Raar magnetisch veld

a) Laten we eerst het magnetisch veld goed beschrijven. Uit het college weten we dat de ϕ-richting kan worden beschreven in carthetische coördinaten door:

$$\hat{\phi} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Let op dat in *cilindercoördinaten* geldt dat $r \equiv \sqrt{x^2+y^2}$. De grootte van het magnetisch veld is gegeven in de opgave, dus de totale uitdrukking voor het magnetisch veld ziet er als volgt uit:

$$\vec{B}(r) = \mu_0 \begin{pmatrix} -y\sqrt{x^2+y^2} \\ x\sqrt{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Met behulp van de differtiële vorm van de wet van Ampère ($\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$) berekenen we de stroomdichtheid:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \mu_0 \begin{pmatrix} -y\sqrt{x^2+y^2} \\ x\sqrt{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x(x\sqrt{x^2+y^2}) + \partial_y(y\sqrt{x^2+y^2}) \end{pmatrix} \\
&= \mu_0 \hat{x} \left(\sqrt{x^2+y^2} + x\frac{1}{2}2x\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2} + y\frac{1}{2}2y\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \\
&= \mu_0 \hat{x} \left(2\sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = \mu_0 3r \\
&\rightarrow \quad \vec{J} = 3r\hat{z}
\end{aligned}$$

Het was ook wel te verwachten dat voor een magnetisch veld in de ϕ-richting, de stroomdichtheid in de richting van z staat.

b) Nu gaan we met behulp van de integraalvorm van de wet van Ampère uit deze stroomdichtheid weer het magneetveld afleiden. De integraalvorm van de wet van Ampère luidt $\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot \vec{dO}$. Voor een stroomdichtheid in de z-richting beredeneren we dat het magneetveld in de ϕ-richting staat. Hierdoor wordt de uitdrukking voor het linker deel van de wet van Ampère betrekkelijk eenvoudig: $B_\phi \oint dl = 2\pi r B_\phi$. Voor de omsloten stroomdichtheid moet je de integraal aan de rechterzijde nog uitrekenen:

$$\mu_0 \int \vec{J} \cdot \vec{dO} = \mu_0 \int_O J dO$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu_0 \int_0^r \int_0^{2\pi} 3r' \quad r' dr' d\phi \\
&= 2\pi \mu_0 r^3
\end{aligned}
$$

Hieruit volgt dat

$$\vec{B} = \mu_0 r^2 \hat{\phi}$$