Wet van Ohm, Wet van Faraday
- werkcollege

3.1.1 Draadjes, plaatjes, blokjes

a) Als je een metaaldraadje vergelijkt met een even dik maar twee keer zo lang draadje, hoe verhouden de weerstanden zich dan?

b) Als je een draadje uitrekt tot twee maal zijn oorspronkelijke lengte (waarbij de draad ook na het uitrekken op elk punt even dik is), hoe verandert de weerstand dan?

c) Beschouw een vierkant plaatje met dikte d en zijden van lengte L, met op twee tegenover elkaar liggende punten een contact. Geef een uitdrukking voor de weerstand van dit plaatje.

d) Beschouw twee even dikke plaatjes, waarvan de zijden van het ene plaatje twee keer zo lang zijn als van het andere en vergelijk de weerstanden.

e) Beschouw twee massieve blokjes waarvan de zijden van het ene blokje twee keer zo lang zijn als van het andere en vergelijk de weerstanden.

3.1.2 Bewegen en meten

Bedenk en beschrijf wat er met de spanning over een lus gebeurt als je een magneet naar de lus toe en van de lus af beweegt. Bedenk ook na wat er gebeurt als je de lus beweegt ten opzichte van magneet. Wat is de invloed van het verwisselen van de polen van de magneet? Bedenk wat het effect is van het met grotere snelheid bewegen van de magneet.

3.1.3 Hele lus in veld

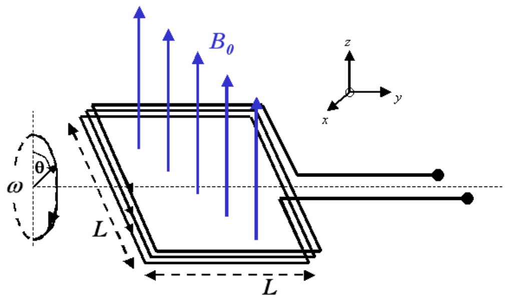
Tijdens het college is afgeleid dat de inductiewet van Faraday overeenkomt met wat je krijgt door een rechthoekige lus die aan één kant in een magneetveld steekt te beschouwen, en de kringintegraal van de lorentzkracht te nemen. Laat op dezelfde manier zien dat er geen elektromotorische kracht is als de lus wel beweegt, maar met alle zijden binnen het magneetveld.

3.1.4 Ronde lus in het veld

Je beweegt een cirkelvormige lus met constante snelheid. In een deel van de ruimte is een constant magneetveld aanwezig, loodrecht op het vlak van de lus. Schets de grafiek van de inductiespanning als functie van de tijd.

3.1.5 Dynamo I

Een vierkante draadspoel met N windingen draait rondom een as (y-as) die loodrecht staat op de richting van het magneetveld (// z-as) (zie figuur). Het magneetveld is constant en heeft de waarde B_0. Neem assenstelsel zoals gegeven in de figuur. De spoel heeft een oppervlakte $S = L^2$. De hoeksnelheid waarmee de spoel ronddraait is ω. Dus de hoek θ die de normaal op het spoeloppervlak maakt met het B-veld varieert als functie van de tijd t als: $\theta = \omega t$. Op $t = 0$ bevindt de spoel zich in het XY vlak d.w.z. B_0 en de normaal op het spoeloppervlak zijn parallel.



a Bereken op $t = 0$ de magnetische flux, Φ_B, door de spoel.

b Bereken op een willekeurig tijdstip t de magnetische flux door de spoel.

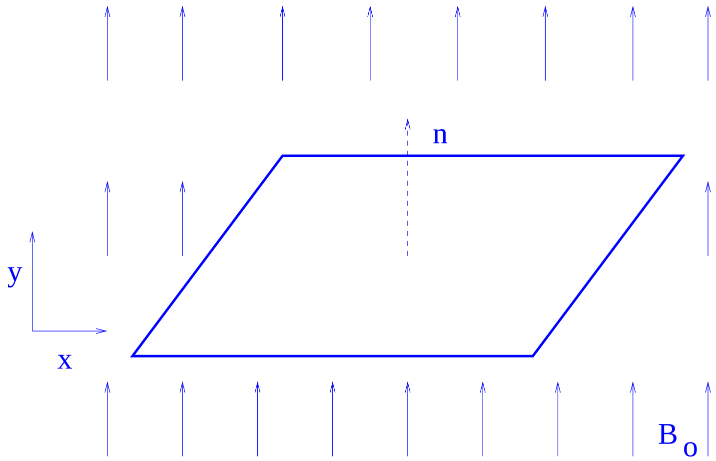
c Gebruik de Wet van Faraday om te laten zien dat de EMK van deze opstelling gegeven wordt door (f: kracht per eenheidslading, E: elektrische veld):

