Antwoorden Electrostatica, dagdeel V:

Schud het uit je mouw!

De wet van Gauss:

$$\oiint \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{\text{omsloten}}}{\epsilon_0}$$

a) We nemen een vierkant Gauss-doosje. Uit de symmetrie van de configuratie is af te leiden dat het E-veld loodrecht op de plaat staat, en dus alleen door de boven- en onderkant van het doosje prikt:

$$\begin{aligned}
\oiint \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} &= \iint_{\text{boven}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} + \iint_{\text{onder}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \\
&= 2\,E\,A \quad \text{(want het E-veld is contant op deze vlakken)} \\
Q_{\text{omsloten}} &= \sigma A \\
\Rightarrow \vec{\mathbf{E}} &= \frac{\sigma}{2\,\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{n}}
\end{aligned}$$

waarbij de eenheidsvector $\hat{\mathbf{n}}$ loodrecht op de plaat staat.

b) Gevraagd is het E-veld te berekenen van een cilinder met straal R en lengte L op een afstand d, waarvoor geldt $d >> R$ en $d << L$. We nemen een cilindervormig Gauss-doosje met straal d en lengte l, en we gebruiken cilinder coordinaten. Uit de symmetrie van de configuratie is af te leiden dat het E-veld in d radieel is gericht, en dus alleen door de zijkant van het cilinder doosje prikt:

$$\begin{aligned}
\oiint \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} &= \iint_{\text{zijkant}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \int_{z=0}^{l} \int_{\phi=0}^{2\pi} \vec{\mathbf{E}} \cdot (d\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\hat{\mathbf{r}}) \\
&= E\,2\,\pi\,l\,d \quad \text{(want het E-veld is contant over de zijkant v.h. doosje).} \\
Q_{\text{omsloten}} &= \sigma\,2\,\pi\,R\,l. \\
\Rightarrow \vec{\mathbf{E}} &= \frac{\sigma\,R}{\epsilon_0\,d}\,\hat{\mathbf{r}}
\end{aligned}$$

c) We nemen een bolvormig Gauss-doosje met straal r, en we gebruiken sferische coordinaten. Uit de symmetrie van de configuratie is af te leiden dat het E-veld in d radieel is gericht:

$$\begin{aligned}
\oiint \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \vec{\mathbf{E}} \cdot (r^2\,\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\mathbf{r}}) \\
&= E\,4\,\pi\,r^2 \quad \text{(want het E-veld is contant over het boloppervlak v.h. doosje).} \\
Q_{\text{omsloten}} &= Q. \\
\Rightarrow \vec{\mathbf{E}} &= \frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,r^2}\,\hat{\mathbf{r}}
\end{aligned}$$