Heen en terug

a) We mogen stellen dat $\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = 0$, maar omdat het magnetisch veld wel van ϕ afhangt, mag je niet zomaar zeggen dat dit betekend dat $\vec{B}$ overal nul is.

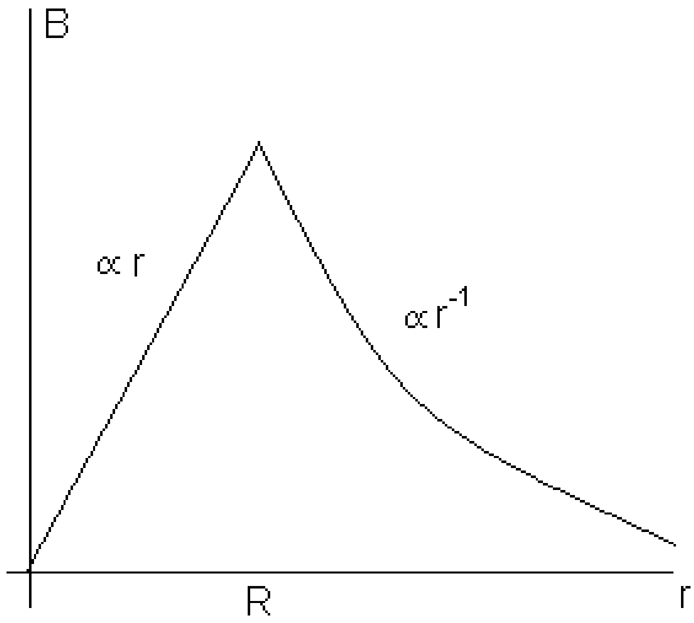
b) Om het magnetisch veld rond de stroomdraad te berekenen gebruiken we de wet van Ampère: $\oint_{omtrek} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \int_{oppervlak} \vec{J} \cdot \vec{dO}$. Als we de cylindersymmetrie in acht nemen beredeneren we dat het magnetisch veld alleen een ϕ component heeft. Daardoor vereenvoudigd de berekening:

$$\begin{aligned} \oint_{omtrek} \vec{B} \cdot \vec{dl} &= B_\phi 2\pi r \\ \int_{oppervlak} \vec{J} \cdot d\vec{O} &= J_0 \int_0^r \int_0^{2\pi} r' dr' d\phi \\ &= J_0 \pi r^2 \end{aligned}$$

De stroomdichtheid hangt van de totale stroom af: $J_0 = \frac{I}{\pi R^2}$. Uiteindelijk kunnen we dan voor de dikke stroomdraad zeggen dat voor het magnetisch veld geldt:

$$\begin{aligned} \vec{B}_{r<R} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2} \hat{\phi} \\ \vec{B}_{r>R} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r} \hat{\phi} \end{aligned}$$

Een schetsje van deze functie:

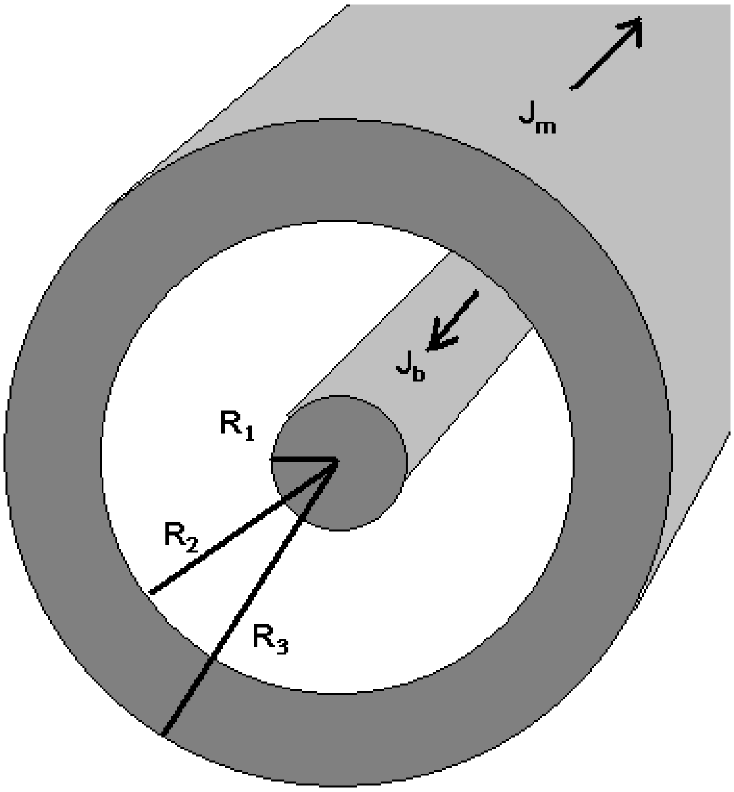


c) De relaties tussen stroomdichtheid J en stroom I van de binnendraad en mantel is:

$$\begin{aligned} I_b &= J_b 4\pi R_1^2 \\ I_m &= J_m 4\pi (R_3^2 - R_2^2) \end{aligned}$$

De eis is dat de stroomdichtheden aan elkaar gelijk zijn. De stromen moeten ook aan elkaar gelijk zijn, anders krijg je aan het eind van de kabel ophoping. Hieruit geld dat $R_3^2 = R_1^2 + R_2^2$.

d) De situatie is als volgt: Het magnetische veld voor $r < R_1$ is berekend in onderdeel



b), net zoals het veld in het gebied $R_1 < r < R_2$. Voor het veld binnen de mantel moeten we nog meer rekenen:

$$\begin{aligned} 2\pi r B_\phi &= \mu_0 \left(I_b - 2\pi J_m \int_{R_2}^{r} r' dr' \right) \\ &= \mu_0 \left(I_b - \frac{2\pi I_m}{4\pi(R_3^2 - R_2^2)} \frac{1}{2} (r^2 - R_2^2) \right) \\ B_\phi &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) \end{aligned}$$

Voor de laatste stap hebben we gebruikt dat $I_m = I_b = I$. Het veld voor $r > R_3 = 0$ omdat de omsloten stroom gelijk is aan nul. Een samenvatting van de magnetische velden:

$$
\begin{aligned}
\vec{B}_{r<R_1} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{R_1^2}\hat{\phi} \\
\vec{B}_{R_1 r<R_2} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r}\hat{\phi} \\
\vec{B}_{R_2 r<R_3} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1-\frac{r^2-R_2^2}{R_3^2-R_2^2}\right)\hat{\phi} \\
\vec{B}_{r>R_3} &= 0
\end{aligned}
$$