$$EMK = \oint_{spoel} \vec{f} \cdot d\vec{l} = \oint_{spoel} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = BN\omega L^2 \sin \omega t$$

d Laat zien dat dezelfde EMK gevonden wordt door de component van de Lorentz-kracht (die werkt op de ladingsdragers in de spoel) parallel aan de draad(stroom)richting te integreren rond de spoel.

3.1.6 Dynamo II

Een vierkant draadraam met zijde a roteert om de x-as met constante hoeksnelheid ω. Op het tijdstip $t = 0$ wijst de normaalvector in de positieve z-richting. In de door het roterende draadraam bestreken ruimte heerst een magnetisch veld in de positieve z-richting met grootte $\mathcal{B}$. Neem eerst aan dat $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$, waarbij $\mathcal{B}_0$ niet afhangt van plaats of tijd.



a) Leg uit dat de magnetische flux $\Phi(t)$ door het draadraam en de bijbehorende EMK $V(t)$ gegeven worden door

$$\Phi(t) = \mathcal{B}_0 a^2 \cos\omega t \text{en } V(t) = \mathcal{B}_0 a^2 \omega \sin\omega t$$

Neem in het vervolg aan dat in werkelijkheid $\mathcal{B}$ afhangt van y volgens

$$\frac{\mathcal{B}(y)}{\mathcal{B}_0} = 1 - 2\left(\frac{y}{a}\right)^2$$

b) Geef kwalitatief aan welke invloed dit zal hebben op de grafieken van $\Phi(t)$ en $V(t)$ uit onderdeel a).

Het punt P is een willekeurig punt dat meedraait in het vlak van het draadraam; op het tijdstip $t = 0$ is de y-coördinaat van P gelijk aan y_0.

c) Leg uit dat de magnetische veldsterkte in P gegeven wordt door

$$\mathcal{B}_\mathrm{P}(t) = \mathcal{B}_0 \left(1 - \frac{2y_0^2 \cos^2\omega t}{a^2}\right)$$

d) Maak y_0 nu variabel tussen $-\frac{a}{2}$ en $+\frac{a}{2}$, en leid via integratie over y_0 af dat

$$\Phi(t) = \mathcal{B}_0 a^2 \cos\omega t\ (1 - \tfrac{1}{6}\cos^2\omega t) \text{en} V(t) = \mathcal{B}_0 a^2 \omega \sin\omega t\ (1 - \tfrac{1}{2}\cos^2\omega t)$$

e) Ga na of het resultaat van d) overeenkomt met je beantwoording van b).

3.1.7 Stroomkosten

Beschouw een stroomlusje dat (loodrecht) in een magneetveld staat. Iemand beweegt de stroomlus vervolgens uit het magneetveld (zie de transparanten over de Wet van Faraday). Ten koste van wat loopt de stroom? Laat zien dat het magneetveld geen arbeid verricht. Laat zien dat de persoon die aan het stroomlusje trekt wel arbeid verricht.

3.1.8 Webmotoren

(alleen als je tijd over hebt)
Met de zoekterm elektromotor (aangevuld met termen als principe, werking e.d.) is veel informatie te vinden over dit onderwerp. Niet alles op het web is even betrouwbaar. Noem een website en geef commentaar op wat daar beweerd wordt, wat is goed aan de uitleg, wat verkeerd?

3.1.9 Slakkengang

(alleen als je tijd over hebt)
Zoek het transparant op waar wordt berekend dat de elektronen in een stroomdraad driften met 15 cm/uur. Bereken zelf de drift van elektronen in een stroomdraad.

