Antwoorden Electrostatica, dagdeel V:

Oprollen

Voor de capaciteit van een plaat-condensator met lengte L en dikte d geldt:

$$C_{\text{plaat}} = \frac{\epsilon_0 L^2}{d} \quad \text{(De capaciteit hangt dus alleen maar af van geometrische grootheden)}$$

De capaciteit van de cilinder condensator kan worden berekend door eerst het potentiaal verschil in de cilinder condensator te berekenen. Om het potentiaal verschil te berekenen hebben we het E-veld nodig. Voor het E-veld binnen een cilinder condensator volgt m.b.v. de wet van Gauss:

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Het potentiaal verschil in de cilinder condensator is nu:

$$\begin{aligned}
\Delta V &= \int \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{l}} = \int_{R_{\text{binnen}}}^{R_{\text{buiten}}} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}} \qquad \text{(We kiezen een pad in de } r \text{ richting)} \\
&= \int_{R_{\text{buiten}}-d}^{R_{\text{buiten}}} \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}\,\hat{\mathbf{r}}\right) \cdot (\hat{\mathbf{r}}\mathrm{d}r) = \int_{R_{\text{buiten}}-d}^{R_{\text{buiten}}} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{R_{\text{buiten}}}{R_{\text{buiten}}-d}\right) \\
&= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{L}{L-2\pi d}\right) \qquad \text{(Want } L = 2\pi R_{\text{buiten}}\text{)}
\end{aligned}$$

De capaciteit van de cilinder condensator wordt nu gegeven door:

$$C_{\text{cilinder}} = \frac{Q}{\Delta V} = 2\pi\epsilon_0 L \frac{1}{\ln\left(\frac{L}{L-2\pi d}\right)} = 2\pi\epsilon_0 L \frac{1}{-\ln\left(1-\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

We vinden dus dat de capaciteit van de opgerolde plaat condensator iets kleiner is geworden t.o.v. de plaat condensator (vul maar een aantal L en d waarden in). Dit klopt, we hebben tenslotte ook een strook van een plaat afgeknipt toen we de cilinder maakten. Merk op dat als L heel groot is en d heel klein de capaciteiten ongeveer even groot zijn:

$$C_{\text{cilinder}} = 2\pi\epsilon_0 L \frac{1}{-\ln\left(1-\frac{2\pi d}{L}\right)} \approx 2\pi\epsilon_0 L \frac{1}{\frac{2\pi d}{L}} = \frac{\epsilon_0 L^2}{d}$$

want $\ln(1-x) \approx -x$ voor kleine x (m.b.v. Taylor expansie).