Antwoorden Electrostatica, dagdeel VI:

Interne consistentie?

a) Voor de lading in de homogeen geladen bol met lading Q en straal R geldt

$$q(r) = \frac{4}{3}\pi\,\rho\,r^3$$

Voor de potentiaal binnen de bol geldt

$$V(r) = \frac{q(r)}{4\,\pi\,\epsilon_0\,r} = \frac{\rho\,r^2}{3\,\epsilon_0}$$

b) Voor de energietoename $\mathrm{d}U$ bij uitbreiding van de bol met schil $\mathrm{d}r$ geldt

$$\mathrm{d}U = V\,\mathrm{d}q = V\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r = \frac{\rho\,r^2}{3\,\epsilon_0}\,4\pi\rho r^2\,\mathrm{d}r$$

c) Integratie van het antwoord van vraag *b* levert de totale energie van de bol:

$$U = \int_{r=0}^{R} \frac{\rho\,r^2}{3\,\epsilon_0}\,4\pi\rho r^2\,\mathrm{d}r = \frac{4\,\pi\,\rho^2\,R^5}{15\,\epsilon_0} = \frac{3\,Q^2}{20\,\pi\,\epsilon_0\,R}$$

d) Voor het E-veld binnen/buiten de bol geldt

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}} &= \frac{Q\,r}{4\,\pi\,\epsilon_0\,R^3}\,\hat{\mathbf{r}} \quad \text{voor } r < R \quad \text{(Zie dagdeel II, “\textit{Bollen in sooretn en maten}”)}\\ &= \frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \quad \text{voor } r > R \quad \text{(Zie dagdeel VI, “\textit{Komt er hetzelfde uit?}”)}\end{aligned}$$

De totale energie van de bol kan nu ook als volgt uitgerekend worden (Zie dagdeel VI, “*Komt er hetzelfde uit?*”):

$$\begin{aligned}U &= \int_{\text{totale volume}} u\,\mathrm{d}V\\ &= \int_{\text{volume binnen bol}} \frac{1}{2}\,\epsilon_{\text{bol}}\,E^2\,\mathrm{d}V + \int_{\text{volume buiten bol}} \frac{1}{2}\,\epsilon_0\,E^2\,\mathrm{d}V\\ &= \frac{\epsilon_0}{2}\int_{r=R}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{Q^2\,r^2}{16\,\pi^2\,\epsilon_0^2\,R^6}\,r^2\,\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi + \frac{Q^2}{8\,\pi\,\epsilon_0\,R}\\ &= \frac{Q^2}{40\,\pi\,\epsilon_0\,R} + \frac{Q^2}{8\,\pi\,\epsilon_0\,R}\\ &= \frac{3\,Q^2}{20\,\pi\,\epsilon_0\,R}\end{aligned}$$

Dit antwoord klopt met het antwoord van vraag *c*.