3.2 Dagdeel II Zelfinductie en energie

- herhaling, bespreking van de opgaven
- hoorcollege zelfinductie en energie
- werkcollege

3.2.1 Kringen

Een elektrische kring bestaat uit een ohmse weerstand met weerstand R en een spoel met zelfinductiecoëfficiënt L. Op het tijdstip $t = 0$ loopt in de kring een stroom I_0.

a Stel voor de kring een differentiaalvergelijking op en bereken de stroom $I(t)$.

b) Bereken de totale energie E die in de weerstand wordt gedissipeerd en interpreteer het resultaat.

Een tweede elektrische kring bestaat uit een ohmse weerstand met weerstand R en een plaatcondensator met capaciteit C. Ook in deze kring loopt op het tijdstip $t = 0$ een stroom I_0.

c) Herhaal onderdelen a) en b) voor deze tweede kring.

d) Leg uit of in de situatie van onderdeel c) in de ruimte tussen de condensatorplaten een magnetisch veld ontstaat.

3.2.2 Spoel in kring

We beschouwen een solenoide in vacuüm (een gewone rechte spoel) met lengte l waar een stroom I_0 doorheen loopt. De spoel heeft N windingen per meter en radius R.

a Bepaal de zelfinductie L van deze spoel.

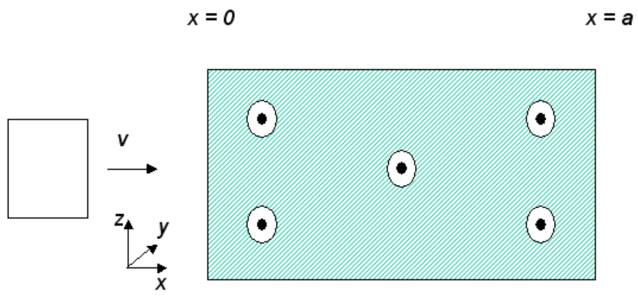
b De stroom $I(t = 0) = I_0$ wordt verzorgd door een stroombron. Deze verwijderen we vliegensvlug en plaatsen hiervoor op $t = 0$ een ongeladen condensator met capaciteit C voor in de plaats. De lading $Q(t)$ op de condensator zal een periodieke functie gaan beschrijven.

c Bereken de stroom in deze (ideale) LC kring als functie van de tijd in termen van L, C en I_0 . Begin met de differentiaalvergelijking voor $Q(t)$. Schrijf de stappen van je berekening duidelijk op.

d Leid m.b.v. een energie-beschouwing af, wat de maximale lading op de condensator is. Hoe volgt dit ook uit je antwoord op c?

3.2.3 De Strop

Een metalen vierkante lus wordt met constante snelheid v door een magneetveld bewogen, zoals aangegeven in de tekening. De lus heeft zijdes met een lengte l, een totale weerstand R en een verwaarloosbare zelfinductie. Het magneetveld heeft de constante grootte B_0 tussen $x = 0$ en $x = a$ en het wijst het blad uit. Elders is het veld nul.



a Op tijd $t = 0$ ligt de lus op $x = -a$ en wordt vervolgens bewogen tot $x = 2a$. Bereken de magnetische flux door de lus als functie van de tijd. Geef tevens aan hoe je uit de flux de elektromotorische kracht (EMK) berekenen kunt.

  Op het moment dat de lus het veld binnendringt, zal er ten gevolge van de EMK een stroom gaan lopen.

b Laat zien dat de maximale grootte van deze stroom gegeven is door:

$$I = \frac{B}{R} l v \tag{6}$$

  en schets het verloop van I als functie van de tijd.

c Hoe groot is de kracht die je moet uitoefenen om de snelheid constant te houden als functie van de tijd? (Tip: Bepaal de Lorentz kracht op het lusje.)

