Antwoorden Electrostatica, dagdeel VI:

Gevulde condensatoren, gesneden koek?

a) De gevulde vlakke plaat condensator:

De vrije lading bevindt zich op de condensator platen. De gebonden lading zit in de isolator tussen de platen tegen de platen aan en is tegengesteld van teken (dus positief gebonden lading bij de negatief geladen plaat en vice versa).
We introduceren nu eerst het D-(hulp)veld als functie van het E-veld en de polarisatie:

$$\vec{\mathbf{D}} \equiv \epsilon_0 \, \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} = \epsilon_0 \, \vec{\mathbf{E}} + \epsilon_0 \, \chi_e \, \vec{\mathbf{E}} = \epsilon \, \vec{\mathbf{E}} \quad \text{want} \;\; \epsilon \equiv \epsilon_0(1 + \chi_e)$$

waarbij we dus aannemen dat we te maken hebben met een lineair dielectricum. De wet van Gauss kan nu geschreven worden als

$$\oiint \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{\text{omsloten}}}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \oiint \vec{\mathbf{D}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = Q_{\text{vrij, omsloten}} \quad \text{want} \;\; \sigma_{\text{gebonden}} = \vec{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

We gaan nu het D-veld van de positieve plaat, $\vec{\mathbf{D}}_+$, berekenen: We nemen een vierkant-vormig Gauss-doosje met oppervlakte A dat een deel van de positieve plaat omvat, en berekenen de flux door dit doosje. We weten dat het D-veld loodrecht op de plaat gericht staat, dus alleen de boven- en onderkant van het doosje leveren een bijdrage aan de flux. Verder geldt er

$$Q_{\text{vrij}} = \sigma_{\text{vrij}} \, A \quad \text{en} \quad Q_{\text{gebonden}} = \sigma_{\text{gebonden}} \, A$$

De aangepaste wet van Gauss levert ons dus

$$\oiint \vec{\mathbf{D}}_+ \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = 2\, A \, D_+ = \sigma_{\text{vrij, omsloten}} \, A$$

oftwel, voor het D-veld boven en onder de positieve plaat geldt

$$\vec{\mathbf{D}}_+ = \frac{\sigma_{\text{vrij}}}{2} \, \hat{\mathbf{n}} \qquad \text{met } \hat{\mathbf{n}} \text{ loodrecht van de positieve plaat gericht.}$$

Het E-veld ten gevolge van de positieve plaat is dus m.b.v. de bovenste formule

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}_+ &= \frac{\vec{\mathbf{D}}_+}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{\text{vrij}}}{2\,\epsilon_0} \, \hat{\mathbf{n}} \quad && \text{buiten de condensator} \\ &= \frac{\vec{\mathbf{D}}_+}{\epsilon} = \frac{\sigma_{\text{vrij}}}{2\,\epsilon} \, \hat{\mathbf{n}} \quad && \text{binnen de condensator} \end{aligned}$$

De berekening voor de negatieve plaat is precies hetzelfde, aleen wijzen $\vec{\mathbf{E}}$ en $\vec{\mathbf{D}}$ nu naar de plaat toe.
⇒ Het totale E-veld binnen/buiten de platen is dus

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}} &= 0 && \text{buiten de platen } (\vec{\mathbf{E}}_+ \text{ en } \vec{\mathbf{E}}_- \text{ heffen elkaar op}) \\ &= \frac{\sigma_{\text{vrij}}}{\epsilon}\,\hat{\mathbf{n}} && \text{binnen de platen}\end{aligned}$$

b) De gevulde cilinder condensator:

We gaan nu het D-veld (zie vraag a) tussen de twee geladen cilinder-kokers berekenen: We nemen een cilinder-vormig Gauss-doosje met straal r en lengte l dat een deel van de binnenste positief geladen koker met straal R_1 omvat, en berekenen de flux door dit doosje. Blijven we bij de uiteinden van de cilinder weg, dan weten we dat het D-veld radieel gericht is, dus alleen de zijkant van het doosje levert een bijdrage aan de flux. De aangepaste wet van Gauss levert ons dus

$$\oiint \vec{\mathbf{D}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = 2\,\pi\,r\,l\,D = \sigma_{\text{vrij, omsloten}}\,2\pi R_1 l$$

oftwel, voor het D-veld tussen de kokers geldt

$$\vec{\mathbf{D}} = \frac{R_1}{r}\,\sigma_{\text{vrij, omsloten}}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Het E-veld binnen en buiten de cilinder condensator is dus

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}} &= \frac{\vec{\mathbf{D}}}{\epsilon_0} = 0 && \text{binnen de binnenste koker (geen omsloten lading)} \\ &= \frac{\vec{\mathbf{D}}}{\epsilon} = \frac{R_1\,\sigma_{\text{vrij}}}{\epsilon\,r}\,\hat{\mathbf{r}} && \text{binnen de condensator} \\ &= \frac{\vec{\mathbf{D}}}{\epsilon_0} = 0 && \text{buiten de condensator (omsloten lading is netto nul)}\end{aligned}$$