Antwoorden Electrostatica, dagdeel VI:

Komt er hetzelfde uit?

a) Er geldt

$$\mathrm{d}U \;=\; V\,\mathrm{d}q \;=\; \frac{q}{C}\,\mathrm{d}q$$

Om de energie te bepalen die nodig is om een ongeladen condensator op te laden tot $q = Q$, moet deze formule geintegreerd worden:

$$U \;=\; \int_0^Q \frac{q}{C}\,\mathrm{d}q \;=\; \frac{Q^2}{2\,C}$$

b) De capaciteit van een plaat-condensator met oppervlakte A en dikte d is

$$C_{\text{plaat}} = \frac{\epsilon_0\,A}{d}$$

De energie die nodig is om deze ongeladen condensator op te laden tot $q = Q$ is dus

$$U \;=\; \frac{Q^2\,d}{2\,\epsilon_0\,A}$$

c) Het E-veld binnen een plaat-condensator met oppervlakte A is

$$\vec{\mathbf{E}} \;=\; \frac{Q}{\epsilon_0\,A}\,\vec{\mathbf{n}} \qquad \text{(met } \vec{\mathbf{n}} \text{ loodrecht op de platen gericht)}$$

Dit gebruiken in de volgende formule levert

$$\begin{aligned} U \;&=\; \int\limits_{\text{volume tussen platen}} u\,\mathrm{d}V \;=\; \int\limits_{\text{volume tussen platen}} \frac{1}{2}\,\epsilon_0\,E^2\,\mathrm{d}V \\ &=\; \frac{Q^2}{2\,\epsilon_0\,A^2} \int\limits_{\text{volume tussen platen}} \mathrm{d}V \;=\; \frac{Q^2\,d}{2\,\epsilon_0\,A} \end{aligned}$$

Dit klopt dus met het antwoord van vraag b.

d) De potentiaal op een bol met lading Q en straal R is

$$V \;=\; \frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,R}$$

De energie van deze (opgeladen) bol is dus m.b.v. vraag a

$$U \;=\; \frac{Q^2}{2\,C} \;=\; \frac{1}{2}\,Q\,V \;=\; \frac{Q^2}{8\,\pi\,\epsilon_0\,R}$$

Merk op dat de dimensie van dit antwoord hetzelfde is als die van vraag b en c.

e) Voor het E-veld binnen/buiten een geleidende bol met lading Q en straal R geldt

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{E}} &= 0 && \text{voor } r < R \\
&= \frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,r^2}\,\hat{\mathbf{r}} && \text{voor } r > R
\end{aligned}$$

Dit gebruiken in de volgende formule levert

$$\begin{aligned}
U &= \int_{\text{totale volume}} u\,\mathrm{d}V \\
&= \int_{\text{volume binnen bol}} \frac{1}{2}\,\epsilon_{\text{bol}}\,E^2\,\mathrm{d}V + \int_{\text{volume buiten bol}} \frac{1}{2}\,\epsilon_0\,E^2\,\mathrm{d}V \\
&= 0 + \frac{\epsilon_0}{2}\int_{r=R}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{Q^2}{16\,\pi^2\,\epsilon_0^2\,r^4}\,r^2\,\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{Q^2}{8\,\pi\,\epsilon_0}\left(-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{R}\right) \\
&= \frac{Q^2}{8\,\pi\,\epsilon_0\,R}
\end{aligned}$$

Dit klopt dus met het antwoord van vraag d.