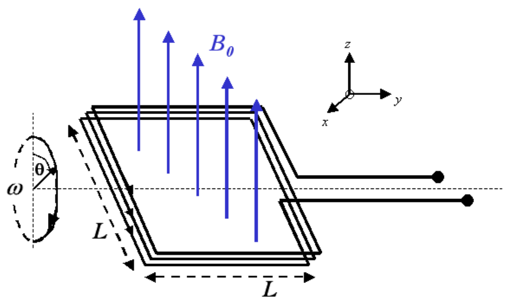
d Laat zien dat de arbeid die jij zou moeten leveren om het lusje door het veld te bewegen gelijk is aan de elektrische energie die in de weerstand is omgezet. (Tip: Het elektrisch vermogen is gegeven door $P = I^2 R$)

  Tot nu toe hebben we de zelfinductie L van de spoel verwaarloosd, nu willen we deze ook meenemen in de berekening.

e Stel een differentiaal vergelijking op met daarin, naast de termen voor de EMK t.g.v. de flux verandering en de spanning over de weerstand, een term voor de bijdrage ten gevolge van de zelfinductie. Schets het verloop van de stroom als functie van de tijd en licht eventuele veranderingen ten opzichte van opgave b toe.

3.2.4 Spoel in spoel

Een vierkant draadraam met N_d windingen draait rondom een as (y-as). Dit draadraam bevindt zich in een homogeen magnetisch veld B_0 , dat in de z-richting wijst. Neem het assenstelsel zoals gegeven in de figuur. Het draadraam heeft een oppervlakte $S = L^2$. De hoeksnelheid waarmee het draadraam ronddraait is ω. Dus de hoek θ die de normaal op het denkbeeldige raamoppervlak maakt met het magnetisch veld varieert als functie van de tijd t als: $\theta = \omega t$. Op $t = 0$ bevindt het draadraam zich in het XY vlak d.w.z. B_0 en de normaal op het oppervlak zijn parallel.



a Bereken op een willekeurig tijdstip t de magnetische flux door de spoel.

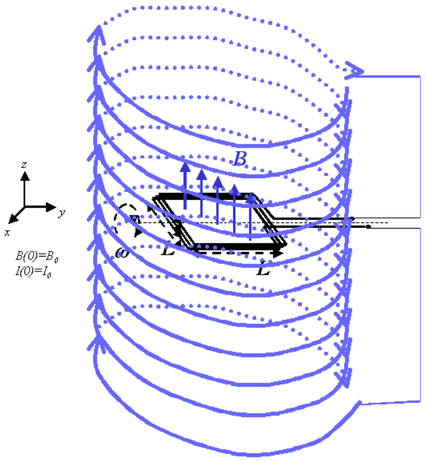
b Gebruik de Wet van Faraday om te laten zien dat de EMK van deze opstelling gegeven wordt door

$$EMK = B_0 N \omega L^2 sin(\omega t) \tag{7}$$

Een student heeft een ingeving. De student plaatst het draadraam in het midden van een rechte spoel met lengte 1m met N_s windingen (as langs z-as), waar de randeffecten verwaarloosd kunnen worden. Zie figuur van deze configuratie. Hij/zij verbindt de uiteinden van het draadraam in serie met de rechte spoel. De draaisnelheid van het draadraam wordt constant gehouden. Op $t = 0$ ligt het draadraam in het XY vlak, loopt er een stroom I_0. De verbinding is zo gekozen dat de inductie stroom op $t = 0$ hetzelfde teken krijgt als I_0 . De zelfinductie coëfficiënten van de spoelen mag je als gegeven beshouwen; gebruik L_d en L_s voor de zelfinductie van draadraam en spoel respectievelijk.

c Geef de formule voor de magnetische flux op een willekeurig tijdstip t door het draadraam als functie van de (nog onbekende) stroom $I(t)$. Houdt rekening met de flux t.g.v. het veld van de rechte spoel en de flux t.g.v. zelfinductie.

Omgekeerd, is de flux door de rechte spoel t.g.v. het draaiende draadraam veel lastiger te berekenen. Hiervoor bestaat echter een slimme truc! Voor



twee willekeurige spoelen geldt: $\Phi_{1tgv2} = MI_2$ en $\Phi_{2tgv1} = MI_1$. Φ_{1tgv2} is de bijdrage aan de magnetische flux door spoel 1 t.g.v. de stroom I_2 door spoel 2 (en omgekeerd). De tijdsafhankelijk cofficint M wordt de mutuele inductie genoemd. Uit opgave c volgt dat $M(t) =$ Constante $cos(\omega t)$.

d De som van alle EMKs dient gelijk aan nul te zijn. Laat zien dat deze som een differentiaal vergelijking oplevert van de vorm:

$$k_1 \frac{dI(t)}{dt} + k_2 \frac{d}{dt}(M(t)I(t)) = 0 \tag{8}$$

Geef uiteraard ook de constantes $k1$ en $k2$.

e Laat zien dat de functie $I(t) = a/(b + cos(\omega t))$ een oplossing is. Geef a en b. Houdt dit systeem zichzelf in stand?

