Rare verdeling

a)De gradiënt van een functie wijst in de richting waarin de functie het hardst toeneemt. De gegeven potentiaal hangt alleen van r af, de gradieënt van de potentiaal zal dan in de $\vec{r}$-richting staan.

b) Voor een potentiaal geldt dat $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r)$:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= -\vec{\partial}_r r^{\frac{7}{2}} \\
&= -\frac{7}{2} r^{\frac{5}{2}} \vec{\partial}_r r \\
&= -\frac{7}{2} r^{\frac{5}{2}} \hat{r}
\end{aligned}$$

c) De wet van Gauss in differentiële vorm ziet er als volgt uit:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Als we hierin het electrische veld van opgave *b)* voor invullen krijgt men:

$$\begin{aligned}
\rho(\vec{r}) &= \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \\
&= \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot -\frac{7}{2} r^{\frac{5}{2}} \hat{r} \\
&= -\frac{7}{2} \epsilon_0 \vec{\partial}_r \cdot (r^{\frac{5}{2}} \hat{r}) \\
&= -\frac{7}{2} \epsilon_0 [(\vec{\partial}_r r^{\frac{5}{2}}) \cdot \hat{r} + r^{\frac{5}{2}} (\vec{\partial}_r \cdot \hat{r})] \\
&= -\frac{7}{2} \epsilon_0 [(\frac{5}{2} r^{\frac{3}{2}} \vec{\partial}_r r) \cdot \hat{r} + r^{\frac{5}{2}} \frac{2}{r}] \\
&= -\frac{7}{2} \epsilon_0 [\frac{5}{2} r^{\frac{3}{2}} \hat{r} \cdot \hat{r} + 2 r^{\frac{3}{2}}] \\
&= -\frac{7}{2} \epsilon_0 [\frac{5}{2} + 2] r^{\frac{3}{2}} = -\frac{63\epsilon_0}{4} r^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

d) Laten we met behulp van de wet van Gauss het electrisch veld uitrekenen:

$$\begin{aligned}
\int_{bolopppervlak} \vec{E} \cdot d\vec{O} &= \frac{Q_{omvat}}{\epsilon_0} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{volume} \rho(\vec{r}) dV \\
&= \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi \int_0^r -\frac{63}{4} \epsilon r'^{\frac{3}{2}} r'^2 dr' \\
&= -63\pi \left[\frac{2}{9} r^{\frac{9}{2}}\right] = -\frac{126}{9} \pi r^{\frac{9}{2}}
\end{aligned}$$

De electrische flux gegenereerd door de omvatte lading heeft alleen een radiële component, loodrecht op de normaal van het oppervlakte elementje $d\vec{O}$ zodat je voor $\oint \vec{E} \cdot d\vec{O}$ mag schrijven:

$$E_r(\vec{r}) \int_{bolopperv lak} dO = E_r(\vec{r}) 4\pi r^2$$

Waardoor je mag zeggen dat

$$E_r(\vec{r}) = -\frac{126\pi}{9\pi 4} \frac{r^{\frac{9}{2}}}{r^2} = -\frac{7}{2} r^{\frac{5}{2}}$$

Hetgeen overeenkomt met het electrisch veld gevonden bij onderdeel *b)* van deze opgave.