3.2.5 Transformator

Een transformator (voor het omzetten van een gegeven wisselspanning in een hogere of lagere wisselspanning) bestaat meestal uit een juk van weekijzer, waaromheen een primaire en een secundaire spoel zijn gewikkeld. Het weekijzer geeft de magnetische flux, opgewekt door de primaire spoel, door naar de secundaire spoel.

We nemen nu een transformator met 'perfecte koppeling', zodat alle veldlijnen in het weekijzer zijn geconcentreerd. De primaire spoel heeft N_1 windingen, de secundaire spoel N_2 windingen. De stromen in de primaire en secundaire stroomkringen zijn I_1 en I_2. De omtrek (langs de hartlijn) van het juk is l, de dwarsdoorsnede is S. Het weekijzer heeft een constante permeabiliteit μ.

a Teken de situatie. Geef uitdrukkingen voor de grootte $\mathcal{B}$ van het totale magnetisch veld in het juk, en voor de magnetische flux Φ door één enkele winding.

b Geef uitdrukkingen voor de totale fluxen Φ_1 en Φ_2 omvat door de spoelen 1 en 2.

c Laat zien dat de geïnduceerde spanningen V_2 en V_1 over de spoelen zich verhouden als

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

d Geef uitdrukkingen voor de coëfficiënten van zelfinductie L_1 en L_2 van de spoelen, en ook voor de coëfficiënt van mutuele inductie M. De mutuele inductie is gedefinieerd als $\Phi_1 = MI_2$ en/of $\Phi_2 = MI_1$.

Laat vervolgens zien dat voldaan is aan

$$L_1 L_2 = M^2 \qquad \text{en} \qquad \frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

Op de ingang van de transformator is een wisselspanning $V_{in}(t) = V_m \cos \omega t$ aangesloten. Over de uitgang staat als belasting een weerstand R. Het spanningsverval over R bedraagt $V_{uit} = -RI_2(t)$.

e Ga na dat de stromen I_1 en I_2 voldoen aan de differentiaalvergelijkingen

$$L_1 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = V_m \cos \omega t \tag{9}$$

$$M \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = -RI_2(t) \tag{10}$$

f Los de stromen $I_1(t)$ en $I_2(t)$ uit bovenstaande vergelijkingen op. *aanwijzing*: elimineer eerst I_1 en los I_2 op; bepaal vervolgens I_1 door integratie van 9 en stel daarbij de gelijkstroomcomponent gelijk aan nul.

g Laat zien dat

$$\frac{V_{uit}}{V_{in}} = \frac{N_2}{N_1}$$

h Bereken met de in f) gevonden uitdrukkingen voor $I_1(t)$ en $I_2(t)$ het ingaande vermogen $P_{in} = V_{in} I_1$ en het uitgaande vermogen $P_{uit} = -V_{uit} I_2$. Laat zien dat, gemiddeld over een periode, P_{in} en P_{uit} aan elkaar gelijk zijn.

Gegeven is nu een speciaal geval van 'omlaag transformeren' waarin $N_1 = 2N_2$ en $R = \frac{1}{4}\omega L_2$.

i Teken voor dit geval een complex vectordiagram van de relaties 9 en 10 (kies RI_2 langs de positieve reële as). Geef hierin ook de richtingen van I_1 en $\mathcal{B}$ aan.

j Keer nu terug naar het algemene geval en laat zien dat bij benadering steeds geldt dat de stromen zich verhouden als

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{N_1}{N_2} \tag{11}$$

mits voldaan is aan $R \ll \omega L_2$.

3.2.6 Zelfinductie twee stroken

(alleen als je tijd over hebt)
Ga naar http://emclab.umr.edu/new-induct en ga na wat de zelfinductie is voor twee parallelle stroken, waarbij in de ene strook de stroom de ene kant op gaat, en in de andere de tegengestelde kant. Onder welke voorwaarden is de gegeven uitdrukking afgeleid?

3.3 Dagdeel III De Maxwellvergelijkingen, elektromagnetische golven

- bespreking van de opgaven
- hoorcollege
- werkcollege

3.3.1 Vlakke EM Golf

Beschouw een vlakke elektromagnetische golf die zich voortplant in de z-richting. Stel dat $\vec{E}$ en $\vec{B}$ ook componenten hebben in de z richting. Gebruik de Wet van Gauss (voor elektrische en magnetische veld) en laat zien dat deze componenten nul moeten zijn. Beredeneer ook dat $\vec{E}$ en $\vec{B}$ wel loodrechte componenten (op de z-richting) kunnen hebben.

3.3.2 Een gedachtenexperiment

Beschouw een condensator die wordt opgeladen. Er loopt een stroom in de draden naar beide platen. Tussen de platen loopt geen stroom. Rond de draad is er een magneetveld. Dat vind je door een cirkel rond de draad te beschouwen en

$\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I$

daar op toe te passen. Je neemt dus de kringintegraal rond de cirkel, en de stroom is de stroom die door die cirkel heen prikt.

Als je dit doet voor een cirkel die niet rond een draadstuk ligt, maar ter hoogte van de condensator, zou je vinden dat het magneetveld gelijk is aan nul. Dit is niet wat je zou verwachten, het magneetveld verandert niet plotseling ter hoogte van de condensator. Een meting zou uitwijzen dat het veld niet verandert: op afstand r in radiële richting is het veld gelijk aan $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, ook ter hoogte van de condensator.

Als je een cirkel ter hoogte van de draad neemt, maar het bijbehorende oppervlak zo oprekt dat het "vlies" tussen de platen doorloopt, is het probleem nog groter: op die manier zou je een magnetisch veld gelijk aan nul krijgen, terwijl een niet-opgerekt vlies wel een veld oplevert.

Opdracht: zoek uit welke van de volgende "pogingen tot aanpassing van de wet van Ampere voor niet-stationaire situaties" als resultaat geeft dat het magneetveld continu is in de verticale richting:

A $\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl}$

B $\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl}$

C $\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{opp} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{do}$

D $\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{opp} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{do}$

3.3.3 Golven

extra leesstof over licht en polarisatie is te vinden bij de slides van het college (achteraan).

Een lineair gepolariseerde vlakke elektromagnetische golf is gegeven door

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(z,t) &= \vec{\mathcal{E}}_0 \cos(kz - \omega t)\\ \vec{\mathcal{B}}(z,t) &= \vec{\mathcal{B}}_0 \cos(kz - \omega t)\end{aligned}$$

a) Gebruik de golfvergelijking om te laten zien dat er geen dispersie (zie college 'Trillingen & Golven') optreedt.

b) Gebruik de differentiële vorm van de wetten van Maxwell om te laten zien dat

   1) de golf transversaal is;

   2) $\vec{\mathcal{E}}$ en $\vec{\mathcal{B}}$ loodrecht op elkaar staan.

Beschouw in de vrije ruimte een elektromagnetische golf met als elektrische component

$$\vec{\mathcal{E}}(x,t) = (\mathcal{E}_x,\, \mathcal{E}_y,\, \mathcal{E}_z) = (0,\, \mathcal{E}_0 \cos(kx + \omega t),\, 0)$$

c) Wat is hier de polarisatierichting? Wat is de bewegingsrichting?

d) Druk de voortplantingssnelheid c, de golflengte λ en de trillingstijd T uit in k en ω.

e) Bepaal met behulp van de differentiële vorm van de wetten van Maxwell de magnetische component $\vec{\mathcal{B}}$.

f) Verifieer dat $\mathcal{E} = c\mathcal{B}$ en dat het uitproduct $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{B}}$ in de bewegingsrichting wijst.

g) Geef een uitdrukking voor een elektromagnetische golf die langs de z-as is gepolariseerd en zich langs de y-as in positieve richting voortplant.

h) Idem voor een circulair gepolariseerde golf die in de positieve x-richting beweegt en met hoeksnelheid ω rechtsom draait.